

Il Filtro Integrale Auto-Regressivo Continuo (I-ARC) per l'Analisi di Strutture Esposte al Vento

Mario Di Paola, Antonina Pirrotta, Massimiliano Zingales

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Palermo, Palermo.

SOMMARIO

In questo studio viene proposto un metodo per la rappresentazione di processi aleatori Gaussiani e stazionari, utile a modellare la turbolenza della velocità del vento, introducendo la versione integrale del modello auto-regressivo discreto già proposto in precedenza. La rappresentazione di un processo aleatorio di assegnata funzione di correlazione viene condotta integrando un'equazione integro-differenziale in cui viene coinvolto un nucleo, che rappresenta la memoria del processo, in presenza di un rumore bianco Gaussiano. La soluzione dell'equazione rappresenta un campione del processo aleatorio della turbolenza della velocità del vento. È stato mostrato che il modello I-ARC fornisce, nei casi in cui effettivamente il processo è filtrato, statistiche coincidenti con quelle del processo obiettivo mentre fornisce risultati molto accurati qualora il processo non è filtrato come nel caso della velocità del vento. Inoltre una formulazione discreta del filtro I-ARC coincide con il modello ARC precedentemente discusso dagli autori

ABSTRACT

In this paper a novel method to represent Gaussian stationary processes describing wind velocity fluctuations has been introduced. The technique proposed is the extension of the well-known continuous-time ARC model to generate Gaussian processes to with an integral representation. Digital simulation of a Gaussian random process with assigned correlation function is provided by means of a stochastic integro-differential equation with memory kernel enforced by a Gaussian white noises. The solution of the integro-differential equation is a specific sample of the target Gaussian wind process. It has been proved that the proposed I-ARC model yields second-order statistics coinciding with those of the target process. Moreover it has been shown that a particular approximate version of the I-ARC coincides with the previous ARC filter already introduced by the authors.

PAROLE CHIAVE: Digital simulation, Autoregressive-Continuous Filters, Gaussian Processes, Stochastic Differential Calculus.

1. INTRODUZIONE

I metodi di analisi dell'ingegneria del vento che prevedono la determinazione della risposta strutturale in presenza di forze orizzontali prodotte dalla pressione del vento è stata studiata a lungo negli ultimi anni. In particolare, i metodi avanzati di analisi strutturale in presenza di azioni del vento utilizzano algoritmi digitali per la rappresentazione di campi aleatori di pressione del vento.

In questo contesto i metodi più utilizzati per analizzare strutture esposte a campi di vento sono metodi Monte-Carlo o metodi basati sull'analisi nel dominio delle frequenze.

I metodi Monte-Carlo possono essere facilmente codificati in algoritmi digitali e forniscono simulazioni di campioni di campi di pressione del vento che possiedono funzioni di auto-correlazione e densità spettrali di potenza (DSP) in buon accordo con quelle obiettivo.

Tuttavia, le analisi di tipo Monte-Carlo di sistemi dinamici soggetti a forzanti esterne o forzanti parametriche sono affidabili solo a prezzo di condurre decine di migliaia o spesso centinaia di migliaia di analisi, una per ogni nuova generazione della forzante.

Una alternativa allo studio Monte-Carlo delle strutture è fornita dalle analisi nel dominio delle frequenze che spesso, previa una linearizzazione preliminare delle equazioni del moto della struttura, possiedono soluzioni analitiche in forma chiusa.

Tali strategie di soluzione, tuttavia, sono spesso fonte di sovrastime o sottostime significative delle statistiche della risposta strutturale, a causa degli errori di approssimazione prodotti dalla linearizzazione delle equazioni del moto della struttura.

Le tecniche di analisi strutturale di tipo Monte-Carlo sono, quindi, un metodo molto versatile per lo studio delle statistiche della risposta strutturale e, conseguentemente, per produrre analisi di affidabilità realistiche. Tali analisi sono onerose da un punto di vista computazionale e possono richiedere, in alcuni casi, la generazione di moltissimi campioni del campo aleatorio da rappresentare che spesso, nell'ambito dell'ingegneria del vento, viene modellato come stazionario e gaussiano (Maeda & Makino 1992; Smith & Mehta, 1993).

In questa ottica sono stati proposti diversi algoritmi iterativi per la generazione digitale di campi aleatori come, per esempio, i metodi auto-regressivi (AR), o quelli auto-regressivi a media mobile (ARMA). Tali metodologie, sebbene molto utilizzate nella generazione di processi aleatori, sono tuttavia poco efficienti in presenza di alcune peculiarità nelle funzioni di correlazione o nelle densità spettrali di potenza del processo da rappresentare (Mignolet & Spanos 1991).

Inoltre la rappresentazione iterativa dei campi aleatori di velocità del vento produce processi aleatori colorati ai quali non è possibile applicare le regole del calcolo differenziale stocastico di Itô. Recentemente è stato proposto, un approccio molto diverso che coinvolge gli aspetti positivi della teoria dei filtri nonché della simulazione recursiva di processi stazionari e Gaussiani (Di Paola & Zingales, 2008). L'algoritmo può essere considerato come la controparte continua dei modelli auto-regressivi e, per questa ragione, è stata definito come filtro auto-regressivo continuo (ARC). Il processo aleatorio, stazionario e gaussiano, ottenuto con il metodo ARC, di ordine intero m è descritto dalla soluzione di una equazione differenziale lineare con m termini di ritardo e forzata da un rumore bianco. I coefficienti di questa equazione si possono ottenere risolvendo un sistema di equazioni algebrico, del tutto analogo al sistema di Yule-Walker utilizzato nel modello AR, che fornisce i coefficienti da utilizzare nel modello.

In questo articolo quest'ultima considerazione verrà ulteriormente approfondita modellando il processo aleatorio Gaussiano che rappresenta le fluttuazioni della velocità del vento indotte dalla turbolenza come soluzione di una equazione integro-differenziale forzata da un processo bianco Gaussiano. Questo approccio rappresenta l'estensione naturale del modello di filtro ARC ed è stato denominato approccio auto-regressivo continuo e integrale I-ARC.

L'approccio proposto è robusto, nel senso che fornisce le statistiche esatte del processo modellato con I-ARC se questo viene rappresentato dalla soluzione di una o più equazioni di filtro e coincide con il modello ARC come caso particolare. Alcune applicazioni che illustrano la formulazione del modello I-ARC e le rispettive soluzioni sono riportate nel corso dell'articolo.

2. INTRODUZIONE AL MODELLO AUTOREGRESSIVO CONTINUO (ARC)

In questa sezione verrà sinteticamente descritto il modello auto-regressivo continuo (Di Paola, Zingales, 2008) al fine di fornire gli elementi essenziali che verranno utilizzati nella sezione 3 per introdurre il modello integrale auto-regressivo continuo.

Si consideri un processo aleatorio stazionario e Gaussiano $X(t)$ caratterizzato da media nulla ed assegnata funzione di correlazione $R_X(\tau)$, dove τ è la finestra temporale, o in alternativa dalla funzione densità spettrale di potenza (PSD) $S_X(\omega)$ con ω frequenza circolare. La funzione di correlazione e la PSD sono legate dalle note relazioni di Wiener-Kintchine:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \exp[i\omega\tau] d\omega$$

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp[-i\omega\tau] d\tau$$
(1 a, b)

dove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria.

Il processo $X(t)$ viene modellato nel seguito con un processo $\tilde{X}(t)$ ottenuto dall'integrazione dell'equazione differenziale con ritardo temporale:

$$\frac{d\tilde{X}(t)}{dt} = \sum_{j=0}^m c_j \tilde{X}(t-t_j) + d_0 W(t)$$
(2)

dove m è un numero intero che rappresenta l'ordine del modello ARC scelto, c_j e d_0 sono numeri reali che devono essere ottenuti imponendo che la funzione di autocorrelazione del processo $\tilde{X}(t)$ rappresenti bene la funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$ del processo obiettivo $X(t)$, mentre $W(t)$ è un processo bianco gaussiano caratterizzato come:

$$E[W(t)] = 0 ; R_W(\tau) = E[W(t_1)W(t_1+\tau)] = q_2 \delta(\tau)$$
(3)

essendo $E[\cdot]$ l'operatore media, q_2 l'intensità del rumore bianco e $\delta(\tau)$ la funzione delta di Dirac. L'osservazione diretta dell'eq.(3) mostra una differenza tra il modello ARC e le teorie classiche dei filtri visto che la funzione incognita nell'eq.(2) è contenuta al secondo membro calcolata anche ad istanti precedenti: $\tau_0 = t-t_0$, $\tau_1 = t-t_1$, ..., $\tau_m = t-t_m$. Il confronto tra l'equazione differenziale che rappresenta un processo modellato con l'ARC ed un processo AR (M. Mignolet & Spanos P. D., 1991) mostra che l'eq.(2) può essere interpretata come la versione continua di un filtro AR discreto. I parametri c_j e d_0 che appaiono nell'eq.(3) devono essere determinati costruendo un sistema di equazioni algebrico che coinvolge le funzioni di correlazione $R_X(\tau_j)$, ($j=0,1,\dots,m$) e le derivate prime delle correlazioni $\dot{R}_X(\tau_j)$, ($j=0,1,\dots,m$) come verrà indicato nel seguito. A tal fine l'eq.(2) viene riscritta nella forma di Itô come:

$$d\tilde{X}(t) = \sum_{j=0}^m c_j \tilde{X}(t-t_j) dt + d_0 dB(t)$$
(4)

dove $dB(t)$ rappresenta l'incremento del processo di Wiener la cui derivata formale coincide con il processo bianco gaussiano $W(t) = dB(t)/dt$. Le statistiche del primo e secondo ordine degli incrementi del processo di Wiener sono date dalle:

$$E[dB(t)] = 0 ; E[dB(t_1)dB(t_2)] = q_2 \delta(t_2-t_1) dt_1 dt_2 ; E[dB(t)^2] = q_2 dt$$
(5)

L'eq.(4) può essere riscritta moltiplicando ambo i membri per $\tilde{X}(t-t_k)$ come:

$$d\tilde{X}(t) \tilde{X}(t-t_k) = \sum_{j=0}^m c_j \tilde{X}(t-t_k) \tilde{X}(t-t_j) dt + d_0 \tilde{X}(t-t_k) dB(t)$$
(6)

L'operatore media $E[\cdot]$ ad ambo i membri dell'eq.(6) consente di scrivere l'eq.(6) nella forma:

$$\frac{E[d\tilde{X}(t)\tilde{X}(t-t_k)]}{dt} = \sum_{j=0}^m c_j E[\tilde{X}(t-t_k)\tilde{X}(t-t_j)] + d_0 E[\tilde{X}(t-t_k)] E\left[\frac{dB(t)}{dt}\right] \quad (7)$$

che nell'eq.(7) è stata riscritta utilizzando la proprietà non anticipativa (Itô, 1956) che rimane valida per $t_j > 0 \quad \forall j$. Il primo membro dell'eq.(7) può essere riscritto come:

$$\frac{E[d\tilde{X}(t)\tilde{X}(t-t_k)]}{dt} = \frac{E[d\tilde{X}(\tau_k+t_k)\tilde{X}(\tau_k)]}{d\tau_k} = \frac{dE[\tilde{X}(\tau_k+t_k)\tilde{X}(\tau_k)]}{d\tau_k} = \dot{R}_{\tilde{X}}(\tau)\Big|_{t_k} \quad (8)$$

dove è stato posto $\tau_k = t - t_k$ che sostituita nell'eq.(8) fornisce una equazione differenziale per le correlazioni del modello ARC nella forma:

$$\dot{R}_{\tilde{X}}(t_k) = \sum_{j=0}^m c_j R_{\tilde{X}}(t_k - t_j) \quad (9)$$

L'eq.(9) può essere utilizzata per la valutazione dei coefficienti c_j imponendo che agli istanti t_k con $k = 0, 1, \dots, m$ le correlazioni del modello ARC e le derivate prime coincidano, rispettivamente, con le correlazioni del processo obiettivo $R_{\tilde{X}}(t_k - t_j) = R_X(t_k - t_j)$ e con le derivate prime delle correlazioni del processo obiettivo $\dot{R}_{\tilde{X}}(t_k) = \dot{R}_X(t_k)$ fornendo il sistema di equazioni lineari algebriche:

$$\begin{cases} \dot{R}_X(t_0) = c_0 R_X(0) + c_1 R_X(t_1 - t_0) + c_2 R_X(t_2 - t_0) + \dots + c_m R_X(t_m - t_0) \\ \dot{R}_X(t_1) = c_0 R_X(t_0 - t_1) + c_1 R_X(0) + c_2 R_X(t_2 - t_1) + \dots + c_m R_X(t_m - t_1) \\ \dot{R}_X(t_2) = c_0 R_X(t_0 - t_2) + c_1 R_X(t_1 - t_2) + c_2 R_X(0) + \dots + c_m R_X(t_m - t_2) \\ \dots \\ \dot{R}_X(t_m) = c_0 R_X(t_0 - t_m) + c_1 R_X(t_1 - t_m) + c_2 R_X(t_2 - t_m) + \dots + c_m R_X(0) \end{cases} \quad (10)$$

nelle incognite rappresentate dai coefficienti $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$. Il sistema di equazioni riportate nell'eq.(10) è simile al noto sistema di equazioni di Yule-Walker per la determinazione dei coefficienti di un modello AR discreto. La differenza tra il sistema di Yule-Walker e il sistema di equazioni riportato nell'eq.(10) consiste nel primo membro dell'eq.(10) che contiene le derivate della funzione di autocorrelazione $\dot{R}_X(t_k)$ mentre nel modello AR contiene invece i valori della funzione di autocorrelazione $R_X(t_k)$. Il sistema di equazioni riportato nell'eq.(10) mette in relazione i valori delle correlazioni $R_X(t_k)$ calcolate agli istanti $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_m$ con i valori della derivata prima della funzione di correlazione e mediante questa considerazione è possibile raggiungere notevole accuratezza già con pochi coefficienti c_j riportati nell'eq.(4). La determinazione del coefficiente d_0 riportato nell'eq.(4) può essere condotta mediante l'analisi di Fourier. A questo proposito la PSD del processo aleatorio $\tilde{X}(t)$ è fornita dalla ben nota relazione fondamentale della dinamica:

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = d_0^2 |H_{\tilde{X}}(\omega)|^2 S_0 \quad (11)$$

essendo $H_{\tilde{X}}(\omega)$ la funzione di trasferimento del modello ARC data nella forma:

$$H_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{i\omega - \sum_{j=0}^m c_j \exp[i\omega t_j]} \quad (12)$$

e $S_0 = q_2/2\pi$ rappresenta la PSD uniforme del processo bianco gaussiano. Imponendo che la varianza del processo $\tilde{X}(t)$ coincida con la varianza del processo obiettivo $X(t)$ con la relazione:

$$\sigma_{\tilde{X}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{X}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = \sigma_X^2 \quad (13)$$

e sostituendo nell'eq.(13) l'espressione riportata nell'eq.(11) il coefficiente d_0 viene ottenuto mediante l'espressione:

$$d_0 = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_{\tilde{X}}(\omega)|^2 d\omega}} \quad (14)$$

ed il suo valore numerico dipende dall'espressione della PSD assegnata del processo obiettivo $S_X(\omega)$ e dal numero m di coefficienti c_j usati per descrivere il modello ARC.

3. IL MODELLO INTEGRALE AUTO-REGRESSIVO CONTINUO (I-ARC)

Il filtro ARC descritto nell'Eq.(2) fornisce processi aleatori, stazionari e Gaussiani $\tilde{X}(t)$ che possiedono statistiche, di primo e secondo ordine, in buon accordo con le statistiche del processo obiettivo $X(t)$, una volta ottenuti i coefficienti c_j dall'Eq.(10) ($j = 1, 2, \dots, m$).

La soluzione del sistema di equazioni riportato nell'Eq.(10) può essere ottenuta solo se, preliminarmente, vengono scelti gli m istanti t_j che contribuiscono maggiormente alla correlazione del processo all'istante t , con $t > t_m$. Il numero m gli istanti da considerare t_j dipendono dalla funzione di correlazione del processo obiettivo ed, in generale, all'aumentare del numero m di istanti si ottengono statistiche sempre migliori del processo simulato $\tilde{X}(t)$ (Di Paola, Zingales; 2008). Inoltre la particolare forma algebrica del sistema di equazioni riportato nell'Eq.(10), in cui il coefficiente generico c_j viene pesato con il vettore delle varianze incrociate $\sigma_{j_0}^{(X)} = R_X(t_j - t_0)$, $\sigma_{j_1}^{(X)} = R_X(t_j - t_1), \dots, \sigma_{j_m}^{(X)} = R_X(t_j - t_m)$ del processo obiettivo è formalmente simile al sistema risolvete delle equazioni integrali Tali considerazioni portano a concludere che la particolare forma sistema algebrico riportato nell'Eq.(10) sia rappresentativa della soluzione approssimata di una equazione integrale opportunamente definita.

Questa interpretazione porta alla rappresentazione del processo $\tilde{X}(t)$ modellato mediante una evoluzione del filtro ARC, in cui vengono considerati infiniti istanti e che, corrisponde a questo ultimo come caso particolare. Infatti, includendo infiniti istanti t_j nella sommatoria riportata nell'Eq.(2) è possibile sostituire all'equazione differenziale con termini di ritardo riportata nell'Eq.(2) una equazione integro-differenziale forzata da un processo bianco Gaussiano del tipo:

$$\frac{d\tilde{X}(t)}{dt} = \int_0^{\infty} g(\xi) \tilde{X}(t-\xi) d\xi + d_0 W(t) \quad (15)$$

che rappresenta l'equazione di governo del filtro I-ARC. La funzione $g(\xi)$ descrive la modulazione della memoria del processo $\tilde{X}(t)$ e deve essere selezionata opportunamente.

Il processo aleatorio descritto dall'Eq.(15) è un processo Gaussiano, colorato, ed è Markoviano di ordine infinito a cui possono essere applicate le regole del calcolo differenziale stocastico di Itô perché soddisfa la proprietà non anticipativa. Infatti l'Eq.(15) può essere riscritta nella forma di Itô come:

$$d\tilde{X}(t) = \left(\int_0^{\infty} g(\xi) \tilde{X}(t-\xi) d\xi \right) dt + d_0 dB(t) \quad (16)$$

che diventa, moltiplicando ambo i membri dell'Eq.(16) per $\tilde{X}(t-\tau)$ ($\tau > 0$) ed applicando l'operatore media:

$$E[d\tilde{X}(t) \tilde{X}(t-\tau)] = \left(\int_0^{\infty} g(\xi) E[\tilde{X}(t-\xi) \tilde{X}(t-\tau)] d\xi \right) dt + d_0 E[\tilde{X}(t-\tau) dB(t)] \quad (17)$$

L'eq.(17) può essere ulteriormente semplificata, in analogia a quanto visto nella Sez.(2) fornendo le correlazioni del processo $\tilde{X}(t)$ come soluzione dell'equazione integro-differenziale:

$$\dot{R}_{\tilde{X}}(\tau) = \int_0^{\infty} g(\xi) R_{\tilde{X}}(\tau-\xi) d\xi \quad (18)$$

L'Eq.(18) può essere utilizzata per selezionare la funzione $g(\xi)$ sotto l'ipotesi che le correlazioni del secondo ordine del filtro I-ARC coincidano con le correlazioni del processo obiettivo, assumendo quindi $\dot{R}_{\tilde{X}}(\tau) = \dot{R}_X(\tau)$ e $R_{\tilde{X}}(\tau) = R_X(\tau)$. In questo caso l'Eq.(18) diventa una equazione integrale di Freedholm a ciclo chiuso nella funzione incognita $g(\xi)$.

La funzione $g(\xi)$ può quindi essere ottenuta risolvendo l'Eq.(18), ad esempio ricorrendo alla trasformata ed anti- trasformata di Laplace, rispettivamente $\wp[\cdot]$ e $\wp[\cdot]^{-1}$ definite come:

$$\wp[R_X(\tau)] = \hat{R}_X(p) = \int_0^{\infty} R_X(\tau) e^{-p\tau} d\tau ; \wp^{-1}[\hat{R}_X(p)] = R_X(\tau) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{R}_X(p) e^{p\tau} dp \quad (19 \text{ a, b})$$

La trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione (faltung) gode della proprietà distributiva $\wp[g(\tau) * R_X(\tau)] = \wp[g(\tau)]\wp[R_X(\tau)]$ che può essere usata, applicando l'operatore di Laplace ad ambo i membri dell'Eq.(18), ottenendo la relazione algebrica:

$$\sigma_X^2 - p \hat{R}_X(p) = \hat{g}(p) \hat{R}_X(p) \quad (20)$$

La trasformata di Laplace della funzione di modulazione della memoria, $g(\xi)$, può quindi essere ottenuta, mediante l'Eq.(20), nella forma:

$$\hat{g}(p) = p + \frac{1}{\hat{\rho}_V(p)} \quad (21)$$

dove è stata introdotta la trasformata di Laplace del coefficiente di correlazione $\hat{\rho}_V(p)$, come:

$$\hat{\rho}_X(p) = \frac{1}{\sigma_X^2} \int_0^{\infty} \hat{R}_X(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (22)$$

La trasformata inversa dell'Eq.(22) fornisce la funzione di modulazione come:

$$g(\xi) = -\delta'(\xi) + \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{p\xi}}{\hat{\rho}_X(p)} dp \quad (23)$$

dove $\delta'(\xi) = d\delta(\xi)/d\xi$ rappresenta la derivata prima della funzione delta di Dirac $\delta(\xi)$.

La funzione $g(\xi)$ fornita dalla relazione nell'Eq.(23) mostra che qualsiasi processo Gaussiano, stazionario e Markoviano può essere ottenuto dalla rappresentazione I-ARC con statistiche del secondo ordine coincidenti con le correlazioni obiettivo.

La forma chiusa della funzione $g(\xi)$ può, però, essere calcolata solo quando la trasformata inversa di Laplace nell'eq.(23) è nota in forma chiusa. Ad esempio, qualora il processo da rappresentare sia la soluzione di una equazione di filtro del primo o del secondo ordine, rispettivamente rappresentate dalle equazioni differenziali:

$$\dot{X}(t) = -\alpha X(t) + W(t) ; \alpha > 0 \quad (24 \text{ a, b})$$

$$\ddot{X}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = W(t) ; \zeta > 0, \omega_0 > 0$$

a cui corrispondono le funzioni di correlazione, rispettivamente dell'Eq.(24 a) e dell'Eq.(24 b):

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} ; R_X(\tau) = e^{-\zeta\omega_0|\tau|} \left[\cos(\omega_d\tau) + \frac{\zeta\omega_0}{\omega_d} \sin(\omega_d|\tau|) \right] \quad (25 \text{ a, b})$$

La funzione di modulazione della memoria, ottenuta per trasformata inversa dall'Eq.(23) assume, per le funzioni di correlazione nell'Eq.(25 a,b) rispettivamente, la forma:

$$g(\xi) = e^{\alpha\xi} - \delta'(\xi) \quad (26 \text{ a, b})$$

$$g(\xi) = e^{-2\zeta\xi\omega_0} (\zeta^2\omega_0^2 - \omega_d^2)$$

Selezionando le funzioni di modulazione della memoria del processo come nelle eq.(26 a, b) il processo aleatorio Gaussiano e stazionario ottenuto dal filtro I-ARC possiede funzioni di correlazione esattamente coincidenti con quelle riportate nelle Eq.(25 a,b).

La funzione di modulazione $g(\xi)$ ottenuta dall'Eq.(23) rappresenta, tuttavia, solo una soluzione formale al problema relativo alla determinazione della funzione di modulazione perché, nella maggior parte dei casi di interesse ingegneristico la trasformata inversa di Laplace non si può ottenere in forma chiusa. In questo caso, la soluzione dell'equazione integrale riportata nell'Eq.(18) deve essere ottenuta ricorrendo ad una soluzione approssimata. Tale soluzione può essere cercata in forma globale, ricorrendo ad una approssimazione della funzione di modulazione mediante funzioni interpolanti, ad esempio mediante polinomi di Laguerre o ricorrendo ad una soluzione approssimata mediante un metodo di collocazione. Quest'ultimo metodo sarà utilizzato nel seguito per mostrare che il filtro ARC rappresenta un caso particolare del filtro I-ARC.

La soluzione dell'Eq.(18) verrà quindi ottenuta approssimando la funzione di modulazione della memoria, mediante una sequenza di $\delta(\bullet)$ nella forma:

$$g(\xi) \cong \sum_{j=1}^m \delta(\xi - \xi_j) g_j ; \quad \xi_j = (j-1)\Delta\xi \quad (27)$$

dove $\Delta\xi$ rappresenta il passo di discretizzazione usato nella griglia, g_j sono i valori, incogniti della funzione $g(\xi)$ in corrispondenza degli istanti $m \xi_j$.

Introducendo l'approssimazione riportata nell'Eq.(27) nell'Eq.(18), la funzione di correlazione del filtro I-ARC viene rappresentata nella forma:

$$\dot{R}_{\hat{X}}(\tau) = \sum_{j=1}^m g_j R_{\hat{X}}(\tau - \xi_j) \quad (28)$$

dove gli m coefficienti g_j dell'approssimazione nell'Eq.(27) devono essere ancora determinati. Sotto la condizione che in corrispondenza degli istanti $\tau = \tau_j = \xi_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) la funzione di correlazione del modello I-ARC e la sua derivata prima, coincidano con quelle obiettivo è possibile determinare i coefficienti g_j come soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{R}_X(\xi_1) = g_1 R_X(0) + g_2 R_X(\xi_2 - \xi_1) + g_3 R_X(\xi_3 - \xi_1) + \dots + g_m R_X(\xi_m - \xi_1) \\ \dot{R}_X(\xi_2) = g_1 R_X(\xi_2 - \xi_1) + g_2 R_X(0) + g_3 R_X(\xi_3 - \xi_2) + \dots + g_m R_X(\xi_m - \xi_2) \\ \dot{R}_X(\xi_3) = g_1 R_X(\xi_1 - \xi_3) + g_2 R_X(\xi_1 - \xi_2) + g_3 R_X(0) + \dots + g_m R_X(\xi_m - \xi_3) \\ \dots \\ \dot{R}_X(\xi_m) = g_1 R_X(\xi_m - \xi_1) + g_2 R_X(\xi_m - \xi_2) + g_3 R_X(\xi_m - \xi_3) + \dots + g_m R_X(0) \end{cases} \quad (29)$$

L'osservazione del sistema di equazioni riportato nell'Eq.(29) confrontata con quella del sistema riportato nell'Eq.(10) mostra che selezionando gli istanti $\xi_j = t_j$ i due sistemi di equazioni coincidono. Inoltre sostituendo l'approssimazione della funzione di modulazione riportata nell'Eq.(27) nell'Eq.(15), si ottiene esattamente l'equazione del filtro ARC che quindi è un caso particolare del filtro I-ARC presentato in questa sezione.

4. APPLICAZIONI NUMERICHE

In questa sezione il modello I-ARC utilizzato per descrivere il processo Gaussiano della velocità del vento verrà applicato ad un processo $X(t)$ che rappresenta la turbolenza, ovvero la fluttuazione rispetto al valor medio della velocità del vento, descritta mediante la PSD (Kaimal J.C. *et al.*, 1972):

$$S_X(\omega) = \frac{200}{4\pi} \frac{v^* z_0}{\bar{v}} \left(\frac{1}{1 + 50|\omega|z_0/(2\pi\bar{v})} \right)^{5/3} \quad (30)$$

essendo z_0 l'altezza a cui è stata misurata la velocità media del vento, \bar{v} il valore della velocità media, v^* un coefficiente di riduzione della velocità $X(t)$ che dipende dall'altezza a cui è posto l'oscillatore elementare e dalla velocità media secondo la relazione: $v^* = 0.4\bar{v}/\ln(z_0/k)$ essendo k un coefficiente che tiene in conto la rugosità del sito in cui viene caratterizzata la turbolenza della velocità media del vento. La funzione di autocorrelazione del processo $X(t)$, $R_X(\tau)$ ottenuta per trasformata di Fourier della funzione PSD nell'eq.(28) e la funzione PSD $S_X(\omega)$ sono state riportate a tratto continuo nelle fig.(1a) e fig.(1b) rispettivamente. La rappresentazione digitale del processo velocità del vento con il modello I-ARC è stata condotta considerando diversi ordini di approssimazione del modello I-ARC. Gli istanti scelti per caratterizzare il processo I-ARC ed i valori dei coefficienti corrispondenti sono stati riportati nella tab.1 per ordini del modello $m = 10$, $m = 40$. Nelle fig.(1a, b) sono state riportate le approssimazioni ottenute con il modello I-ARC del processo velocità del vento obiettivo con linea discontinua. In questi grafici può essere osservato che all'aumentare dell'ordine di approssimazione del filtro I-ARC, migliora la rappresentazione della PSD e della funzione di correlazione. Tuttavia, a causa della presenza di una discontinuità nella derivata prima all'origine della funzione PSD nell'eq.(28) e della funzione di correlazione $R_X(\tau)$ per ottenere una buona rappresentazione della funzione di autocorrelazione e DSP occorre aumentare l'ordine m .

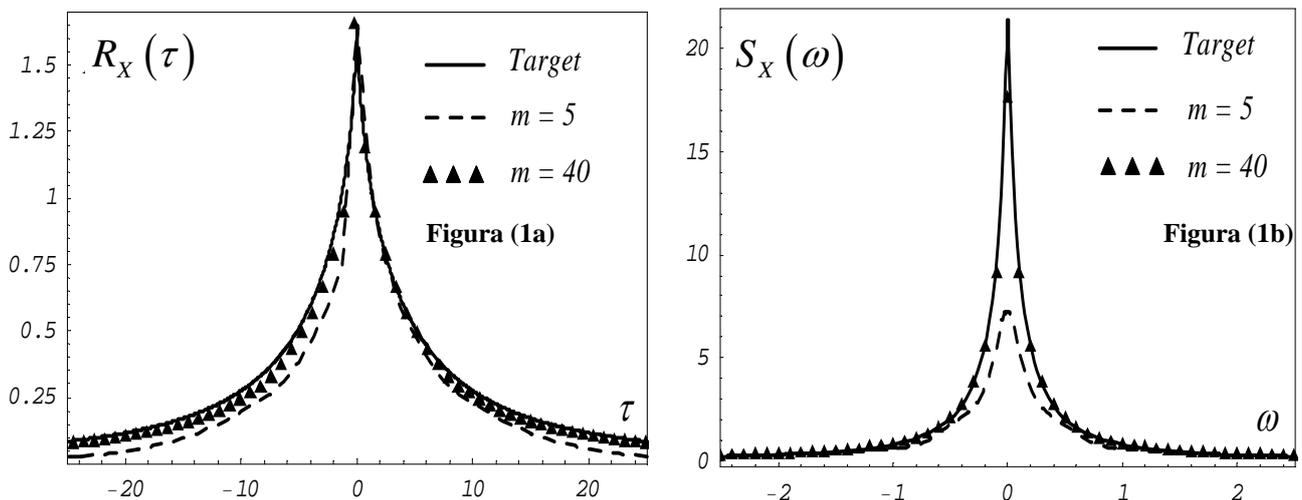


Figura 1: 1a) Funzione di autocorrelazione obiettivo (linea continua) confrontata con la funzione di correlazione del modello ARC con $m=10$ (linea tratteggiata) e $m=40$ (triangoli); 1b) Funzione PSD obiettivo (linea continua) confrontata con la PSD del modello ARC con $m=10$ (linea tratteggiata) e $m=40$ (triangoli).

5. CONCLUSIONI

In questo studio è stato proposto un metodo per la rappresentazione di processi aleatori stazionari e Gaussiani denominato modello I-ARC che rappresenta una evoluzione del filtro autoregressivo

continuo ARC, già proposto dagli autori in studi precedenti. La descrizione del processo velocità del vento viene ottenuta integrando una equazione integro-differenziale lineare con termini di retroazione in presenza di un rumore bianco Gaussiano. Lo studio ha mostrato che il modello I-ARC può essere utilizzato efficacemente anche per descrivere campi aleatori rappresentativi della turbolenza della velocità del vento, caratterizzata da una funzione densità spettrale di potenza con discontinuità nella derivata prima.

E' stato mostrato che il modello I-ARC proposto fornisce, in alcuni casi particolari, statistiche del secondo ordine coincidenti con le statistiche del processo obiettivo. Tuttavia, nei casi di pratico interesse ingegneristico si è stato mostrato che è necessario utilizzare una forma approssimata del filtro I-ARC che coincide con il filtro ARC precedentemente discusso dagli autori.

Le applicazioni numeriche riportate hanno mostrato l'importanza dell'ordine di approssimazione del modello I-ARC utilizzato e degli istanti a cui vengono calcolati i termini di retroazione sull'errore introdotto con la rappresentazione I-ARC della turbolenza della velocità del vento.

m = 10		m = 40		m = 40		m = 40		m = 40	
t_j	c_j	t_j	c_j	t_j	c_j	t_j	c_j	t_j	c_j
10^{-6}	-701.14	10^{-17}	$-1.27 \cdot 10^{15}$	10^{-4}	$1.31 \cdot 10^6$	3.0	53.2	38	0.88
10^{-2}	699.04	10^{-15}	$1.12 \cdot 10^{15}$	10^{-3}	$2.0 \cdot 10^5$	5.0	57.99	39	2.24
0.5	17.646	10^{-14}	$1.28 \cdot 10^{14}$	10^{-2}	$2.87 \cdot 10^4$	10.	35.01	40.	0.71
1.0	3.603	10^{-13}	$2.02 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$5.12 \cdot 10^3$	15.	17.5	41.	4.34
1.5	1.435	10^{-11}	$8.34 \cdot 10^{11}$	10^{-1}	$2.24 \cdot 10^3$	20.	11.2	42.	-0.45
2.0	0.806	$5 \cdot 10^{-9}$	$6.94 \cdot 10^9$	$5 \cdot 10^{-1}$	$6.98 \cdot 10^2$	25.	7.70	43.	-3.31
2.5	0.566	10^{-8}	$1.82 \cdot 10^9$	1.0	$2.23 \cdot 10^2$	30.	4.00	44.	4.14
3.0	0.657	10^{-7}	$3.65 \cdot 10^8$	1.5	$1.05 \cdot 10^2$	32.	1.95	45.	3.49
5.0	0.715	10^{-6}	$5.56 \cdot 10^7$	2.0	62.9	34.	3.05	45.5	-5.17
10.	0.485	10^{-5}	$8.52 \cdot 10^6$	2.5	45.7	36.	1.28	46.	5.06

Tabella 1: Istanti scelti e coefficienti del modello ARC di ordine $m = 10$ ed $m = 40$

6. BIBLIOGRAFIA

- Di Paola M., Zingales M. (2008). Stochastic Differential Calculus for Wind-Exposed Structures via Autoregressive Continuous Filters (ARC), *Journal of wind Engineering & Industrial Aerodynamics*, 96, pp.2403-2417.
- Di Paola M., Pirrotta A. (2004). Direct Derivation of Corrective Terms in SDE Through Nonlinear Transformation on Fokker-Planck Equation, *Non-Linear Dynamics*, Vol. 36(2), pp.349-360.
- Kaimal J.C., Wingard J.C., Izumi Y., Cote O.R. (1972). Spectral characteristic of surface layer turbulence, *Journal of Royal Meteorological Society*, Vol. 98, pp. 563-589.
- Maeda J. Makino M., (1992), Characteristics of gusty winds simulated by A.R.M.A. model, *J. of Wind Eng. & Ind. Aer.*, Vol.41 (1-3), pp.427-436.
- Mignolet P. M. , Spanos P. D. (1991). Autoregressive spectral modeling: Difficulties and remedies, *International journal of non-linear mechanics*, Vol.26 (6), pp. 911-930.
- Samaras E., Shinozuka M. (1985). ARMA representation of random process, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 111 (3), pp. 449-461.
- Smith D.A., Mehta K.C., (1993), Investigations of stationary and nonstationary wind data using the classical Box-Jenkins models, *J. of Wind Eng. & Ind. Aer.*, Vol. 49 (1-3), pp. 319-328.