brought to you by CORE

XXXII Convegno Nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche Palermo, 14-17 settembre 2010

# INSERIMENTO DI RESTRINGIMENTI E PONTI IN UN MODELLO DIFFUSIVO 2D DI ACQUE BASSE

C. Aricò<sup>1</sup>, C. Nasello<sup>2</sup>, M. Sinagra<sup>2</sup> & T. Tucciarelli<sup>2</sup>

- (1) Istituto di Ricerca per la Protezione Idrogeologica, CNR, Via Madonna Alta 126, 06128 Perugia, Italia, e-mail: costanza.arico@irpi.cnr.it
- (2) Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Applicazioni Ambientali, Università di Palermo, Italia, e-mail: nasello@idra.unipa.it, sinagra@idra.unipa.it, tucciar@idra.unipa.it

### Sommario

Gli effetti su una corrente, causati dalle pile di un ponte, o più in generale da strutture che riducono la sezione trasversale dell'alveo, risultano di particolare interesse per le variazioni idrometriche che comportano alla corrente stessa. Nonostante i numerosi studi teorici e sperimentali di letteratura, l'attuale modellistica numerica diffusiva non integra la presenza di tali manufatti nelle proprie tecniche risolutive. Nella presente memoria viene presentata la metodologia implementata nel modello diffusivo bidimensionale FLOW2D per la valutazione del rigurgito provocato da restringimenti della sezione trasversale, nonché dalla presenza delle campate. I profili di rigurgito ottenuti con il modello proposto, in alcuni casi test, sono stati confrontati con le soluzioni esatte e con i profili di un modello completo. Inoltre, i risultati della metodologia proposta si sono dimostrati in buon accordo con i dati di pieno campo rilevati in un venturimetro.

#### **1** INTRODUZIONE

La presenza di opere in alveo è causa di restringimenti improvvisi della sezione libera di deflusso. Tali restringimenti, solitamente pile di ponti, sono caratterizzati dal rapporto  $r_r = r/R$ , essendo r la larghezza libera ed R quella originaria a monte del restringimento. Malgrado le moderne tecniche di costruzione permettano spesso di raggiungere coefficienti  $r_r$  molto alti, che risultano ininfluenti sul deflusso di piena, è ancora forte la presenza di opere civili di vecchia concezione, specie in ambiente urbano, che comportano variazioni locali significative dei tiranti idrici e delle velocità. Lo studio delle perturbazioni che si generano sulla corrente risulta di particolare importanza per valutare la vulnerabilità delle aree a monte del restringimento, potendo il rigurgito della corrente di monte risultare incompatibile con le arginature limitrofe. In letteratura sono presenti diverse trattazioni sperimentali per la valutazione del massimo sopralzo (Yarnell, 1934), implementate in modelli di calcolo monodimensionali che risolvono localmente il campo di moto con l'ipotesi di moto permanente o moto vario in forma iperbolica. Tuttavia si rende sempre più spesso necessario l'utilizzo di modelli di propagazione bidimensionali risolubili su ampi orizzonti temporali e con tempi di calcolo ridotti. Questo risultato può essere ottenuto mediante l'utilizzo di modelli diffusivi in cui si trascurano i termini inerziali dell'equilibrio dinamico. I modelli diffusivi, malgrado l'approssimazione adottata nel trascurare i termini inerziali, consentono una ricostruzione accurata del profilo idrodinamico, tranne che nell'intorno dei risalti idraulici. Il risalto idraulico corrisponde infatti ad una dissipazione localizzata di energia che viene correttamente stimata dai modelli completi di acque basse con formulazione 'shock capturing' (*Toro*, 2001) e che viene invece ignorata da quelli diffusivi. Nella presente memoria si propone di ridurre l'errore così commesso nei modelli diffusivi modificando opportunamente la scabrezza del fondo alveo compreso all'interno del restringimento, al fine di ottenere un livello idrico a monte simile a quello calcolato da un modello completo.

In ogni elemento di calcolo del modello viene definita una relazione  $n^*(q_p)$ , essendo  $q_p$  il flusso per unità di larghezza nella direzione del moto calcolato nel centro dell'elemento ed  $n^*$  la scabrezza equivalente.  $n^*$  differisce dalla scabrezza originaria n solo nel caso in cui il flusso  $q_p$  corrisponde, secondo un approccio monodimensionale e stazionario al problema, alla presenza di un risalto.

## 2 CALCOLO DELLA CURVA n\* (qp)

Seguendo un approccio monodimensionale e stazionario, l'innalzamento della superficie libera che si realizza a monte del restringimento, viene calcolato dopo avere verificato la presenza del risalto. Volendo relazionare la scabrezza  $n^*$  alla sola portata specifica  $q_P$ , viene quindi fatta l'ulteriore ipotesi che, in mancanza di risalto, l'energia  $E_0$  della corrente a monte sia quella corrispondente alla condizione di moto permanente, pari a:

$$E_{0} = \left(\frac{n \cdot r_{r} \cdot q_{p}}{\sqrt{S_{f}}}\right)^{3/5} + \left(\frac{S_{f} \cdot (r_{r} \cdot q_{p})^{4/3}}{n^{2} (2g)^{5/3}}\right)^{3/5}$$
(1)

dove *n*,  $r_r$ ,  $q_p$ ,  $S_f$  e g sono rispettivamente il coefficiente di scabrezza di Manning, il coefficiente di contrazione, la portata specifica attraverso il restringimento, la pendenza motrice della corrente a monte dello stesso e l'accelerazione di gravità.

L'energia fornita dalla (1) può risultare insufficiente per il superamento dell'ostacolo, se minore dell'energia di stato critico calcolata nel restringimento e pari a:

$$E_{k} = \frac{3}{2} \left(\frac{q_{p}^{2}}{g}\right)^{1/3}$$
(2)

Si osservi in Fig. 1 il confronto fra i valori adimensionalizzati dell'energia di moto uniforme e di stato critico, al variare dei parametri  $r_r$  ed *i*. L'energia di moto uniforme risulta inferiore a quella di stato critico, con conseguente formazione del risalto, solo in un determinato intervallo di pendenza. Analogamente, può vedersi dal valore dell'esponente di  $q_p$  nelle equazioni (1) e (2) che l'energia della corrente può superare quella di stato critico sia per valori molto piccoli che molto grandi della portata.



**Figura 1.** Andamento di  $E_0/(nq_p)^{3/5}$  ed  $E_k/(nq_p)^{3/5}$  in funzione di *i* ed  $r_r$ 

Ciò implica che possano riscontrarsi a monte del restringimento, al crescere di  $q_p$  in condizioni quasi-stazionarie, discontinuità temporali del profilo anche in assenza della propagazione spaziale di un fronte d'onda.

Qualora l'energia della corrente risulti insufficiente e si realizzi il risalto idraulico, il tirante di monte può essere calcolato supponendo ivi un'energia pari a quella di stato critico fornita dalla (2) e pervenendo quindi alla seguente scala delle portate:

$$h_m^3 - E_k h_m^2 = -\frac{q_m^2}{2g}$$
(3)

dove  $q_m$  è la portata specifica a monte dell'ostacolo.

Assumendo che si realizzi nel restringimento una dissipazione di energia pari a quella presente in condizioni quasi-stazionarie, nonché l'ipotesi di corrente indisturbata a valle, si può determinare un valore di scabrezza fittizio m, imponendo che la perdita di carico calcolata dal modello diffusivo lungo il percorso che attraversa il restringimento sia pari alla differenza fra le quote piezometriche a monte ed a valle del restringimento. Il coefficiente equivalente  $n^*$  viene quindi calcolato come il massimo tra il coefficiente originario n e quello fittizio m, dato dalla radice della seguente equazione (4) integrata lungo il restringimento, per assegnati valori della quota piezometrica  $H_m$  (calcolata dalla (3)) ed  $H_{y}$ .

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{m^2 q_p^2(x)}{(H-z)^{10/3}(x)}$$
(4)

Per tenere conto degli effetti della pendenza del fondo *i* e rendere l'equazione (4) sempre facilmente risolubile per via analitica, può porsi a secondo membro  $H - z \approx H - (z_m + z_v)/2$ , dove  $z_m$  e  $z_v$  sono le quote topografiche subito a monte ed a valle del convergente (Figura 2).

# 3 INSERIMENTO DELLA CURVA N\* $(q_{ ho})$ NEL MODELLO DI CALCOLO DIFFUSIVO

La procedura esposta è stata inserita nel codice di calcolo diffusivo FLOW2D (*Aricò* & *Tucciarelli*, 2007; *Aricò et al.*, 2010), assegnando agli elementi triangolari un indice, corrispondente se non nullo ad un dato set di parametri *i*,  $\Delta x$ ,  $a_m$ ,  $a_v$ , r,  $R_m$ ,  $R_v$ ,  $z_m e z_v$ .  $a_m$  ed  $a_v$  sono le lunghezze dei raccordi in direzione di monte e di valle, per i quali si è assunta una variazione parabolica,  $R_m$  ed  $R_v$  sono le larghezze del canale a monte e a valle del restringimento. Assegnando lo stesso indice agli elementi posizionati all'interno di un restringimento di assegnati parametri, il codice calcola al termine di ogni passo temporale la portata specifica  $q_p$  e, attraverso la relazione (1), verifica se l'energia della corrente è sufficiente ad evitare la presenza di un risalto idraulico nel successivo passo temporale. Qualora vi sia il risalto, aggiorna mediante le (2), (3) e (4) la scabrezza  $n^*$  equivalente con cui vengono risolte sia la fase convettiva che quella diffusiva nel successivo passo temporale.



Figura 2. Parametri geometrici del restringimento.

La validità della metodologia è stata verificata mediante la simulazione di una corrente ad andamento monodimensionale soggetta a restringimento, confrontando i valori calcolati tra 1) il modello diffusivo FLOW2D originario, 2) il modello FLOW2D modificato, 3) il modello completo MAST, di tipo 'shock capturing'. Il test è stato effettuato su un canale di forma rettangolare con pendenza dello 0.5%, avente la geometria riportata in Figura 3. La discretizzazione del dominio è stata effettuata con elementi triangolari, con lunghezza media dei lati di 0.5 m. La griglia di calcolo è composta da 2372 elementi e 1304 nodi (Figura 4). Il coefficiente di scabrezza di Manning è stato posto pari a 0.03 m<sup>-1/3</sup>s. Per le condizioni al contorno si è adottata un'altezza pari a 1.20 m, corrispondente al tirante di moto uniforme conseguente ad una portata specifica di 3.19 m<sup>2</sup>/s assegnata alla sezione di monte.



Figura 3. Caratteristiche geometriche del dominio utilizzato per il test numerico.



Figura 4. Griglia di calcolo ad elementi triangolari.

Nella Figura 5 sono stati riportati i profili stazionari, rilevati lungo l'asse di simmetria, dall'estremo di monte del restringimento fino all'inizio del canale. La condizione simulata ha determinato l'istaurarsi di una corrente lenta a monte dell'ostacolo, con un'energia insufficiente per il suo attraversamento. Pertanto, è stato possibile verificare come il modello proposto riesce a ricostruire il rigurgito della corrente, con il raggiungimento del tirante massimo in corrispondenza della prima sezione ristretta, e con altezze idriche che tendono asintoticamente al tirante di moto uniforme, proseguendo verso monte. Inoltre, si può osservare l'accostamento del profilo a quello di corrente lenta determinato dal bilancio energetico nell'ipotesi 1D ed a quello derivante dalla modellazione completa MAST. Da tale confronto si è rilevato uno scostamento massimo relativo dell'1,5 % tra i profili.



Figura 5. Profili in condizioni stazionarie del test numerico sul restringimento.

## 4 APPLICAZIONE DEL MODELLO DIFFUSIVO AL VENTURIMETRO DI LICATA

Il modello descritto nella presente memoria è stato applicato ad un caso di studio. In particolare il restringimento modellato è rappresentato dal venturimetro realizzato nel fiume Imera nel comune di Licata in Sicilia (Figura 6a). Il manufatto è caratterizzato da un coefficiente di contrazione pari a 0,48 e dalla geometria riportata in Figura 6b.

Il profilo di rigurgito del modello proposto è stato confrontato con misure idrometriche, rilevate nel manufatto in conseguenza ad un evento di piena, e con il profilo derivante dalla modellazione completa MAST. La simulazione è avvenuta modellando un tratto d'alveo nell'intorno del venturimetro per una lunghezza totale di 750 m con una portata assegnata a monte costante nel tempo e pari 1600 m<sup>3</sup>/s, valore determinato mediante simulazione idraulica bidimensionale di un evento di piena

storico (*Nasello et al.*, 2000). La scabrezza assegnata all'alveo, in base alla natura del terreno, è di 0,025 m<sup>-1/3</sup>s. L'altezza di moto uniforme è stata assegnata quale condizione al contorno di valle.



**Figura 6.** a) Immagine del venturimetro al termine dell'evento di piena, con evidenziato il massimo livello raggiunto: b) caratteristiche geometriche del manufatto.

La Figura 7 mostra l'andamento dei profili calcolati in mezzeria del manufatto. A monte della strozzatura si può notare la coincidenza dei profili di rigurgito dei due modelli, i quali si collocano lievemente al di sotto del dato storico rilevato. Tale differenza è minima in considerazione dell'incertezza della misurazione storica, della stima della portata e del coefficiente di scabrezza. In corrispondenza del restringimento si può notare l'istaurarsi della corrente veloce riprodotta dal modello completo, che per le note ragioni non viene riprodotta dalla modellazione diffusiva. Tuttavia, i profili tendono a ricongiungersi proseguendo verso valle. L'analisi delle isolinee, con parametro l'altezza idrica, mostrano a monte dell'ostacolo un comportamento analogo delle due modellazioni (Figura 8).



Figura 7. Profili in condizioni stazionarie nel venturimetro di Licata.



Figura 8. Isolinee, con parametro l'altezza idrica, in prossimità del venturimetro di Licata.

### 5 INSERIMENTO DI CAMPATE DI PONTI

La presenza delle campate di un ponte ha effetto sulla corrente solo nel caso in cui la superficie libera della corrente superi la quota dell'intradosso delle campate. In tale evenienza l'effetto sulla corrente dipende da molteplici fattori, quale non ultimo la resistenza del manufatto alla notevole spinta esercitata dalla corrente. La maggior parte dei codici di calcolo oggi in uso utilizza per le campate dei ponti le stesse ipotesi a base del calcolo dell'efflusso a stramazzo e/o a battente di una traversa dotata di luce di fondo rettangolare larga (*Picek et al.*, 2004; *US Army Corps of Engineers*, 2008; *Molinaro et al.*, 1994). Malavasi et al. (2003) propongono un modello concettuale più accurato, che tiene conto anche delle perdite di carico per brusco allargamento subite dalla corrente inferiore in uscita dalla campata, ma che è di più difficile integrazione all'interno di uno schema numerico 2D di tipo diffusivo.

Secondo gli schemi precedenti, il flusso che attraversa il manufatto per unità di larghezza al di sopra o al di sotto la campata è legato alla quota piezometrica di monte  $z_m + h_m$  e di valle  $z_v + h_v$  secondo tre possibili formulazioni, valide per ognuno dei possibili intervalli dei tiranti idrici  $h_m$  ed  $h_v$ . Tali intervalli sono compresi fra zero, le altezze minima e massima  $h_1$  ed  $h_2$  della luce di fondo, l'altezza di coronamento  $h_3$  della traversa (o della campata). Nel caso delle campate di un ponte, l'altezza  $h_1$  è pari a zero e le altezze  $h_2$  ed  $h_3$  sono rispettivamente le altezze dell'intradosso e dell'estradosso della campata. Vengono quindi applicate le seguenti formulazioni per il calcolo dei flussi per unità di larghezza:

$$Fl_a = C_s \left(h_m - h_3\right) \sqrt{2g \left(h_m - h_3\right)}$$
(5a),

$$Fl_{b} = C_{w} \left( h_{2} - h_{1} \right) \sqrt{2g \left( h_{m} - \left( h_{2} - h_{1} \right) / 2 \right)}$$
(5b),

$$Fl_{c} = C_{t} \left(h_{2} - h_{1}\right) \sqrt{2g \left(h_{m} - h_{v}\right)}$$

$$(5c),$$

dove  $C_s$  e  $C_w$  sono coefficienti sperimentali, espressi in funzione rispettivamente del rapporto di sommergenza  $\sigma_s = \max(0,h_v-h_3)/(h_m-h_3)$  e del rapporto  $\sigma_w = (h_m-h_1)/(h_2-h_1)$  (*Picek et al.*, 2004; US Army Corps of Engineers, 2008).



**Figura 9.** a) Variazione del coefficiente  $C_s$  (*Picek et al.*, 2004); b) variazione del coefficiente  $C_w$  (US Army Corps of Engineers, 2008).

Il coefficiente  $C_t$  viene suggerito costante e pari a circa 0.8. Nella (5a)  $Fl_a$  è il flusso defluente sopra la campata, considerata come stramazzo a larga soglia, ridotto rispetto al valore teorico nel caso in cui l'innalzamento del livello di valle faccia venire meno la condizione di stato critico sulla campata. Nella (5b)  $Fl_b$  è il flusso sotto la campata nel caso in cui i livelli idrici immediatamente a monte ed a valle della campata siano rispettivamente superiori ed inferiori all'intradosso della campata nel caso in cui i livelli idrici. Nella (5c)  $Fl_c$  è il flusso sotto la campata nel caso in cui i livelli idrici amonte ed a valle della campata siano rispettivamente empirica. Nella (5c)  $Fl_c$  è il flusso sotto la campata nel caso in cui i livelli idrici immediatamente a monte ed a valle della campata nel caso in cui i livelli idrici immediatamente a valle della campata nel caso in cui i livelli idrici immediatamente a valle della campata nel caso in cui i livelli idrici immediatamente a monte ed a valle della campata nel caso in cui i livelli idrici immediatamente a monte ed a valle della campata nel caso in cui i livelli idrici immediatamente a monte ed a valle della campata nel caso in cui i livelli idrici immediatamente a monte ed a valle della campata siano ambedue superiori all'intradosso della campata e viene calcolato come flusso in un tubo addizionale esterno. Il flusso complessivo è dato da  $Fl_b$  (o  $Fl_c$ ) più  $Fl_a$ , se il livello di monte è superiore all'estradosso della campata.

Purtroppo non esiste continuità tra i flussi  $Fl_b$  ed  $Fl_c$  al variare del livello idrico di monte e/o di valle e fra questi ed il flusso indisturbato  $Fl_0$  che si realizza al di sotto della campata qualora questa non sia raggiunta dal livello idrico. Ne consegue la necessità di una interpolazione in qual modo arbitraria dei flussi nelle zone di transizione tra l'una e l'altra condizione, al fine di evitare sia incongruenze fisiche che instabilità di calcolo. Inoltre, le formulazioni suddette non tengono conto degli effetti di resistenza delle pareti che possono essere particolarmente significativi in concomitanza con i notevoli tiranti che si hanno al sormonto della campata, né ovviamente di flussi trasversali alla direzione dell'alveo in uscita dall'estradosso della campata.

L'inserimento delle suddette formulazioni risulta di contro particolarmente semplice all'interno della procedura MAST del codice di calcolo FLOW2D. La procedura MAST scompone ad ogni passo temporale le equazioni di continuità e del moto in una componente convettiva (problema di predizione) ed in una componente puramente diffusiva (problema di correzione). Il codice risolve il problema di predizione integrando lungo il passo temporale l'equazione di continuità nelle singole celle di calcolo, ordinate secondo l'ordine decrescente dei potenziali, assumendo costante nel tempo il gradiente piezometrico. E' quindi possibile nel problema di predizione calcolare i flussi uscenti da celle di calcolo il cui contorno coincida con l'asse delle campate assumendo costanti nel tempo le radici a secondo membro delle Eq.(5). Nella fase di correzione diffusiva viene invece ignorata la presenza delle campate senza che questo comprometta la stabilità della soluzione.

I contorni delle celle di calcolo coincidono, nella discretizzazione spaziale operata dal codice FLOW2D, con gli assi dei lati dei triangoli. Avendo cura di far coincidere l'asse della campata con i lati congiungenti due o più nodi di calcolo, il flusso complessivo passante per i lati suddetti è uguale alla somma dei flussi che escono dalle celle di calcolo. L'altezza di valle  $h_v$  viene assunta pari a quella dei nodi immediatamente a valle di quelli posizionati lungo l'asse della campata, senza che questo modifichi sostanzialmente i risultati rispetto ad un calcolo più accurato del tirante di valle.

### 6 TEST SINTETICO PER PARZIALE O TOTALE SOMMERSIONE DELLA CAMPATA

Per indagare sulla risposta del modello FLOW2D modificato, nell'ipotesi di raggiungimento della campata da parte della corrente idrica, è stato effettuato un test di confronto con il modello commerciale HEC-RAS. Il dominio utilizzato è composto da una falda inclinata dello 0.5%, con lunghezza di 40.0 m e larghezza pari a 5m. La campata ipotizzata ha una forma rettangolare, con altezza dell'intradosso e dell'estradosso, riferita al fondo alveo, rispettivamente di 1,00 m e 1,50 m. Sono state effettuate due simulazioni di confronto, assegnando a valle, per entrambi i modelli, l'altezza di moto uniforme, coerentemente con i valori di portata assegnata a monte, rispettivamente di 20.0 e 14.0 m<sup>3</sup>/s.

Come mostra la Figura 10, in ambedue le condizioni idrodinamiche instauratesi lungo la campata, i profili di rigurgito del modello diffusivo si collocano al di sotto del modello HEC-RAS, con uno scostamento massimo relativo tra i profili di circa il 14%. Ciò è giustificabile in base al fatto che il modello FLOW2D trascura l'effetto delle pareti laterali, che invece influenza sensibilmente i flussi calcolati da HEC-RAS, soprattutto nella fase di sormonto della campata. A valle della campata, invece, si può notare la sovrapposizione dei profili dei due modelli, i quali coincidono con quelli di corrente indisturbata dalla presenza dell'ostacolo.



Figura 9. Profili in condizioni stazionarie del test numerico sulla campata.

#### CONCLUSIONI

Nella presente memoria l'implementazione nel modello diffusivo bidimensionale FLOW2D di algoritmi atti a riprodurre l'effetto di restringimenti e campate di ponti sui profili di monte della corrente è stata presentata e discussa. Il modello proposto è stato utilizzato su alcuni casi test nei quali si sono confrontati i risultati con profili numerici di altri modelli o con dati rilevati in pieno campo. Qualora il livello idrico raggiunga l'intradosso di un impalcato, il flusso uscente dalle celle di calcolo modellanti la campata e diretto verso le celle a potenziale minore è determinato con le ipotesi di efflusso a stramazzo e/o a battente di una traversa rettangolare larga dotata di luce di fondo, secondo le formulazioni disponibili in letteratura. I maggiori scostamenti rispetto ai risultati di altri modelli commerciali si possono osservare proprio in questi casi, sia per le notevoli incertezze esistenti nel calcolo dei flussi passanti sopra e sotto la campata sia per la mancanza di una adeguata trattazione, nel modello bidimensionale, delle resistenze al moto dovuta alle pareti laterali.

### BIBLIOGRAFIA

- Aricò C., Tucciarelli T., *MAST solution of advection problems in irrotational flow fields*, Adv. Water Resour. 30 (2007) 665–685.
- Aricò C., Tucciarelli T., A marching in space and time (MAST) solver of the shallow water equations. Part I: The 1D case, Adv. Water Resour. 30 (2007) 1236–1252.
- Aricò C., Nasello C., Tucciarelli T., A marching in space and time (MAST) solver of the shallow water equations. Part II: The 2D case, Adv. Water Resour. 30 (2007) 1253–1271.
- Aricò C., Sinagra M., Tarpanelli A., Moramarco T., Tucciarelli T., Fast solution of diffusive shallow water equations for real time flood prediction. The First European Congress of the IAHR, Edimburgo, Regno Unito, 2010
- Aricò C., Nasello C., Sinagra M., Tucciarelli T. An improved numerical solver of the 2D diffusive shallow waters equations over unstructured triangular meshes. 13th Workshop on Physical Processes in Natural Waters, Palermo, Italy, 1-4 September 2009.
- Malavasi S., Guadagnini A., Hydrodynamic loading on river bridges. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE. November 2003.
- Molinaro P., Di Filippo A., Ferrari F., Modelling of flood wave propagation over flat dry areas of complex topography in presence of different infrastructures, in P. Molinaro & L. Natale (eds), Modelling of flood propagation over initially dry areas, ASCE, New York, (1994), pp. 209-228.
- Nasello C., Aronica G., Tucciarelli T., Un modello bidimensionale per la propagazione delle piene in aree urbane ed extraurbane. Atti del XXVII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche. Vol. III, pp. 77-83, Genova, settembre 2000.
- Picek T., Havlik A., Mattas D. Pressure flow and overflow bridges, Journal of Hydrology and Hydromechanics. (2004), 52(3), 185-192.
- Toro E.F., Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows. Wiley and Sons Ltd., 2001.
- Tucciarelli T., Termini D., Finite-element modelling of floodplain flows. ASCE J. Hydr. Eng., vol. 126(6) 2000, pp. 416-424.
- US Army Corps of Engineers Hydrologic Engineering Center, *HEC-RAS River Analysis System*. March 2008.
- Yarnell D. L., Bridge piers as channel obstruction, U.S. Department of Agriculture (1934), 442.