

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Erki Külaots

**Gravitatsiooniline kolme keha ülesanne
ja mõned selle erilahendid**

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Urve Kangro, PhD

TARTU 2022

GRAVITATSIOONILINE KOLME KEHA ÜLESANNE JA MÕNED SELLE ERILAHENDID

Bakalaureusetöö

Erki Külaots

Lühikokkuvõte

Selles töös tutvume Newtoni teise ja kolmanda seadusega ning gravitatsiooniseadusega. Tuletame nendest jäävuse seaduseid. Püstitame Kepleri ülesande ning kahe, kolme ja N keha ülesanded. Lõpuks uurime nende lahendeid: Kepleri ja kahe keha ülesande üldlahendit ning kolme keha ülesande jaoks Euleri ja Lagrange'i lahendeid ning kaheksakujulist lahendit.

CERCS teaduseriala: P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

Märksõnad: gravitatsioon, kolme keha ülesanne, kahe keha ülesanne, Kepleri ülesanne, Euleri lahendid, Lagrange'i lahendid, kaheksakujuline lahend

GRAVITATIONAL THREE BODY PROBLEM AND SOME OF ITS SOLUTIONS

Bachelor thesis

Erki Külaots

Abstract

In this article we formulate Newton's first and second law of motion and his law of gravity. From them we derive the laws of conservation and formulate the Kepler problem and the two-, the three- and the N -body problem. Finally, we deduce the general solutions for the Kepler problem and the two-body problem and investigate the Euler, the Lagrange and the figure-eight solutions.

CERCS research specialisation: P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

Key Words: gravitation, three body problem, two body problem, Kepler problem, Euler's solutions, Lagrange's solutions, Figure-eight solution

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Kehade liikumine gravitatsioonijõu mõjul	4
1.1 Newtoni gravitatsiooniseadus	4
1.2 Jäätvuseeadused	5
2 Kahe keha ülesanne	9
3 Kolme keha ülesanne ja selle lihtsamad lahendid	16
3.1 Euleri lahend	17
3.2 Lagrange'i lahend	24
4 Kaheksakujuline lahend	29
4.1 Kaheksakujulise trajektoori algebraline kuju	33
4.1.1 Gerono lemniskaat	33
4.1.2 Bernoulli lemniskaat	34
4.1.3 Procluse hippopede	35
4.1.4 Joonte võrdlus	39
Viited	41

Sissejuhatus

Kolme keha ülesanne (inglise keeles tuntud kui *three body problem*) on kuulus ülesanne, milles üritatakse leida kolme keha liikumisvõrrandeid, kui need alluvad Newtoni gravitatsiooniseadustele. Sisuliselt on tegu diferentsiaalvõrrandite lahendamisega. Ajalooliselt tegelesid sellega Newton, Lagrange, Euler, Poincarè ja mitmed teised suured matemaatikud. Poincarè jõudis tulemuseni, et selline diferentsiaalvõrrandite süsteem on tugevalt kaootiline ehk väiksemadki muudatused algandmetes muudavad tulemust suurel määral. Just kolme keha ülesanne oligi ajendiks, mis viis Poincarèd looma kaoseteooriat.

Kolme keha ülesande tähtsus tavaelus oli Kuu, Maa ja Päikse kui ühtse süsteemi uurimine eesmärgiga ennustada Kuu liikumist tähistaevas, et merel seilates oleks võimalik lihtsamalt ja täpsemalt määrata pikkuskraade. [7]

Teine tähtis praktiline küsimus, mida N keha ülesanne (üldistus kahe ja kolme keha ülesandele) üritab lahendada, on see, kas Päikesesüsteem on stabiilne. Kas ta püsib sellises paigutuses nagu ta praegu on või siis näiteks mõni planeet lahkub Päikesesüsteemist või toimub suur kokkupõrge, nagu Maa algusaastail toimus? Päikesesüsteemi saab mudeldada kui 10 keha ülesannet, kus on üks suur keha ja 9 väiksemat. Stabiilsuse uuringud sellistes dünaamilistes süsteemides viisid KAM teooria loomiseni 20. sajandi keskel Kolmogorovi, Arnoldi ja Moseri poolt. [3]

Esimeses peatükis sõnastame Newtoni teise ja kolmanda seaduse ning gravitatsiooniseaduse. Jäätuseaduste alapeatükis tõestame impulsi, energia ja impulsimomendi jäävuse seadused. Teises peatükis tuletame kahe keha ülesande üldlahendi trajektoori ja seejuures Kepleri ülesande üldlahendi trajektoori. Kolmandas peatükis püstitame kolme keha ülesande ning uurime Euleri ja Lagrange'i lahendeid. Neljandas peatükis tutvustame kaheksakujulist lahendit ja võrdleme selle trajektoori algebralisi lähendeid.

1 Kehade liikumine gravitatsioonijõu mõjul

Selles peatükis vaatame mõningaid tulemusi, mis järelduvad Newtoni seadustest ja tutvume N keha ülesandega. See peatükk põhineb Knudseni ja Hjorthi kirjutatud raamatul [6].

1.1 Newtoni gravitatsiooniseadus

Newtoni gravitatsiooniseadus ütleb, et kehale mõjuv gravitatsioonijõud on võrdeline tema massiga ja teise keha massiga ning pöördvõrdeline nende kehade vahelise kauguse ruuduga. Niisiis punktmassi j mõju punktmassile i on leitav valemiga

$$\vec{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} = G \frac{m_i m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{r_{ij}^3},$$

kus G on gravitatsioonikonstant, m_i on keha i mass, m_j on keha j mass, \vec{x}_i keha i kohavektor, \vec{x}_j keha j kohavektor ja r_{ij} kehade i ja j vaheline kaugus. Newtoni teisest seadusest saame, et kui kehale i mõjub jõud \vec{F}_i , siis tema impulsi tuletis aja järgi väljendub kujul

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i,$$

kus \vec{p}_i on keha i impulss. Olgu meil mass fikseeritud, siis me saame siit valemist avaldada

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2}.$$

Kui kehale i mõjuvad ainult gravitatsioonijõud, siis kogu temale mõjuv jõud F_i on temale mõjuvate gravitatsioonijõudude summa

$$\vec{F}_i = \sum_{i \neq j} G \frac{m_i m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{r_{ij}^3}.$$

Seega saame diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\sum_{i \neq j} G \frac{m_i m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{r_{ij}^3} = m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Definitsioon 1.1. N keha ülesandeks nimetatakse ülesannet, milles meile antakse ette algtingimused $\vec{x}_i(0)$ ja $\frac{d\vec{x}_i}{dt}(0)$, kus $i = 1, \dots, N$ ning peame lahendama diferentsiaalvõrrandite süsteemi (1), et leida liikumisvõrrandid \vec{x}_i iga i jaoks.

1.2 Jäävuseeadused

Olgu meil n keha ja nendevahelised jõud \vec{F}_{ij} , kus $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ja \vec{F}_{ij} on keha j mõju kehale i . Newtoni kolmas seadus ütleb, et kui keha i avaldab kehale j jõudu \vec{F}_{ij} , siis keha j avaldab kehale i jõudu $-\vec{F}_{ij}$ ehk $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$.

Kasutades Newtoni teist seadust saame, et keha i impulsi muutumise kiirus avaldub kujul

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}.$$

Kui me liidame kokku kõikide kehade impulsside muutumise kiirused, siis me saame

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} \vec{F}_{ij} + \sum_{j=i+1}^n \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \vec{F}_{ij}.$$

Vahetame summas $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \vec{F}_{ij}$ tähistused ümber ja saame $\sum_{j=1}^n \sum_{i=j+1}^n \vec{F}_{ji}$. Muudame summeerimisjärjekorda, et saada $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{F}_{ji}$. Asendame selle tagasi võrrandisse ja saame

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) = 0.$$

Seega kui kehade süsteemile ei mõju väliseid jõude, siis kehade impulsside summa muutumise kiirus on 0.

Teoreem 1.2 (Impulsi jäävuse seadus). *Kui kehade süsteemile ei mõju väliseid jõude, siis selle süsteemi kogumimpulss on konstantne.*

Defineerime massikeskme.

Definitsioon 1.3. Massikesk on punkt, mille kohavektor R_{CM} on defineeritud võrrandiga

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (2)$$

kus \vec{x}_i on i -nda keha kohavektor ja m_i tema mass.

Võtame võrrandist (2) tuletise aja järgi ja saame

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

kus \vec{v}_{CM} on massikeskme kiirus ja \vec{v}_i i -nda keha kiirus. Teoreemist 1.2 teame, et kui süsteemile ei mõju väliseid jõude, siis $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ on konstant. Kuna $\sum_{i=1}^n m_i$ on samuti konstant, siis massikeskme kiirus on seda ka.

Järeldus 1.4. *Kui kehade süsteemile ei mõju väliseid jõude, siis selle süsteemi massikese liigub ühtlase kiirusega.*

Järgmiseks üritame näidata energia jäävuse seaduse kehtivust, kui kehadevahelised jõud F_{ij} on ainult gravitatsioonijõud. Võtame diferentsiaalvõrrandite süsteemi (1) ja korrutame igat võrrandit vastava kiirusega $\frac{d\vec{x}_i}{dt}$ ning saame

$$m_i \frac{d\vec{x}_i}{dt} \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = G \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \frac{d\vec{x}_i}{dt}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Liidame need võrrandid kokku

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{x}_i}{dt} \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = G \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \frac{d\vec{x}_i}{dt}.$$

Eelnevat võrdust saab kirjutada teisiti kujul

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right|^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \right). \quad (3)$$

Veendume selles. Esiteks leiame vasaku poole

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right|^2 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{x}_i}{dt} \cdot \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{x}_i}{dt} \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2}.$$

Nüüd leiame parema poole

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \right) = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \right) = \\ & = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i m_j}{\sqrt{(\vec{x}_j - \vec{x}_i) \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}} \right) = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n - \frac{m_i m_j \frac{d}{dt} ((\vec{x}_j - \vec{x}_i) \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i))}{2 \sqrt{(\vec{x}_j - \vec{x}_i) \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}^3} = \\ & = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n - \frac{m_i m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i) \frac{d}{dt} (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \left(\frac{d\vec{x}_j}{dt} - \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right) = \\ & = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{m_i m_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3} \frac{d\vec{x}_j}{dt} + \frac{m_i m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right) = G \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \frac{d\vec{x}_i}{dt}. \end{aligned}$$

Seega võrrand (3) kehtib ja integreerides seda saame seose

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right|^2 = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} + E, \quad (4)$$

kus E on integreerimiskonstant. Kui $K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left| \frac{d\vec{x}_i}{dt} \right|^2$ ja $U = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|}$, siis saame seose $K - U = E$. Suurust K kutsume kineetiliseks energiaks, suurust $-U$ potentsiaal-seks energiaks ja suurust E mehaaniliseks koguenergiaks.

Teoreem 1.5 (Energia jäävuse seadus). *Kui kehade süsteemile ei mõju väliseid jõude ja nende vahel on ainult gravitatsioonijõud, siis süsteemi mehaaniline koguenergia on konstantne.*

Viimaseks näitame, et meie süsteemi puhul kehtib impulsimomendi jäävuse seadus.

Definitsioon 1.6. Me nimetame keha impulsimomendiks vektorit

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{l} \times m \vec{v},$$

kus \vec{r} on keha kohavektor, \vec{p} impulss, \vec{v} kiirus ja m mass.

Võttes keha impulsimomendist tuletise aja järgi, saame

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Kuna \vec{v} ja \vec{p} on kollineaarsed, siis nende vektorkorrutis on 0. Newtoni teisest seadusest teame, et $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, seega saame, et

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M},$$

kus suurust \vec{M} nimetatakse jõumomendiks.

Teoreem 1.7. *Keha impulsimomendi muutumise kiirus on võrdne sellele kehale mõjuva jõumomendiga.*

Vaatame nüüd kehade süsteemi. Olgu meil selline süsteem, kus on n keha ja nendevahelised jõud. Newtoni kolmandast seadusest teame, et kehade i ja j ($i \neq j$) puhul kehtib $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Keha i impulsimomendi muutumise kiirus väljendub kujul

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i = \sum_{j \neq i} \vec{M}_{ij} = \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}.$$

Liidame kõik impulsimomendi muutumise kiirused kokku, käitume analoogselt impulsi jäävuse seaduse tõestusega ja saame

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{j=i+1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{L}_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=j+1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji},$$

Nimetame eelmise võrrandi viimases summas muutujad ümber ja muudame liidetavate järjekorda. Nii tehes saame

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{L}_i \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}, \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}. \end{aligned}$$

Kuna vektorid $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ja \vec{F}_{ij} on kollineaarsed, siis $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = 0$.

Teoreem 1.8 (Impulsimomendi jäävuse seadus). *Kui süsteemile ei mõju väliseid jõude, siis kehade impulsimomentide summa ehk süsteemi impulsimoment on konstantne.*

Oleme nüüd näidanud, et kehtivad impulsi, energia ja impulsimomendi jäävuse seadused ja saame neid kasutada järgnevates peatükkides.

2 Kahe keha ülesanne

See peatükk põhineb Knudseni ja Hjorthi kirjutatud raamatul [6].

Kahe keha ülesanne, nagu nimigi ütleb, on N keha ülesande erijuht, kus $N = 2$. Seega meil on kahe võrrandiga diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{aligned}m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} &= G \frac{m_1 m_2 (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{r_{12}^3}, \\m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} &= G \frac{m_1 m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{r_{21}^3}.\end{aligned}$$

Kuna meie süsteemile ei mõju väliseid jõude, siis järeldus 1.4 väidab, et tema massikeske kas püsib paigal või liigub sirgjooneliselt ühtlase kiirusega. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et nende kehade massikeske on koordinaatide alguspunktis ehk

$$m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = 0.$$

See tähendab, et me võtame oma ülesandes taustsüsteemiks nende kehade massikeskme. Kui uus taustsüsteem liigub absoluutse ruumi suhtes sirgjooneliselt ja ühtlase kiirusega, siis klassikalises mehaanikas võime muuta oma taustsüsteemi selleks uueks taustsüsteemiks, sest Newtoni seadused kehtivad uues süsteemis samamoodi, nagu vanas. Tähistame $\vec{r} := \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ja $r := r_{12} = r_{21} = |\vec{r}|$. Jagades mõlemad võrrandid läbi vastavate massidega, saame

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} &= -G \frac{m_2 \vec{r}}{r^3}, \\ \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} &= G \frac{m_1 \vec{r}}{r^3}.\end{aligned}$$

Lahutame ühest võrrandist teise, saame

$$\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{(m_1 + m_2) \vec{r}}{r^3}.$$

Suutsime taandada algsed kaks diferentsiaalvõrrandit üheks, mille kuju sarnaneb algsetele. Oleme saanud kahe keha ülesandest Kepleri ülesande, kus esimese keha mass on $m_1 + m_2$ ja teise oma 1 massiühik.

Definitsioon 2.1. Kepleri ülesandeks nimetatakse ülesannet, kus meil on üks keha, mis püsib statsionaarsena, ja teine keha, mis liigub esimese keha gravitatsiooniväljas. Eesmärgiks on leida teise keha liikumistrajektoor.

Olgu $C := -G(m_1 + m_2)$, siis meie uus ülesanne on kujul

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{C}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Lemma 2.2. *Kepleri ülesanne on tasandiline ülesanne.*

Tõestus. Olgu meil Kepleri ülesanne, siis meil on algselt määratud punkt A , kus asub stationaarne keha, punkt B , kus asub liikuv keha, ja liikuva keha kiirusvektor \vec{v} .

Olgu \vec{OA} punkti A kohavektor ja \vec{OB} punkti B kohavektor. Defineerime $\vec{u} := \vec{OB} - \vec{OA}$, siis vektorid \vec{v} ja \vec{u} määravad üheselt tasandi π , kui nad ei ole kollineaarsed. Jõud mõjub liikuvale kehale vektoriga \vec{u} samas suunas, seega selle jõu poolt indutseeritud kiirendus on samuti tasandil π ja seega \vec{v} on ka alati tasandil π . Kui \vec{v} ja \vec{u} on kollineaarsed, siis nad asuvad lausa ühel joonel ja samal joonel olev kiirendus ei saa muuta kiirusvektori suunda. \square

Kuna kahe keha ülesanne taandub Kepleri ülesandele, siis kehtib järgmine tulemus.

Järeldus 2.3. *Kahe keha ülesanne on tasandiline ülesanne.*

Kuna Kepleri ülesanne on tasandiline, siis lähme üle polaarkoordinaatidele. Olgu koordinaatide alguspunkt poolus ja olgu polaartelg suunatud vektoriga \vec{r} samas suunas. Olgu θ polaarnurk. Märkigu täpp muutuja kohal tuletist aja järgi ja kaks täppi kahekordset tuletist aja järgi. Kiirenduse saame nüüd kirjutada kujul

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} \vec{e}_\theta,$$

kus $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ on ühikvektor suunatud pikki raadiust ja \vec{e}_θ on ühikvektor, mis on risti raadiuse vektoriga. Järgmisena saame kirja panna meie ülesande komponenthaval

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{C}{r^2}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0. \tag{6}$$

Võrrandist (6) saame

$$\begin{aligned} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} &= 0, \\ r^2\dot{\theta} &= L, \\ \dot{\theta} &= \frac{L}{r^2}, \end{aligned} \tag{7}$$

kus L on konstant. Asendame selle võrrandisse (5)

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r \left(\frac{L}{r^2} \right)^2 &= \frac{C}{r^2}, \\ \ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} &= \frac{C}{r^2}.\end{aligned}$$

See diferentsiaalvõrrand on analüütiliselt lahenduv, aga annab lahendiks polaarraadiuse sõltuvuse ajast ilmutamata kujul. Sellisel kujul on raske midagi „mõistlikku“ sellest võrrandist järeldada, seega uurime edaspidi hoopis keha trajektoori ehk polaarraadiuse sõltuvust polaar-nurgast:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{r^2}, \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{L}{r^2} \right) = L \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{dr}{d\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] = \\ &= L \left[\frac{d^2r}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{r^2} - 2 \frac{dr}{d\theta} \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dt} \right] = \frac{L^2}{r^4} \left[\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (8)$$

Olgu $u(\theta) = 1/r(\theta)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}, \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{dr}{d\theta} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (9)$$

Asendades (9) võrrandisse (8) saame

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Selle abil saame uue diferentsiaalvõrrandi

$$\begin{aligned}-\frac{L^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2}{r^3} &= \frac{C}{r^2}, \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{C}{L^2}.\end{aligned}$$

See on konstantsete kordajatega lineaarse diferentsiaalvõrrandi. Leiame selle karakteristikud väärtused

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

Veel paneme tähele, et sellel võrrandil on erilahend kujul $u^* = -\frac{C}{L^2}$. Seega saame järeldada,

et selle võrrandi üldlahend on

$$u = \frac{1}{r} = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta - \frac{C}{L^2}.$$

Proovime seda lahendit teisendada nii, et me saame tuttavama kuju. Olgu $C_1 = A \cos \varphi$ ja $C_2 = A \sin \varphi$. Sellest saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta - \frac{C}{L^2} = A \cos \varphi \cos \theta + A \sin \varphi \sin \theta - \frac{C}{L^2} = A \cos(\theta - \varphi) - \frac{C}{L^2}, \\ r &= \frac{1}{A \cos(\theta - \varphi) - \frac{C}{L^2}} = \frac{1}{-\frac{C}{L^2} \left(1 - \frac{AL^2}{C} \cos(\theta - \varphi)\right)} = \frac{-\frac{L^2}{C}}{1 - \frac{AL^2}{C} \cos(\theta - \varphi)}. \\ r &= \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta'}, \end{aligned} \tag{10}$$

kus $\theta' = \theta - \varphi$, ε on ekstsentrilisus ja p fokaalparameeter. Analüütilisest geomeetriast on teada, et tegu on üldise koonuslõike võrrandiga polaarkoordinaatides [8]. Meie juhul $\varepsilon = \frac{AL^2}{C}$, $p = -\frac{L^2}{C}$ ja tänu parameetrile φ on meie koonuselõige pööratud polaartelje suhtes φ võrra. Pöörame oma polaartelge φ võrra vastupäeva ümber koordinaatide alguspunkti ja saame uues polaarkoordinaatide süsteemis ilma φ variandi ehk võtame $\varphi = 0$. Konstantidele L ja A on võimalik leida füüsikalised tähendused, aga meid huvitab hetkel ainult orbiidi kuju.

Veel teame analüütilisest geomeetriast, et ekstsentrilisusest sõltub, kas meil on tegu ellipsi, parabooli või hüperbooliga [8].

1. Kui $|\varepsilon| < 1$, siis meie kujuteldav keha liigub ellipsil. Erijuhuna, kui $\varepsilon = 0$, siis on tegu ringiga.
2. Kui $|\varepsilon| > 1$, siis meie kujuteldav keha liigub hüperboolil.
3. Kui $|\varepsilon| = 1$, siis meie kujuteldav keha liigub paraboolil.

Leidsime lahendi Kepleri ülesandele, aga meie algne ülesanne oli kahe keha ülesanne. Meenu-tame, et $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ja $m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = 0$. Sellest saame, et

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= -\frac{m_2 \vec{x}_2}{m_1}, \\ \vec{r} &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = -\frac{m_2 \vec{x}_2}{m_1} - \vec{x}_2 = \left(-1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \vec{x}_2, \\ r_2 &= \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{\frac{p}{1 + \frac{m_2}{m_1}}}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{p_2}{1 - \varepsilon \cos \theta}, \\ \vec{x}_2 &= (-r_2 \cos \theta, -r_2 \sin \theta), \end{aligned} \tag{11}$$

ja

$$\begin{aligned}
 \vec{x}_2 &= -\frac{m_1 \vec{x}_1}{m_2}, \\
 \vec{r} &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \frac{m_1 \vec{x}_1}{m_2} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{x}_1, \\
 r_1 &= \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{\frac{p}{1 + \frac{m_1}{m_2}}}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{p_1}{1 - \varepsilon \cos \theta}, \\
 \vec{x}_1 &= (r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta).
 \end{aligned} \tag{12}$$

\vec{x}_1 on vektoriga \vec{r} samasuunaline ja $1 + \frac{m_1}{m_2}$ korda lühem. \vec{x}_2 on vektoriga \vec{r} vastassuunaline ja $1 + \frac{m_2}{m_1}$ korda lühem.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et kahe keha ülesanne on analüütiliselt lahenduv selles võtmes, et me saame leida kehade trajektoori sõltuvalt polaarnurgast, ja mõlemad kehad liiguvad massikeskme suhtes mingil koonuselõikel.

Lõpuks üritame leida polaarnurga sõltuvust ajast. Selleks saame kasutada võrrandeid (7) ja (10). Neist saame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\left(\frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}\right)^2}. \tag{13}$$

See on eralduvate muutujatega võrrand

$$\frac{d\theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{L}{p^2} dt.$$

Lahendame selle võrrandi

$$\int \frac{d\theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta)^2} = \int \frac{L}{p^2} dt = \frac{L}{p^2} t + C_2,$$

kus C_2 on integreerimiskonstant. Peame leidma integraali

$$\int \frac{d\theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta)^2}.$$

Kasutame muutuja vahetust

$$\begin{aligned}
 y &= \tan \frac{\theta}{2}, \\
 dy &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta.
 \end{aligned}$$

Selle ja teadmiste, et $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$ ja $-\cos \theta = 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$, abil saame

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta)^2} &= \int \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{(1 + \varepsilon (1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}))^2} dy = \int \frac{2 \frac{1}{1+y^2}}{\left(1 + \varepsilon \left(1 - 2 \frac{1}{1+y^2}\right)\right)^2} dy = \\
&= \int \frac{2}{(1+y^2) \left(1 + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{1+y^2}\right)^2} dy = \int \frac{2(1+y^2)}{((1+\varepsilon)(1+y^2) - 2\varepsilon)^2} dy = \\
&= \int \frac{2(1+y^2)}{((1-\varepsilon) + y^2(1+\varepsilon))^2} dy = \\
&= 2 \int \left(\frac{1}{(1+\varepsilon)((1-\varepsilon) + y^2(1+\varepsilon))} + \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)((1-\varepsilon) + y^2(1+\varepsilon))^2} \right) dy = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \int \left(\frac{1}{1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} y^2} + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon) \left(1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} y^2\right)^2} \right) dy,
\end{aligned}$$

kus $\varepsilon \neq 1$ ega $\varepsilon \neq -1$. Nüüd meil tuleb vaadata nelja erijuhtu olenevalt ε väärtusest. Teame, et ε väärtusest sõltub koonuslõike kuju.

1. Kui $|\varepsilon| > 1$, siis

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{1-\varepsilon^2} \int \left(\frac{1}{1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} y^2} + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon) \left(1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} y^2\right)^2} \right) dy = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \int \left(\frac{1}{1 - \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} y\right)^2} + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon) \left(1 - \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} y\right)^2\right)^2} \right) dy = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} y\right)}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}}} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left(\frac{y}{1 - \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} y^2} + \frac{\operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} y\right)}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \right) \right) + const = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \left(-\frac{\operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} y\right)}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} (\varepsilon-1)} + \frac{\varepsilon y}{(1-\varepsilon) + (\varepsilon+1) y^2} \right) + const = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \left(-\frac{\operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tan \frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} (\varepsilon-1)} + \frac{\varepsilon \tan \frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon) + (\varepsilon+1) \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) + const.
\end{aligned}$$

Seega diferentsiaalvõrrandi (13) lahend ilmutamata kujul on

$$\frac{2}{1-\varepsilon^2} \left(-\frac{\operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tan \frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} (\varepsilon-1)} + \frac{\varepsilon \tan \frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon) + (\varepsilon+1) \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{L}{p^2} t + C_2.$$

2. Kui $|\varepsilon| < 1$, siis

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{1-\varepsilon^2} \int \left(\frac{1}{1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}y^2} + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)\left(1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}y^2\right)^2} \right) dy = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \int \left(\frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}y\right)^2} + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)\left(1 + \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}y\right)^2\right)^2} \right) dy = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}y\right)}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left(\frac{y}{1 + \frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}y^2} + \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}y\right)}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}} \right) \right) + const = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}y\right)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon y}{(1-\varepsilon) + (\varepsilon+1)y^2} \right) + const = \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon \tan\frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon) + (\varepsilon+1)\tan^2\frac{\theta}{2}} \right) + const.
\end{aligned}$$

Analoogiliselt eelmisega saame siit leida diferentsiaalvõrrandi lahendi.

3. Kui $\varepsilon = 1$, siis

$$\begin{aligned}
& \int \frac{2(1+y^2)}{((1-\varepsilon) + y^2(1+\varepsilon))^2} dy = \int \frac{2(1+y^2)}{(2y^2)^2} dy = \int \frac{1+y^2}{2y^4} dy = \\
&= -\frac{1}{6y^3} - \frac{1}{2y} + const = \frac{-1-3y^2}{6y^3} + const = \frac{-1-3\tan^2\frac{\theta}{2}}{6\tan^3\frac{\theta}{2}} + const.
\end{aligned}$$

Analoogiliselt esimese juhuga saame leida diferentsiaalvõrrandi lahendi.

4. Kui $\varepsilon = -1$, siis

$$\begin{aligned}
& \int \frac{2(1+y^2)}{((1-\varepsilon) + y^2(1+\varepsilon))^2} dy = \int \frac{2(1+y^2)}{2^2} dy = \int \frac{1+y^2}{2} dy = \\
&= \frac{y}{2} + \frac{y^3}{3} + const = \frac{3y+y^3}{6} + const = \frac{3\tan\frac{\theta}{2} + \tan^3\frac{\theta}{2}}{6} + const. \quad (14)
\end{aligned}$$

Analoogiliselt esimese juhuga saame leida diferentsiaalvõrrandi lahendi.

Esimesel kahel juhul diferentsiaalvõrrandi lahendi ilmutatud kuju saamine tundub väga keeruline kui mitte võimatu. Teisel kahel juhul see on võimalik, sest meil on kuupvõrrandid, aga see näeks veel palju keerulisem välja, kui ta praegu on. See tähendab, et ilmutatud kujul me suvalise ε korral $\vec{x}_1(t)$ ja $\vec{x}_2(t)$ võrrandeid kätte ei saa, aga iga polaarnurga puhul meil on võimalik arvutada ajahetk, mil ta selles seisus on.

Kõige lihtsam erijuht on ringjoone erijuht ehk kui $\varepsilon = 0$. Sellisel juhul saame seose

$$\frac{2}{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{\arctan \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon \tan \frac{\theta}{2}}{(1 - \varepsilon) + (\varepsilon + 1) \tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) = \frac{L}{p^2} t + C_2,$$

$$\theta = \frac{L}{p^2} t + C_2.$$

See tähendab, et nurkkiirus on ühtlane. Asendades see tulemus nüüd võrranditesse (12) ja (11) saame

$$\vec{x}_1 = \left(-p_1 \cos \left(\frac{L}{p^2} t + C_2 \right), -p_1 \sin \left(\frac{L}{p^2} t + C_2 \right) \right),$$

$$\vec{x}_2 = \left(p_2 \cos \left(\frac{L}{p^2} t + C_2 \right), p_2 \sin \left(\frac{L}{p^2} t + C_2 \right) \right).$$

Seega kui valida kahe keha massid, asukohad ja kiirused parajalt nii, et $\varepsilon = 0$, siis saame leida lihtsalt lahendi.

3 Kolme keha ülesanne ja selle lihtsamad lahendid

Selles peatükis tutvustame kolme keha ülesannet ja uurime Euleri ja Lagrange'i lahendeid. See peatükk põhineb Krishnaswami ja Senapati artiklil [7] ja Euleri artikli tõlkel [1].

Kolme keha ülesandel puudub analüütiline lahend, mida saaks „tavaliste funktsioonide“ abil avaldada. Kuid 20. sajandi alguses suutis noor matemaatiliste kalduvustega Soome astronoom Karl Sundman leida lahendi astmereana $t^{\frac{1}{3}}$ suhtes. See rida koondub iga t korral, välja arvatud juhul, kui süsteemi impulsimoment on 0. See tulemus oli väga tähtis tol ajal, sest teised suured matemaatikud nagu Newton, Euler, Lagrange ja Poincaré ei saanud selle ülesandega hakkama ja arvasid, et selle lahendamiseks on vaja leiutada palju uut matemaatikat. Samas Sundmani rida koondub väga aeglaselt. Et leida, kuidas kehad liiguvad mingis mõistlikus ajavahemikus, on vaja arvutada suurusjärgus $10^{8000000}$ Sundmani rea liiget.

Kolme keha ülesande diferentsiaalvõrrandid on järgmised:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2 (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{r_{12}^3} + G \frac{m_1 m_3 (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)}{r_{13}^3}, \quad (15)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{r_{21}^3} + G \frac{m_2 m_3 (\vec{x}_3 - \vec{x}_2)}{r_{23}^3}, \quad (16)$$

$$m_3 \frac{d^2 \vec{x}_3}{dt^2} = G \frac{m_1 m_3 (\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{r_{31}^3} + G \frac{m_2 m_3 (\vec{x}_2 - \vec{x}_3)}{r_{32}^3}. \quad (17)$$

Järgnevat esitame mõned mainimisväärsed lihtsamad erilahendid.

3.1 Euleri lahend

Olgu meil tasandiline kolme keha ülesanne ehk olgu $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \in \mathbb{R}^2$. Sarnaselt kahe keha ülesandele eeldame, et koordinaatide alguspunkt asub kehade massikeskmes

$$m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + m_3\vec{x}_3 = 0. \quad (18)$$

Euleri lahendid on sellised lahendid, kus kolm keha on alati ühel joonel. See joon pöörleb ümber nende massikeskme ja kehade omavaheliste kauguste suhted on konstantsed ajas

$$\frac{r_{12}(t_1)}{r_{13}(t_1)} = \frac{r_{12}(t_2)}{r_{13}(t_2)}, \quad \frac{r_{12}(t_1)}{r_{23}(t_1)} = \frac{r_{12}(t_2)}{r_{23}(t_2)}, \quad \frac{r_{13}(t_1)}{r_{23}(t_1)} = \frac{r_{13}(t_2)}{r_{23}(t_2)}, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

See eeldab, et kaks keha ei asu samas punktis, mis on ainelistehade puhul mõistlik eeldus. Vastasel juhul on üks kaugustest võrdne nulliga. Kuna kehad on ühel joonel ja nad ei tohi üksteisest läbi minna, siis keskmine keha jääb alati keskmiseks ja äärmised äärmisteks. Olgu keha number 2 keskmine keha ja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ selline, et

$$\alpha := \frac{r_{23}}{r_{12}} = \frac{|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}.$$

Kuna vektorid $\vec{x}_3 - \vec{x}_2$ ja $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ on samasuunalised, siis saame

$$\vec{x}_3 - \vec{x}_2 = \alpha(\vec{x}_2 - \vec{x}_1). \quad (19)$$

Võrdusest (18) avaldame vektori

$$\vec{x}_3 = \frac{-m_1\vec{x}_1 - m_2\vec{x}_2}{m_3} \quad (20)$$

ja asendades ta võrdusesse (19), saame

$$\alpha(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \frac{-m_1\vec{x}_1 - m_2\vec{x}_2}{m_3} - \vec{x}_2.$$

Avaldame sellest vektori

$$\vec{x}_2 = \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2} \vec{x}_1 = k\vec{x}_1, \quad (21)$$

kus $k = \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2}$. Asendame nüüd võrduse (21) võrrandisse (20) ja avaldame vektori

$$\begin{aligned}\vec{x}_3 &= \frac{-m_1 - m_2 \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2}}{m_3} \vec{x}_1, \\ \vec{x}_3 &= \frac{-\alpha m_2 - (1 + \alpha)m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2} \vec{x}_1 = l \vec{x}_1,\end{aligned}$$

kus $l = \frac{-\alpha m_2 - (1 + \alpha)m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2}$.

Nüüd me saame võrrandi (15) jagada läbi massiga m_1 ja asendada sisse $\vec{x}_2 = k \vec{x}_1$ ja $\vec{x}_3 = l \vec{x}_1$.

Saame

$$\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = G \frac{m_2(k \vec{x}_1 - \vec{x}_1)}{|k \vec{x}_1 - \vec{x}_1|^3} + G \frac{m_3(l \vec{x}_1 - \vec{x}_1)}{|l \vec{x}_1 - \vec{x}_1|^3} = -G \left(\frac{m_2(1 - k)}{|1 - k|^3} + \frac{m_3(1 - l)}{|1 - l|^3} \right) \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}. \quad (22)$$

Uurime, kas $k < 1$ või $k > 1$ ($k \neq 1$, sest muidu $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, mis tähendaks, et kehad asuvad samas kohas)

$$\begin{aligned}k - 1 &= \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2} - 1 = \frac{-m_1 - m_2 - m_3}{(1 + \alpha)m_3 + m_2} < 0 \\ &k < 1.\end{aligned}$$

Seega $|k - 1| = 1 - k$. Järgmiseks uurime, kas $l < 1$ või $l > 1$ ($l \neq 1$, sest muidu $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, mis tähendaks, et kehad asuvad samas kohas). Paneme tähele, et

$$\frac{-\alpha m_2 - (1 + \alpha)m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2} < 0 < 1.$$

Seega $|l - 1| = 1 - l$. Nüüd saame jätkata võrrandiga (22)

$$\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = -G \left(\frac{m_2(1 - k)}{(1 - k)^3} + \frac{m_3(1 - l)}{(1 - l)^3} \right) \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = -G \left(\frac{m_2}{(1 - k)^2} + \frac{m_3}{(1 - l)^2} \right) \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}. \quad (23)$$

Võrrand (23) on samal kujul, nagu Kepleri ülesanne, kus $C = -G \left(\frac{m_2}{(1 - k)^2} + \frac{m_3}{(1 - l)^2} \right)$. Sellist ülesannet me oskame lahendada. Eeldame, et lahendasime ta ära ja kehtib võrrand (23). Kontrollime nüüd võrrandit

$$\frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = G \frac{m_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} + G \frac{m_3(\vec{x}_3 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|^3}.$$

Asendame sisse $\vec{x}_2 = k\vec{x}_1$ ja $\vec{x}_3 = l\vec{x}_1$

$$k \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = G \left(\frac{m_1(\vec{x}_1 - k\vec{x}_1)}{|\vec{x}_1 - k\vec{x}_1|^3} + \frac{m_3(l\vec{x}_1 - k\vec{x}_1)}{|l\vec{x}_1 - k\vec{x}_1|^3} \right) = G \left(\frac{m_1(1-k)}{(1-k)^3} - \frac{m_3(k-l)}{|k-l|^3} \right) \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}. \quad (24)$$

Uurime kas $k > l$ või $k < l$ ($k \neq l$, sest muidu $\vec{x}_2 = k\vec{x}_1 = l\vec{x}_1 = \vec{x}_3$, mis tähendaks, et kehad asuvad samas kohas)

$$k - l = \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1+\alpha)m_3 + m_2} - \frac{-\alpha m_2 - (1+\alpha)m_1}{(1+\alpha)m_3 + m_2} = \frac{\alpha(m_1 + m_2 + m_3)}{(1+\alpha)m_3 + m_2} > 0$$

$k > l.$

Seega $|k - l| = k - l$. Jätkame võrrandi (24) kontrollimist

$$\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \frac{G}{k} \left(\frac{m_1(1-k)}{(1-k)^3} - \frac{m_3(k-l)}{(k-l)^3} \right) \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = \frac{G}{k} \left(\frac{m_1}{(1-k)^2} - \frac{m_3}{(k-l)^2} \right) \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}. \quad (25)$$

Eeldasime siin, et $k = \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1+\alpha)m_3 + m_2} \neq 0$ ehk $\alpha \neq \frac{m_1}{m_3}$. Uurime seda juhtu hiljem.

Näeme võrranditest (23) ja (25), et kui kehtiks

$$\frac{G}{k} \left(\frac{m_1}{(1-k)^2} - \frac{m_3}{(k-l)^2} \right) = -G \left(\frac{m_2}{(1-k)^2} + \frac{m_3}{(1-l)^2} \right),$$

siis võrrandi (23) lahend rahuldaks ka võrrandit (25). Leiame tingimuse selleks

$$\frac{G}{k} \left(\frac{m_1}{(1-k)^2} - \frac{m_3}{(k-l)^2} \right) = -G \left(\frac{m_2}{(1-k)^2} + \frac{m_3}{(1-l)^2} \right),$$

$$\frac{m_3}{k(k-l)^2} - \frac{m_1}{k(1-k)^2} = \frac{m_2}{(1-k)^2} + \frac{m_3}{(1-l)^2},$$

$$m_1(k-l)^2(1-l)^2 + m_2k(k-l)^2(1-l)^2 + m_3k(k-l)^2(1-k)^2 - m_3(1-k)^2(1-l)^2 = 0.$$

Asendame sisse k ja l , kasutades teadmisi, et

$$1 - k = 1 - \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1+\alpha)m_3 + m_2} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{(1+\alpha)m_3 + m_2},$$

$$1 - l = 1 - \frac{-\alpha m_2 - (1+\alpha)m_1}{(1+\alpha)m_3 + m_2} = \frac{(1+\alpha)(m_1 + m_2 + m_3)}{(1+\alpha)m_3 + m_2},$$

$$k - l = \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1+\alpha)m_3 + m_2} - \frac{-\alpha m_2 - (1+\alpha)m_1}{(1+\alpha)m_3 + m_2} = \frac{\alpha(m_1 + m_2 + m_3)}{(1+\alpha)m_3 + m_2}.$$

Saame

$$m_1 \frac{(1+\alpha)^2 \alpha^2 (m_1 + m_2 + m_3)^4}{((1+\alpha)m_3 + m_2)^4} + m_2 \frac{(1+\alpha)^2 \alpha^2 (m_1 + m_2 + m_3)^4 (\alpha m_3 - m_1)}{((1+\alpha)m_3 + m_2)^5} +$$

$$+m_3 \frac{\alpha^2(m_1 + m_2 + m_3)^4(\alpha m_3 - m_1)}{((1 + \alpha)m_3 + m_2)^5} - m_3 \frac{(1 + \alpha)^2(m_1 + m_2 + m_3)^4}{((1 + \alpha)m_3 + m_2)^4} = 0.$$

Korrutame mõlemaid pooli avaldisega $\frac{((1 + \alpha)m_3 + m_2)^5}{(m_1 + m_2 + m_3)^4}$ ja saame

$$m_1(1 + \alpha)^2\alpha^2((1 + \alpha)m_3 + m_2) + m_2(1 + \alpha)^2\alpha^2(\alpha m_3 - m_1) + \\ + m_3\alpha^2(\alpha m_3 - m_1) - m_3(1 + \alpha)^2((1 + \alpha)m_3 + m_2) = 0.$$

Kui sulud avada, siis me saame järgneva võrrandi

$$m_1m_3\alpha^5 + m_2m_3\alpha^5 + 3m_1m_3\alpha^4 + 2m_2m_3\alpha^4 + 3m_1m_3\alpha^3 + m_2m_3\alpha^3 - \\ - m_2m_3\alpha^2 - 3m_3^2\alpha^2 - 2m_2m_3\alpha - 3m_3^2\alpha - m_2m_3 - m_3^2 = 0.$$

Jagame massiga m_3 ja koondame liikmed, siis saame

$$(m_1 + m_2)\alpha^5 + (3m_1 + 2m_2)\alpha^4 + (3m_1 + m_2)\alpha^3 - \\ - (m_2 + 3m_3)\alpha^2 - (2m_2 + 3m_3)\alpha - (m_2 + m_3) = 0. \quad (26)$$

Märgime, et samasuguse polünoomi võib leida ka Euleri enda tööst [1].

Teame tänu Descartes'ile, et kehtib Descartes'i märgireegel.

Teoreem 3.1 (Descartes'i märgireegel). *Reaalarvuliste kordajatega polünoomi*

$$f = f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

positiivsete juurte arv (kordsust arvestades) võrdub märgimuutude arvuga selle polünoomi kordajate jadas

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$$

või on sellest paarisarvu võrra väiksem.

Seega kuna polünoomil (26) on üks märgimuutus ja meil ei saa olla vähem kui 0 positiivset juurt, siis sellisel polünoomil peab olema täpselt 1 reaalne positiivne juur. Järelikult see eeldus on sobilik iga m_1, m_2, m_3 korral ning me saime võrrandi (24) kontrollitud juhul $\alpha \neq \frac{m_1}{m_3}$.

Uurime juhtu $\alpha \neq \frac{m_1}{m_3}$.

Lemma 3.2. *Polünoomi (26) korral $\alpha = \frac{m_1}{m_3}$ parajasti siis, kui $m_1 = m_3$.*

Tõestus. Esiteks eeldame, et $\alpha = \frac{m_1}{m_3}$. Siis polünoomist (26) saame

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2) \frac{m_1^5}{m_3^5} + (3m_1 + 2m_2) \frac{m_1^4}{m_3^4} + (3m_1 + m_2) \frac{m_1^3}{m_3^3} - \\
& \quad - (m_2 + 3m_3) \frac{m_1^2}{m_3^2} - (2m_2 + 3m_3) \frac{m_1}{m_3} - (m_2 + m_3) = 0, \\
& (m_1 + m_2)m_1^5 + (3m_1 + 2m_2)m_1^4 m_3 + (3m_1 + m_2)m_1^3 m_3^2 - \\
& \quad - (m_2 + 3m_3)m_1^2 m_3^3 - (2m_2 + 3m_3)m_1 m_3^4 - (m_2 + m_3)m_3^5 = 0, \\
& m_1^6 + (m_2 + 3m_3)m_1^5 + (3m_3^2 + 2m_2 m_3)m_1^4 + m_2 m_3^2 m_1^3 - \\
& \quad - (m_2 m_3^3 + 3m_3^4)m_1^2 - (2m_2 m_3^4 + 3m_3^5)m_1 - (m_2 m_3^5 + m_3^6) = 0. \quad (27)
\end{aligned}$$

Kui vaadelda võrrandis (27) m_1 muutujana ning m_2 ja m_3 konstantidena, siis saame polünoomi m_1 järgi. Kasutades jälle Descartes'i märgireeglit, saame, et sellel polünoomil on ainult üks positiivne juur. Kusjuures see juur on m_3 , sest

$$\begin{aligned}
& (m_3 + m_2) \frac{m_3^5}{m_3^5} + (3m_3 + 2m_2) \frac{m_3^4}{m_3^4} + (3m_3 + m_2) \frac{m_3^3}{m_3^3} - \\
& \quad - (m_2 + 3m_3) \frac{m_3^2}{m_3^2} - (2m_2 + 3m_3) \frac{m_3}{m_3} - (m_2 + m_3) = \\
& = m_3 + m_2 + 3m_3 + 2m_2 + 3m_3 + m_2 - m_2 - 3m_3 - 2m_2 - 3m_3 - m_2 - m_3 = 0.
\end{aligned}$$

Seega $m_1 = m_3$ ja sellest saame $\alpha = \frac{m_1}{m_3} = 1$.

Eeldame nüüd, et $m_1 = m_3$, siis

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2)\alpha^5 + (3m_1 + 2m_2)\alpha^4 + (3m_1 + m_2)\alpha^3 - \\
& \quad - (m_2 + 3m_1)\alpha^2 - (2m_2 + 3m_1)\alpha - (m_2 + m_1) = \\
& = (m_1 + m_2)(\alpha^5 - 1) + (2m_2 + 3m_1)(\alpha^4 - \alpha) + (3m_1 + m_2)(\alpha^3 - \alpha^2) = \\
& = (m_1 + m_2)(\alpha^5 - 1) + \alpha(2m_2 + 3m_1)(\alpha^3 - 1) + \alpha^2(3m_1 + m_2)(\alpha - 1) = \\
& = (\alpha - 1) \left((m_1 + m_2)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) + \alpha(2m_2 + 3m_1)(\alpha^2 + \alpha + 1) + \alpha^2(3m_1 + m_2) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Teame, et sellel polünoomil on ainult üks positiivne juur. Näeme, et selleks on $\alpha = 1$ ehk $\alpha = \frac{m_1}{m_3}$. □

Nüüd teame, et kui $\alpha = \frac{m_1}{m_3}$, siis $m_1 = m_3$ ja $\alpha = 1$. Selle abil saame teada, et

$$\vec{x}_2 = \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2} \vec{x}_1 = \frac{m_3 - m_3}{2m_3 + m_2} \vec{x}_1 = 0.$$

See tähendab, et sellisel juhul keskmine keha püsib terve aeg massikeskmes. Kui nüüd kontrollida võrrandit (16), siis saame samasuse

$$0 = m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = \frac{G(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \frac{1^2 m_3 - m_3}{1^2} = 0. \quad (28)$$

Seega nüüd oleme edukalt teostanud esimese vajaliku kontrolli.

Et näha, kas kolmas võrrand (17) on ka rahuldatud, piisab näidata, et on rahuldatud nende võrrandite summa, sest kui summa on rahuldatud ja kaks võrrandit on rahuldatud, siis peab ka kolmas olema rahuldatud. Liidame kokku võrrandid (15), (16) ja (17). Selle summa vasak pool on

$$vp := m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} + m_3 \frac{d^2 \vec{x}_3}{dt^2} = \frac{d^2(m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + m_3 \vec{x}_3)}{dt^2} = \frac{d^2(0)}{dt^2} = 0$$

ja parem pool on

$$pp := G \frac{m_1 m_2 (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{r_{12}^3} + G \frac{m_1 m_3 (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)}{r_{13}^3} + G \frac{m_1 m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{r_{21}^3} + G \frac{m_2 m_3 (\vec{x}_3 - \vec{x}_2)}{r_{23}^3} + G \frac{m_1 m_3 (\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{r_{31}^3} + G \frac{m_2 m_3 (\vec{x}_2 - \vec{x}_3)}{r_{32}^3} = 0.$$

Seega $vp = pp$. Järelikult peab kolmas võrrand ka olema rahuldatud.

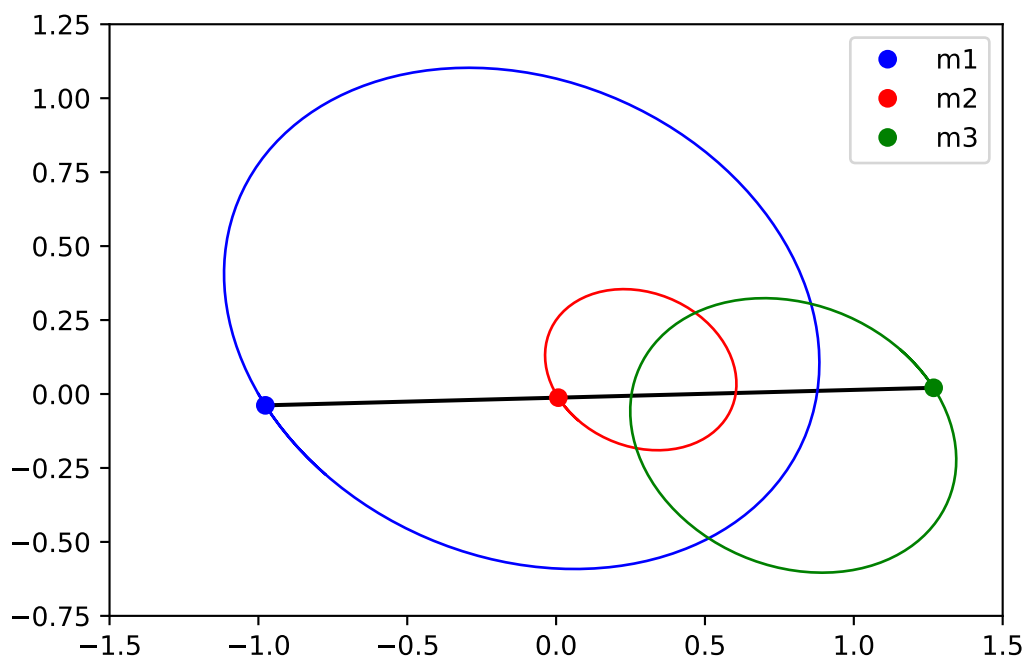
Kuna tingimused $\vec{x}_2 = k\vec{x}_1$ ja $\vec{x}_3 = l\vec{x}_1$ kehtivad terve aeg, siis peavad nad kehtima ka alguses.

Seega et selline lahend tekkida saaks, peavad algtingimused olema järgmised:

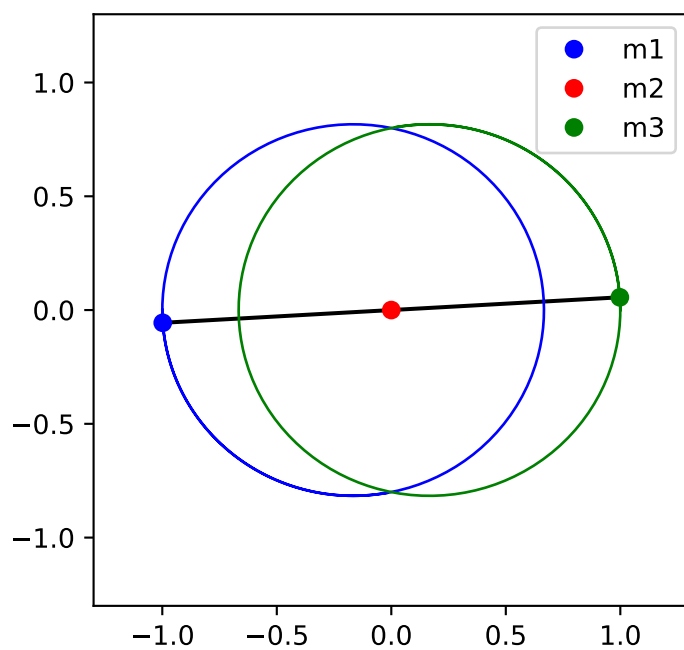
$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &= k\vec{x}_1, \\ \vec{x}_3 &= l\vec{x}_1, \\ \frac{d\vec{x}_2}{dt} &= k \frac{d\vec{x}_1}{dt}, \\ \frac{d\vec{x}_3}{dt} &= l \frac{d\vec{x}_1}{dt}, \end{aligned}$$

kus $k = \frac{\alpha m_3 - m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2}$, $l = \frac{-\alpha m_2 - (1 + \alpha)m_1}{(1 + \alpha)m_3 + m_2}$ ja α rahuldab võrrandit (26) ning x_1 ja $\frac{dx_1}{dt}$ on valitud meelepäraselt.

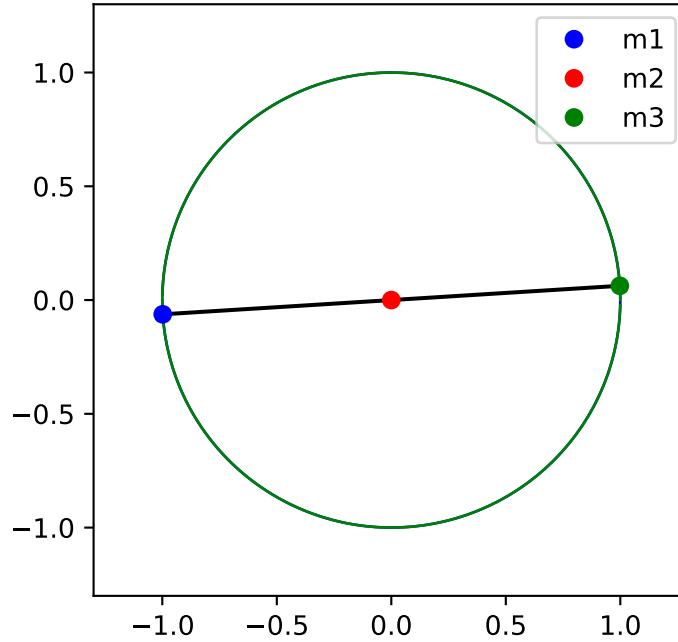
Kokkuvõtteks saame öelda, et Euleri lahendi puhul kolm keha liiguvad kollinearselt läbi des koonuslõike trajektoori, sest esimene võrrand, mis me lahendasime, oli Kepleri ülesanne ja teiste kehade liikumisvõrrandid tulenevad esimese omast. Joonistel 1, 2 ja 3 võib näha Euleri lahendeid. Nende animatsioone võib leida lehelt <https://kodu.ut.ee/~erkikyla/ThreeBodyAnimations.htm>.



Joonis 1: Euleri lahend, kus $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3, G = 1$



Joonis 2: Euleri lahend, kus $m_1 = m_2 = m_3 = 1, G = 1$



Joonis 3: Euleri lahend, kus $m_1 = m_2 = m_3 = 1, G = 1$

3.2 Lagrange'i lahend

Olgu meil tasandiline kolme keha ülesanne. Eeldame, et koordinaatide alguspunkt asub kehade massikeskmes

$$m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + m_3 \vec{x}_3 = 0. \quad (29)$$

Lagrange'i lahendite korral asuvad kehad võrdkülgse kolmnurga tippudes ehk

$$d := r_{12} = r_{21} = r_{13} = r_{31} = r_{23} = r_{32}, \quad (30)$$

kus d sõltub ajast. Mõtleme vektoritest \vec{x}_1, \vec{x}_2 ja \vec{x}_3 kui kompleksarvudest x_1, x_2 ja x_3 . Asugu kehad tasandil nii, et kui lugeda kolmnurga tippe vastupäeva, siis nende paigutus on m_1, m_2, m_3 . Nüüd võime väita, et kehtib

$$x_3 - x_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(x_2 - x_1), \quad (31)$$

sest $x_3 - x_1$ ja $x_2 - x_1$ võivad geomeetriliselt tähistada võrdkülgse kolmnurga külgi ja $\frac{\pi}{3}$ nendevahelist nurka. Korrutades mingit kompleksarvu kompleksarvuga $e^{\beta i}$, siis me pöörame esialgse kompleksarvu kohavektorit komplekstasandil nurga β võrra vastupäeva.

Võtame ette võrrandi (15)

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= G \frac{m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + G \frac{m_1 m_3 (x_3 - x_1)}{r_{13}^3} = \frac{G m_1}{d^3} (m_2 (x_2 - x_1) + m_3 (x_3 - x_1)) = \\
&= \frac{G m_1}{d^3} (m_2 x_2 - m_2 x_1 + m_3 x_3 - m_3 x_1 + m_1 x_1 - m_1 x_1) = \\
&= \frac{G m_1}{d^3} ((m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) - (m_1 + m_2 + m_3) x_1).
\end{aligned}$$

Jagame mõlemad pooled massiga m_1 läbi ja kasutame eeldust (29)

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)x_1}{d^3}. \quad (32)$$

Kui me defineerime $\delta_1 := (m_1 + m_2 + m_3) \frac{|x_1|^3}{d^3}$, siis saame kuju

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{G \delta_1 x_1}{|x_1|^3}. \quad (33)$$

Näitame, et δ_1 sõltub ainult massidest. Mõtleme nüüd kompleksarvudest x_1, x_2 ja x_3 kui vektoritest.

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2 + m_3) \vec{x}_1 &= m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_1 + m_3 \vec{x}_1 - m_1 \vec{x}_1 - m_2 \vec{x}_2 - m_3 \vec{x}_3 = \\
&= m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + m_3 (\vec{x}_1 - \vec{x}_3),
\end{aligned}$$

kus $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ja $\vec{x}_1 - \vec{x}_3$ on meie võrdkülgse kolmnurga küljed, seega nende pikkused on d ehk me saame

$$\begin{aligned}
\left| (m_1 + m_2 + m_3) \frac{\vec{x}_1}{d} \right| &= \left| \frac{m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{m_3 (\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} \right| = \\
&= \sqrt{\left\langle \frac{m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{m_3 (\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|}, \frac{m_2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{m_3 (\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} \right\rangle} = \\
&= \sqrt{m_2^2 + 2m_2 m_3 \cos \frac{\pi}{3} + m_3^2} = \sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}, \\
\delta_1 &= \frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}.
\end{aligned}$$

Seega võrrand (33) on samal kujul nagu Kepleri ülesanne, kus $C = -G\delta_1$. Oskame seda lahendada ja lahendame selle.

Nüüd tuleb kontrollida, kas selle lahendi korral on võrrandid (16) ja (17) ka rahuldatud. Selleks

avaldame x_2 ja x_3 esimese keha asukoha kaudu. Avaldame x_3 võrrandist (29) ehk

$$x_3 = \frac{-m_1x_1 - m_2x_2}{m_3}.$$

Olgu $\lambda := e^{\frac{\pi}{3}i}$. Asendame võrrandi (34) võrrandisse (31) ja avaldame x_2 . Saame

$$\begin{aligned} \frac{-m_1x_1 - m_2x_2}{m_3} - x_1 &= \lambda(x_2 - x_1), \\ x_2 &= \frac{m_3(\lambda - 1) - m_1}{m_2 + m_3\lambda}x_1 = kx_1. \end{aligned}$$

Avaldame kolmanda keha asukoha x_3

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-m_1 - m_2 \frac{m_3(\lambda-1)-m_1}{m_2+m_3\lambda}}{m_3}x_1, \\ x_3 &= \frac{-m_1\lambda - m_2(\lambda - 1)}{m_2 + m_3\lambda}x_1 = lx_1, \end{aligned}$$

kus $k = \frac{m_3(\lambda - 1) - m_1}{m_2 + m_3\lambda}$ ja $l = \frac{-m_1\lambda - m_2(\lambda - 1)}{m_2 + m_3\lambda}$.

Lihtsustame võrrandit (16) ning saame

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= G \frac{m_1m_2(x_1 - x_2)}{r_{12}^3} + G \frac{m_2m_3(x_3 - x_2)}{r_{23}^3} = \frac{Gm_2}{d^3} (m_1(x_1 - x_2) + m_3(x_3 - x_2)) = \\ &= \frac{Gm_2}{d^3} (m_1x_1 - m_1x_2 + m_3x_3 - m_3x_2 + m_2x_2 - m_2x_2) = \\ &= \frac{Gm_2}{d^3} ((m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) - (m_1 + m_2 + m_3)x_2). \end{aligned}$$

Jagame võrrandi pooli massiga m_2 . Kuna kehtib (29), siis

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)x_2}{d^3}.$$

Analoogiliselt saame ka võrrandist (17)

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)x_3}{d^3}.$$

Nüüd saame kasutada fakti, et $x_2 = kx_1$ ja $x_3 = lx_1$. Ja saame võrrandid

$$\begin{aligned} k \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)x_1}{d^3} \\ l \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -l \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)x_1}{d^3} \end{aligned}$$

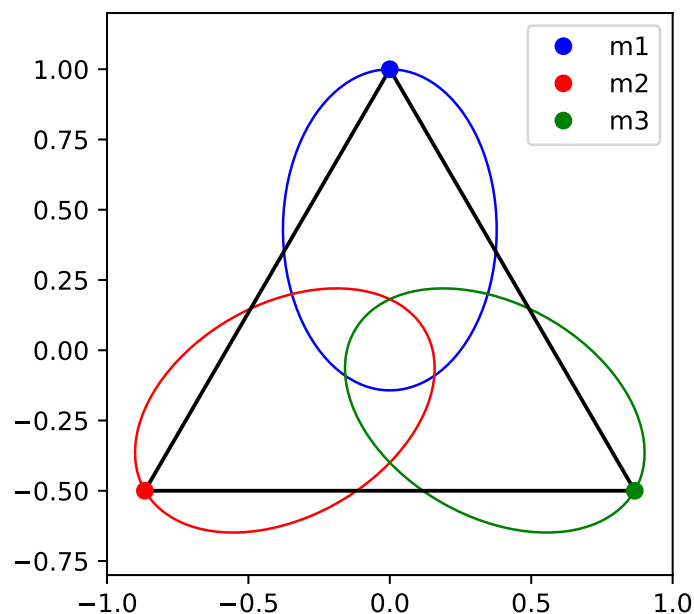
Kui $k = 0$ või $l = 0$, siis saame mõlemale poole vastavat võrdust 0 ning see võrdus kehtib. Kui $k \neq 0$ või $l \neq 0$, siis saame vastava võrduse mõlemad pooled vastava konstandiga läbi jagada ning saame võrrandi (32), mille me varem lahendasime. Seega on kõik kolm võrrandit rahuldatud.

Kuna tingimused $x_2 = kx_1$ ja $x_3 = lx_1$ peavad kehtima kogu aeg, siis sobivad algtingimused on järgmised

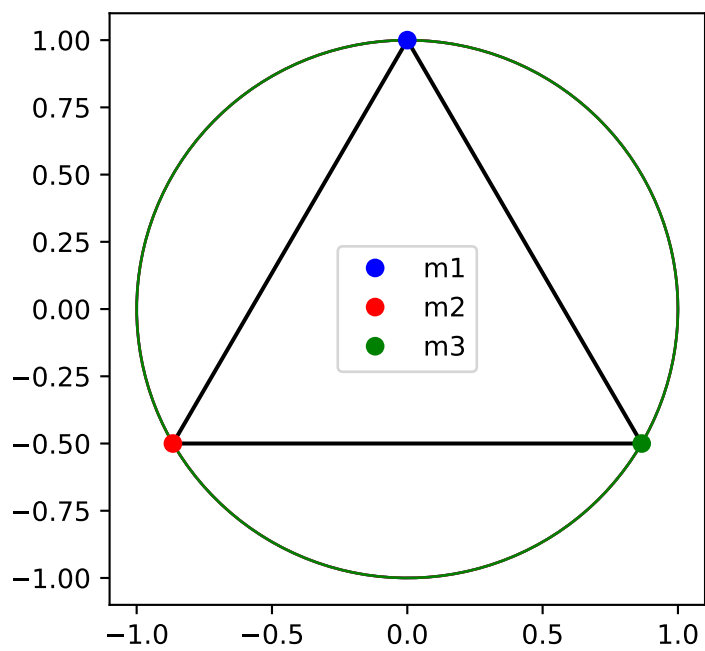
$$\begin{aligned}x_2 &= kx_1, \\x_3 &= lx_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= k \frac{dx_1}{dt}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= l \frac{dx_1}{dt},\end{aligned}$$

kus $k = \frac{m_3(e^{\frac{\pi}{3}i} - 1) - m_1}{m_2 + m_3e^{\frac{\pi}{3}i}}$ ja $l = \frac{-m_1e^{\frac{\pi}{3}i} - m_2(e^{\frac{\pi}{3}i} - 1)}{m_2 + m_3e^{\frac{\pi}{3}i}}$ ning x_1 ja $\frac{dx_1}{dt}$ on valitud meelepäraselt.

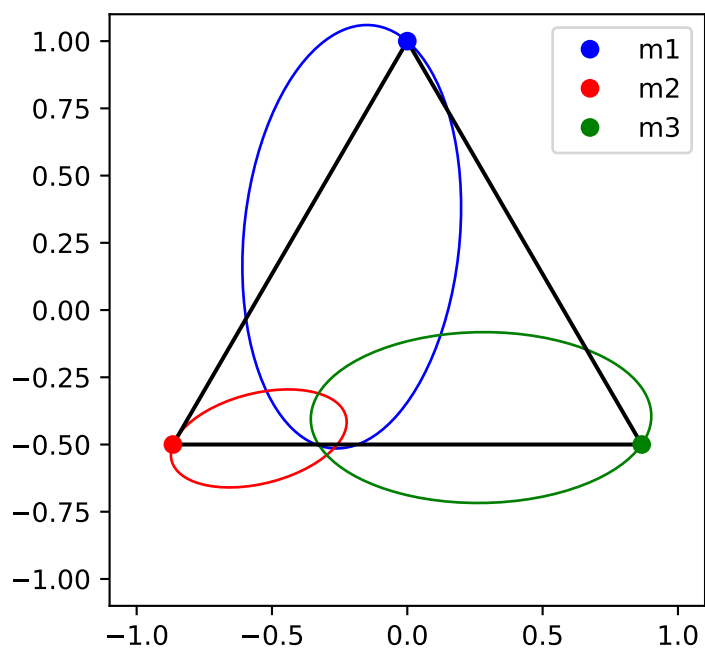
Lagrange'i lahendite puhul nägime sarnaselt Euleri lahenditega, et kolm keha liiguvad koosnoolõigetel, kuid Lagrange'i lahendite puhul kehad on alati võrdkülgse kolmnurga tippudes. Mõned Lagrange'i lahendid on joonistel 4, 5 ja 6. Nende animatsioone võib leida lehelt <https://kodu.ut.ee/~erkikyla/ThreeBodyAnimations.htm>.



Joonis 4: Lagrange'i lahend, kus $m_1 = m_2 = m_3 = 1, G = 1$



Joonis 5: Lagrange'i lahend, kus $m_1 = m_2 = m_3 = 1, G = 1$



Joonis 6: Lagrange'i lahend, kus $m_1 = 1, m_2 = 10, m_3 = 5, G = 1$

4 Kaheksakujuline lahend

Aastal 1993 avastas Chris Moore 8-kujulise lahendi uurides palmikuid klassikalises mehaanikas [11]. Aastal 2001 tõestasid Chenciner ja Montgomery selle lahendi olemasolu kasutades topoloogia vahendeid ja variatsioonarvutust [2], [9]. Carles Simó defineeris samal ajal koreograafia mõiste ja leidis numbriliselt mitmeid erinevaid koreograafiaid [10].

Definitsioon 4.1. N keha koreograafiateks me nimetame selliseid võrrandisüsteemi (1) pe-rioodilisi lahendeid, kus kehad liiguvad ühel ja samal kinnisel kaarel.

Kaheksakujulise lahendi trajektoori saame, kui valime ühikud nii ja eeldame, et

- süsteemi impulsimoment on 0;
- kehad asuvad ühel tasandil ja nende massikese on koordinaatide alguspunktis;
- süsteemi mehaaniline koguenergia on $-\frac{1}{2}$;
- kehade massid on võrdsed ja $m := m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$;
- gravitatsioonikonstant on võrdne ühega $G = 1$;
- kehad asuvad ajahetkel $t = 0$ x -teljel;
- kehade kiirusvektorid \vec{v}_1, \vec{v}_2 ja \vec{v}_3 ajahetkel $t = 0$ on

$$\begin{aligned}\vec{v}_2(0) &\approx (0,7494421910777922289898659, 1,1501789857502275024030202), \\ \vec{v}_1(0) = \vec{v}_3(0) &= -\frac{1}{2}\vec{v}_2(0) \approx \\ &\approx (-0,37472109553889611449493295, -0,5750894928751137512015101).\end{aligned}$$

Kehade asukohad ajahetkel 0 on võimalik tuletada tehtud eeldustest. Kuna massikese on nullpunktis ja massid on võrdsed, siis

$$\begin{aligned}m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + m_3\vec{x}_3 &= 0, \\ \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 &= 0.\end{aligned}\tag{34}$$

Järgmiseks kasutame impulsimomenti \vec{L} .

$$\vec{L} = m_1\vec{x}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \vec{v}_2 + m_3\vec{x}_3 \times \vec{v}_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= m_1 \vec{x}_1 \times \frac{-\vec{v}_2}{2} + m_1 \vec{x}_2 \times \vec{v}_2 + m_1 \vec{x}_3 \times \frac{-\vec{v}_2}{2} = \\
&= -\frac{1}{2} m_1 (\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3) \times \vec{v}_2 = \\
&= -\frac{1}{2} m_1 (\vec{x}_1 - 2(-\vec{x}_1 - \vec{x}_3) + \vec{x}_3) \times \vec{v}_2 = \\
&= -\frac{3}{2} m_1 (\vec{x}_1 + \vec{x}_3) \times \vec{v}_2 = 0
\end{aligned}$$

Seega vektorid $\vec{x}_1 + \vec{x}_3$ ja \vec{v}_2 on kollineaarsed ehk kas üks neist on nullvektor või leidub nullist erinev skalaar c , mille korral $\vec{x}_1 + \vec{x}_3 = c\vec{v}_2$. Teame, et \vec{v}_2 pole nullvektor. Teame ka seda, et vektorite \vec{x}_1 ja \vec{x}_3 y -koordinaat on 0, sest nad asuvad x -teljel. Seega on ka nende summa y -koordinaat 0, kuid vektoril \vec{v}_2 see pole null ning ei leidu skalaari $c \neq 0$, mis rahuldaks meie tingimust. Järele jääb ainult võimalus, et $\vec{x}_1 + \vec{x}_3 = 0$ ehk $\vec{x}_1 = -\vec{x}_3$. Sellest saame veel järeldada, et $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1 - \vec{x}_3 = -\vec{x}_1 + \vec{x}_1 = 0$. Seega teine keha peab esialgu olema nullpunktis. Otsime sellist positiivset reaalarvu a , et $\vec{x}_1 = (-a, 0)$ ja $\vec{x}_3 = (a, 0)$

Süsteemi mehaaniline kogueriga leitakse valemiga $E = K - U$, kus K on kineetiline ja $-U$ potentsiaalne energia nagu näeme valemis (4). Kineetilise energia saame leida valemiga

$$K = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i |\vec{v}_i|^2}{2} = \frac{m_1 |\vec{v}_1|^2}{2} + \frac{m_2 |\vec{v}_2|^2}{2} + \frac{m_3 |\vec{v}_3|^2}{2} = \frac{1}{6} \left(\left| -\frac{\vec{v}_2}{2} \right|^2 + |\vec{v}_2|^2 + \left| -\frac{\vec{v}_2}{2} \right|^2 \right) = \frac{|\vec{v}_2|^2}{4}.$$

Potentsiaalse energia saame leida valemiga

$$\begin{aligned}
-U &= -\sum_{i<j} G \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} = -G \left(\frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} + \frac{m_2 m_3}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|} + \frac{m_1 m_3}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|} \right) = \\
&= -Gm^2 \left(\frac{1}{|(a, 0)|} + \frac{1}{|(a, 0)|} + \frac{1}{|(2a, 0)|} \right) = -Gm^2 \frac{5}{2a} = -\frac{5}{18a}.
\end{aligned}$$

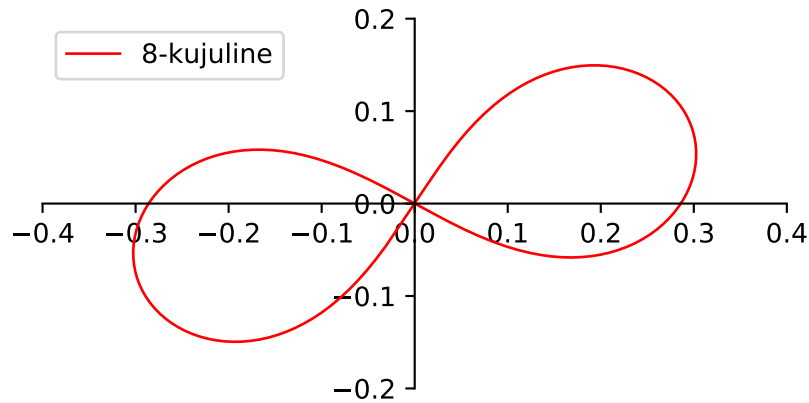
Meil on teada kogueriga E ja teise keha kiirusvektor \vec{v}_2 . Tahame leida reaalarvu a . Kuna $E = K - U$, siis

$$-\frac{1}{2} = \frac{|\vec{v}_2|^2}{4} - \frac{5}{18a}.$$

Avaldame a ja saame

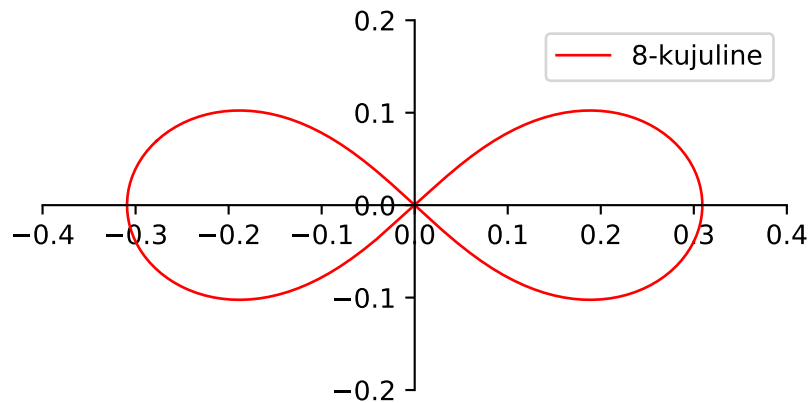
$$a = \frac{10}{9|\vec{v}_2|^2 + 18} \approx 0,2860315545848572677868786248. \quad (35)$$

Nüüd meil on olemas algandmed, et joonistada soovitud lahendi trajektoori.



Joonis 7: Kaheksakujuline lahend

Kui seda pöörata sobiv arv kraade, siis saame joone, mis on sümmeetriline nii x - kui ka y -telje suhtes.



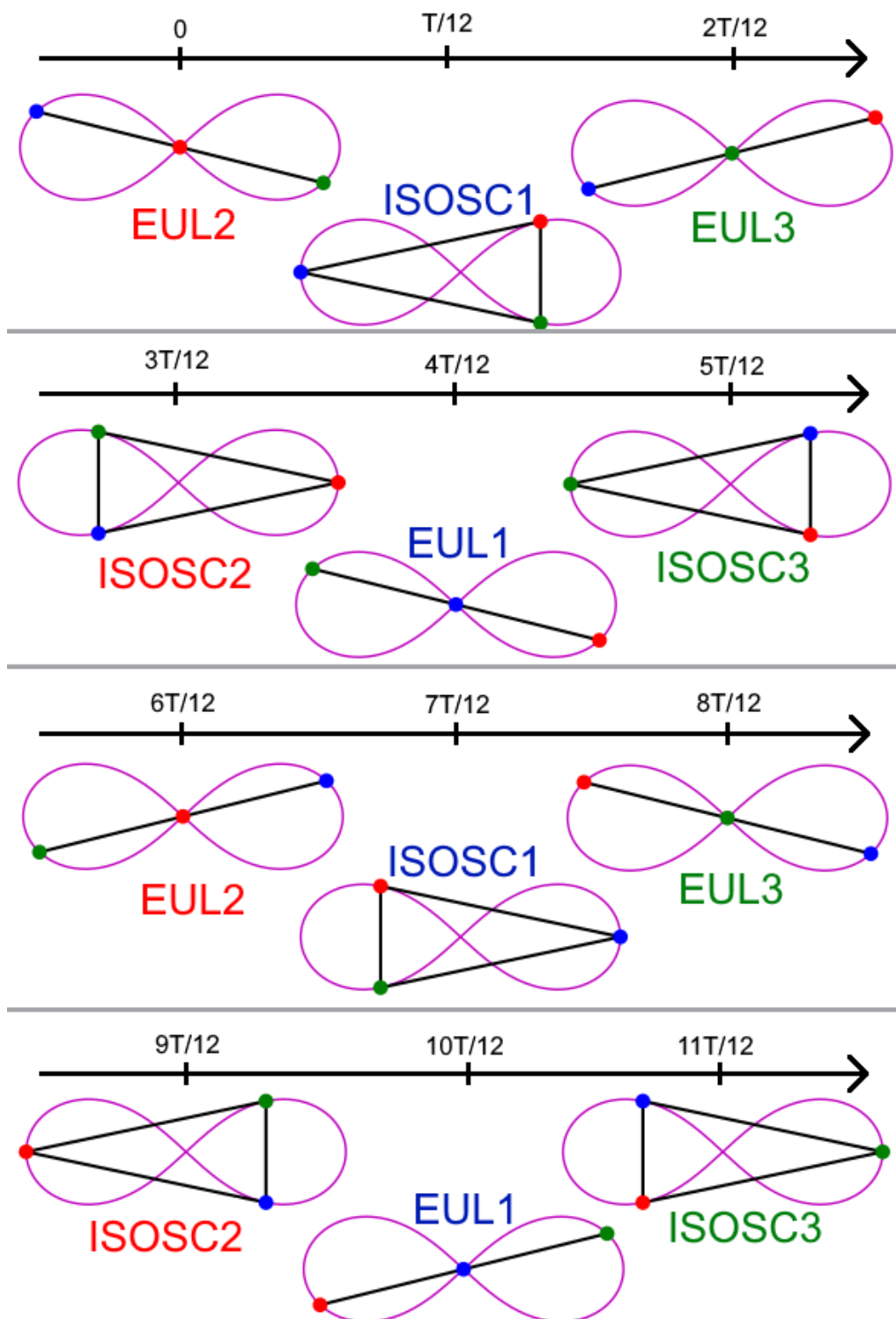
Joonis 8: Pööratud kaheksakujuline lahend

Selle lahendi kohta on teada, et kolm keha asuvad vahepeal ühel sirgel, mida kutsutakse Euleri konfiguratsiooniks, ja vahepeal võrdhaarset kolmnurga otstes. Me tähistame Euleri konfiguratsiooni, mille keskel on keha i , sümboliga EUL_i ja võrdhaarset kolmnurka, mille tipus on keha j , sümboliga $ISOSC_j$. Ühe perioodi T jooksul vahelduvad need konfiguratsioonid järgmiselt

$$\begin{aligned}
 EUL_2 \rightarrow ISOSC_1 \rightarrow EUL_3 \rightarrow ISOSC_2 \rightarrow EUL_1 \rightarrow ISOSC_3 \rightarrow EUL_2 \rightarrow ISOSC_1 \rightarrow \\
 \rightarrow EUL_3 \rightarrow ISOSC_2 \rightarrow EUL_1 \rightarrow ISOSC_3 \rightarrow EUL_2,
 \end{aligned}$$

millest esimene asetus on ajahetkel 0 ja viimane ajahetkel T .

Olgu esimene keha sinine, teine punane ja kolmas roheline, siis joonis 9 illustreerib eelnevat konfiguratsioonide järjestust.



Joonis 9: Kaheksakujulise lahendi konfiguratsioonide järgnevus

4.1 Kaheksakujulise trajektoori algebraline kuju

Selles peatükis on kasutatud Jannseni artiklit [4].

Kaheksakujulisel trajektoorigil puudub minu teadmiste põhjal algebraline kuju, mida me teaks, kuid on olemas sarnaseid jooni, mida me võime võrrelda numbrilise lahendiga. Kasutame selles osas polaarkoordinaate, sest Pythonis on nendega lihtne jooniseid teha. Järgnevas tähistavad θ polaarnurka, r polaarraadiust ja a mingit reaalarvu.

Esiteks saame leida mõned omadused, mis meie otsitaval joonel peaks olema:

1. sümmeetrilisus x -telje ja y -telje suhtes;
2. puutujate tõusunurgad punktis $(0, 0)$ on $\pm 0,7477583670166642$.

Puuduvate konstantide väärtusi leian kasutades vähimruutude meetodit. Kaheksakujulise trajektoori punktid on esitatud polaarkoordinaatides kujul $r = r(\theta)$, seega kui $r_2(\theta)$ on funktsioon, mida üritame kasutada lähendajana, ja Θ polaarnurkade hulk, millele me oleme leidnud vastavad raadiused kaheksakujulisel trajektoorigil, siis me minimiseerime summat

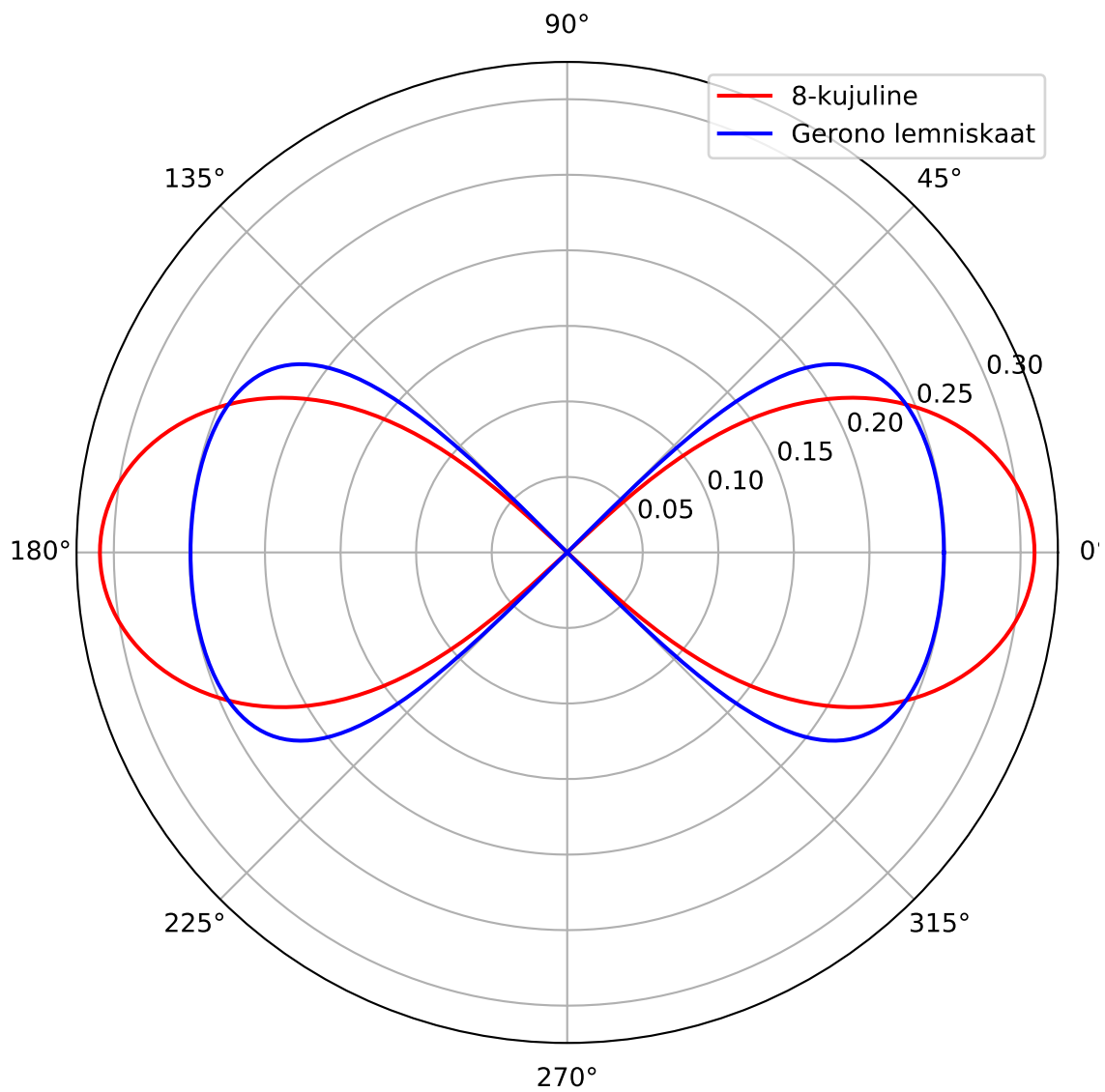
$$\sum_{\theta \in \Theta} (r(\theta) - r_2(\theta))^2.$$

Märgime ära, et $|\Theta| = 10^6$.

4.1.1 Geroni lemniskaat

Geroni lemniskaat on defineeritud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r^2 = a^2 \frac{\cos 2\theta}{\cos^4 \theta}.$$



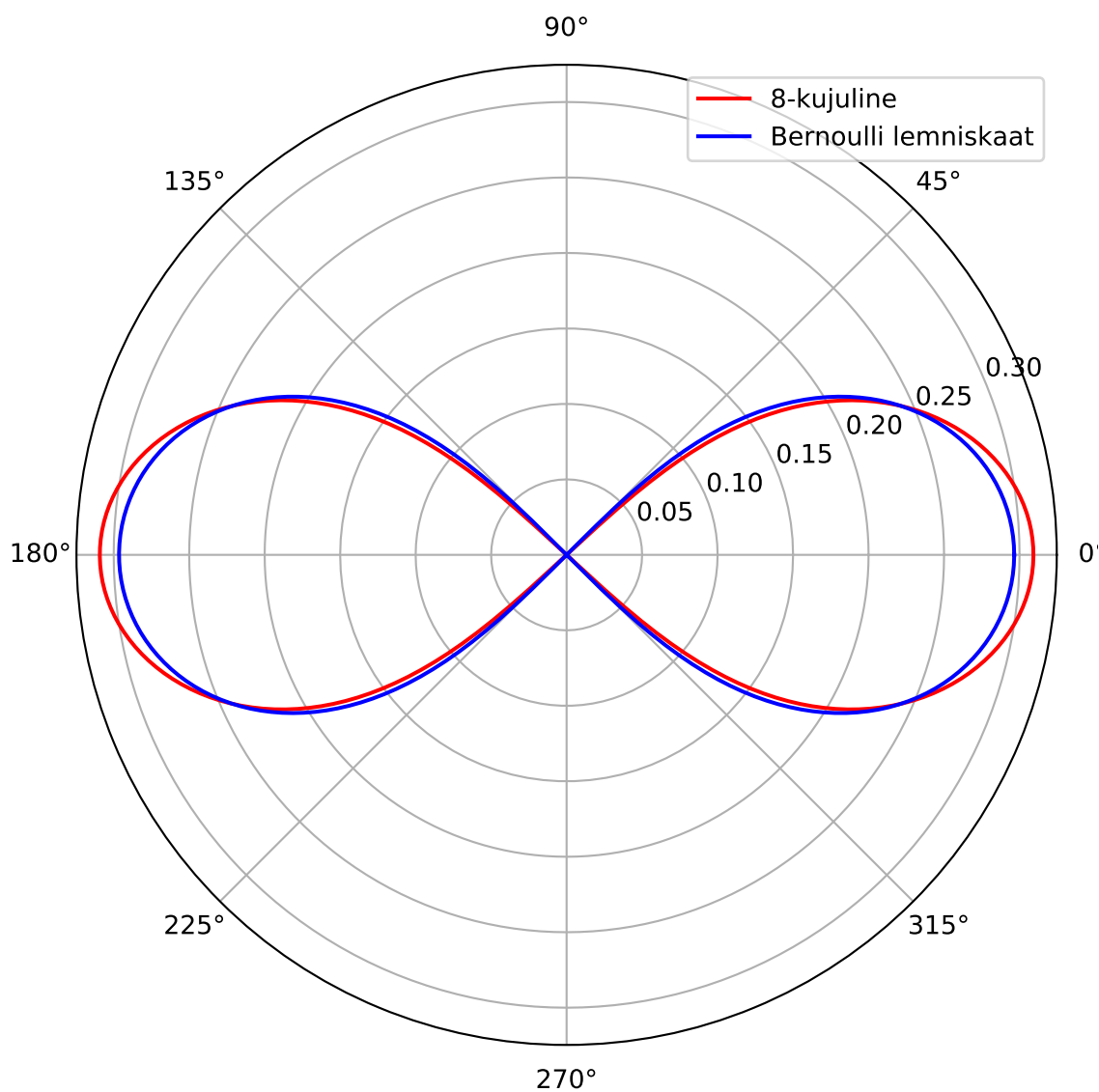
Joonis 10: Gerono lemniskaat ja 8-kujuline trajektoor

Näeme, et Gerono lemniskaat on meie otsitava funktsiooniga võrreldes liiga nurgeline. Uurime järgmist joont.

4.1.2 Bernoulli lemniskaat

Bernoulli lemniskaat on defineeritud võrrandiga

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$



Joonis 11: Bernoulli lemniskaat ja 8-kujuline trajektoor

Bernoulli lemniskaat on veidi kitsam ja kõrgem kui meie otsitav joon. Peale selle, puutujate tõusunurgad punktis $(0, 0)$ on $\pm \frac{\pi}{4} \approx \pm 0,785398$. Meil on vaja leida selline joon, mille puutuja tõusunurka saab muuta konstandi abil.

4.1.3 Procluse hippopede

Procluse hippopede on defineeritud võrrandiga

$$r^2 = a^2(1 - k^2 \sin^2 \theta),$$

kus k on reaalarv. Leiame k väärtuse sellise, et kehtiks omadus (2).

$$r^2 = a^2(1 - k^2 \sin^2 \theta)$$

$$0^2 = a^2(1 - k^2 \sin^2 0,7477583670166642)$$

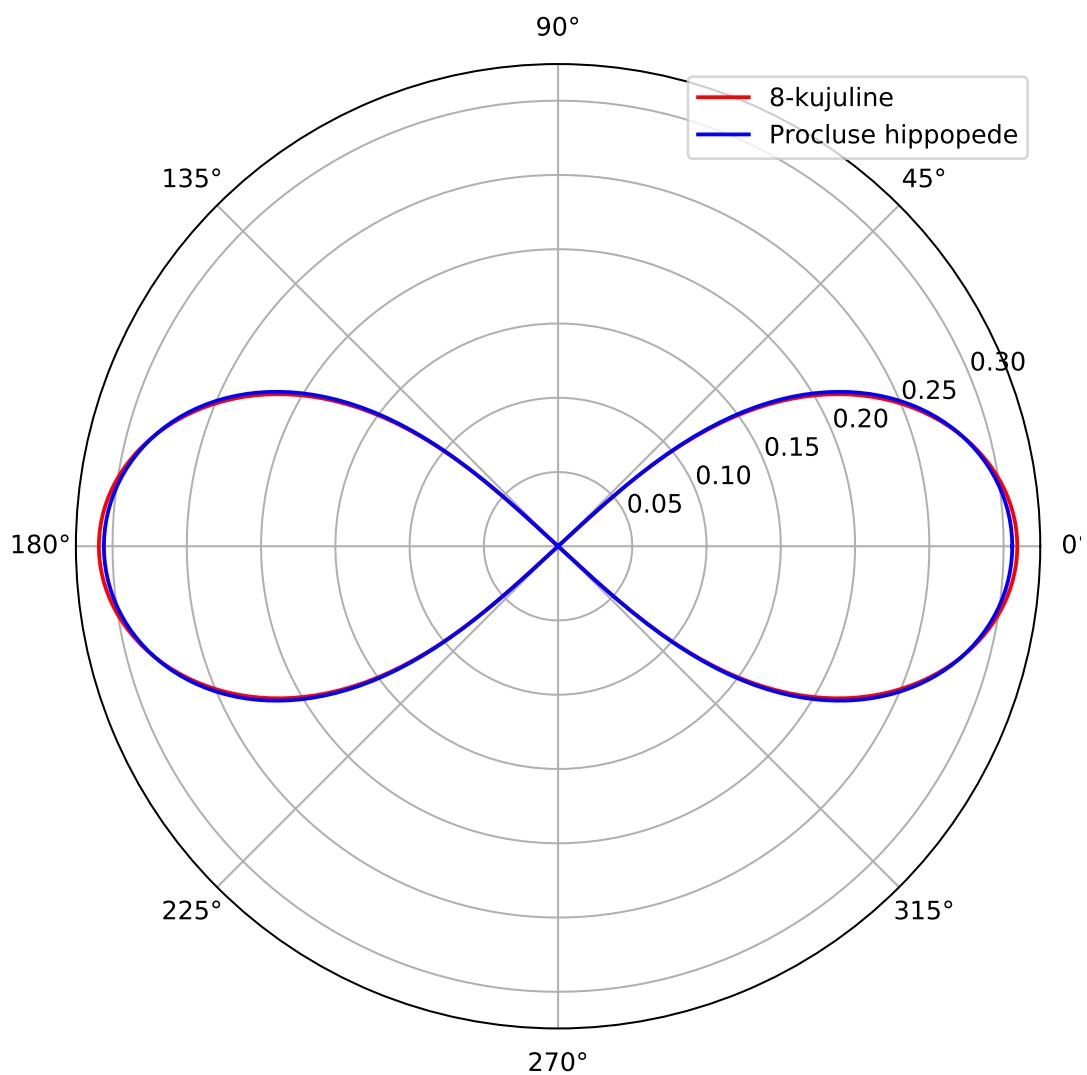
$$(k \sin 0,7477583670166642)^2 = 1$$

$$k \sin 0,7477583670166642 = \pm 1$$

$$k = \pm \frac{1}{\sin 0,7477583670166642}$$

Seega saame võrrandi

$$r^2 = a^2 \left(1 - \left(\frac{\sin \theta}{\sin 0,7477583670166642} \right)^2 \right).$$



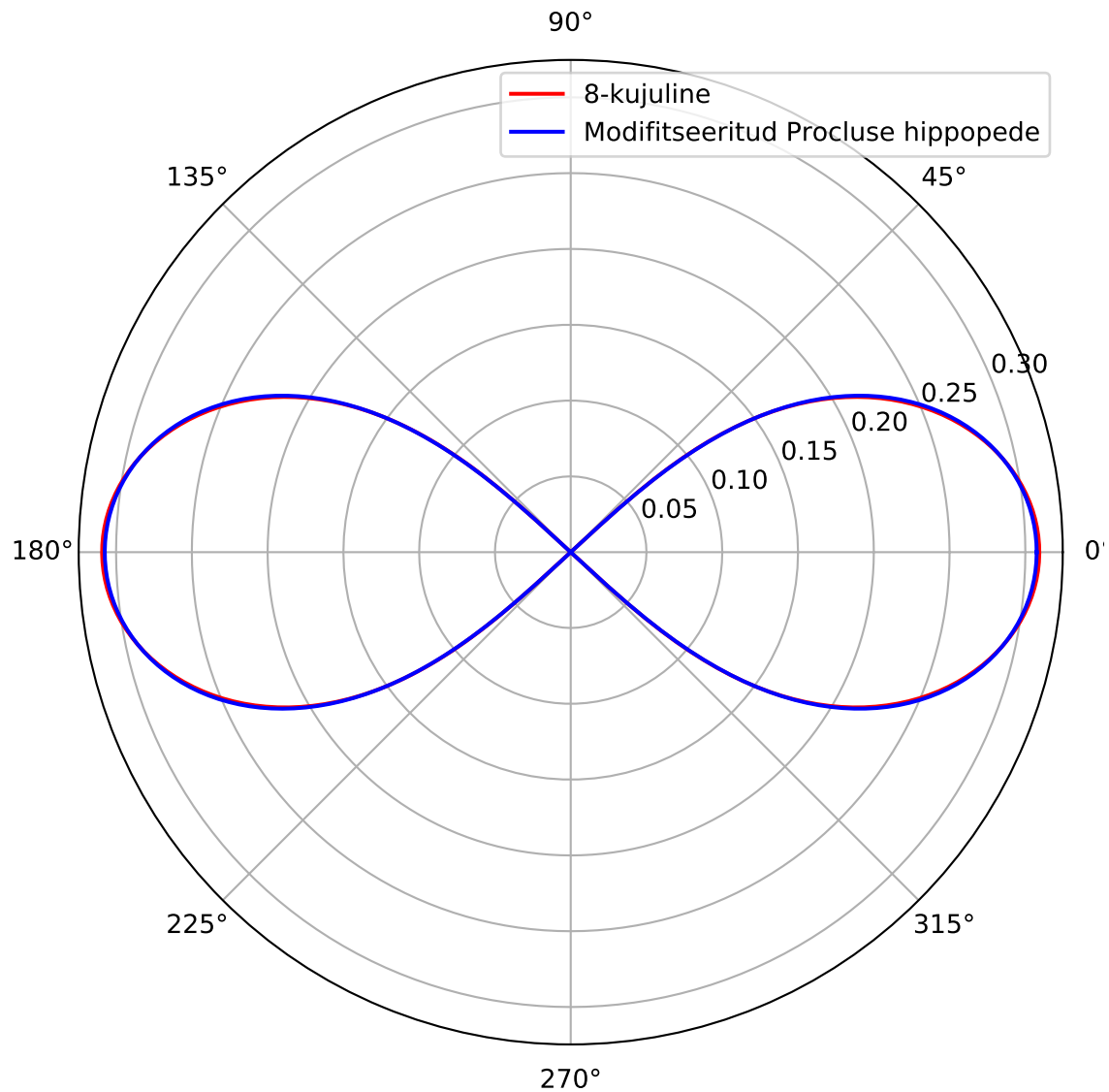
Joonis 12: Procluse hippopede ja 8-kujuline trajektoor

See on silmaga vaadates päris lähedal otsitavale funktsioonile, aga meil oleks vaja natuke laiemat ja madalamat joont. Selleks muudame veidi eelmist võrrandit.

Esiteks saame muuta polaarraadiuse astendajat. Saame uue võrrandi kujul

$$r^l = a^2 \left(1 - \left(\frac{\sin \theta}{\sin 0,7477583670166642} \right)^2 \right),$$

kus l on reaalarv.



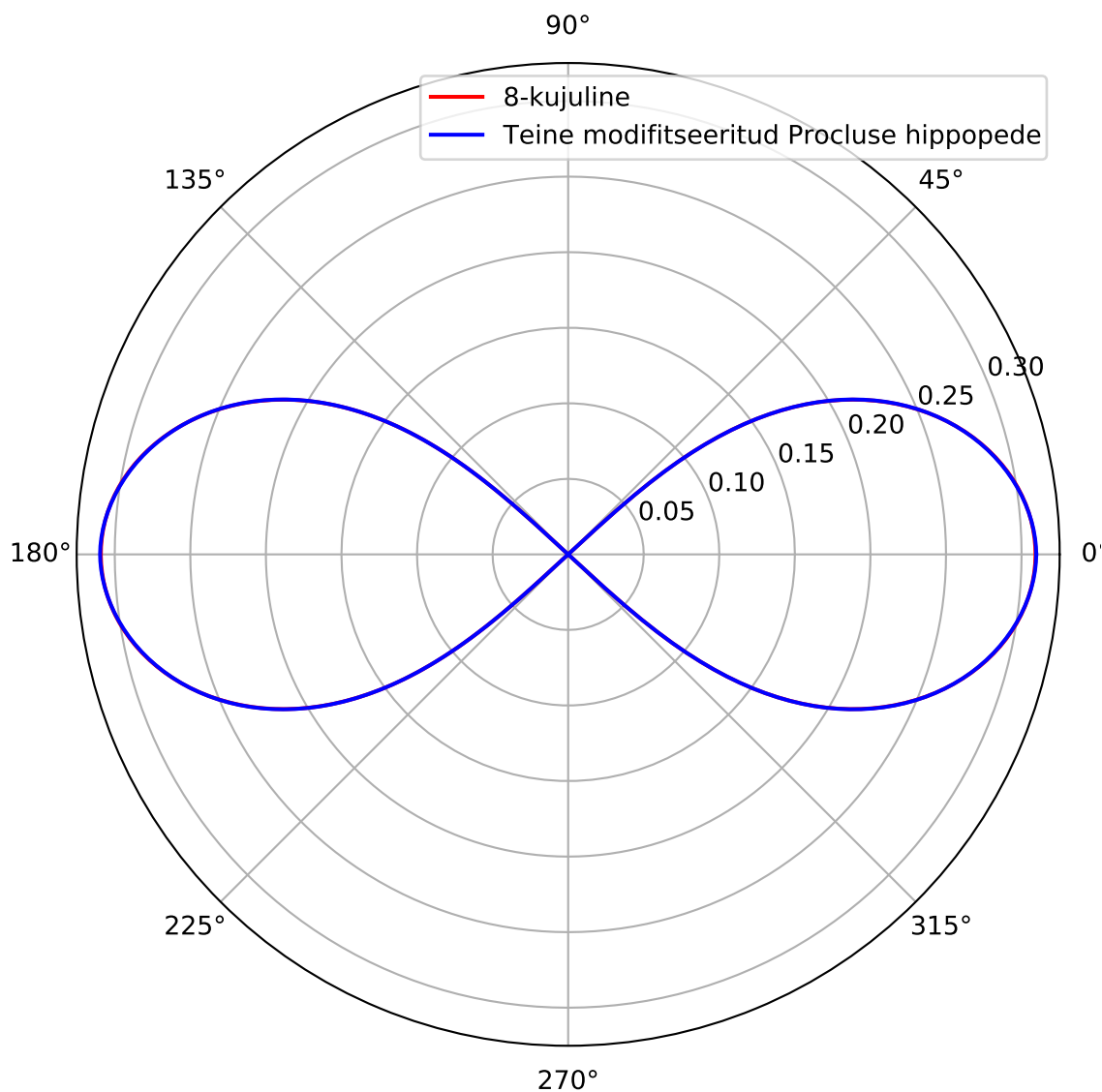
Joonis 13: Modifitseeritud Procluse hippopede ja 8-kujuline trajektoor

Näeme, et siin on punase joone kuma veel näha. See tähendab, et päris täpselt need jooned ei kattud. Proovime mõnda muud modifikatsiooni. Muudame siinuste liikme astendajat ja saame

võrrandi

$$r^2 = a^2 \left(1 - \left| \frac{\sin \theta}{\sin 0,7477583670166642} \right|^m \right),$$

kus m on reaalarv. Lisasime ka absoluutväärtuse märgid, sest kui m pole täisarv, siis võib juhtuda, et me ei oska sellest liikmest vastavat juurt leida.



Joonis 14: Modifitseeritud Procluse hippopede 2 ja 8-kujuline trajektoor

See tundub olevat kõige lähedasem esitus otsitavast joonest, sest silmaga pole kaht joont enam võimalik eristada.

4.1.4 Joonte võrdlus

Meil tuleb valida mingit sorti meetrika, mille abil me viga saame mõõta. Valin selleks maksimaalse erinevuse kahe joone polaarraadiuste vahel esimeses veerandis, sest ülejäänud kolm veerandit on sümmeetrilised esimesega.

Joon	Puutuja tõusunurk alguspunktis	Maksimaalne erinevus
8-kujuline	$\pm 0,7477583670166642$	0
Gerono	$\pm \pi/4$	0,13
Bernoulli	$\pm \pi/4$	0,081
Proclus	$\pm 0,7477583670166642$	0,060
Proclus mod. 1	$\pm 0,7477583670166642$	0,0019
Proclus mod. 2	$\pm 0,7477583670166642$	0,00050

Näeme, et joonte graafikute vaatlusel tehtud märkused kehtivad. Kõige paremini sobituv joon on teine modifitseeritud Procluse hippopede ja kõige kehvemini sobituv joon Gerono lemniskaat. Parim joon on teisest parimast umbes 4 korda parem ja halvimalt 260 parem.

Kokkuvõte

Töös vaadeldi kehade liikumist Newtoni gravitatsiooniseaduse alusel. Kahe keha ülesande ja Kepleri ülesande puhul leiti kehade trajektoorid. Kolme keha ülesande puhul vaadeldi kolme erilahendi klassi: Euleri lahendid, Lagrange'i lahendid ja kaheksakujuline lahend. Töös toodi impulsi, energia ja impulsimomendi jäävuse seaduste tõestused. Peale selle näidati, et Euleri ja Lagrange'i eeldused viivad kolme keha ülesande lahenditeni. Lõpuks uuriti kaheksakujulist lahendit ja võrreldi erinevaid kaheksakujulisi jooni, mis võiks sobida esitatud kaheksakujulise lahendi lähendiks.

Tulevikus võiks jätkata sobiva lähendi otsinguid, võttes arvesse rohkemaid kaheksakujulise lahendi omadusi. Potentsiaalseid kandidaate leidub veel palju, mida pole veel joontena uuritud. Teine huvitav suund oleks uurida kolme keha ülesande keerukusklassi. Näiteks seda, kas ta kuulub NP täielike ülesannete klassi.

Viited

- [1] Bistafa, Sylvio R. On the Rectilinear Motion of Three Bodies Mutually Attracting Each Other. *Euleriana* 1, nr 2 (2021): 188.
- [2] Chenciner, Alain, ja Richard Montgomery. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Annals of Mathematics* (2000): 881-901.
- [3] Gowers, Timothy, June Barrow-Green ja Imre Leader. *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2008.
- [4] Jannsens, F. Some Observations on the Fig-8 Solution Off the 3-Body Problem. Viimati vaadatud 10.05.2022. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1707/1707.06462.pdf>. 2008.
- [5] Kilp, Mati. *Algebra I*. Tartu: Eesti Matemaatika Selts, 2005.
- [6] Knudsen, Jens M., ja Poul G. Hjorth. *Elements of Newtonian mechanics: including non-linear dynamics*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [7] Krishnaswami, Govind S., ja Himalaya Senapati. An introduction to the classical three-body problem. *Resonance* 24, nr 1 (2019): 87-114.
- [8] Lumiste, Ülo, ja Karl Ariva. *Analüütiline geomeetria*. Tallinn: Valgus, 1973.
- [9] Montgomery, Richard. A new solution to the three-body problem. *Differential equations* 1001 (2001): d2xi.
- [10] Montgomery, Richard. N-body choreographies. Viimati vaadatud 10.05.2022. http://www.scholarpedia.org/article/N-body_choreographies. 2010.
- [11] Moore, Cristopher. Braids in classical dynamics. *Physical Review Letters* 70, nr 24 (1993): 3675.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Erki Külaots,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Gravitatsiooniline kolme keha ülesanne ja mõned selle erilahendid“, mille juhendaja on Urve Kangro, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Erki Külaots

10.05.2022