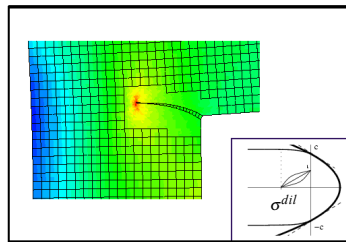


Institut für Strukturmechanik
Bauhaus-Universität Weimar

**Algorithmische Umsetzung eines
elasto-plastischen Kontakt-Materialgesetzes
zur Abbildung der Rissflächen-Degradation
bei kohäsiven Rissen**



Diplomarbeit

cand. Dipl.-Ing. Kai Schrader

Erstprüfer: Prof. Dr. techn. Christian Bucher
Zweitprüfer: Dipl.-Ing. Thomas Most

Aufgabenstellung



Algorithmische Umsetzung eines elasto-plastischen Kontakt-Materialgesetzes zur Abbildung der Rissflächen-Degradation bei kohäsiven Rissen

Bei der Modellierung des Schädigungsverhaltens von Beton spielt die explizite Abbildung der Rissentwicklung eine entscheidende Rolle. Der Rissvorgang von Beton unterscheidet sich von dem metallischer Werkstoffe vor allem durch die größere Bruchzone, die durch die Inhomogenität des Materials und die Größe der Zuschlagskörner begründet ist. Die Anwendung klassischer linearer Bruchmechanik ist somit für gewöhnliche Bauteilgrößen nicht möglich. In [1] wurde daher das sogenannte fiktive oder auch kohäsive Rissmodell vorgestellt, das sich heute zur Modellierung von Beton weitgehend durchgesetzt hat. Dabei wird die Vielzahl der entstehenden Mikrorisse in einer Bruchzone durch einen einzigen fiktiven Riss abgebildet, wobei eine Spannungsübertragung zwischen den Rissufern definiert wird. In der Regel wird dabei eine Normalspannung in Abhängigkeit der Rissöffnungsweite modelliert. In tangentialer Richtung gehen der Großteil der Implementationen des fiktiven Rissmodells (z.B. in [2]) von dem Coulomb'schen Reibungsansatz aus, der eine tangentiale Schubkraft nur bei unter Druckspannung stehenden Rissen vorsieht. Der Schubwiderstand infolge der Verzahnung der Zuschlagskörner auch bei schwach geöffneten Rissen sowie der Schädigungseffekt infolge Tangentialverschiebung kann somit nicht abgebildet werden und die berechneten Rissgeometrien weichen bei kombinierter Normal- und Schubbeanspruchung von den erwarteten Verläufen ab. In [3] wurde daher ein erweitertes Modell vorgestellt, das genau diese Effekte mit einem elasto-plastischen Ansatz wiedergeben kann. Dabei wird von einer arbeitsbasierten Formulierung unter Wiedergabe der umgesetzten Schädigungsenergie ausgegangen. Des Weiteren kann durch die Einführung einer nicht-assoziierten Fließfläche der durch Gefügeauflockerung begründete Dilatanzeffekt von Beton abgebildet werden.

In dieser Arbeit soll das erläuterte Modell in einem stabilen und effizienten Algorithmus in der Art umgesetzt werden, dass es für vollautomatische Rissfortschrittsberechnungen unter Verwendung der am Institut für Strukturmechanik entwickelten netzfreien Verfahren [4] angewendet werden kann. Dabei sind vom Bearbeiter folgende Punkte zu untersuchen und umzusetzen:

- Entwicklung eines impliziten dreidimensionalen Algorithmus zur Berechnung der tangentialen und normalen Spannungsgrößen in Abhängigkeit der vorgegebenen Relativverschiebungen und dessen Verifikation auf Materialpunktebene
- Herleitung des konsistenten elasto-plastischen Tangentenmoduls für den entwickelten Algorithmus
- Implementation des Algorithmus in das Softwarepaket SLang für 2D unter Verwendung der dort verfügbaren isoparametrischen Kontaktelemente
- Verifikation der Implementation anhand einfacher finiter Elemente Berechnungen für verschiedene Belastungsarten
- Nachweis der Anwendbarkeit für die automatische netzfreie Rissimulation für verschiedene Beispiele
- Erläuterungen zur Ermittlung der benötigten Parameter des Modells

Literatur:

- [1] Hillerborg, M., Modeer, M. Peterson, P.E. (1976): Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6: 773-782
- [2] Häussler-Combe, U. (2001): Elementfreie Galerkin-Verfahren: Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten zur Berechnung von Stahlbetontragwerken. Habilitation, Universität Karlsruhe
- [3] Carol, I., Prat, P.C., López, C.M. (1997): Normal/Shear cracking model: Application to discrete crack analysis. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 123: 765-773
- [4] Most, T., Unger, J.F., Bucher, C. (2004): Cohesive discrete crack modeling using Virtual Crack Extension technique within the Natural Neighbor Galerkin Method. *Computers and Structures* eingereicht.

Zeitraum: 03.01.2005-03.04.2005

Erstprüfer: Prof. Dr. techn. Christian Bucher

Zweitprüfer: Dipl.-Ing. Thomas Most

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
2	Nichtlineare Finite Elemente Methode	14
2.1	Allgemeines	14
2.2	Geometrisch-nichtlineare Tragwerksanalyse	15
2.3	Physikalisch-nichtlineare Tragwerksanalyse	17
2.4	Newton-Raphson-Iterationsverfahren	18
3	Kontinuumsplastizität	19
3.1	Allgemeines	19
3.2	Beispiel: Reibungsintensive Plastizität	20
3.3	Idealer Plastifizierungsvorgang	21
3.4	Plastizität unter bestimmten Verfestigungskriterien	26
3.4.1	1D-Beispiel: Isotrope Plastifizierung	26
3.4.2	Elasto-plastischer Tangentenmodul (lineare und isotrope Verfestigung)	29
3.5	Inkrementelle Form der Plastizität	31
4	Elasto-plastisches Kontakt-Materialgesetz	32
4.1	Grundgedanke	32
4.2	Kinematische Formulierung	34
4.3	Elastisches Teilwerkstoffgesetz	37
4.4	Plastisches Teilwerkstoffgesetz mit Entfestigung	40
4.4.1	Berücksichtigung plastischer Weggrößen	40
4.4.2	Hyperbolische Fließbedingung	41
4.4.3	Fließregel mit Dilatanz	43
4.4.4	Formänderungsarbeit	46
4.4.5	Skalierungsfunktion und Formbeiwerte	47
4.4.6	Elasto-plastischer Tangentenmodul	48
4.5	Zusammenfassung	52
4.6	Modifikationen des Modells	54
4.6.1	Modifikation der Fließbedingung	54

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	5
4.6.2 Modifikation der Fließregel	57
5 Algorithmus	59
5.1 Allgemeines	59
5.2 General Closest Point Projection	60
5.3 Linearisierung	64
5.4 Ableitungen der Fließfläche	66
5.4.1 Ableitungen der originalen Fließfläche	66
5.4.2 Ableitungen der modifizierten Fließfläche	69
5.5 Inkrementelle Formänderungsarbeit ΔW^{cr}	72
5.6 Festlegung der Abbruchbedingungen und der Genauigkeiten	73
5.7 Zusammenfassung	75
5.7.1 Closest Point Projection Algorithmus (3-D)	76
5.7.2 Skalare Größen, Vektoren und Materialmatrix	77
5.7.3 Ableitungen der Fließfläche und des plastischen Potentials	78
5.7.4 Dilatanzfaktoren f_c^{dil} und f_σ^{dil}	79
5.7.5 Tangentenmodul \mathbf{K}^t	80
5.7.6 Ableitungen für den Entfestigungsparameter H	81
6 Verifikation	82
6.1 Allgemeines	82
6.2 Test der Verifikationsmodelle	84
6.2.1 Test 1: Zugversuch in SLang	84
6.2.2 Test 2: Schub unter konstanter Druckbelastung	87
6.2.3 Test 3: Zug und Schub mit Dilatanz: Hassanzadeh's Test (1990) als experimentelle Verifikationsgrundlage	89
7 Anwendungsbeispiele	92
7.1 Allgemeines	92
7.2 Betonscheibe	93
7.3 Betonbalken	97
8 Identifikation der Materialparameter	101
8.1 Materialparameter der Festigkeiten	101
8.2 Materialparameter der Dilatanz	103
8.2.1 Numerische Simulation	103
8.2.2 Experimentelle Ermittlung	106
9 Zusammenfassung	108

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	6
I Anhang	
Spezifikationen in SLang	111
II Anhang	
Daten-CD	113

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung: Schub unter Einfluss einer Zugbeanspruchung (aus [1]).	11
1.2	Fiktives Rissmodell einer Betonstruktur zur Approximation von Mikrorissen (Materialmodell nach [2]).	12
1.3	Schub unter Einfluss einer Druckbeanspruchung und die damit verbundene Verzahnung an den Kontaktflächen der Rissfuge sowie Dilatanz (aus [1]).	12
2.1	Newton-Raphson-Iterationsverfahren für ein System mit einem Freiheitsgrad.	18
3.1	Eindimensionales Modell zur Veranschaulichung des durch ein Coulomb'sches Kriterium gesteuerten Plastifizierungsvorgangs (ratenunabhängig).	20
3.2	Spannungs-/ Dehnungslinie mit Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich analog des Einführungsbeispiels.	24
3.3	Eindimensionaler Spannungszustand und Dehnungsgeschwindigkeit bei idealer Plastizität (ratenunabhängig).	24
3.4	Spannungs-/ Dehnungsdiagramm für Plastizität mit isotroper Verfestigung.	27
3.5	Elastizitätsmodul und Tangentenmodul bei linearer Plastizität mit isotroper Verfestigung.	30
4.1	Bruchzustände: Mode I und asymptotischer Mode II.	33
4.2	3-D Kontaktelement zur Rissmodellierung im lokalen Koordinatenraum (x senkrecht zur Kontaktfläche).	35
4.3	Möglichkeiten der Spannungsübertragung des Kontakt-Elements.	37
4.4	Initialzustand (0), Spannungszustand in der Rissfuge (1) und Endzustand (2).	42
4.5	Darstellung der Hyperbolischen Fließfläche F und des plastischen Potentials Q im Hinblick auf eine nicht-assoziierte Fließregel.	43
4.6	Materialparameter χ und c in Abhängigkeit der Formbeiwerte α_χ und α_c	47
4.7	Hyperbolische Fließfläche gemäß zweiachsigem Spannungszustand.	54

4.8	Originale und modifizierte Fließfläche im Mode I Bruchzustand.	56
4.9	Modifizierte Fließfläche F_{mod} gemäß zweiachsigem Spannungszustand.	57
5.1	Geometrische Interpretation der iterativen Ermittlung der Fließspannung ausgehend von einem (elastischen) Initialspannungsniveau σ^{trial}	60
5.2	Spannungszustand und Bruchenergie in Abhängigkeit der Rissgröße (näherungsweise).	73
6.1	Schematische Darstellung des Zugversuches (Test 1) und der gekoppelten Beanspruchung aus Zug und Schub (Test 3) mit einem Kontaktelement (weggesteuert).	83
6.2	Test 2: Weggesteuerte Beanspruchung auf Schub unter einer konstanten Druckspannung F	83
6.3	Test 1: Normalspannungen σ_N in Abhängigkeit der relativen Verschiebungen u_N	86
6.4	Iterationsanzahl für den Zugversuch.	86
6.5	Entfestigungsverhalten in tangentialer Richtung unter konstanter Druckbeanspruchung.	88
6.6	Schub unter konstanter Druckbeanspruchung: Einfluss der Dilatanz entsprechend verschiedener Werte für die Normalspannung σ_N	88
6.7	Versuchsaufbau nach Hassanzadeh.	89
6.8	Normalspannungen σ_N in Abhängigkeit von den relativen Verschiebungen u_N	91
6.9	Schubspannungen σ_T in Abhängigkeit von den relativen Verschiebungen u_T	91
7.1	L-förmige Betonscheibe mit außermittigem Lastangriff und Materialparameter.	93
7.2	Anfangsdiskretisierung der Betonstruktur in SLang.	93
7.3	Netzfreie Rissentwicklung, Spannungszustand und Verformungszustand der Betonstruktur.	94
7.4	Last-/ Verschiebungsdiagramm der numerischen Simulation (kohäsive Schädigung) und Vergleich mit Referenzen.	95
7.5	Betonscheibe nahe gerissenem Zustand.	95
7.6	Gegenüberstellung der Risspfade, generiert aus verschiedenen Materialgesetzen, (a) mit Berücksichtigung (1) und ohne Berücksichtigung (2) kohäsiven Rissverhaltens und der Vergleich mit Versuchsergebnissen (b).	96
7.7	Schematische Darstellung des Balken mit zentrierter Belastung.	97
7.8	Diskretisierung des Einfeldbalkens in SLang.	98
7.9	Vertikaler Rissverlauf im verformten Zustand oberhalb der Kerbe.	98

7.10	Darstellung der Bruchzone im verformten Zustand mit den Kontaktelementen zwischen den Rissufern.	99
7.11	Spannungs- und Verformungszustand in der Bruchzone.	99
7.12	Last-/ Verschiebungsdiagramm als Vergleich mit Referenzen.	100
8.1	Numerischer Zugversuch unter Einfluss des Formbeiwertes α_χ	102
8.2	Entfestigung bei reiner Zugbeanspruchung in Abhängigkeit von der Formänderungsarbeit W^{cr} (links) und von der Rissöffnung u_N^{cr} (rechts).	103
8.3	Dilatanzbeiwert f_c^{dil} unter Einfluss des Formbeiwertes α_c^{dil}	104
8.4	Ermittlung der Dilatanzspannung σ^{dil} anhand einer sehr hoch angesetzten Initial-Dilatanzspannung σ_0^{dil}	105
8.5	Mögliche Versuchsanordnung zur experimentellen Ermittlung von σ^{dil}	106
8.6	Druckbeanspruchung mit $F_D = 29.56$ MPa (N/mm ²) in Form von energetisch äquivalenten Knotenlasten $F = 0.5 \cdot F_D$	107
8.7	Druckbeanspruchung auf dem Niveau von σ^{dil} und die damit verbundene Verhinderung der Dilatanz.	107

abstract

Normal/Shear Cracking Model: Application For Discrete Crack Analysis

developed by Ignacio Carol and Carlos M. Lopez,
Tech. Univ. of Catalonia, Spain

In this documentation a general model for combined normal/shear cracking will be presented. Basically it is defined of the normal and shear stresses of a cohesive crack with the corresponding displacements in normal and tangential direction. For the load state there can be considered three cases of loading: pure tension, shear-tension and shear-compression. In the softening state of quasi-brittle materials like concrete there are be mould physical effects like dilatancy by shearing deformations, nevertheless no dilatancy under very high compression can be performed. By this way it is additionally possible to simulate extended roughness at the contact surface besides the coulomb criteria as it exists in real cracking deformations of structures characterized by sensitive material behavior. To enable this goal in context of smeared crack analysis a special feature in combined activating Mode I and Mode II fracture energies (mixed mode cracking) is used.

After presenting this model a direct way for implementation as a constitutive law based for interface elements will be realized. Integrating this to the stochastic FE software SLang - The Structural Language some tests for verificating the interface model (by comparing the numerical results with existing experimental data) will be performed as well as discussing the cracking model with regard to practical aspects.

Kapitel 1

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird ein implementationsfähiger Algorithmus auf Basis eines im 'Journal Of Engineering Mechanics' vorgestellten Materialmodells entwickelt und in die FE-Software SLang integriert.

Ziel ist es, den Algorithmus für dieses Materialgesetz zur Rissflächen-Degradation anhand elasto-plastischer Verformungsvorgänge umzusetzen. Es erlaubt, nicht-lineares Entfestigungsverhalten sensitiver Materialien im Kontext der Rissentwicklung und -simulation abzubilden. Dabei wird es u.a. möglich, das Materialverhalten an den Kontaktflächen der Rissfuge resultierend aus einer gekoppelten Beanspruchung aus Zug bzw. Druck mit Schub zu berücksichtigen, wobei beim Abscheren nicht nur der Coulomb'sche ¹ Reibungsansatz aktiviert wird. Darüber hinaus können mit diesem Modell die dabei auftretenden Dilatanz-Effekte abgebildet werden.



Abbildung 1.1: Schematische Darstellung: Schub unter Einfluss einer Zugbeanspruchung (aus [1]).

Es erweitert das Rissmodell von Hillerborg [3], welches nur Normalkraftanteile berücksichtigt, um die tangentialen Kraftanteile. Die Mikrorisse werden als fiktiver

¹Charles Augustin Coulomb, französ. Physiker und Ingenieur (1736-1806)

Riss in der Bruchzone abgebildet, was in der folgenden Abbildung entsprechend einem Materialmodell von Galvez et. al [2] ersichtlich ist. Die Spannungsübertragung findet dort genauso wie bei diesem Modell über die Rissufer statt.

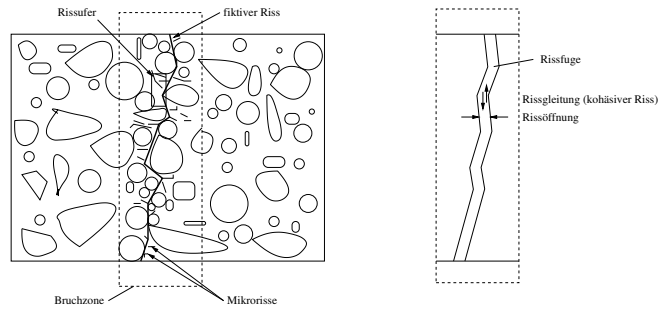


Abbildung 1.2: Fiktives Rissmodell einer Betonstruktur zur Approximation von Mikrorissen (Materialmodell nach [2]).

Das Modell ermöglicht eine realistischere Abbildung der Rissentwicklung durch Berücksichtigung der Materialverzahnung und der tangentialen Schädigung bei kombinierter Beanspruchung (z.B. Schub und Druck) sowie der Volumenzunahme durch die Gefügauflockerung (Dilatanz) entsprechend der folgenden Darstellung.

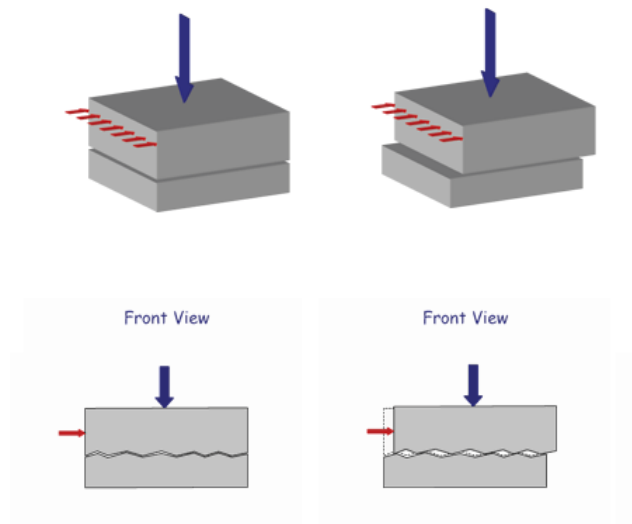


Abbildung 1.3: Schub unter Einfluss einer Druckbeanspruchung und die damit verbundene Verzahnung an den Kontaktflächen der Rissfuge sowie Dilatanz (aus [1]).

Bevor das Materialmodell mit seinen Mechanismen ausführlich vorgestellt wird, ist es zweckmäßig, auf einige Grundlagen der nichtlinearen Finiten Elemente Methode (Kapitel 2) und der Plastizitätstheorie (Kapitel 3) einzugehen. Auf Basis dessen wird der spezifische Algorithmus entwickelt und in implementationsfähiger Form präsentiert.

Nach der Implementation in SLang werden numerische Tests durchgeführt. Anhand vorhandener experimenteller Ergebnisse und Beispieltests kann die Richtigkeit des Materialgesetzes verifiziert werden, was als Basis für den anschließenden Einsatz für zwei numerische Anwendungsbeispiele dienen soll. Abschließend werden noch wichtige Aspekte des Modellcharakters diskutiert.

Kapitel 2

Nichtlineare Finite Elemente Methode

2.1 Allgemeines

Im Hinblick auf die heutigen Konzepte für Festigkeitsanalysen gewinnen nichtlineare Analyseverfahren von diskretisierten Strukturmodellen immer mehr an Bedeutung, welche über eine als ergänzende Technik der linearen Analyse hinausgeht. Prinzipiell unterscheidet man das nichtlineare Gesamtproblem in zwei Teilprobleme:

- geometrisch- oder kinematisch-nichtlineares Tragwerksverhalten (Verformungsverhalten)
- physikalisch-nichtlineares Tragwerksverhalten (Werkstoffverhalten)

Nachfolgend werden beide Analysetechniken und ihre Lösungsmethoden bzw. Iterationsverfahren zur Lösung der nichtlinearen Steifigkeitsbeziehung kurz vorgestellt. Ausführlichere Darlegungen kann man der Referenz nach [4] entnehmen.

2.2 Geometrisch-nichtlineare Tragwerksanalyse

Bei der geometrisch-nichtlinearen Analyse berücksichtigt man entstehende Deformationen als endliche Größen. Das Gleichgewicht wird demnach am verformten Tragwerk gemäß der Theorie 2. Ordnung als Näherungsverfahren (speziell im konstruktiven Ingenieurbau für sehr kleine Deformationen) formuliert. Durch ein Linearisierungskonzept erfolgt die Lösung des globalen Systems in inkrementeller Form. Dabei wird von einem bekannten Grundzustand (auch Nullzustand) ausgegangen und der entsprechende Nachbarzustand ermittelt. Dies erfolgt mit Hilfe einer durch Lastinkremente bedingten Ausweitung des Deformationszustandes. Die Grundlage für diese Zustandstransformation bildet die tangentielle Steifigkeitsbeziehung der Form:

$$\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{V}^+ = \mathbf{P}^+ \quad (2.1)$$

mit

- \mathbf{V}^+ als Vektor der Verformungszuwächse und
- \mathbf{P}^+ als Vektor der Lastinkremente

Die tangentielle Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T setzt sich dabei aus drei Komponenten zusammen:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma \quad (2.2)$$

mit

- \mathbf{K}_e als elastischer Steifigkeitsanteil
- \mathbf{K}_u als Matrix der Verformungen im Nullzustand (Anfangsverformungsmatrix) und
- \mathbf{K}_σ als Anfangsspannungsmatrix

Die Komponenten \mathbf{K}_u und \mathbf{K}_σ lassen sich zudem jeweils in Abhängigkeit der Verformungen \mathbf{V} in linearen und nichtlinearen Anteil klassifizieren. Es ergibt sich:

$$\mathbf{K}_u = \mathbf{K}_{uL}(\mathbf{V}) + \mathbf{K}_{uN}(\mathbf{V}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K}_{\sigma L}(\mathbf{V}) + \mathbf{K}_{\sigma N}(\mathbf{V}) \quad (2.4)$$

Um den Mechanismus des benötigten inkrementell-iterativen Lösungskonzepts zu veranschaulichen, nimmt man anhand der tangentialen Steifigkeitsbeziehung nach Gl. (2.1) folgende Transformation für den Vektor der Lastinkremente \mathbf{P}^+ vor:

$$\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{V}^+ = \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^+ + \mathbf{P} - \mathbf{F}_i(\mathbf{V}) \quad (2.5)$$

mit

- \mathbf{P} als Belastungsvektor des Grundzustandes und
- $\mathbf{F}_i(\mathbf{V})$ als Vektor der inneren Knotenkraftgrößen, berechnet aus dem Verformungsgrundzustand

Diese Formulierung führt nach jedem (linearisierten) Berechnungsschritt zu dem komplementären Verformungsinkrement:

$$\mathbf{V}^+ = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot [\mathbf{P}^+ + \mathbf{P} - \mathbf{F}_i(\mathbf{V})] \quad (2.6)$$

Eingesetzt in die rechte Seite der Gl. (2.5) ergibt die Gewichtskraftdifferenz \mathbf{U} für den jeweiligen Berechnungsschritt. Es gilt:

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}^+ + \mathbf{P} - \mathbf{F}_i(\mathbf{V} + \mathbf{V}^+) \quad (2.7)$$

Durch eine globale, in n Schritten realisierte Iterationsprozedur wird die Annäherung dieser Lastdifferenz an eine bestimmte Toleranz von numerisch Null umgesetzt. Iterationsspezifisch gilt analog Gl. (2.7):

$$\mathbf{U}_{(n)} = \mathbf{P}^+ + \mathbf{P} - \mathbf{F}_i(\mathbf{V} + \sum_n \mathbf{V}_{(n)}^+) < TOL \quad (2.8)$$

Eine für diese Problemstellung geeignete Iterationstechnik ist das Newton-Raphson-Iterationsverfahren, welches im weiteren Verlauf dieses Kapitels vorgestellt wird.

2.3 Physikalisch-nichtlineare Tragwerksanalyse

Hierbei handelt es sich um nichtlineare Verformungsvorgänge aufgrund des nicht mehr linear-elastischen Werkstoffverhaltens einer Tragstruktur. Die Tragwerksantwort beruht dann beispielsweise auf elasto-plastischem Materialverhalten. Es gilt analog dem geometrisch-nichtlinearen Verhalten als Ausgangsformulierung:

$$\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{V}^+ = \mathbf{P}^+ = (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{pl}) \cdot \mathbf{V}^+ = \mathbf{P}^+ + \mathbf{P} - \mathbf{F}_i(\mathbf{V} + \mathbf{V}^+) \quad (2.9)$$

mit \mathbf{K}_{pl} als plastische Steifigkeitsmatrix.

Die für die geometrisch-nichtlineare Analyse dargelegten Formulierungen (Gl. 2.6 - 2.8) lassen sich ebenso auf die stofflich-nichtlineare Problemstellung übertragen. Im Hinblick auf das zu implementierende Materialmodell wird in den folgenden Kapiteln genau auf diesen Aspekt der nichtlinearen Betrachtungsweise Bezug genommen. Für die klassische FE-Formulierung lässt sich die stoffliche Komponente als Differenzial wie folgt isolieren:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.10)$$

mit \mathbf{K}_T als tangentielle Steifigkeitsmatrix.

Die Materialsteifigkeit als partielles Differenzial der Steifigkeitsbeziehung kann durch folgende Formulierung identifiziert werden:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.11)$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage zur Umsetzung eines Materialgesetzes und dessen Bindung an bestimmte Elementtypen, je nach Diskretisierung der zu modellierenden Struktur. Die elasto-plastische Rissanalyse beispielsweise ist ein Vertreter der physikalisch-nichtlinearen Tragwerksanalyse. Da hier elasto-plastisches Materialverhalten eine wesentliche Rolle spielt, sind zur Umsetzung entsprechender Materialmodelle grundlegende Kenntnisse der Plastizitätstheorie unabdingbar. Kapitel 3 gibt daher eine Einführung und einen Überblick über diese Thematik.

2.4 Newton-Raphson-Iterationsverfahren

Wie schon erwähnt, ist dieses Verfahren ein inkrementell-iteratives Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme. Diese Technik findet beispielsweise Anwendung bei kraftgrößen- oder weggrößengesteuerten Prozeduren, um im linearisierten Berechnungsschritt n des Nachbarzustandes die zugehörigen Last- bzw. Verschiebungskorrekturen zu ermitteln. Grundlage bildet die Formulierung für die verformungsabhängige tangentielle Steifigkeit, welche sich als Quotient aus Last- und Weggrößenkorrektur ergibt:

$$K_T^{(i-1)} = K_T(u)^{(i-1)} = \frac{\partial F^{(i-1)}}{\partial u^{(i)}} = \frac{R - F^{(i-1)}}{u^{(i)} - u^{(i-1)}} \quad (2.12)$$

Für die iterative Lösung des Gleichungssystems aus o.g. Gleichung lassen sich zwei Formulierungen festhalten:

$$K_T^{(i-1)}(u) \partial u^i = R - F^{(i-1)} \quad (2.13)$$

$$u^{(i)} = u^{(i-1)} + \partial u^{(i)} \quad (2.14)$$

mit den Anfangsbedingungen $u^{(0)}$ und $F^{(0)}$. Abbildung 2.1 veranschaulicht diesen Zusammenhang.

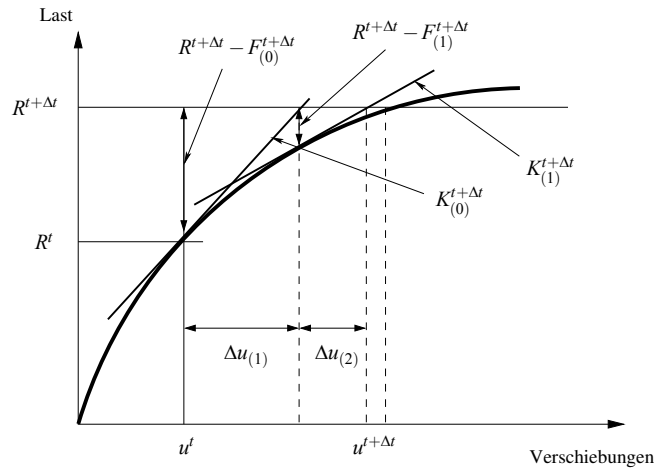


Abbildung 2.1: Newton-Raphson-Iterationsverfahren für ein System mit einem Freiheitsgrad.

Kapitel 3

Kontinuumsplastizität

3.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird auf theoretische Grundlagen der Plastizitätstheorie eingegangen. Die folgenden Darlegungen sollen als Voraussetzung für das in Kapitel 4 ausführlich vorzustellende Materialmodell dienen. Für eine Vertiefung der Thematik kann die Referenz [5] herangezogen werden.

Die Basis im Hinblick auf eine nichtlineare Betrachtung plastischer Verformungsvorgänge ist die elastische Spannungs-/ Verzerrungsbeziehung im einaxialen Spannungszustand (Ratenformulierung):

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (3.1)$$

Die Gesamtverzerrungen (Gesamtdehnungen) ε ergeben sich aus einem elastischen und einem plastischen Dehnungsanteil. Die elastischen Dehnungen resultieren aus elastischem Werkstoffverhalten, entsprechend ergeben sich die plastischen Dehnungen aus plastischen Verformungsvorgängen. Es gilt für die Dehnungszuwächse:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^p \quad (3.2)$$

Für das Werkstoffverhalten unter Beanspruchung unterscheidet man deshalb einen elastischen und einen plastischen Bereich. Beim Übergang zum plastischen Bereich beginnt das Material zu fließen, d.h. es werden bei Verfestigung plastische Systemreserven mobilisiert, was wiederum die Beanspruchbarkeit in Hinblick auf den elastischen Bereich vor dem erstmaligen Fließen erhöht.

Bevor auf die mathematischen Formulierungen und Mechanismen plastifizierender Vorgänge eingegangen wird, sei im folgenden ein triviales mechanisches Modell der Plastizitätsinterpretation anhand der Coulomb'schen Reibung vorgestellt.

3.2 Beispiel: Reibungsintensive Plastizität

Für eine Veranschaulichung des zugrundeliegenden mechanischen Systemverhaltens einer eindimensionalen plastischen Materialreaktion soll folgendes Beispiel dienen:

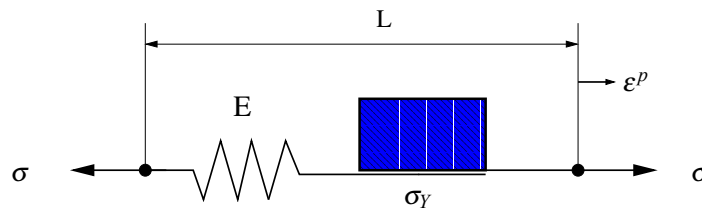


Abbildung 3.1: Eindimensionales Modell zur Veranschaulichung des durch ein Coulomb'sches Kriterium gesteuerten Plastifizierungsvorgangs (ratenunabhängig).

Ersichtlich ist, dass sich das Modell aus einer Feder und einem Reibungselement zusammensetzt. Die Kopplung beider Elemente ermöglicht eine globale Betrachtung als Plastifizierungsvorgang. Dabei beschreibt die linke Komponente (Feder) ein für das globale Element elastisches Materialverhalten bzw. den elastischen Bereich reversibler Verformungsmöglichkeit. Im Gegensatz dazu wird der irreversible Deformationsvorgang (plastische Materialreaktion) durch die Reibungskomponente charakterisiert. Eine anfangs elastische Systemantwort wird durch das Federelement mit steigender Beanspruchung bis zu einer Grenzspannung σ_Y realisiert. Diese (Fließ-)Spannung σ_Y ist der Übergang zum plastischen Bereich, indem nun die Materialcharakteristik des Reibungselementes aktiviert wird und dadurch zu bleibenden Verformungen bei Beanspruchung oberhalb von σ_Y führt. Dieser Übergang vom elastischen zum plastischen Materialverhalten wird durch eine Fließbedingung (Fließkriterium) beschrieben. Das Fließverhalten selbst wird durch die Fließregel festgelegt.

Im folgenden Abschnitt werden anhand dieses Beispiels weitere Kriterien elasto-plastischen Verformungsverhaltens im Hinblick auf den Aspekt vollkommener Plastifizierung vorgestellt. Darauf aufbauend wird ein numerisches Plastizitätsmodell mit isotroper Verfestigung dargelegt und das elasto-plastische Tangentenmodul als Ausdruck der tangentialen Spannungs-/ Verzerrungs- beziehung hergeleitet.

3.3 Idealer Plastifizierungsvorgang

Die Fließbedingung stellt die Grenze zwischen dem elastischen und plastischen Bereich dar. Physikalisch als Fließfunktion je nach Art des elasto-plastischen Materialmodells (z.B. Mises, Drucker-Prager, etc.) ausgedrückt, muss für die Fließbedingung bei plastischem Materialverhalten gelten:

$$f = 0 \quad (3.3)$$

Entsprechend dem trivialen Fall des Beispielmodells mit der konstanten materialspezifischen Fließspannung σ_Y ergibt sich konkret für f folgende Formulierung:

$$f = f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0 \quad (3.4)$$

Weiterhin würde sich im plastischen Bereich (Reibungselement) ein Verzerrungszuwachs (Verzerrungsgeschwindigkeit) $\dot{\varepsilon}^p$ der Form ergeben:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^p = \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \quad (3.5)$$

mit

- $\dot{\varepsilon}^p = 0$ für $f = |\sigma| - \sigma_Y < 0$ (elastischer Bereich)
- $\dot{\varepsilon}^p = \operatorname{sign}(\sigma)\gamma$ für $f = |\sigma| - \sigma_Y = 0$ d.h. $|\sigma| = \sigma_Y$ (plastischer Bereich)

und der vorzeichenspezifischen Komponente

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{if } \sigma > 0 \\ -1 & \text{if } \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Für $f(\sigma) = 0$ gilt, dass der Spannungszustand genau auf der Fließfläche liegt und somit plastisches Fließen eintritt bzw. f dann die obere Grenze des elastischen Bereichs darstellt. Mit diesem Spannungszustand ist die Fließbedingung erfüllt. Die Formulierung für die plastischen Verzerrungszuwächse $\dot{\varepsilon}^p$ (Gl. 3.5) wird als Fließregel oder als Fließgesetz bezeichnet. Für den elastischen Bereich sind diese Verzerrungszuwächse numerisch Null. Die auf die Zustandsänderung übertragene Spannungs-/ Verzerrungsbeziehung (Gl. 3.1) liefert dann für den eindimensionalen Fall des aufgezeigten Beispiels folgende Form:

$$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} \quad (3.7)$$

mit E als Elastizitätsmodul.

Allgemein lässt sich die Fließregel als plastisches Verzerrungswachstum aus dem Differenzial des plastischen Potenzials Q und dem plastischen Multiplikator γ formulieren:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (3.8)$$

wobei für γ und f jeweils das Nullkriterium wie folgt zutrifft:

- $\gamma = 0$ wenn $f(\sigma) < 0$
- $f(\sigma) = 0$ wenn $\gamma > 0$

Aus diesen beiden Kriterien lässt sich zusammenfassend eine Bedingung formulieren:

$$\gamma \cdot f(\sigma) = 0 \quad (3.9)$$

Des Weiteren gilt für die zeitdiskrete Betrachtung der Fließfläche in Abhängigkeit von dem Spannungszustand:

- $\gamma = 0$ wenn $\dot{f}(\sigma(t)) < 0$
- $\dot{f}(\sigma(t)) = 0$ wenn $\gamma > 0$

Wiederum folgt daraus die zweite generalisierte Bedingung:

$$\gamma \cdot \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (3.10)$$

Diese beiden generalisierten Bedingungen (3.9 und 3.10) sind als folgende Konditionalsätze bekannt [5]:

1. das Komplementär-Kriterium nach Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma) = 0$$

2. das Konsistenz-Kriterium

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad \text{wenn} \quad f(\sigma) = 0$$

Mit der Anwendung dieser Kriterien auf das Reibungselement des eingangs erläuterten Beispiels lässt sich das Modell für eine vollkommene Plastifizierung herleiten und veranschaulichen. Aus der Konsistenz-Bedingung folgt für $\gamma > 0$:

$$\dot{f}(\sigma) = 0$$

Für das Differenzial der Fließfläche gilt mit Hilfe der Gleichung (3.1):

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = 0 \quad (3.11)$$

Analog der Konvention (3.6) für das spannungsassoziierte Vorzeichen lässt sich die Gleichung (3.11) überführen in:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\epsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \text{sign}(\sigma) \quad (3.12)$$

Das weitere äquivalente Umformen mit den Differenzialen

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} |\sigma| = \text{sign}(\sigma) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma) \quad (3.14)$$

und der konsequenten Folgerung

$$[\text{sign}(\sigma)]^2 = 1 \quad (3.15)$$

führt zu dem Term für den plastischen Multiplikator

$$\gamma = \dot{\epsilon} \text{sign}(\sigma) \quad (3.16)$$

Diese Formulierung substituiert die Gleichung für die plastischen Dehnungszuwächse (Gl. 3.5) wie folgt:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon} [\text{sign}(\sigma)]^2 = \dot{\epsilon} \quad (3.17)$$

Damit resultieren die Gesamtdehnungszuwächse ausschließlich aus plastischen Verformungsvorgängen, was auch als ideale oder vollkommene Plastizität bezeichnet wird. Zur Veranschaulichung der Problematik folgen jeweils Darstellungen für die daraus resultierenden Spannungs-/ Verzerrungsverläufe.

Die erste Darstellung (Abb. 3.2) stellt den Spannungsverlauf in Abhängigkeit von den Verzerrungen ε dar. Die zweite Darstellung (Abb. 3.3) zeigt den konstanten Verlauf von $\sigma = \sigma_Y > 0$ bei steigenden differentiellen Dehnungszuwächsen $\dot{\varepsilon}^p$.

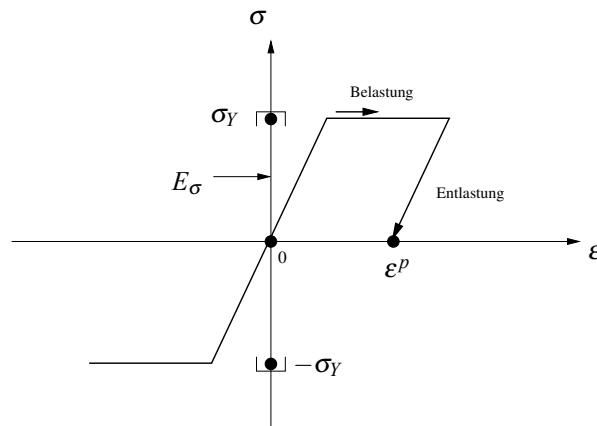


Abbildung 3.2: Spannungs-/ Dehnungslinie mit Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich analog des Einführungsbeispiels.

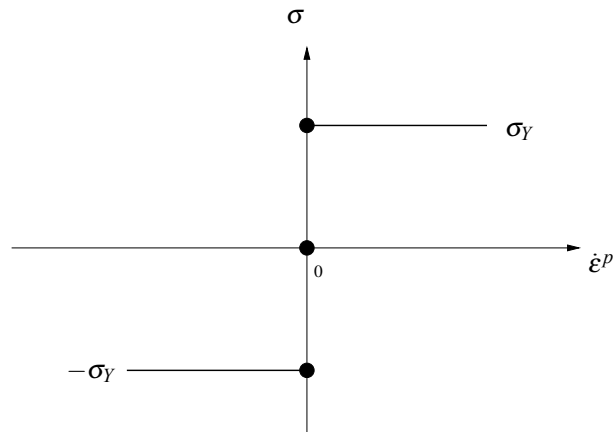


Abbildung 3.3: Eindimensionaler Spannungszustand und Dehnungsgeschwindigkeit bei idealer Plastizität (raten-unabhängig).

Als Abschluss folgt eine Zusammenfassung des eindimensionalen Plastizitätsmodells (ideale Plastizität):

1. Elastische Spannungs-/ Verzerrungsbeziehung $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$
2. Fließgesetz $\dot{\varepsilon}^p = \gamma \operatorname{sign}(\sigma)$
3. Fließbedingung $f = \sigma - \sigma_Y \leq 0$
4. Komplementär-Kriterium nach Kuhn-Tucker $\gamma \geq 0, \quad f(\sigma) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma) = 0$
5. Konsistenz-Kriterium $\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad \text{wenn} \quad f(\sigma) = 0$

Das Fließgesetz nach Punkt 2 der Zusammenfassung lässt sich nun durch das Differential der Fließfläche zur Substitution der Vorzeichenkonvention $\operatorname{sign}(\sigma)$ (Gl. 3.13) darstellen:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.18)$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (3.19)$$

Diese Formulierung als Herleitung der Gleichung (3.8) impliziert die Abhängigkeit der Dehnungsgeschwindigkeit von dem plastischen Potenzial, dessen Differential das Kriterium der Fließrichtung charakterisiert. Im o.g. Fall der Affinität zwischen

Fließflächenfunktion f und Formulierung für das plastische Potenzial Q spricht man von einer assoziierten Fließregel. Entsprechend gilt für die nicht-assozierte Beziehung:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \neq \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.20)$$

Je nach Art des Lastzustandes (Be- oder Entlastung) finden im plastischen Bereich Verfestigungs- oder Entfestigungsvorgänge statt. Dies hat zur Folge, dass sich die (aktuelle bzw. zeitsensitive) Materialmatrix in Abhängigkeit vom jeweiligen Deformationsgrad bzw. von der jeweiligen Werkstoffreaktion neu formuliert. Diese Materialmatrix bezeichnet man auch als tangentielle Steifigkeit oder Tangentenmodul (Abschnitt 3.4.2).

3.4 Plastizität unter bestimmten Verfestigungskriterien

3.4.1 1D-Beispiel: Isotrope Plastifizierung

Im Hinblick auf die Berücksichtigung eines physikalisch konformen Materialverhaltens einer sich mehraxial-definierenden Struktur (Isotropie) wird das folgende Plastizitätsmodell im Kontext isotroper Verfestigung vorgestellt. Für eine Vertiefung der Darlegungen sei ebenso auf die Referenz nach [5] verwiesen.

Ausgangspunkt für dieses Verfestigungsmodell bilden auch hier die Formulierungen nach Gl. (3.1) und (3.2). Für eine Erweiterung der vorangegangenen Plastifizierungsbeschreibung mögen folgende Bedingungen dienen:

- identischer elastischer Bereich E_σ unabhängig vom Belastungszustand als Kriterium für isotropes Materialverhalten
- lineares Verfestigungsverhalten als Kriterium für das Fließgesetz (vorzeichen-unabhängig)

Das Kriterium für die Isotropie führt zu einer neuen Form der Fließbedingung:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_y + K\alpha] \leq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (3.21)$$

mit

- $\sigma_y > 0$ als konstante Fließspannung
- $K \geq 0$ als konstantes, plastisches Modul
- $\alpha > 0$ als Funktion des plastischen Fließens orthogonal zur Längsachse

Der Parameter α wird als interne Verfestigungsvariable bezeichnet. Ein negatives plastisches Modul verweist auf einen Entfestigungsvorgang. Ein linearer Verfestigungsvorgang führt für $\dot{\alpha}$ zu folgender Formulierung:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}^p| \quad (3.22)$$

Die generalisierten Bedingungen (Komplementär-Kriterium nach Kuhn-Tucker und Konsistenz-Kriterium) werden nun unter Berücksichtigung isotroper Verfestigung erweitert. Es ergibt sich:

- für das Komplementär-Kriterium nach Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0$$

- für das Konsistenz-Kriterium

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$

Für einen Überblick und eine Veranschaulichung folgen eine Modellzusammenfassung für den eindimensionalen Spannungszustand sowie die komplementären Verfestigungskurven der Spannungs-/ Verzerrungsbeziehung.

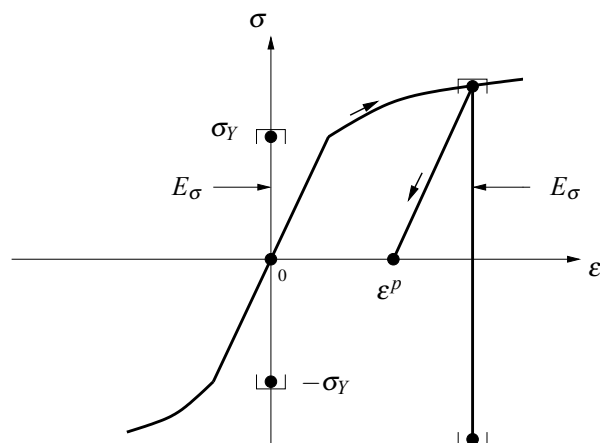


Abbildung 3.4: Spannungs-/ Dehnungsdiagramm für Plastizität mit isotroper Verfestigung.

Zusammenfassung: Plastizität mit isotroper Verfestigung (1-D).

1. Elastische Spannungs-/ Verzerrungsbeziehung $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$
2. Fließgesetz $\dot{\varepsilon}^p = \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \quad \dot{\alpha} = \gamma$
3. Fließbedingung $f(\sigma, \alpha) = \sigma - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0$
4. Komplementär-Kriterium nach Kuhn-Tucker $\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0$
5. Konsistenz-Kriterium $\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0 \quad \text{wenn} \quad f(\sigma, \alpha) = 0$

3.4.2 Elasto-plastischer Tangentenmodul (lineare und isotrope Verfestigung)

Entsprechend den vorherigen Darlegungen für den Fall isotroper plastischer Verfestigung lässt sich nun das elasto-plastische Tangentenmodul herleiten. Diese tangentiale Steifigkeit stellt die differentiellen Spannungs- und Dehnungszuwächse in Form einer Ratenformulierung in Beziehung. Als Basis dient das Konsistenzkriterium $\dot{\gamma}f = 0$ mit $\dot{f} = 0$ und die elastische Spannungs-/ Verzerrungsbeziehung:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (3.23)$$

Die Substitution für $\dot{\sigma}$ und $\partial f/\partial \sigma$ sowie $\partial f/\partial \alpha$ führt zu:

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma)E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) - K\dot{\alpha} = 0 \quad (3.24)$$

Mit Hilfe der Gleichung (3.16) lässt sich folgende Überführung vornehmen:

$$\dot{f} = \text{sign}(\sigma)E\dot{\epsilon} - \gamma[E + K] = 0 \quad (3.25)$$

Und damit folgt für γ bei $\dot{f} = 0$:

$$\gamma = \frac{\text{sign}(\sigma)E\dot{\epsilon}}{E + K} \quad (3.26)$$

Mit diesem Term lässt sich γ in der Fließregel (Gl. 3.5) ersetzen und führt zu:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{E\dot{\epsilon}}{E + K} \quad (3.27)$$

Eingesetzt in die Ratenformulierung der elastischen Spannungs-/ Verzerrungsbeziehung folgt für den plastischen Bereich ($\gamma > 0$):

$$\dot{\sigma} = E \left(\dot{\epsilon} - \frac{E\dot{\epsilon}}{E + K} \right) \quad (3.28)$$

$$\dot{\sigma} = \left(E - \frac{E^2}{E + K} \right) \dot{\epsilon} \quad (3.29)$$

bzw.

$$\dot{\sigma} = \frac{EK}{E + K} \dot{\epsilon} = K^t \dot{\epsilon} \quad (3.30)$$

K^t ist hierbei der elasto-plastische Tangentenmodul bei linearer und isotroper Verfestigung.

Die Ratenformulierung für $\dot{\sigma}$ lautet dann je nach Verformungsvorgang:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\varepsilon} & \gamma = 0 \quad (\text{elastisch}) \\ \frac{EK}{E+K}\dot{\varepsilon} & \gamma > 0 \quad (\text{plastisch}) \end{cases} \quad (3.31)$$

Die folgende Abbildung verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen in Form des Tangentenmoduls je im elastischen und im plastischen Bereich:

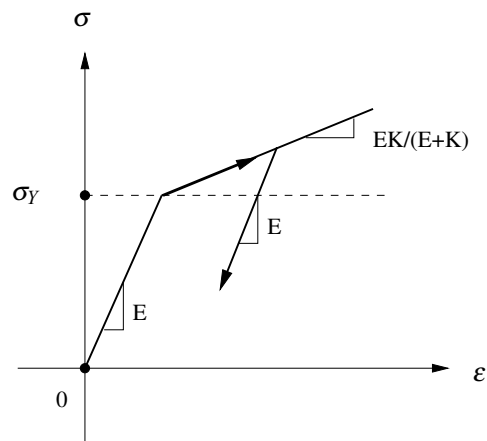


Abbildung 3.5: Elastizitätsmodul und Tangentenmodul bei linearer Plastizität mit isotroper Verfestigung.

Neben der isotropen Verfestigung gibt es die kinematische Verfestigung. Ebenso ist die Kombination beider Verfestigungsarten möglich. Auf Grundlage des vorgestellten Plastifizierungsmodells mit isotroper Verfestigung lassen sich weitere nichtlineare Modelle durch Anpassen der Fließbedingung, der Fließregel sowie der Fließ-Kriterien herleiten. Hierfür sei auf die Referenz nach [5] verwiesen.

3.5 Inkrementelle Form der Plastizität

Um einen zeitdiskreten, dehnungsgesteuerten Plastifizierungsvorgang numerisch abbilden zu können, sind die Formulierungen der Plastizitätstheorie für einen entsprechenden Algorithmus inkrementell aufzubereiten. Im folgenden wird ein allgemein gültiges Konzept zur Algorithmus-Entwicklung unabhängig von der jeweiligen Fließbedingung vorgestellt.

Als Ausgangssituation seien die Gesamtdehnungen ε_n , die plastischen Dehnungen ε_n^p und das Inkrement $\partial\varepsilon$ zum Zeitpunkt t_n bekannt. Als Basis für den Folgezustand zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + \partial t$ gilt nach dem Euler-Rückwärts-Verfahren (als Integrationsverfahren):

$$x_{n+1} = x_n + \partial t f(x_{n+1}) \quad (3.32)$$

Für die plastischen Dehnungen ergibt sich analog Gl. (3.32):

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \partial\gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_{n+1}} \quad (3.33)$$

mit

$$\partial\gamma = \gamma_{n+1} \partial t \geq 0$$

Der aktuelle Spannungszustand ermittelt sich zu:

$$\sigma_{n+1} = E : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (3.34)$$

Das Komplementär-Kriterium nach Kuhn-Tucker lautet dann:

$$\partial\gamma \geq 0 \quad f_{n+1} \leq 0 \quad \partial\gamma f_{n+1} = 0$$

Voraussetzung ist, dass folgende Größen bekannt sind:

$$\varepsilon_n, \quad \partial\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n^p \quad \text{und damit auch} \quad \varepsilon_{n+1}$$

Anhand der inkrementellen Formulierung sind zahlreiche Algorithmen entwickelt worden. Im Kapitel 5 wird der Closest Point Projection Algorithmus vorgestellt und auf die lokale Iteration des zu realisierenden Materialgesetzes gemäß Kapitel 4 angewendet.

Kapitel 4

Dreidimensionales elasto-plastisches Kontakt-Materialgesetz zur Abbildung der Rissflächen-Degradation

4.1 Grundgedanke

In einer Veröffentlichung des Journal of Engineering Mechanics wurde ein Konzept zur Modellierung von Risszuständen [6], hervorgegangen aus einer durch Zug bzw. Druck und Schub gekoppelten Beanspruchung von spröden und sensitiven Materialien, z.B. Beton, vorgestellt. Hiermit lässt sich ein realitätsnaher Entfestigungsvorgang von bruchempfindlichen Materialien abbilden und numerisch simulieren. Die Integration eines solchen Materialmodells in eine FE-basierte Applikation kann mit Hilfe von Kontakt-Elementen erfolgen. Das Risswachstum ist dabei durch Eintreten und Zunahme von Rissverschiebungen oberhalb des elastischen Formänderungszustandes auf Basis der Plastizitätstheorie charakterisiert. Je nach Beanspruchungsgrad ergibt sich ein Niveau der bis dahin umgesetzten Formänderungsarbeit. Diese Größe nimmt direkten Einfluss auf die Festigkeiten (Zugfestigkeit, Kohäsion) und ermöglicht die iterative Ermittlung der aktuellen Rissverschiebungen. Es können physikalische Phänomene wie Dilatanz und ein erhöhter Reibungswiderstand, welcher über die Coloumb'sche Reibung hinaus geht, berücksichtigt werden. Dadurch ist es möglich, Entfestigungsvorgänge mit exponentialem Charakter sprödbrechempfindlicher Materialien bei einer aus Druck resultierenden Schubbeanspruchung realitätsnah zu simulieren. Die hierbei hervorgebrachten höheren Scherwiderstände als Simulation real existierender Verzahnungseffekte und das damit verbundene Formänderungsverhalten verleihen diesem Material-

modell besondere Bedeutung.

Prinzipiell unterscheidet man drei Belastungsarten:

- Zugbeanspruchung
- Zug-/ Schubbeanspruchung
- Druck-/ Schubbeanspruchung

Weiterhin werden 2 Grenzbruchenergiezustände eingeführt:

- MODE I
- MODE II(a)

Mode I beschreibt dabei das Materialverhalten unter Zugbelastung, wobei nach Überschreitung der elastischen Beanspruchbarkeit nichtlineare Entfestigungsvorgänge eintreten und dadurch ein bestimmtes Restspannungsniveau generiert wird. Die verbleibende Materialfestigkeit nimmt dabei sukzessiv mit zunehmender Rissentwicklung bis zum Versagen der Struktur ab. Der Grenzzustand einer aus Druck und Schub gekoppelten Beanspruchung wird analog durch Mode IIa klassifiziert (Abbildung 4.1).

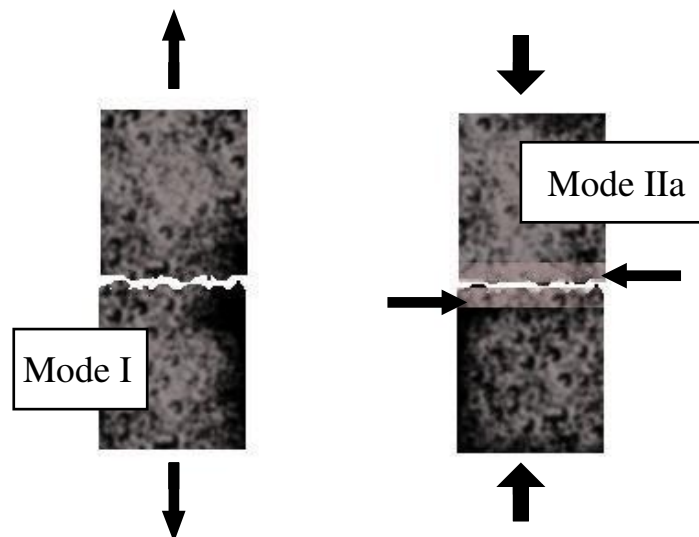


Abbildung 4.1: Bruchzustände: Mode I und asymptotischer Mode II.

Die korrespondierenden Bruchenergien G_f^I und G_f^{IIa} im jeweiligen Grenzzustand beschreiben die freigesetzte Energie pro geschaffener Trennfläche. Die geleistete Formänderungsarbeit je Rissstadium nähert sich diesen Grenzwerten bei kontinuierlichem Risswachstum an. Das Verhältnis aus Formänderungsarbeit und jeweiliger Bruchenergie ist dabei maßgebend für die verbleibende Beanspruchbarkeit sowie der weiteren Rissentwicklung. Die Formänderungsarbeit W^{cr} selbst wird daher als Geschichtsvariable zur ratenabhängigen, inkrementellen Ermittlung der plastischen Weggrößen (lokales Iterationsmodell) benötigt.

Das nachfolgend dargelegte Materialgesetz mit plastischer Entfestigung motivierte zur Entwicklung eines implementationsfähigen Algorithmus und dessen Integration in die stochastische FE-Software SLang am Institut für Strukturmechanik (ISM) der Bauhaus-Universität Weimar. In der vorliegenden Dokumentation wird die algorithmische Umsetzung dieses Materialgesetzes umfassend dargelegt, wobei ebenso die Verifikation und abschließend der Test von zwei Anwendungsbeispielen Bestandteil dieser Arbeit sind.

4.2 Kinematische Formulierung

Grundlage für die Herleitung der kinematischen Beziehung entsprechend der Lagrange'schen ¹ Formulierung soll die Verschiebung eines Punktes des dreidimensionalen Kontinuums darstellen [4]. Der zugehörige Verschiebungsvektor einer Positionsänderung definiert sich zu:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Eine allgemeine Deformation, definiert durch kleinste Translationen und Rotationen sowie infinitesimale Kantendrehungen mit Winkelgleitung, bewirkt eine Veränderung der geometrischen Struktur. Die Quantität dieser Deformation lässt sich über eine kinematische Beziehung ausdrücken. Die daraus resultierenden Dehnungen und Gleitungen entsprechen dem Verschiebungsgradienten. Dieser Ansatz gestaltet sich in Bezug auf die Kontaktflächen eines Risses anders. Man geht hierbei von Verschiebungsdifferenzen in der Rissfuge aus, anstatt die Verzerrungen in Abhängigkeit der Verschiebungen anzusetzen. Gleichmaßen gilt, dass sich der Verschiebungstensor richtungskorrespondierend zu dem Verzerrungstensor formuliert.

¹ Joseph Louis Comte de Lagrange, französischer Mathematiker, 1736-1813, Vollender der Variationsrechnung mit bedeutenden Beiträgen zu den Energieprinzipien, Begründer des Prinzips der virtuellen Arbeiten (1788) [4].

Als Ausgangspunkt zur modellspezifischen Formulierung des Weggrößentensors im FE Kontext dient das (3-D) Kontaktelement in [7]. In dreidimensionaler Ausdehnung besitzt dieses achtknotige Element zwei durch die Knoten gekoppelte Kontaktflächen, welche durch einen Kontaktflächenabstand bzw. die Elementdicke t (Kontaktfuge) charakterisiert sind. Die lokale x -Achse ist dabei orthogonal zur Kontaktfläche gerichtet. Abbildung 4.2 stellt dies schematisch dar.

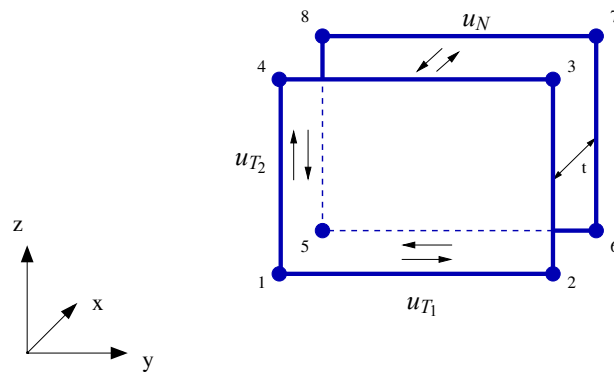


Abbildung 4.2: 3-D Kontaktelement zur Rissmodellierung im lokalen Koordinatenraum (x senkrecht zur Kontaktfläche).

Für das Kontaktelement sind folgende Verschiebungen zulässig:

$$\Delta u_x, \Delta u_y \quad \text{und} \quad \Delta u_z$$

Δu_y und Δu_z entsprechen dabei den Schubdehnungen im Kontinuum. Im Hinblick auf einen symmetrischen Verschiebungstensor gilt:

$$u_{ij} = u_{ji}$$

und

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_N \\ u_{T1} \\ u_{T2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

mit

- der Relativverschiebung u_N orthogonal zur Rissfuge
- den Relativverschiebungen u_{T_1} und u_{T_2} in Richtung der Rissfuge

Dieser Verschiebungstensor \mathbf{u}^* definiert sich damit im Hinblick auf die korrespondierende kinematische Beziehung zwischen Verschiebungsvektor und Verzerrungstensor neu. Es gilt:

$$\mathbf{u}^* = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_N \\ u_{T_1} \\ u_{T_2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Folglich ergibt sich der Weggrößentensor in vereinfachter Matrix-Form zu:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \Delta u_x & \frac{1}{2} \Delta u_y & \frac{1}{2} \Delta u_z \\ \frac{1}{2} \Delta u_y & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta u_z & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_N & \frac{1}{2} u_{T_1} & \frac{1}{2} u_{T_2} \\ \frac{1}{2} u_{T_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} u_{T_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Auf Basis dieses Ansatzes für die kinematische Formulierung folgt das zugehörige Werkstoffgesetz, was Anliegen des nächsten Abschnitts sein soll. Dabei wird im folgenden \mathbf{u}^* als \mathbf{u} bezeichnet, da nur Verschiebungsdifferenzen als Eingangsgrößen betrachtet werden.

4.3 Elastisches Teilwerkstoffgesetz

Anhand der kinematischen Beziehung lässt sich das elastische Werkstoffgesetz formulieren. Für das Material wird linearelastisches Materialverhalten mit homogen anisotropen Eigenschaften angenommen. Je nach Beanspruchungsgrad und -richtung können Spannungen wie folgt aufgenommen werden (Abbildung 4.3):

- Zug- bzw. Druckspannungen senkrecht zur Kontaktfläche:

$$\sigma_{xx}$$

- Schubspannungen in Richtung der Kontaktfläche:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

- Spannungen, welche nicht aufgenommen werden können:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$$

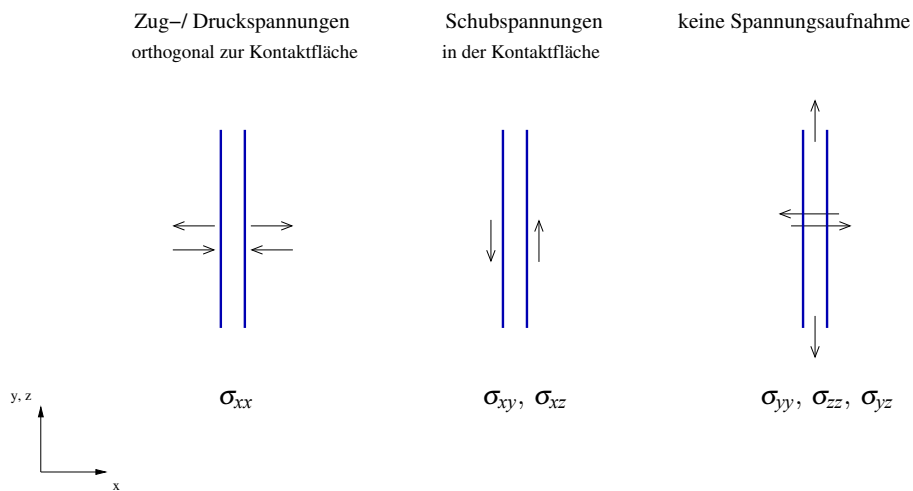


Abbildung 4.3: Möglichkeiten der Spannungsübertragung des Kontakt-Elements.

Entsprechend der Modellbeschreibung [6] lassen sich die Anteile aus Zug/ Druck und Schub wie folgt ersetzen:

1. σ_N aus Zug- oder Druckbeanspruchung, orthogonal zur Rissfuge gerichtet
2. σ_{T_1} und σ_{T_2} für die Schubanteile in Richtung der Rissfuge/ Rissfläche

Dadurch erhält der Spannungstensor im dreidimensionalen Raum folgende Form:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_N & \sigma_{T_1} & \sigma_{T_2} \\ \sigma_{T_1} & 0 & 0 \\ \sigma_{T_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Im Hinblick auf das Werkstoffgesetz ergibt sich eine Spannungs-/ Verschiebungsbeziehung (entsprechend kinematischer Formulierung). Die dafür benötigte elastische (Material-)Steifigkeitsmatrix des Kontaktelements wird für einen entkoppelten Ansatz mit konstanten Koeffizienten K_{ii} folgendermaßen angesetzt:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{el} = \begin{bmatrix} K_N & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_T \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Die elastische Steifigkeitsbeziehung lautet dann:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^{el} = \begin{bmatrix} \sigma_N \\ \sigma_{T_1} \\ \sigma_{T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_N^{el} \\ u_{T_1}^{el} \\ u_{T_2}^{el} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Analog lässt sich der differenzielle Zusammenhang zwischen Spannungen und Verschiebungen entsprechend einem elastischen Verformungsverhalten als Ratenformulierung festhalten:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K} : \dot{\mathbf{u}}^{el} \quad (4.8)$$

mit

- $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [\dot{\sigma}_N \ \dot{\sigma}_{T_1} \ \dot{\sigma}_{T_2}]^T$ als Vektor der differenziellen Spannungszuwächse
- $\dot{\mathbf{u}}^{el} = [\dot{u}_N^{el} \ \dot{u}_{T_1}^{el} \ \dot{u}_{T_2}^{el}]^T$ als Vektor der differenziellen Verschiebungszuwächse
- \mathbf{K} als Materialmatrix gemäß Gleichung (4.6)

In 2-D folgt für die tangentialen Größen:

$$u_{T_2} = 0 \quad \sigma_{T_2} = 0$$

und daraus eine Reduktion der Spannungs- und Verschiebungstensoren (in Vektorform):

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_N \ \sigma_T]^T \quad \mathbf{u}^{el} = [u_N^{el} \ u_T^{el}]^T \quad (4.9)$$

sowie des Materialensors:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_N & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Mit Gleichung (4.7) ist ersichtlich, dass das allgemeine lineare Werkstoffgesetz dieser Steifigkeitsbeziehung entspricht. Daraus folgt für das Werkstoffgesetz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^{el} \quad (4.11)$$

Auf Basis dieser linearen Elastizitätsformulierung werden im folgenden Abschnitt Nichtlinearitäten des Verformungsverhaltens berücksichtigt und der Gültigkeitsbereich des Werkstoffgesetzes für plastische Deformationen ausgeweitet.

4.4 Plastisches Teilwerkstoffgesetz mit Entfestigung

4.4.1 Berücksichtigung plastischer Weggrößen

Das elastische Werkstoffgesetz lässt sich in eine Formulierung für plastisches Verformungsverhalten ergänzen. Voraussetzung hierfür ist, dass die Verformungen bzw. Verzerrungen nicht mehr ausschließlich aus elastischer Formänderung resultieren. Als Ansatz für den (Gesamt-)Verschiebungstensor gilt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{el} + \mathbf{u}^{cr} \quad (4.12)$$

mit

$$\mathbf{u}^{cr} = [u_N^{cr} \quad u_{T_1}^{cr} \quad u_{T_2}^{cr}]^T$$

als Vektor der Rissöffnung und -gleitungen.

Als differenzielle elastische Steifigkeitsbeziehung mit Berücksichtigung der irreversiblen Verschiebungen lässt sich mit Hilfe der Gleichung (4.12) eingesetzt in Gl. (4.8) folgende Form generieren:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}^{el}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{cr}) \quad (4.13)$$

Die Tensoren liefern in matrizieller bzw. vektorieller Schreibweise die ausformulierte Form der Gl. (4.13):

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_N \\ \dot{\sigma}_{T_1} \\ \dot{\sigma}_{T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_T \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \dot{u}_N \\ \dot{u}_{T_1} \\ \dot{u}_{T_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{u}_N^{cr} \\ \dot{u}_{T_1}^{cr} \\ \dot{u}_{T_2}^{cr} \end{pmatrix} \right] \quad (4.14)$$

bzw. in 2-D

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_N \\ \dot{\sigma}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \dot{u}_N \\ \dot{u}_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{u}_N^{cr} \\ \dot{u}_T^{cr} \end{pmatrix} \right] \quad (4.15)$$

Die Ermittlung der irreversiblen Verschiebungen bzw. Rissgrößen erfolgt in einer lokalen Iterationsprozedur. Auf Basis der Plastizitätstheorie ergibt sich der Verschiebungsvektor der plastischen Weggrößen aus der Fließregel, welche nachfolgend vorgestellt wird. Vorher jedoch wird auf die für das Materialmodell spezifische Fließbedingung eingegangen.

4.4.2 Hyperbolische Fließbedingung

Die Fließbedingung als Übergang zwischen elastischen und plastischen Bereich bzw. der Beginn des plastischen Fließens formuliert sich im dreidimensionalen Spannungsraum wie folgt:

$$F = \sigma_T^2 - (c - \sigma_N \tan \phi)^2 + (c - \chi \tan \phi)^2 \quad (4.16)$$

mit

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{T_1}^2 + \sigma_{T_2}^2}$$

Liegt der Spannungszustand auf der Fließfläche, gilt für F :

$$F(\sigma_N, \sigma_T) = 0 \quad (4.17)$$

Wird die Fließbedingung nicht erfüllt, signalisiert das Vorzeichen von F elastisches ($F < 0$) oder plastisches ($F > 0$) Verformungsverhalten. Neben den Spannungen sind in der Fließbedingung folgende Materialparameter zu berücksichtigen:

- χ : Zugfestigkeit
- c : Kohäsion/ Scherfestigkeit
- ϕ : Gleitreibungswinkel
- $\tan \phi$: Reibungsbeiwert für Coulomb'sche Reibung

Je nach angesetzter Schrittweite bei der erwähnten lokalen Iteration zur Ermittlung der plastischen Weggrößen ergibt sich ein aktueller elasto-plastischer Spannungszustand sowie ein Niveau der bis dahin umgesetzten Formänderungsarbeit, welche direkten Einfluss auf die Materialparameter χ und c hat. Dabei verringern sich die Initialwerte der Festigkeiten (χ_0, c_0) mit steigender Formänderungsarbeit. Die aktuelle Beanspruchbarkeit resultiert somit aus dem noch nicht umgesetzten Anteil der Grenzbruchenergie. Aus dieser Konsequenz folgt für die Materialparameter:

$$\chi = \chi_0 \cdot \varphi(\xi) \quad (4.18)$$

$$c = c_0 \cdot \varphi(\xi) \quad (4.19)$$

ξ ist dabei das Verhältnis aus Formänderungsarbeit und Grenzbruchenergie entsprechend Mode I und Mode IIa. Es ergibt sich:

- für die Zugfestigkeit (Mode I)

$$\xi = 1 - \frac{W^{cr}}{G_f^I} \quad (4.20)$$

- für die Kohäsion (Mode IIa)

$$\xi = 1 - \frac{W^{cr}}{G_f^{IIa}} \quad (4.21)$$

Die Skalierungsfunktion $\varphi(\xi)$ ermöglicht nun das Anpassen der Festigkeitsparameter mittels verschiedener Formbeiwerte α_i . Diese Parameter und die benötigte Skalierungsfunktion werden im Abschnitt 4.4.5 dieses Kapitels vorgestellt.

Entwicklung der Fließfläche

Die verschiedenen Zustände und Zustandsübergänge der Fließfläche sind in der folgenden Abbildung dargestellt:

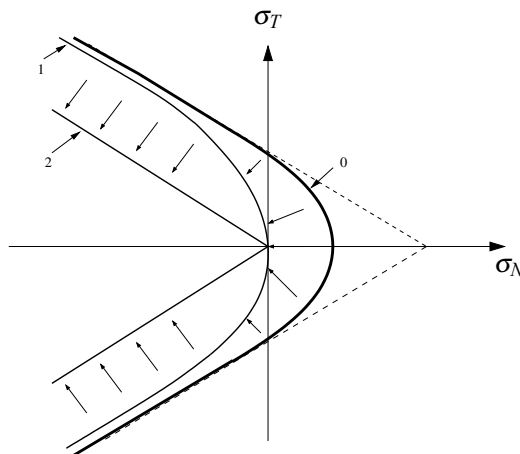


Abbildung 4.4: Initialzustand (0), Spannungszustand in der Rissfuge (1) und Endzustand (2).

Diese Entwicklung der Fließfläche lässt sich folgendermaßen beschreiben:

- Initialspannungsniveau für die Entwicklung der irreversiblen Rissöffnung und -gleitung im Anfangsstadium unter Druckspannung (0)
- Spannungszustand in der Rissfuge mit Berücksichtigung der Dilatanz (1)
- Endzustand in der Rissfuge unter dem Einfluss der Coulomb'schen Reibung ohne Dilatanz (2)

Setzt sich der Schädigungsvorgang in der Rissfuge fort bzw. nimmt die Rissflächen-Degradation durch Zerstörung der verzahnten Kontaktfläche weiter zu, greift nur noch die Coulomb'sche Reibung durch Ausbildung von glatten Rissflächen. Gleichzeitig versagt die Volumenzunahme - hervorgerufen durch eine nicht mehr mögliche Gefügeauflockerung. In diesem Zustand gilt:

$$\sigma_T = |\sigma_N| \tan \varphi \quad (4.22)$$

Im nächsten Abschnitt wird auf die korrespondierende Fließregel mit Dilatanz eingegangen.

4.4.3 Fließregel mit Dilatanz

Für die Fließregel unterscheidet man allgemein je nach Assoziation zur Fließfunktion nach:

- assoziierte Fließregel
- nicht-assoziierte Fließregel

Die Fließrichtung entsprechend der vorliegenden Fließfläche (Abb. 4.7) für das Materialmodell ist nicht-assoziiert an die Ableitung der Fließfunktion gebunden, d.h. es ergeben sich abweichende Formulierungen für den Gradienten der Fließfläche und des plastischen Potentials (Abb. 4.5).

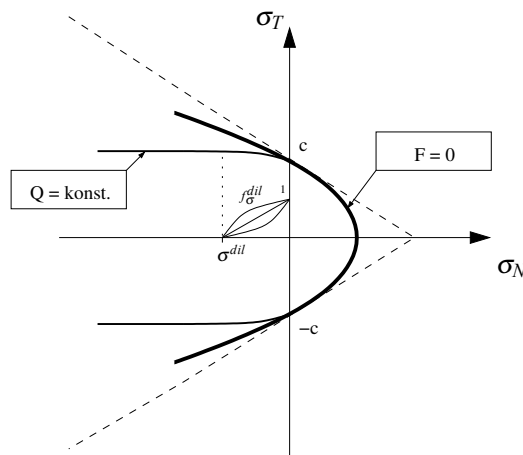


Abbildung 4.5: Darstellung der Hyperbolischen Fließfläche F und des plastischen Potentials Q im Hinblick auf eine nicht-assoziierte Fließregel.

Die in Kapitel 3 vorgestellten Gesetzmäßigkeiten plastischer Verformungsvorgänge lassen sich, wie schon erwähnt, auf die Rissgrößen anwenden. Entsprechend den Grundlagen plastischer Verformung (Kapitel 3, Abschnitt 3.8) ergibt sich für eine Berücksichtigung der irreversiblen Verschiebungsgrößen des Kontakt-Elements folgende Fließregel:

$$\dot{\mathbf{u}}^{cr} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.23)$$

mit $\dot{\lambda}$ als Rate des plastischen Multiplikators und dem Differenzial des plastischen Potentials der Form:

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{T_1}} \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{T_2}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Dieser Gradient beschreibt die Fließrichtung plastischen Fließens. Bei entsprechender Variation der Rate des plastischen Multiplikators $\dot{\lambda}$ wird eine Materialentfestigung durch Verringerung der aktuellen Materialsteifigkeit, ausgedrückt durch das elasto-plastische Tangentenmodul, hervorgerufen. Hierauf wird im nächsten Abschnitt ausführlicher eingegangen.

Gemäß der assoziierten Fließregelformulierung der Plastizitätstheorie ist das Differenzial des plastischen Potentials mit dem Spannungsdifferenzial der Fließfläche identisch. Für die nach Gleichung (4.16) aufgezeigte hyperbolische Fließfläche ergibt sich in Abhängigkeit vom jeweiligen einaxialen Spannungszustand:

- in Richtung der Normalspannung σ_N

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} = 2 \tan \phi (c - \sigma_N \tan \phi) \quad (4.25)$$

- in tangentialer Richtung:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{T_i}} = 2 \sigma_{T_i} \quad (4.26)$$

Die eingangs erwähnten Aspekte des realitätsnahen Modellcharakters erfordern jedoch eine Modifikation dieses Differenzials zur Abbildung der Dilatanz, was zu

einer nicht-assozierten Fließregel führt. Die Korrektur der Abweichung des plastischen Potentials von der Fließfläche wird durch die Parameter f_c^{dil} und f_σ^{dil} als Korrekturfaktoren der Fließrichtung vorgenommen. Für das differenzielle plastische Potential ergibt sich:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} f_c^{dil} f_\sigma^{dil} = 2 \tan \phi (c - \sigma_N \tan \phi) f_c^{dil} f_\sigma^{dil} \quad (4.27)$$

f_c^{dil} nimmt dabei Einfluss auf die aus dem aktuellen Schädigungsprozess hervorgegangenen Änderungen der Fließigenschaften. Dies ist im gesamten Spannungszustand zu berücksichtigen. Für den Korrekturbeiwert f_σ^{dil} hingegen ist dies nur für Druckspannungen der Fall. Dieser Faktor beschreibt den Einfluss der Dilatanz zur Anpassung der Fließrichtung so, dass mit steigender Druckspannung der Dilatanz einfluss geringer wird. Beide Parameter werden ebenso mit Hilfe der Skalierungsfunktion $\varphi(\xi)$ und der entsprechenden Formbeiwerte (α_c^{dil} und α_σ^{dil}) einerseits aus dem Kohäsionsanteil für f_c^{dil} , andererseits aus dem Druckspannungsanteil für f_σ^{dil} ermittelt. Es ergeben sich:

- für den Korrekturfaktor der Dilatanz f_c^{dil}

$$f_c^{dil} = 1 - \varphi(\xi) \quad (4.28)$$

mit

$$\xi = 1 - \frac{c}{c_0} \quad (4.29)$$

- für den Korrekturfaktor der Dilatanz f_σ^{dil}

$$f_\sigma^{dil} = \begin{cases} \varphi(\xi) & \sigma_N < 0 \\ 1 & \sigma_N > 0 \\ 0 & |\sigma_N| \geq \sigma^{dil} \end{cases} \quad (4.30)$$

mit

$$\xi = 1 - \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} \quad (4.31)$$

Als Grenzwert für die Dilatanz bzw. einer möglichen Volumenzunahme unter Druckbeanspruchung wird ein weiterer Materialparameter eingeführt:

- σ^{dil} als Dilatanzspannung

Erreicht die Druckspannung diesen Grenzwert, bleibt der Dilatanzeffekt aus, d.h. es existiert keine Rissöffnung infolge der Gefügauflockerung bei kombinierter Beanspruchung (z.B. Schub unter Druck).

4.4.4 Formänderungsarbeit

Die Formänderungsarbeit W^{cr} ist das Maß der aktuell umgesetzten Dissipationsenergie im Risszustand. Je nach Belastungszustand und fortschreitender Degradation der Rissfläche nähert sich diese Größe jeweils der Bruchenergie entsprechend Mode I und Mode IIa an. Diese für das lokale Iterationsmodell signifikante Energiegröße lässt sich wie folgt ermitteln:

$$W^{cr} = W_0^{cr} + dW^{cr} \quad (4.32)$$

wobei für das Inkrement je nach Art der Beanspruchung gilt:

- infolge von Zug ($\sigma_N > 0$)

$$dW^{cr} = \sigma_N du_N^{cr} + \sigma_{T_i} du_{T_i}^{cr} \quad (4.33)$$

- infolge von Druck ($\sigma_N < 0$)

$$dW^{cr} = \sigma_{T_i} du_{T_i}^{cr} \left(1 - \left| \frac{\sigma_N \tan \phi}{\sigma_{T_i}} \right| \right) \quad (4.34)$$

Die Arbeit resultiert bei Zugbeanspruchung aus den jeweiligen Spannungen und korrespondierendem Risszuwachs in normaler und tangentialer Richtung. Bei Druckbelastung hingegen wird die Formänderungsarbeit nur aus dem Schubanteil ermittelt, welcher um den aus der Druckbelastung resultierenden Reibungsanteil reduziert werden muss.

4.4.5 Skalierungsfunktion und Formbeiwerte

Im Hinblick auf die Formbeiwerte α_i und die dazu korrespondierenden Materialparameter unterscheidet man nach:

- Formbeiwert der Zugfestigkeit: α_χ
- Formbeiwert der Kohäsion : α_c
- Formbeiwerte der Dilatanz: α_σ^{dil} , α_c^{dil}

Für die Skalierungsfunktion $\varphi(\xi)$ in Abhängigkeit des entsprechenden Formbeiwertes α_i gilt:

$$\varphi(\xi, \alpha_i) = \frac{e^{-\alpha_i \xi}}{1 + (e^{-\alpha_i} - 1)\xi} \quad (4.35)$$

Im Fall $\alpha_i = 0$ gilt:

$$\varphi(\xi) = \xi \quad (4.36)$$

Für die bereits erwähnten Korrekturfaktoren der Dilatanz werden für die Skalierungsfunktion die Formbeiwerte α_σ^{dil} und α_c^{dil} und der zugehörige Term ξ (Gl. 4.29 u. Gl. 4.31) angesetzt. Der Einfluss dieser Parameter und die zugehörigen Entfestigungskurven sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

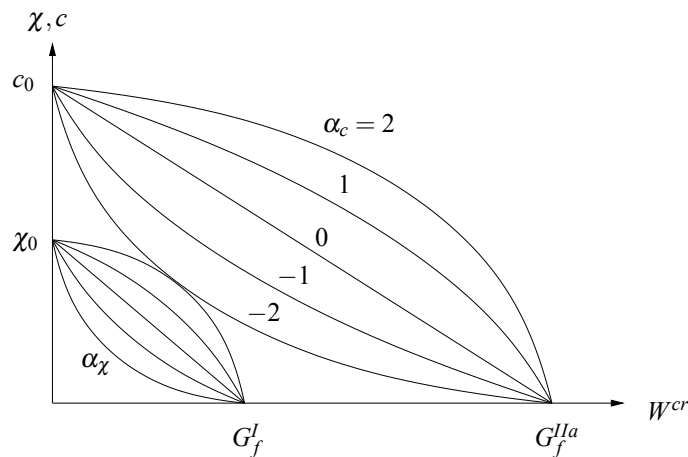


Abbildung 4.6: Materialparameter χ und c in Abhängigkeit der Formbeiwerte α_χ und α_c .

4.4.6 Elasto-plastischer Tangentenmodul

Es folgt die Herleitung der tangentialen Steifigkeitsmatrix (Tangentenmodul) unter Berücksichtigung der Materialentfestigung während des Plastifizierungsvorganges. Grundlage dafür bildet die folgende allgemeine Formulierung [6]:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H \dot{\lambda} \quad (4.37)$$

H ist in diesem Fall der Entfestigungsparameter ($H < 0$) als direkte Einflussgröße für die tangentielle Materialmatrix. Die ebenso für das Tangentenmodul nötige Rateformulierung des plastischen Multiplikators lässt sich durch Umformulierung der Gleichung (4.37) direkt herleiten:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{F} \right] \quad (4.38)$$

Unter Beachtung der Konsistenzkriterien gilt:

- für den elastischen Bereich:

$$\dot{\lambda} = 0 : \dot{F} < 0 \quad (4.39)$$

- für den plastischen Bereich:

$$\dot{\lambda} > 0 : \dot{F} = 0 \quad (4.40)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.37), (4.38), der Bedingung (4.40) und dem plastischen Teilwerkstoffgesetz entsprechend Gl. (4.13) ergibt sich für $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H} (\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0 (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{cr}) \quad (4.41)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{(\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0 \dot{\mathbf{u}}}{H + (\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0 (\partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma})} \quad (4.42)$$

Für die Ermittlung des Parameters H dient als Basis die Gleichung (4.37) entsprechend der Konsistenzbedingung mit $\dot{F} = 0$ im plastischen Bereich. Die Isolation von H führt zu:

$$H = - \frac{\partial F}{\partial \lambda} \quad (4.43)$$

Das Ersetzen des plastischen Multiplikators ergibt für das Skalar H :

$$H = - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}^{cr}} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.44)$$

Für das Differenzial $\partial F / \partial \mathbf{u}^{cr}$ folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}^{cr}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial W^{cr}} \frac{\partial W^{cr}}{\partial \mathbf{u}^{cr}} \quad (4.45)$$

mit \mathbf{p} als Vektor der Festigkeiten:

$$\mathbf{p} = [\chi \ c]^T$$

Für die einzelnen skalaren Größen der Gleichung (4.45) ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = -2 \tan \phi (c - \chi \tan \phi) \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 2 \tan \phi (\sigma_N - \chi) \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial W^{cr}} = \chi_0 \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial W^{cr}} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial c}{\partial W^{cr}} = c_0 \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial W^{cr}} \quad (4.49)$$

Das Differenzial der Skalierungsfunktion $\varphi(\xi)$ nach W^{cr} ergibt sich zu:

$$\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial W^{cr}} = \frac{\partial \xi}{\partial W^{cr}} \frac{e^{-\alpha}}{[1 + (e^{-\alpha} - 1)\xi]^2} \quad (4.50)$$

je nach Grenzzustand folglich für

- Mode I:

$$\frac{\partial \xi}{\partial W^{cr}} = -\frac{1}{G_f^I} \quad (4.51)$$

- Mode IIa:

$$\frac{\partial \xi}{\partial W^{cr}} = -\frac{1}{G_f^{IIa}} \quad (4.52)$$

Für die Arbeitsinkremente der Gleichungen (4.32) und (4.33) ergeben sich die Differenziale nach den Rissverschiebungen:

- für $\sigma_N > 0$:

$$\frac{\partial W^{cr}}{\partial u_N^{cr}} = \sigma_N \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial W^{cr}}{\partial u_{T_i}^{cr}} = \sigma_{T_i} \quad (4.54)$$

- für $\sigma_N < 0$:

$$\frac{\partial W^{cr}}{\partial u_N^{cr}} = 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial W^{cr}}{\partial u_{T_i}^{cr}} = \sigma_{T_i} \left(1 - \left| \frac{\sigma_N \tan \phi}{\sigma_{T_i}} \right| \right) \quad (4.56)$$

Der Entfestigungsparameter erhält nach den Substitutionen der Gleichung (4.44) folgenden Term:

$$H = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \chi} \\ \frac{\partial F}{\partial c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial W^{cr}} \\ \frac{\partial c}{\partial W^{cr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial W^{cr}}{\partial u_N^{cr}} \\ \frac{\partial W^{cr}}{\partial u_{T_i}^{cr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{T_i}} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Abschließend lässt sich auf Basis der vorangegangenen mathematischen Formulierungen für die erwähnten Parameter die komplexe Form der tangentialen Steifigkeit herleiten. Als Ausgangsgleichung dient die differenzielle Spannungs-/ Verschiebungsrelation:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}^0 (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{cr}) = \mathbf{K}^t \dot{\mathbf{u}} \quad (4.58)$$

Mit Hilfe der Fließregel gemäß Gl. (4.23) und dem Ausdruck für $\dot{\lambda}$ lässt sich \mathbf{K}^t durch folgende Schritte isolieren:

$$\dot{\mathbf{u}}^{cr} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{K}^0 \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left[H + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{K}^0 \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \dot{\mathbf{u}} \quad (4.59)$$

Gleichung (4.58) liefert \mathbf{K}^t durch das Ersetzen der Rissgröße in Gl. (4.59):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}^0 \dot{\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{K}^0 (\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) (\partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0}{H + (\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0 (\partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma})} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^t \dot{\mathbf{u}} \quad (4.60)$$

mit

$$\mathbf{K}^t = \mathbf{K}^0 - \frac{\mathbf{K}^0 (\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) (\partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0}{H + (\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0 (\partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma})} \quad (4.61)$$

In diesem Abschnitt wurde das Materialgesetz mit allen notwendigen Parametern vorgestellt. Nachfolgend werden nun auf Basis dieser Formulierungen notwendige Modifikationen vorgenommen und das Modell entsprechend angepasst. Am Schluss dieses Kapitels werden alle für die Algorithmus-Entwicklung wichtigen Darlegungen nochmals zusammenfassend präsentiert.

4.5 Zusammenfassung

Elastische Materialsteifigkeitsmatrix	
$\mathbf{K}^0 = \begin{bmatrix} K_N & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_T \end{bmatrix} = \text{konst.}$	
Verschiebungs- u. Spannungstensoren (vektorielle Form)	
$\mathbf{u} = [u_N \quad u_{T_1} \quad u_{T_2}]^T \quad \mathbf{u}^{cr} = [u_N^{cr} \quad u_{T_1}^{cr} \quad u_{T_2}^{cr}]^T$	
$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_N \quad \sigma_{T_1} \quad \sigma_{T_2}]^T \quad \sigma_T = \sqrt{\sigma_{T_1}^2 + \sigma_{T_2}^2}$	
Formänderungsarbeit	
$W^{cr} = W_0^{cr} + dW^{cr}$	
$dW^{cr} = \sigma_N du_N^{cr} + \sigma_{T_i} du_{T_i}^{cr} \quad \text{für } \sigma_N > 0 \text{ (Zug)}$	
$dW^{cr} = \sigma_{T_i} du_{T_i}^{cr} \left(1 - \left \frac{\sigma_N \tan \phi}{\sigma_{T_i}} \right \right) \quad \text{für } \sigma_N < 0 \text{ (Druck)}$	
Skalierung der Festigkeiten	
$\chi = \chi_0 \cdot \varphi(\xi, \alpha_\chi) \quad \text{mit } \xi = 1 - \frac{W^{cr}}{G_f}$	
$c = c_0 \cdot \varphi(\xi, \alpha_c) \quad \text{mit } \xi = 1 - \frac{W^{cr}}{G_f^{la}}$	
Skalierung der Korrekturfaktoren der Dilatanz	
$f_c^{dil} = 1 - \varphi(\xi, \alpha_c^{dil}) \quad \text{mit } \xi = 1 - \frac{c}{c_0}$	
$f_\sigma^{dil} = \varphi(\xi, \alpha_\sigma^{dil}) \quad \text{mit } \xi = 1 - \frac{ \sigma_N }{\sigma^{dil}}$	
Fließbedingung und Fließregel	
$F = \sigma_T^2 - (c - \sigma_N \tan \phi)^2 + (c - \chi \tan \phi)^2 \quad \dot{\mathbf{u}}^{cr} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$	

Entfestigungsparameter H

$$H = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \chi_i} \\ \frac{\partial F}{\partial c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial W^{cr}} \\ \frac{\partial \chi}{\partial W^{cr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial W^{cr}}{\partial u_N^{cr}} \\ \frac{\partial W^{cr}}{\partial u_{T_i}^{cr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{T_i}} \end{bmatrix}$$

Tangentenmodul \mathbf{K}^t

$$\mathbf{K}^t = \mathbf{K}^0 - \frac{\mathbf{K}^0 (\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) (\partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0}{H + (\partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{K}^0 (\partial Q / \partial \boldsymbol{\sigma})}$$

4.6 Modifikationen des Modells

4.6.1 Modifikation der Fließbedingung

Untersuchungen in [8] ergaben, dass eine Verwendung der hyperbolischen Fließflächenformulierung [6] nicht zu der gewünschten stabilen Konvergenz führt. Ursache ist, dass ab einem bestimmten Spannungsniveau entlang der Längsachse die Fließbedingung einen elastischen Spannungszustand ($F < 0$) signalisiert bzw. ein falscher Gleichgewichtszustand ermittelt und die lokale Iteration somit nicht gestartet wird.

Zur Veranschaulichung dessen stellt die folgende Abbildung den Verlauf der hyperbolischen Fließfläche $F(\sigma_N, \sigma_T)$ für einen zweiachsigen Spannungszustand dar. Die verwendeten Materialparameter sind:

$$\begin{aligned}\tan \phi &= 0.8 \\ \chi &= 3.0 \text{ MPa} \\ c &= 6.0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

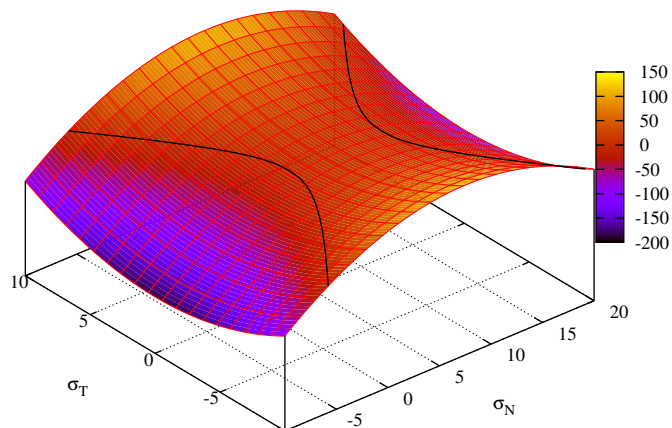


Abbildung 4.7: Hyperbolische Fließfläche gemäß zweiachsigem Spannungszustand.

Es gilt nun, den quadratischen Charakter der Fließfunktion so zu eliminieren, dass die modifizierte Fließbedingung bzw. deren Anwendung das zu erwartende Konvergenzresultat exakt abbildet.

Im Grenzzustand I (Mode I, $\sigma_T = 0$) ergibt sich folgende Form der hyperbolischen Fließfläche:

$$F = -(c - \sigma_N \tan \phi)^2 + (c - \chi \tan \phi)^2 = -F_{\sigma_N} + F_{\chi} \quad (4.62)$$

Unter der physikalischen Annahme, dass mit Zunahme der Belastung über die Zugfestigkeit hinaus sich ein plastischer Spannungszustand laut Fließbedingung einstellt, muss gelten:

$$F = -F_{\sigma_N} + F_{\chi} \geq 0 \quad \text{wenn} \quad \sigma_N \geq \chi \quad (4.63)$$

Diese Darstellung zeigt, dass, sobald der Betrag des Fließflächenanteils aus σ_N größer als F_{χ} ist, die Fließbedingung immer kleiner numerisch Null wird. Damit versagt die Fließbedingung. Um eine geeignete Modifikation der Fließfläche zu ermöglichen, wird eine Untersuchung hinsichtlich der Nullstellen von F vorgenommen. In Abhängigkeit von σ_N ergibt sich folgende Normalform für F :

$$F = \sigma_N^2 + \frac{2c\sigma_N}{\tan \phi} + \frac{\chi^2 \tan^2 \phi - 2c\chi \tan \phi}{\tan^2 \phi} = 0 \quad (4.64)$$

Als signifikante Nullstelle folgt die zweite Lösung für σ_N der quadratischen Gleichung, welche sich als hinderlich für das Fließkriterium in der lokalen Iteration erwiesen hat:

$$\sigma_N = \frac{2c}{\tan \phi} - \chi \quad (4.65)$$

Die Modifikation der Gleichung (4.62) erfolgt durch die Reduktion der quadratischen Anteile der Gleichung (4.63) mit

$$F_{\text{mod}} = -\sqrt{F_{\sigma_N}} + \sqrt{F_{\chi}} \quad (4.66)$$

und führt zu folgender Form:

$$F_{\text{mod}} = \tan \phi (\sigma_N - \chi) \quad (4.67)$$

Für eine Veranschaulichung des beschriebenen Sachverhalts vom Versagen der Iterationsprozedur und dessen Vermeidung durch die Optimierung der Fließfläche soll die nachstehende Abbildung 4.8 speziell für den Fall des Bruchzustands gemäß Mode I dienen.

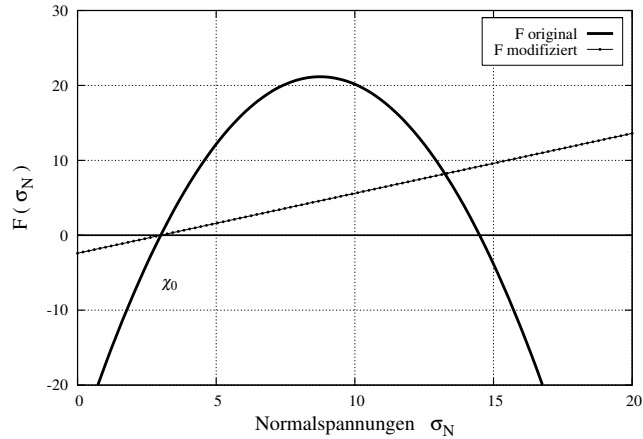


Abbildung 4.8: Originale und modifizierte Fließfläche im Mode I Bruchzustand.

Um ebenso das Konvergenzkriterium für den Zustand II (asymptotischer Mode II) bzw. die Kopplung beider Zustände während ein und derselben Prozedur (Mixed Mode Cracking) sicherzustellen, erhält die Fließbedingung folgende Form:

$$F_{\text{mod}} = -\sqrt{F_{\sigma_N}} + \sqrt{F_{\sigma_T} + F_{\chi}} \quad (4.68)$$

mit

$$F_{\sigma_T} = \sigma_T^2 \quad \text{und} \quad \sigma_T = \sqrt{\sigma_{T_1}^2 + \sigma_{T_2}^2} \quad (4.69)$$

Die durch die tangentielle Richtung erweiterte modifizierte Fließbedingung lautet dann:

$$F_{\text{mod}} = \sqrt{\sigma_T^2 + (c - \chi \tan \phi)^2} - (c - \sigma_N \tan \phi) \quad (4.70)$$

Im zweidimensionalen Spannungszustand stellt sich diese modifizierte Form wie folgt dar:

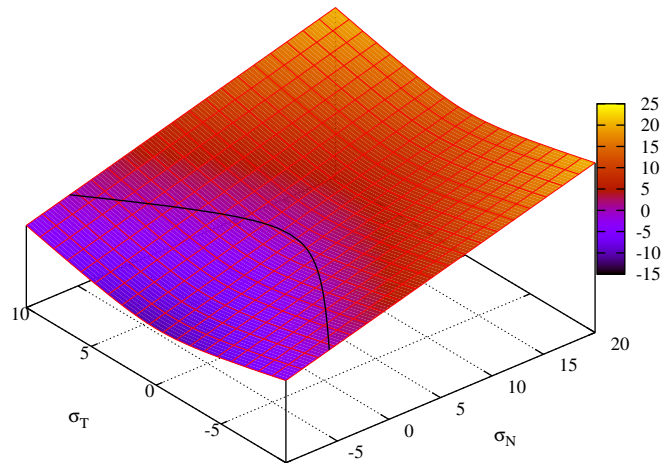


Abbildung 4.9: Modifizierte Fließfläche F_{mod} gemäß zweiachsigem Spannungszustand.

Da das plastische Potenzial als Kriterium der Fließrichtung direkt von der Fließfläche abhängt bzw. sich als Differential der Fließfläche formuliert, werden die Ableitungen der Fließfläche durch Differentiale der modifizierten Form ersetzt, was Gegenstand des folgenden Abschnittes ist.

4.6.2 Modifikation der Fließregel

Für das modifizierte plastische Potenzial wird entsprechend assoziierter Fließregel die modifizierte Form der Fließfläche angesetzt:

$$Q_{\text{mod}} = \sqrt{\sigma_T^2 + (c - \chi \tan \phi)^2} - (c - \sigma_N \tan \phi) \quad (4.71)$$

Durch diesen Ansatz für das plastische Potenzial ergibt sich für die Fließregel:

$$\dot{\mathbf{u}}^{cr} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q_{\text{mod}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.72)$$

Für die Ableitungen gilt allgemein:

- im assoziierten Fall

$$\frac{\partial Q_{\text{mod}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

- im nicht-assoziierten Fall

$$\frac{\partial Q_{\text{mod}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \int_c^{dil} \int_{\sigma}^{dil}$$

Die konkreten Formulierungen für die Differenziale der Fließfläche und des plastischen Potentials je für die originale und modifizierte Form der Fließfläche werden im nächsten Kapitel (Abschnitt 5.4) hergeleitet.

Kapitel 5

Algorithmus

5.1 Allgemeines

In Kapitel 2 wurde der spezielle Lösungscharakter von nichtlinearen globalen Gleichungssystemen beschrieben, welcher sich auf dem Newton'schen Iterationsmodell begründet. Das hier zu implementierende Materialmodell benötigt ebenso auf lokaler Ebene ein iteratives Lösungsverfahren zur Ermittlung der plastischen Verformungen bzw. der Rissgrößen. Hierfür stehen verschiedenste Iterationsmodelle zur Verfügung. Nennenswert aus der Literatur sind:

- Closest Point Projection Algorithm
- Cutting Plane Algorithm
- Radial Return Mapping Algorithm

als implizite Iterationsverfahren und Vertreter der Return Mapping Algorithmen.

- Runge-Kutta-Verfahren
- Euler-Vorwärts-Verfahren

als explizite Iterationsverfahren für kleine Schrittweiten.

Bei der Umsetzung der Prozedur der lokalen Rissgrößeniteration wird der implizite Closest Point Projection Algorithmus herangezogen. Die Vorzüge dieser Technik seien im folgenden kurz erwähnt:

- Konvergenz in sehr wenigen Schritten, damit effizient und performant
- konsistente Linearisierung

Nachfolgend wird der Closest Point Algorithmus genauer vorgestellt und in allgemeiner Form präsentiert.

5.2 General Closest Point Projection

Die folgenden Darlegungen sind der Referenz nach [5] entnommen.

Prinzipiell ist dieses Verfahren dadurch gekennzeichnet, dass man von einem temporären elastischen Spannungszustand, beschrieben durch den elastischen Prädiktor (σ^{trial}), ausgeht, welcher sich aus den globalen Gesamtverschiebungsgrößen errechnet. Je nach Distanz des plastischen Spannungszustandes ($F > 0$) von der aktuellen Fließfläche werden während der Iteration mit k Schritten die plastischen Dehnungen bzw. die Rissgrößen durch den plastischen Korrektor inkrementell so angepasst, bis der Spannungszustand die Fließbedingung erfüllt. Nimmt die Fließfläche einen Wert unterhalb numerisch Null oder näherungsweise numerisch Null an, wird die Iterationsprozedur aufgrund elastischen Verformungsverhalten im ersten Schritt ($k = 0$) verlassen. Die folgende Abbildung verdeutlicht diesen Mechanismus.

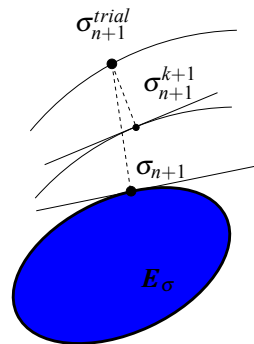


Abbildung 5.1: Geometrische Interpretation der iterativen Ermittlung der Fließspannung ausgehend von einem (elastischen) Initialspannungsniveau σ^{trial} .

Die in Kapitel 3 vorgestellten Parameter der Plastizitätstheorie mit isotroper Verfestigung lassen sich in dem Algorithmus von Simo [5] ablesen. Generell stellt sich der Algorithmus (im Fall einer assoziierten Fließregel) folgendermaßen dar:

<p>1. Initialisierung: $k = 0$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\alpha}_n$ $\Delta\gamma_{n+1}^{(0)} = 0$</p>
<p>2. Aktuelle Spannungsgrößen ermitteln und Fließbedingung prüfen</p> $\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} &:= \Delta W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}) \\ \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} &:= -H(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}) \\ f_{n+1}^{(k)} &:= f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}) \\ \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} &:= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ -\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} + \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1} \end{bmatrix}^{(k)}\end{aligned}$ <p>IF: $f_{n+1}^{(k)} < TOL_1$ and $\ \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}\ < TOL_2$ THEN: EXIT.</p>
<p>3. Berechnung des elastischen und plastischen Moduls</p> $\begin{aligned}\mathbf{C}_{n+1}^{(k)} &:= \Delta^2 W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}) \\ \mathbf{D}_{n+1}^{(k)} &:= -\Delta^2 H(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}) \\ [\mathbf{A}_{n+1}^{(k)}]^{-1} &:= \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{n+1}^{-1} + \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1}] & \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{q}}^2 f_{n+1} \\ \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\mathbf{q}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1} & [\mathbf{D}_{n+1}^{-1} + \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^2 f_{n+1}] \end{bmatrix}^{(k)}\end{aligned}$
<p>4. Berechnung des Konsistenzparameters als Inkrement</p> $\Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)} := \frac{f_{n+1}^{(k)} - \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k)} & \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1}^{(k)} \end{bmatrix}^T \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{\begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k)} & \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1}^{(k)} \end{bmatrix}^T \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1} \end{bmatrix}^{(k)}}$
<p>5. Ermittlung der Inkremente der plastischen Dehnungen u. internen Variablen</p> $\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{p(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{n+1}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \left[\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\mathbf{q}} f_{n+1} \end{bmatrix}^{(k)} \right]$
<p>6. Update der Geschichtsvariablen</p> $\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{p(k)} \\ \Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} &= \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} + \Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)}\end{aligned}$ <p>Setze $k = k + 1$ und beginne erneut bei Schritt 2.</p>

Um den Algorithmus auf das zu implementierende Materialmodell anwenden zu können, müssen die im Algorithmus erwähnten Parameter eindeutig identifiziert werden. Im Einzelnen ergibt sich hierfür (in matrizieller bzw. vektorieller Schreibweise):

- k : - Nummer des Iterationsschrittes der lokalen, k -ten Iteration
- n : - Kennung des Iterationsschrittes der globalen Iteration (Newton-Raphson-Iterationsverfahren)
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)}$: - plastische Dehnung zu Beginn der lokalen Iteration
- $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$: - Initialgröße für die plastische Dehnung, hervorgegangen aus der vorherigen globalen Iteration
- $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)}$: - Wert der internen Variable zu Beginn der lokalen Iteration
- $\boldsymbol{\alpha}_n$: - Initialgröße analog $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$
- $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$: - aktueller Spannungstensor, ermittelt aus den plastischen Dehnungen der vorherigen lokalen Iteration
- $f_{n+1}^{(k)}$: - aktueller Wert der Fließfläche
- $\boldsymbol{R}_{n+1}^{(k)}$: - aktuelle Residuen aus plastischen Variablen und Fließfläche
- $\boldsymbol{C}_{n+1}^{(k)}$: - elastisches Modul
- $\boldsymbol{D}_{n+1}^{(k)}$: - plastisches Modul
- $\boldsymbol{A}_{n+1}^{(k)}$: - Hess'sche Matrix
- $\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}$: - Konsistenzparameter, zu Beginn der Iteration numerisch Null

- $\Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)}$: - Inkrement des Konsistenzparameters
- $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$: - Inkrement der plastischen Dehnung
- $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}$: - Inkrement der internen Variable
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$: - (Gesamt-)Dehnungen aus einem elastischen und einem plastischen Anteil der aktuellen globalen Iteration als konstante Eingangsgrößen jeder lokalen Iteration
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)}$: - aktualisierte plastische Dehnungsgrößen am Ende jedes k-ten lokalen Iterationsschrittes
- $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)}$: - analog für die internen Variablen

Um diese Parameter des allgemeinen CPP Algorithmus entsprechend dem Materialmodell anzupassen bzw. den Algorithmus mit den Kennwerten nach Kapitel 4 modifizieren zu können, werden vorerst die entsprechenden Differenziale für die Fließfläche des aufgezeigten Algorithmus nach Differenzialen des plastischen Potentials klassifiziert. Dazu wird die Linearisierung mit den Parametern des Materialmodells im Hinblick auf eine nicht-assoziierte Fließregel durchgeführt. Hierauf soll im nächsten Abschnitt weiter Bezug genommen werden.

Weiterhin wird der allgemeine Algorithmus folgendermaßen modifiziert:

- der Verschiebungstensor \boldsymbol{u}^* der kinematischen Formulierung ersetzt den Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$
- die interne Variable bleibt unberücksichtigt ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$)

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{D} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} = \mathbf{0}$$

Die Fließfläche und das plastische Potenzial sowie deren Ableitungen werden durch die entsprechende modifizierte Form und deren Ableitungen ersetzt.

5.3 Linearisierung

Die Identifikation des Differenzials der Fließfläche als Kriterium der Fließrichtung lässt sich anhand der Linearisierung der Formulierungen für das plastische Residuum und der Fließbedingung auf lokaler Ebene darlegen. Als Ansatz dient die globale Formulierung:

$$\mathbf{u}_{n+1}^{cr} = \mathbf{u}_n^{cr} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{cr} \quad (5.1)$$

mit $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{cr}$ als Inkremente des plastischen Weggrößtensors.

Dieser kann in Abhängigkeit von dem plastischen Potenzial und dem plastischen Multiplikator folgendermaßen fixiert werden:

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{cr} = \Delta \gamma \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (5.2)$$

Je globalem Iterationsschritt ergibt sich aus den bleibenden Verschiebungen ein globales Residuum:

$$\mathbf{R}_{n+1} := -\mathbf{u}_{n+1}^{cr} + \mathbf{u}_n^{cr} + \Delta \gamma \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (5.3)$$

Für die Fließfläche gilt:

$$F_{n+1} := F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (5.4)$$

mit

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{K}^0 : [\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^{cr}] \quad (5.5)$$

Da während der lokalen Prozedur die Größe der Gesamtverschiebungen (\mathbf{u}_{n+1}) konstant bleibt, gilt:

$$\mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} = -\mathbf{K}^{0-1} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} \quad (5.6)$$

Dadurch lassen sich die Gleichungen (5.3) und (5.4) im lokalen Stadium wie folgt linearisieren:

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \left[\boldsymbol{\Xi}_{n+1}^{(k)} \right]^{-1} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = 0 \quad (5.7)$$

$$F_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = 0 \quad (5.8)$$

mit der exakten Hess'schen Matrix

$$\boldsymbol{\Xi}_{n+1}^{(k)} := \left[\mathbf{K}^{0-1} + \Delta \gamma \frac{\partial^2 Q_{n+1}^{(k)}}{(\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1})^2} \right]^{-1} \quad (5.9)$$

Das Ersetzen von $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ aus Gl. (5.7) in Gleichung (5.8) liefert:

$$F_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \boldsymbol{\Xi}_{n+1}^{(k)} \left[-\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} - \Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right] = 0 \quad (5.10)$$

Die Lösung des linearisierten Problems nach $\Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)}$ ergibt:

$$\Delta^2 \gamma_{n+1}^{(k)} := \frac{F_{n+1}^{(k)} - \frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \boldsymbol{\Xi}_{n+1}^{(k)} : \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{\frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \boldsymbol{\Xi}_{n+1}^{(k)} : \frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}} \quad (5.11)$$

Diese Formulierung für das Inkrement des plastischen Multiplikators gemäß Gl. (5.11) mit dem identifizierten Differenzial der Fließfläche im Kontext einer nicht-assozierten Fließregel ist signifikant für das zu implementierende Materialmodell und ersetzt dementsprechend die Formulierung im Punkt 4 des dargelegten Algorithmus. Die in Kapitel 4 dargelegte Notwendigkeit der Modifikation der Fließfläche wird ebenso für die implementationsfähige Iterationsprozedur berücksichtigt. Dafür folgen im nächsten Abschnitt die konkreten Ableitungen der originalen und modifizierten Fließfläche.

5.4 Ableitungen der Fließfläche

5.4.1 Ableitungen der originalen Fließfläche

Die Formulierung für die hyperbolische Fließfläche entsprechend Kapitel 4, Abschnitt 4.4.2, sei nochmals durch folgende Gleichung dargelegt:

$$F = \sigma_T^2 - (c - \sigma_N \tan \phi)^2 + (c - \chi \tan \phi)^2 \quad (5.12)$$

mit

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{T_1}^2 + \sigma_{T_2}^2} \quad (3-D)$$

Der Algorithmus (Abschnitt 5.2) erfordert die Differenziale 1. und 2. Ordnung der Fließfläche bzw. des plastischen Potentials. Es gilt daher im Fall einer assoziierten Fließregel für die Ableitungen:

- für die 1. Ableitung

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} = 2 \tan \phi (c - \sigma_N \tan \phi) \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_T} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_T} = 2 \sigma_T \quad (5.14)$$

- für die 2. Ableitung

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_N)^2} = \frac{\partial^2 F}{(\partial \sigma_N)^2} = -2 \tan^2 \phi \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_T)^2} = \frac{\partial^2 F}{(\partial \sigma_T)^2} = 2 \quad (5.16)$$

Im Gültigkeitsbereich der nicht-assozierten Fließregel ergibt sich:

- für die 1. Ableitung

wenn $\sigma_N > 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} f_c^{dil} = 2 \tan \phi (c - \sigma_N \tan \phi) f_c^{dil} \quad (5.17)$$

wenn $\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| < \sigma^{dil}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} f_c^{dil} f_\sigma^{dil} = 2 \tan \phi (c - \sigma_N \tan \phi) f_c^{dil} f_\sigma^{dil} \quad (5.18)$$

wenn $\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| > \sigma^{dil}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} f_c^{dil} f_\sigma^{dil} = 0 \quad (5.19)$$

mit $f_\sigma^{dil} = 0$.

- für die 2. Ableitung

wenn $\sigma_N > 0$:

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_N)^2} = \frac{\partial^2 F}{(\partial \sigma_N)^2} = -2 \tan^2 \phi f_c^{dil} \quad (5.20)$$

wenn $\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| < \sigma^{dil}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_N)^2} &= \frac{\partial^2 [F f_c^{dil} f_\sigma^{dil}]}{(\partial \sigma_N)^2} \\ &= 2 \tan \phi f_c^{dil} \\ &\quad \cdot \left[(c - \sigma_N \tan \phi) \frac{\partial f_\sigma^{dil}}{\partial \sigma_N} - \tan \phi f_\sigma^{dil} \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

wenn $\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| > \sigma^{dil}$:

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_N)^2} = 0 \quad (5.22)$$

In tangentialer Richtung entsprechen die Ableitungen $\partial Q / \partial \sigma_T$ und $\partial^2 Q / (\partial \sigma_T)^2$ denen im Fall einer assoziierten Fließregel.

Im Fall 2 (Gl. 5.21), d.h. die Druckspannung erreicht ein Niveau unterhalb der Dilatanzspannung, muss die Abhängigkeit des Dilatanzbeiwertes f_σ^{dil} von der Normalspannung berücksichtigt werden. Für das Differenzial ergibt sich demnach:

$$\frac{\partial f_\sigma^{dil}}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \sigma_N} \quad (5.23)$$

mit dem bekannten Term für ξ :

$$\xi = 1 - \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} \quad (5.24)$$

Das Differenzial der Skalierungsfunktion wird beschrieben durch:

$$\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \sigma_N} = \frac{e^{-\alpha_\sigma^{dil}}}{[1 + (e^{-\alpha_\sigma^{dil}} - 1)\xi]^2} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma_N} \quad (5.25)$$

mit

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma_N} = \frac{1}{\sigma^{dil}} \quad (5.26)$$

Die Substitution von $\partial f_\sigma^{dil} / \partial \sigma_N$ in Gleichung (5.21) führt zu folgendem Term des 2. Differenzials des plastischen Potentials:

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_N)^2} = 2 \tan \phi f_c^{dil} \left[\frac{(c - \sigma_N \tan \phi) e^{-\alpha_\sigma^{dil}}}{\sigma^{dil} \left[e^{-\alpha_\sigma^{dil}} - e^{-\alpha_\sigma^{dil}} \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} + \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} \right]^2} - \tan \phi f_\sigma^{dil} \right] \quad (5.27)$$

Die erforderlichen Korrekturfaktoren der Dilatanz im Fall der nicht-assozierten Fließregel werden im folgenden in der ausformulierten Form zusammenfassend präsentiert:

- $f_c^{dil} = 1 - \frac{e^{-\alpha_c^{dil}} \left(1 - \frac{c}{c_0}\right)}{1 + (e^{-\alpha_c^{dil}} - 1) \left(1 - \frac{c}{c_0}\right)}$
- $f_\sigma^{dil} = 1 \quad (\sigma_N > 0)$
- $f_\sigma^{dil} = \frac{e^{-\alpha_\sigma^{dil}} \left(1 - \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}}\right)}{1 + (e^{-\alpha_\sigma^{dil}} - 1) \left(1 - \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}}\right)} \quad (-\sigma^{dil} < \sigma_N < 0)$
- $f_\sigma^{dil} = 0 \quad (\sigma_N < 0 \text{ und } |\sigma_N| > \sigma^{dil})$
- $\frac{\partial f_\sigma^{dil}}{\partial \sigma_N} = \frac{e^{-\alpha_\sigma^{dil}}}{\sigma^{dil} \left[e^{-\alpha_\sigma^{dil}} - e^{-\alpha_\sigma^{dil}} \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} + \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} \right]^2} \quad (-\sigma^{dil} < \sigma_N < 0)$

5.4.2 Ableitungen der modifizierten Fließfläche

Ableitungen nach den Spannungen

Auf Basis der modifizierten Fließfläche werden alle notwendigen Ableitungen und damit direkt die Ableitungen für das plastische Potenzial entsprechend der Assoziierung zur Fließfläche generiert. Für F_{mod} ergibt sich gemäß Kapitel 4, Abschnitt 4.6.1:

$$F_{\text{mod}} = \sqrt{\sigma_T^2 + (c - \chi \tan \phi)^2} - (c - \sigma_N \tan \phi) \quad (5.28)$$

Nach dieser Gleichung gilt im assoziierten Fall der Fließregel:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial \sigma_N} = \tan \phi \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{T_i}} = \frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial \sigma_{T_i}} = \frac{\sigma_{T_i}}{\sqrt{\sigma_{T_i}^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}} \quad (5.30)$$

Je nach Spannungszustand parallel zur Längsachse (σ_N) ergeben sich verschiedene Formulierungen für das Differenzial der Fließfläche aufgrund einer nicht-assozierten Fließregel:

- $\sigma_N > 0$ (Zug):

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial \sigma_N} f_c^{dil} = \tan \phi f_c^{dil} \quad (5.31)$$

- $\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| < \sigma^{dil}$ (Druck):

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial \sigma_N} f_c^{dil} f_\sigma^{dil} = \tan \phi f_c^{dil} f_\sigma^{dil} \quad (5.32)$$

- $\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| > \sigma^{dil}$ (Druck):

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} = \frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial \sigma_N} = 0 \quad (5.33)$$

Für die tangentielle Komponente der Fließrichtung gilt generell der Ausdruck entsprechend Gl. (5.30).

Da bei der inkrementellen Ermittlung der plastischen Weggrößen zudem die 2. Ableitungen der Fließfläche benötigt werden, ist hier ebenso eine Zuordnung der entsprechenden Differenziale gemäß Spannungszustand entlang der Längsachse nötig:

- $\sigma_N > 0$ (Zug):

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_N)^2} = 0 \quad (5.34)$$

- $\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| < \sigma^{dil}$ (Druck):

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_N)^2} = \tan \phi f_c^{dil} \frac{\partial f_\sigma^{dil}}{\partial \sigma_N} \quad (5.35)$$

- $\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| > \sigma^{dil}$ (Druck):

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_N)^2} = 0 \quad (5.36)$$

In tangentialer Richtung ergibt sich für das 2. Differenzial:

$$\frac{\partial^2 Q}{(\partial \sigma_{Ti})^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{Ti}^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}} - \frac{\sigma_{Ti}^2}{\left(\sqrt{\sigma_{Ti}^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}\right)^3} \quad (5.37)$$

Die Korrekturfaktoren der Dilatanz f_c^{dil} und f_σ^{dil} bleiben durch die Modifikation der Fließbedingung unberührt und sind nachfolgend nochmals aufgeführt.

$$\begin{aligned} \bullet f_c^{dil} &= 1 - \frac{e^{-\alpha_c^{dil}} \left(1 - \frac{c}{c_0}\right)}{1 + (e^{-\alpha_c^{dil}} - 1) \left(1 - \frac{c}{c_0}\right)} \\ \bullet f_\sigma^{dil} &= 1 && (\sigma_N > 0) \\ \bullet f_\sigma^{dil} &= \frac{e^{-\alpha_\sigma^{dil}} \left(1 - \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}}\right)}{1 + (e^{-\alpha_\sigma^{dil}} - 1) \left(1 - \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}}\right)} && (-\sigma^{dil} < \sigma_N < 0) \\ \bullet f_\sigma^{dil} &= 0 && (\sigma_N < 0 \text{ und } |\sigma_N| > \sigma^{dil}) \\ \bullet \frac{\partial f_\sigma^{dil}}{\partial \sigma_N} &= \frac{e^{-\alpha_\sigma^{dil}}}{\sigma^{dil} \left[e^{-\alpha_\sigma^{dil}} - e^{-\alpha_\sigma^{dil}} \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} + \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} \right]^2} && (-\sigma^{dil} < \sigma_N < 0) \end{aligned}$$

Ableitungen nach den Festigkeiten χ und c

Weiterhin ist der Entfestigungsparameter H von der Fließfläche bzw. von deren Differenziale nach den Festigkeiten abhängig:

$$H = - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial W^{cr}} \frac{\partial W^{cr}}{\partial \mathbf{u}^{cr}} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.38)$$

mit

$$\mathbf{p} = [\chi \quad c]^T$$

als Vektor der Festigkeiten.

Eine Anpassung der Ableitungen $\partial F / \partial \mathbf{p}$ ist daher ebenso erforderlich. Es ergibt sich für $\partial F / \partial \chi$ und $\partial F / \partial c$:

$$\frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial \chi} = \frac{\chi \tan^2 \phi - c \tan \phi}{\sqrt{\sigma_T^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}} \quad (5.39)$$

bzw.

$$\frac{\partial F_{\text{mod}}}{\partial c} = \frac{c - \chi \tan \phi}{\sqrt{\sigma_T^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}} - 1 \quad (5.40)$$

Nach Ermittlung der Ableitungen für die modifizierte Fließfläche und der sich daraus ergebenden Ableitungen für das plastischen Potenzial sowie der Anpassung des Tangentenmoduls durch die modifizierte Form des Entfestigungsparameters wird die allgemein gültige Iterationsprozedur nach Abschnitt 5.2 auf weitere notwendige Schritte der Konfiguration überprüft. Soweit es erforderlich ist, werden diese Modifikationen vorgenommen, bevor der Algorithmus der lokalen Iteration seine implementationsfähige Form erhält (Abschnitt 5.7).

5.5 Inkrementelle Formänderungsarbeit ΔW^{cr}

Die Darlegungen bezüglich der differentiellen Formänderungsarbeit dW^{cr} in Kapitel 4 müssen in Hinsicht auf den implementationsfähigen Algorithmus angepasst werden. Die richtungskorrespondierenden Arbeitsanteile ergeben sich aus den Normal- und Schubspannungen und den zugehörigen Risszuwächsen, wobei die Formulierung für ΔW^{cr} je nach Druck- oder Zugbelastung variiert. Der Ausdruck für das Skalar ΔW^{cr} lässt sich für die lokale Iteration (Closest Point Projection) innerhalb des globalen Berechnungsschritts $n + 1$ algorithmisch formulieren:

- infolge von Zug ($\sigma_N > 0$)

$$\Delta W_{n+1}^{cr(k)} = \sigma_N \Delta u_N^{cr} + \sigma_T \Delta u_T^{cr} \quad (5.41)$$

- infolge von Druck ($\sigma_N < 0$)

$$\Delta W_{n+1}^{cr(k)} = \sigma_T \Delta u_T^{cr} \left(1 - \left| \frac{\sigma_N \tan \phi}{\sigma_T} \right| \right)_{n+1}^{(k)} \quad (5.42)$$

Die Risszuwächse bzw. Differenzen $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)}$ ergeben sich aus den vorherigen globalen Rissverschiebungen (Rissöffnung und -gleitungen) \mathbf{u}_n^{cr} und den aktuellen, lokal-iterativ ermittelten Rissverschiebungen $\mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)}$. Daraus folgt:

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} = -\mathbf{u}_n^{cr} + \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} \quad (5.43)$$

Das aktuelle Spannungsstadium ist bereits bekannt:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{K}^0 \left(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} \right) \quad (5.44)$$

Damit ist auch die gesamte aktuelle Formänderungsarbeit zur Skalierung der Festigkeiten (c, χ) bekannt:

$$W_{n+1}^{cr(k)} = W_n^{cr} + \Delta W_{n+1}^{cr(k)} \quad (5.45)$$

5.6 Festlegung der Abbruchbedingungen und der Genauigkeiten

Als lokales Abbruchkriterium der Iteration gelten laut Abschnitt 5.2 zwei konjunktiv verknüpfte Bedingungen:

1. $F_{n+1}^{(k)} < TOL_1$
2. $\|\mathbf{R}_{n+1}^{(k)}\| < TOL_2$

Durch die notwendige Normierung der Parameter F und \mathbf{R} aufgrund des sehr großen Dimensionsunterschieds ($> 10^{10}$) lässt sich mit Hilfe der euklidischen Norm eine vereinheitlichte Abbruchbedingung generieren:

$$\sqrt{\left(\frac{F}{F_{\text{norm}}}\right)^2 + \left(\frac{\|\mathbf{R}\|}{R_{\text{norm}}}\right)^2} < TOL \quad (5.46)$$

F_{norm} wird aus der modifizierten Fließflächenfunktion als statische Variable mit den Initialwerten für χ und c gewählt:

$$F_{\text{norm}} = \sqrt{c_0^2 + \chi_0^2 \tan^2 \phi} \quad (5.47)$$

Für das normierte Residuum lässt sich eine direkte Abhängigkeit von der plastischen Weggröße feststellen. Für die Normierung muss deshalb analog gelten:

$$R_{\text{norm}} = f(u_{\text{norm}}^{\text{cr}}) \quad (5.48)$$

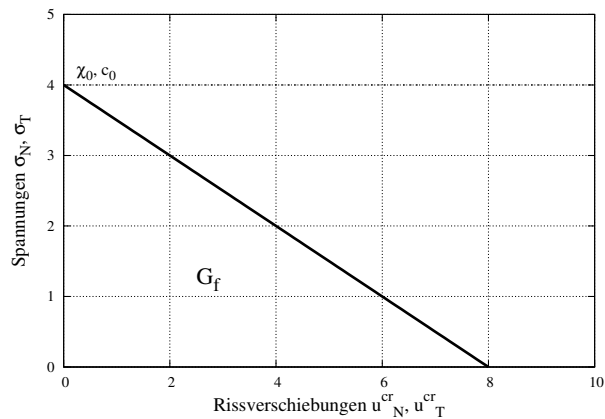


Abbildung 5.2: Spannungszustand und Bruchenergie in Abhängigkeit der Rissgröße (näherungsweise).

Abbildung 5.2 veranschaulicht vereinfacht den Zusammenhang zwischen der plastischen Weggröße und der dabei umgesetzten Energie. Unter der Annahme einer linearen Entfestigung kann die jeweilig umgesetzte Formänderungsarbeit in Abhängigkeit der Rissöffnung oder Rissgleitungen approximiert werden. Danach ist ersichtlich, dass die Gesamtfläche dem Grenzennergiezustand G_f je für den Mode I und Mode IIa entspricht. Die maßgebende Rissgröße u_{norm}^{cr} lässt sich wie folgt als statische Variable ermitteln:

$$f(u_{\text{norm}}^{cr}) = \min \left\{ \begin{array}{l} u_{N,\text{norm}}^{cr} \\ u_{T,\text{norm}}^{cr} \end{array} \right. \quad (5.49)$$

mit

$$u_{N,\text{norm}}^{cr} = \frac{2G_f^I}{\chi_0} \quad (5.50)$$

$$u_{T,\text{norm}}^{cr} = \frac{2G_f^{IIa}}{c_0} \quad (5.51)$$

Für das Skalar als euklidische Norm des Vektors der Residuen \mathbf{R} ergibt sich:

$$\|\mathbf{R}\| = \left\| \begin{pmatrix} R_N \\ R_T \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{R_N^2 + R_T^2} \quad (5.52)$$

Mit diesen Modifikationen und Konfigurationen der allgemeinen Closest Point Projection Iteration lässt sich die Endfassung des Algorithmus aufstellen. Eine Zusammenfassung dessen für den dreidimensionalen Spannungszustand ist Anliegen des folgenden kapitelabschließenden Abschnitts.

5.7 Zusammenfassung

Alle zur Implementation erforderlichen Formulierungen für den Algorithmus und der Closest Point Projection Algorithmus selbst werden in nachfolgenden Übersichten zusammenfassend präsentiert.

Die Übersichten staffeln sich wie folgt:

- **Closest Point Projection Algorithmus**
- **konkrete Formulierung für die skalaren Größen, der Verschiebungsvektoren und der Materialmatrix**
- **Ableitungen der modifizierten Fließfläche und des plastischen Potentials entsprechend einer nicht-assozierten Fließregel**
- **Korrekturfaktoren der Dilatanz f_c^{dil} und f_σ^{dil}**
- **Implementation des Tangentenmoduls K^t als Erweiterung des Algorithmus**
- **erforderliche Ableitungen für den Entfestigungsparameter H**

5.7.1 Closest Point Projection Algorithmus (3-D)

1. Initialisierung: $\mathbf{u}_{n+1}^{cr(0)} = \mathbf{u}_n^{cr}$ $W_{n+1}^{cr(0)} = W_n^{cr}$ $\Delta\lambda_{n+1}^{(0)} = 0$
2. Spannungszustand, Materialparameter und Fließbedingung: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{K}^0 : (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)})$ $W_{n+1}^{cr(k)} = W_n^{cr} + \Delta W_{n+1}^{cr(k)}$ $\chi_{n+1}^{(k)} = f(\chi_0, W_{n+1}^{cr(k)})$ $c_{n+1}^{(k)} = f(c_0, W_{n+1}^{cr(k)})$ $F = F_{n+1}^{(k)}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \chi_{n+1}^{(k)}, c_{n+1}^{(k)})$ IF $\frac{F}{F_{\text{norm}}} < \text{TOL}$ AND $k < 1$ THEN: GOTO 6. $\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{u}_n^{cr} - \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} + \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} Q_{n+1}^{(k)}$ IF $\sqrt{\left(\frac{F}{F_{\text{norm}}}\right)^2 + \left(\frac{\ \mathbf{R}\ }{R_{\text{norm}}}\right)^2} < \text{TOL}$ THEN: GOTO 6.
3. Inkrement des plastischen Multiplikators: $\Delta^2\lambda_{n+1}^{(k)} = \frac{F_{n+1}^{(k)} - \partial_{\boldsymbol{\sigma}} F_{n+1}^{(k)} : \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} : \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} F_{n+1}^{(k)} : \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} Q_{n+1}^{(k)}}$ $[\mathbf{A}_{n+1}^{(k)}]^{-1} = \mathbf{K}^{0-1} + \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \partial_{\boldsymbol{\sigma}}^2 Q_{n+1}^{(k)}$
4. Inkremente der Rissverschiebungen: $\Delta\mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} = \mathbf{K}^{0-1} \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} (\mathbf{R} + \Delta^2\lambda_{n+1}^{(k)} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} Q_{n+1}^{(k)})$
5. Aktualisierung der Iterationsvariablen: $\mathbf{u}_{n+1}^{cr(k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} + \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)}$ $\Delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} + \Delta^2\lambda_{n+1}^{(k)}$ SET $k = k + 1$ GOTO 2.
6. Ende der Iteration: $\mathbf{u}_{n+1}^{cr} = \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k+1)}$ $W_{n+1}^{cr} = W_{n+1}^{cr(k+1)}$

5.7.2 Skalare Größen, Vektoren und Materialmatrix

$$\mathbf{u}_{n+1} = [u_{N,n+1} \quad u_{T_1,n+1} \quad u_{T_2,n+1}]^T$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} = [u_{N,n+1}^{cr(k)} \quad u_{T_1,n+1}^{cr(k)} \quad u_{T_2,n+1}^{cr(k)}]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = [\sigma_{N,n+1}^{(k)} \quad \sigma_{T_1,n+1}^{(k)} \quad \sigma_{T_2,n+1}^{(k)}]^T$$

$$\mathbf{K}^0 = \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 \\ 0 & k_T & 0 \\ 0 & 0 & k_T \end{bmatrix} = \text{konst.}$$

$$\Delta W_{n+1}^{cr(k)} = [\sigma_N \Delta u_N^{cr}]_{n+1}^{(k)} + [\sigma_{T_i} \Delta u_{T_i}^{cr}]_{n+1}^{(k)} \quad (\sigma_N > 0)$$

$$\Delta W_{n+1}^{cr(k)} = \left(1 - \left| \frac{\sigma_N \tan \phi}{\sigma_T} \right| \right) [\sigma_{T_i} \Delta u_{T_i}^{cr}]_{n+1}^{(k)} \quad (\sigma_N < 0)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} = \mathbf{u}_{n+1}^{cr(k)} - \mathbf{u}_n^{cr} \quad \Delta \mathbf{u}_{n+1} = [\Delta u_{N,n+1}^{cr(k)} \quad \Delta u_{T_1,n+1}^{cr(k)} \quad \Delta u_{T_2,n+1}^{cr(k)}]^T$$

$$\varphi_{n+1}^{(k)}(\alpha, \xi) = \frac{e^{-\alpha \xi_{n+1}^{(k)}}}{1 + (e^{-\alpha} - 1) \xi_{n+1}^{(k)}}$$

$$\chi_{n+1}^{(k)} = \chi_0 \cdot \varphi_{n+1}^{(k)}(\alpha_\chi, \xi) \quad \text{mit } \xi_{n+1}^{(k)} = 1 - W_{n+1}^{cr(k)} / G_f^I$$

$$c_{n+1}^{(k)} = c_0 \cdot \varphi_{n+1}^{(k)}(\alpha_c, \xi) \quad \text{mit } \xi_{n+1}^{(k)} = 1 - W_{n+1}^{cr(k)} / G_f^{IIa}$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}, c) = \sqrt{[\sigma_{T,n+1}^{(k)}]^2 + (c_{n+1}^{(k)} - \chi_{n+1}^{(k)} \tan \phi)^2 - (c_{n+1}^{(k)} - \sigma_{N,n+1}^{(k)} \tan \phi)}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{T_1}^2 + \sigma_{T_2}^2}$$

5.7.3 Ableitungen der Fließfläche und des plastischen Potentials

$$\frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_N} = \tan \phi$$

$$\frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{T_i}} = \frac{\sigma_{T_i}}{\sqrt{\sigma_{T_i}^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}}$$

$$\frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_N} = \tan \phi f_c^{dil} \quad (\sigma_N \geq 0)$$

$$\frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_N} = \tan \phi f_c^{dil} f_\sigma^{dil} \quad (\sigma_N < 0 \text{ und } |\sigma_N| < \sigma^{dil})$$

$$\frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_N} = 0 \quad (\sigma_N < 0 \text{ und } |\sigma_N| > \sigma^{dil})$$

$$\frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{T_i}} = \frac{\sigma_{T_i}}{\sqrt{\sigma_{T_i}^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}}$$

$$\frac{\partial^2 Q_{n+1}^{(k)}}{(\partial \sigma_N)^2} = 0 \quad (\sigma_N \geq 0)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{n+1}^{(k)}}{(\partial \sigma_N)^2} = \tan \phi f_c^{dil} \frac{\partial f_\sigma^{dil}}{\partial \sigma_N} \quad (\sigma_N < 0 \text{ und } |\sigma_N| < \sigma^{dil})$$

$$\frac{\partial^2 Q_{n+1}^{(k)}}{(\partial \sigma_N)^2} = 0 \quad (\sigma_N < 0 \text{ und } |\sigma_N| > \sigma^{dil})$$

$$\frac{\partial^2 Q_{n+1}^{(k)}}{(\partial \sigma_{T_i})^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{T_i}^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}} - \frac{\sigma_{T_i}^2}{\left(\sqrt{\sigma_{T_i}^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}\right)^3}$$

5.7.4 Dilatanzfaktoren f_c^{dil} und f_σ^{dil}

$$\left[f_c^{dil} \right]_{n+1}^{(k)} = 1 - \frac{e^{-\alpha_c^{dil}} \left(1 - \frac{c}{c_0} \right)}{1 + (e^{-\alpha_c^{dil}} - 1) \left(1 - \frac{c}{c_0} \right)}$$

$$\left[f_\sigma^{dil} \right]_{n+1}^{(k)} = 1 \quad (\sigma_N > 0)$$

$$\left[f_\sigma^{dil} \right]_{n+1}^{(k)} = \frac{e^{-\alpha_\sigma^{dil}} \left(1 - \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} \right)}{1 + (e^{-\alpha_\sigma^{dil}} - 1) \left(1 - \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} \right)}$$

($\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| < \sigma^{dil}$)

$$\left[f_\sigma^{dil} \right]_{n+1}^{(k)} = 0 \quad (\sigma_N < 0 \text{ und } |\sigma_N| > \sigma^{dil})$$

$$\left[\frac{\partial f_\sigma^{dil}}{\partial \sigma_N} \right]_{n+1}^{(k)} = \frac{e^{-\alpha_\sigma^{dil}}}{\sigma^{dil} \left[e^{-\alpha_\sigma^{dil}} - e^{-\alpha_\sigma^{dil}} \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} + \frac{|\sigma_N|}{\sigma^{dil}} \right]^2}$$

($\sigma_N < 0$ und $|\sigma_N| < \sigma^{dil}$)

5.7.5 Tangentenmodul \mathbf{K}^t

6.1 Aktualisierung des Tangentenmoduls am Ende der Iteration:

IF $k < 1$ THEN: GOTO 6.2.

IF $k > 0$ THEN: GOTO 6.3.

6.2 Tangentenmodul im elastischem Bereich:

$$\mathbf{K}_{n+1}^t = \mathbf{K}^0 = \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 \\ 0 & k_T & 0 \\ 0 & 0 & k_T \end{bmatrix}$$

GOTO 6.5.

6.3 Entfestigungsparameter H

$$H_{n+1} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \chi} \\ \frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_{n+1}^{(k)}}{\partial W^{cr}} \\ \frac{\partial c_{n+1}^{(k)}}{\partial W^{cr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial W_{n+1}^{cr(k)}}{\partial u_N^{cr}} \\ \frac{\partial W_{n+1}^{cr(k)}}{\partial u_{T_i}^{cr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_N} \\ \frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{T_i}} \end{bmatrix}$$

6.4 Tangentenmodul im plastischen Bereich:

$$\mathbf{K}_{n+1}^t = \mathbf{K}^0 - \frac{\mathbf{K}^0 \frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{K}^0}{H + \frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{K}^0 \frac{\partial Q_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

6.5 Ende der Aktualisierung

5.7.6 Ableitungen für den Entfestigungsparameter H

Ableitungen der Fließfläche:

$$\frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial \chi} = \frac{\chi \tan^2 \phi - c \tan \phi}{\sqrt{\sigma_T^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}}$$

$$\frac{\partial F_{n+1}^{(k)}}{\partial c} = \frac{c - \chi \tan \phi}{\sqrt{\sigma_T^2 + (c - \chi \tan \phi)^2}} - 1$$

Ableitung der Formulierungen für die (skalierten) Festigkeiten:

$$\frac{\partial \chi_{n+1}^{(k)}}{\partial W_{cr}} = -\chi_0 \frac{e^{-\alpha_\chi}}{G_f^I \left[e^{-\alpha_\chi} - e^{-\alpha_\chi} \frac{W_{cr}}{G_f^I} + \frac{W_{cr}}{G_f^I} \right]^2}$$

$$\frac{\partial c_{n+1}^{(k)}}{\partial W_{cr}} = -c_0 \frac{e^{-\alpha_c}}{G_f^{IIa} \left[e^{-\alpha_c} - e^{-\alpha_c} \frac{W_{cr}}{G_f^{IIa}} + \frac{W_{cr}}{G_f^{IIa}} \right]^2}$$

Ableitungen der Formänderungsarbeit:

$$\frac{\partial W_{n+1}^{cr(k)}}{\partial u_N^{cr}} = \sigma_N \quad (\sigma_N > 0)$$

$$\frac{\partial W_{n+1}^{cr(k)}}{\partial u_{T_i}^{cr}} = \sigma_{T_i} \quad (\sigma_N > 0)$$

$$\frac{\partial W_{n+1}^{cr(k)}}{\partial u_N^{cr}} = 0 \quad (\sigma_N < 0)$$

$$\frac{\partial W_{n+1}^{cr(k)}}{\partial u_{T_i}^{cr}} = \sigma_{T_i} \left(1 - \left| \frac{\sigma_N \tan \phi}{\sigma_{T_i}} \right| \right) \quad (\sigma_N < 0)$$

Kapitel 6

Verifikation

6.1 Allgemeines

Die Verifikation gestaltet sich in Form von drei grundlegenden Tests entsprechend den simulierbaren Belastungszuständen des Materialmodells und wird FE-basiert innerhalb einer globalen Newton-Raphson-Iteration in SLang durchgeführt:

1. Beanspruchung weggesteuert auf Zug
2. Beanspruchung weggesteuert auf Schub unter konstanter Druckbelastung
3. Beanspruchung weggesteuert auf Zug und Schub

In SLang wird das Kontakt-Materialgesetz an folgendes Element gekoppelt:

- 4-knotiges Kontakt-Element (CONTACT4N)

Ebenso ist es möglich den Zugversuch (1) und den Test mit Zug und Schub (3) auf Integrationspunktebene bzw. anhand eines Materialpunktes zu realisieren. Die Testkonfiguration zur weggesteuerten Simulation einer gekoppelten Beanspruchung aus Druck und Schub infolge einer konstanten Knotendruckkraft lässt sich nur anhand des Kontakt-Elements vornehmen und muss somit im Kontext der FEM vollzogen werden. Mit diesem Test kann zudem der numerische Nachweis des Dilatanzinflusses in Form der Gegenüberstellung der relativen Normalverschiebungen mit den tangentialen Verschiebungen erbracht werden.

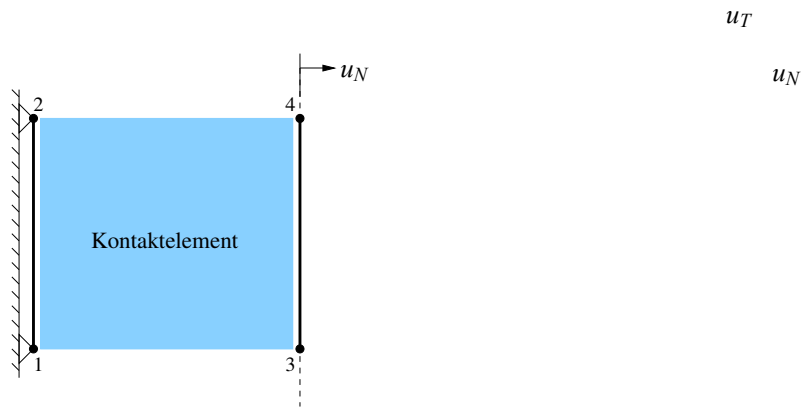


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Zugversuches (Test 1) und der gekoppelten Beanspruchung aus Zug und Schub (Test 3) mit einem Kontaktelement (weggesteuert).

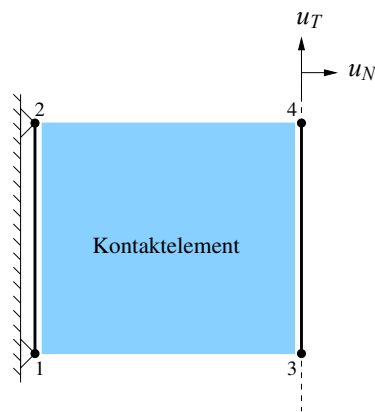


Abbildung 6.2: Test 2: Weggesteuerte Beanspruchung auf Schub unter einer konstanten Druckspannung F .

6.2 Test der Verifikationsmodelle

6.2.1 Test 1: Zugversuch in SLang

Im ersten Test wird das Verhalten unter reiner Zugbeanspruchung untersucht. Die Resultate können mit den numerischen Ergebnissen nach [1], welche den dabei realitätsnahen Entfestigungsvorgang einer sensitiven Betonstruktur abbilden, verifiziert werden. Ebenso kann der spannungsgesteuerte Entfestigungsvorgang im Mode I durch analytische Ermittlung der korrespondierenden Verschiebungen als Referenz gegenübergestellt werden, was im weiteren Verlauf gezeigt wird. Für den Zugversuch werden folgende Materialparameter angesetzt:

Nr.	Parameter	Wert	Dimension
1	K_N	1000	MPa/m
2	$\tan \varphi$	0.8	-
3	χ_0	3.0	MPa
4.1	G_f^I	0.01	N/mm
4.2	G_f^I	0.02	N/mm
4.3	G_f^I	0.03	N/mm
4.4	G_f^I	0.05	N/mm
4.5	G_f^I	0.10	N/mm

Tabelle 6.1: Materialparameter für den Zugversuch.

Alle übrigen Parameter sind irrelevant. Der modellspezifische Formbeiwert der Zugfestigkeit wird mit $\alpha_\chi = 0$ im Hinblick auf eine exponentielle Entfestigung bzw. lineare Skalierung der Zugfestigkeit unberücksichtigt belassen. Der Test wird sukzessiv für verschiedene Werte der Mode I Bruchenergie G_f^I wiederholt. Dabei wird für die lokale Iteration eine sehr kleine Schrittweite Δu_N gewählt. Die Formänderungsarbeit W^{cr} wird entsprechend aktualisiert und bei der nachfolgenden Iteration berücksichtigt.

Die Spannungs-/ Verschiebungsrelation lässt sich für reine Zugbeanspruchung analytisch herleiten, was wiederum als Verifikation des Verlaufs des Entfestigungsvorgangs mit exponentialem Charakter von Nutzen ist. Die Herleitung sei in Folgendem kurz dargelegt. Als Ausgangsgleichung dient die Formulierung für die Rissöffnung orthogonal zur Rissfläche u_N^{cr} . Es gilt:

$$\dot{u}_N^{cr} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} \quad (6.1)$$

Für das Konsistenzkriterium $\Delta F = 0$ ergibt sich die Rate des plastischen Multiplikators $\dot{\lambda}$ zu:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} \dot{\sigma}_N \quad (6.2)$$

mit

$$H = -\frac{\chi_0}{G_f^I} \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} \dot{\sigma}_N \quad (6.3)$$

Eingesetzt in Gleichung (6.1) liefert für \dot{u}_N^{cr} :

$$\dot{u}_N^{cr} = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_N} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_N} \dot{\sigma}_N = -\frac{G_f^I}{\chi_0} \frac{\dot{\sigma}_N}{\sigma_N} \quad (6.4)$$

Die analytische Lösung dieser Differenzialgleichung lässt sich mit den Anfangsbedingungen $\sigma_N = \chi_0$ und $u_N^{cr} = 0$ generieren. Als Lösung ergibt sich für u_N^{cr} :

$$u_N^{cr} = \frac{G_f^I}{\chi_0} \ln \left(\frac{\chi_0}{\sigma_N} \right) \quad (6.5)$$

bzw. für σ_N

$$\sigma_N = \chi_0 \exp \left(\frac{-u_N^{cr} \chi_0}{G_f^I} \right) \quad (6.6)$$

Für die Gesamtverschiebung u_N ergibt sich im Bereich irreversibler Rissöffnungen folgende analytische Formulierung:

$$u_N = \frac{\sigma_N}{K_N} + \frac{G_f^I}{\chi_0} \ln \frac{\chi_0}{\sigma_N} \quad (6.7)$$

mit dem Gültigkeitsbereich

$$u_N > \chi_0 / K_N$$

Entsprechend gilt im elastischen Bereich die elastische Spannungs-/ Verschiebungsbeziehung. Das Invertieren der Gleichung (6.7) nach σ_N ist analytisch nicht möglich.

Die SLang-generierten Ergebnisse, resultierend aus der weggesteuerten Iterationsprozedur unter Verwendung des Kontakt-Materialgesetzes, sind mit den analytischen Lösungen identisch. Nach dem Erreichen der Zugfestigkeit baut sich der Spannungszustand kontinuierlich als Folge des Entfestigungsvorganges exponential ab. Bis dahin finden linear elastische und damit reversible Verformungsvorgänge in Form elastischer Verschiebungen u_N^{el} statt.

Der Graph der linear elastischen und nichtlinear elasto-plastischen Spannungs-/Verschiebungsbeziehung ist in der folgenden Abbildung für die jeweilig angesetzte Grenzbruchenergie G_f^I (Mode I) dargestellt:

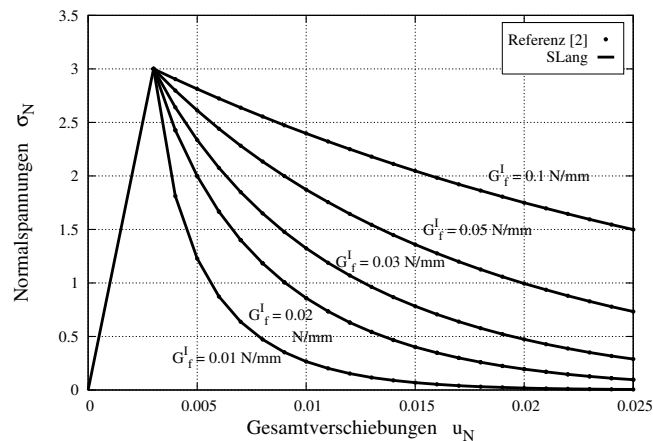


Abbildung 6.3: Test 1: Normalspannungen σ_N in Abhängigkeit der relativen Verschiebungen u_N .

Auf Basis dieses ersten erfolgreichen Tests lassen sich nun als Kriterium der Leistungsfähigkeit des CPP Algorithmus die benötigte Anzahl an lokalen Iterationen je globaler Verschiebungsgröße ermitteln. Die folgende Abbildung veranschaulicht die Iterationsmenge des simulierten Zugversuchs auf Materialpunktebene.

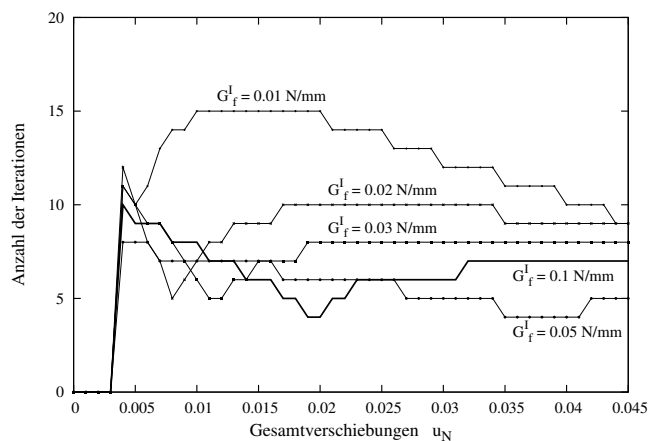


Abbildung 6.4: Iterationsanzahl für den Zugversuch.

6.2.2 Test 2: Schub unter konstanter Druckbelastung

Mit diesem Test lässt sich das Materialverhalten in Form tangentialen Gleitens unter dem Einfluss einer konstanten Druckbelastung simulieren. In SLang wird dieser numerische Versuch anhand eines Kontakt-Elements durchgeführt. In Richtung der auftretenden Rissöffnungen (x-Richtung) wird eine Knotendruckkraft aufgebracht. Der Test wird für folgende Werte der Druckbelastung wiederholt: -0.1 MPa, -2 MPa, -6 MPa und -10 MPa. Die Konfiguration der Materialparameter kann den nachfolgenden Tabellen entnommen werden.

Nr.	Parameter	Wert	Dimension
1	K_N	25000	MPa/m
2	K_T	25000	MPa/m
3	$\tan \varphi$	0.8785	-
4	χ_0	3.0	MPa
5	c_0	4.5	MPa
6	G_f^I	0.03	N/mm
7	G_f^{IIa}	0.06	N/mm
8	σ^{dil}	30.0	MPa

Tabelle 6.2: Materialparameter für das zweite Testmodell.

Nr.	Parameter	Wert	Dimension
1	α_χ	0.0	-
2	α_c	0.0	-
3	α_σ^{dil}	2.0	-
4	α_c^{dil}	0.0	-

Tabelle 6.3: Formbeiwerte für das zweite Testmodell.

Das elastische Spannungsmaximum wird in tangentialer Richtung sehr schnell erreicht und es setzt die Entfestigung mit abklingenden Spannungen ein. Ab einer bestimmten Schrittweite konvergiert der Verlauf. Hier resultiert die Schubspannung nur noch aus dem Anteil gemäß Coulomb'scher Reibung aus Reibungsbeiwert und Druckkraft:

$$\sigma_T = \tan \phi \sigma_N \quad (6.8)$$

Das Modell verdeutlicht ebenso den Einfluss der Dilatanz (Abb. 6.6): Je kleiner die Druckspannung ist, desto größer fällt die Dilatanz aus, was die Gegenüberstellung der normalen und tangentialen Gesamtverschiebungen zeigen soll. Ab einer Druckkraft von 6 MPa fällt die Volumenzunahme infolge von Rissöffnungen (orthogonal zur Rissfläche) minimal aus. Die Resultate dieses zweiten Versuchs sind in den folgenden Abbildungen dargestellt und entsprechen denen der dargelegten Ergebnisse nach Referenz [6].

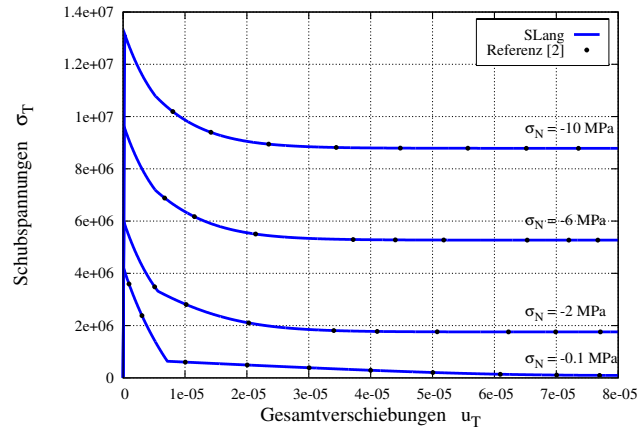


Abbildung 6.5: Entfestigungsverhalten in tangentialer Richtung unter konstanter Druckbeanspruchung.

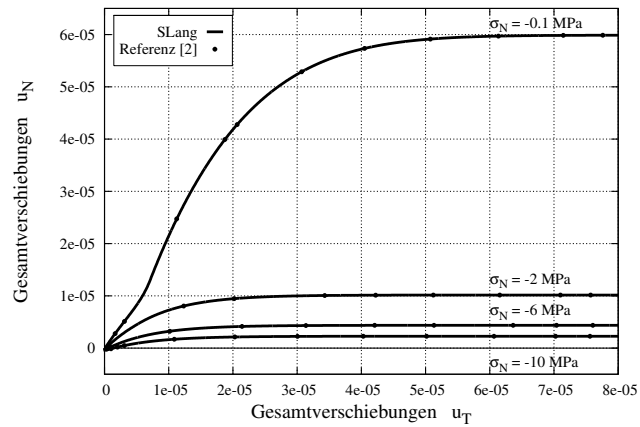


Abbildung 6.6: Schub unter konstanter Druckbeanspruchung: Einfluss der Dilatanz entsprechend verschiedener Werte für die Normalspannung σ_N .

6.2.3 Test 3: Zug und Schub mit Dilatanz: Hassanzadeh's Test (1990) als experimentelle Verifikationsgrundlage

In einem experimentellen Versuch zur Gewinnung von Erkenntnissen der Rissentwicklung einer gekoppelten Beanspruchung aus Zug und Schub wurden durch Hassanzadeh signifikante Ergebnisse zur Verfügung gestellt. Mit dieser Studie über das reale Verformungsverhalten unter Berücksichtigung der Volumenzunahme durch die Gefügelockerung (Dilatanzeffekt) lassen sich entwickelte Modelle bewerten und verifizieren. Nachfolgend sollen die numerisch ermittelten Testergebnisse mit denen des Hassanzadeh-Projekts verglichen werden, um die Qualität der Testresultate des Materialmodells beurteilen zu können. Prinzipiell kann hiermit eine weggrößengesteuerte Abbildung des Spannungszustandes generiert werden. Dies wiederum stellt das Verformungsverhalten einer aus Zug- und Schub gekoppelt beanspruchten Struktur dar. Abbildung 6.7 zeigt die Versuchsanordnung zur Veranschaulichung des Experiments. Weitere Informationen können der Referenz nach [9] entnommen werden.

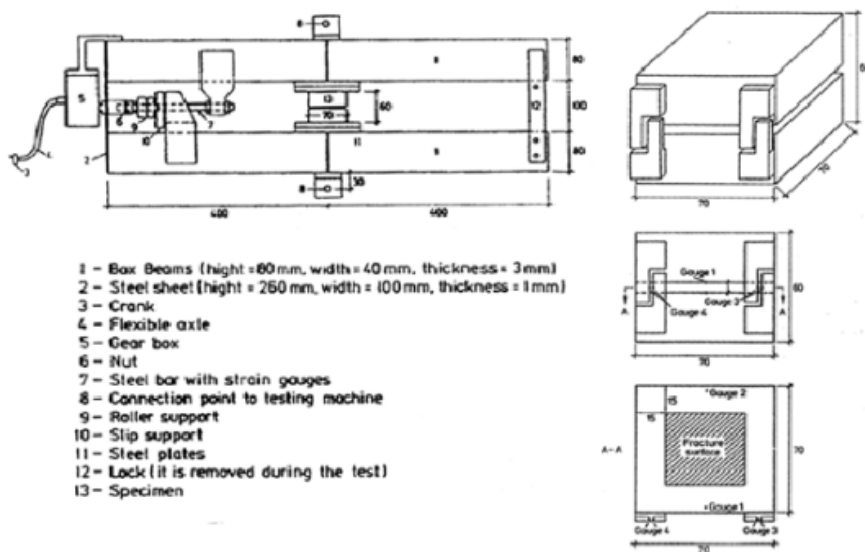


Abbildung 6.7: Versuchsaufbau nach Hassanzadeh.

Als Basis dient ein prismatischer Betonkörper, welcher in quadratische Abschnitte von 7×7 cm unterteilt ist. Zusätzlich befindet sich in jedem Abschnitt eine Kerbe von 1,50 cm Tiefe. Zuerst wird der Betonkörper bis zum Erreichen der Zugfestigkeit belastet. Beginnen sich dann die Risse innerhalb der Teilabschnitte auszubreiten, wird die weggesteuerte Beanspruchung jeweils in normaler und tangentialer Richtung durch einen festen Parameter in Abhängigkeit gestellt. Für das fixierte Weggrößenverhältnis der Verschiebungen u_N und u_T gilt:

$$\tan \theta = \frac{u_N}{u_T} \quad (6.9)$$

Die Tests werden jeweils für $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ und 90° durchgeführt. Für die Materialparameter und die Formbeiwerte werden die Werte entsprechend der folgenden Tabellen gesetzt:

Nr.	Parameter	Wert	Dimension
1	K_N	200	MPa/m
2	K_T	200	MPa/m
3	$\tan \varphi$	0.9	-
4	χ_0	2.8	MPa
5	c_0	7.0	MPa
6	G_f^I	0.1	N/mm
7	G_f^{IIa}	1.0	N/mm
8	σ^{dil}	56.0	MPa

Tabelle 6.4: Materialparameter.

Nr.	Parameter	Wert	Dimension
1	α_χ	0.0	-
2	α_c	1.5	-
3	α_σ^{dil}	2.7	-
4	α_c^{dil}	3.0	-

Tabelle 6.5: Formbeiwerte.

Als Referenz der daraus hervorgegangenen experimentellen Resultate dienen die abgebildeten Spannungs-/ Verschiebungsverläufe. Die Kurven geben den Entfestigungsvorgang in normaler (u_N, σ_N) und tangentialer Richtung (u_T, σ_T) wieder und verdeutlichen die Kopplung der Bruchzustände Mode I und Mode IIa. Abbildung 6.8 stellt die Normalspannungen σ_N in Abhängigkeit der relativen Verschiebungen u_N dar. Entsprechend folgen die tangentialen Spannungsverläufe in Abbildung 6.9.

Spannungs-/ Verschiebungsverläufe in normaler Richtung entsprechend Modell und Referenz:

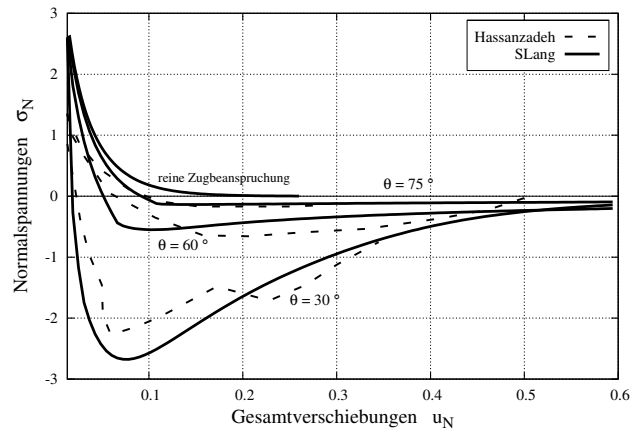


Abbildung 6.8: Normalspannungen σ_N in Abhängigkeit von den relativen Verschiebungen u_N .

Spannungs-/ Verschiebungsverläufe in tangentialer Richtung entsprechend Modell und Referenz:

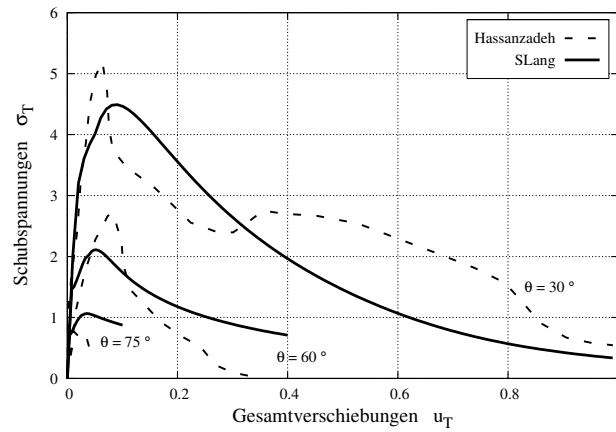


Abbildung 6.9: Schubspannungen σ_T in Abhängigkeit von den relativen Verschiebungen u_T .

Kapitel 7

Anwendungsbeispiele

7.1 Allgemeines

Um das Kontakt-Materialgesetz hinsichtlich der praktischen Anwendbarkeit ebenso zu verifizieren, werden numerische Simulationen für die Risspfad-Entwicklung anhand von zwei unterschiedlichen Tragstrukturen in SLang durchgeführt. Für diese Modelle sind entsprechende experimentelle Daten des realen Verformungsverhaltens und der damit verbundenen Rissentwicklung vorhanden, was somit den direkten Vergleich mit den Testresultaten und die Überprüfung der Richtigkeit des implementierten Materialgesetzes ermöglicht.

Weiterhin kann die Qualität der Konvergenz bei der nichtlinearen globalen FE-Berechnung der o.g. diskretisierten Strukturen in Bezug auf die netzfreie Modellierung des Risspfades und den damit verbundenen sukzessiven Einbau der auf dem Materialgesetz beruhenden Kontakt-Elemente überprüft werden. Die dafür notwendige FE-Berechnung wird mit folgenden numerischen Beispielen durchgeführt:

- **L-förmige Betonscheibe der Referenz [10]**
- **Betonbalken der Referenz [11]**

7.2 Betonscheibe

Das statische System und die zugehörige Belastung sind nachfolgend schematisch dargestellt. In Abbildung 7.1 sind die Finiten Elemente des numerischen SLang-Modells dargestellt (siehe [12]).

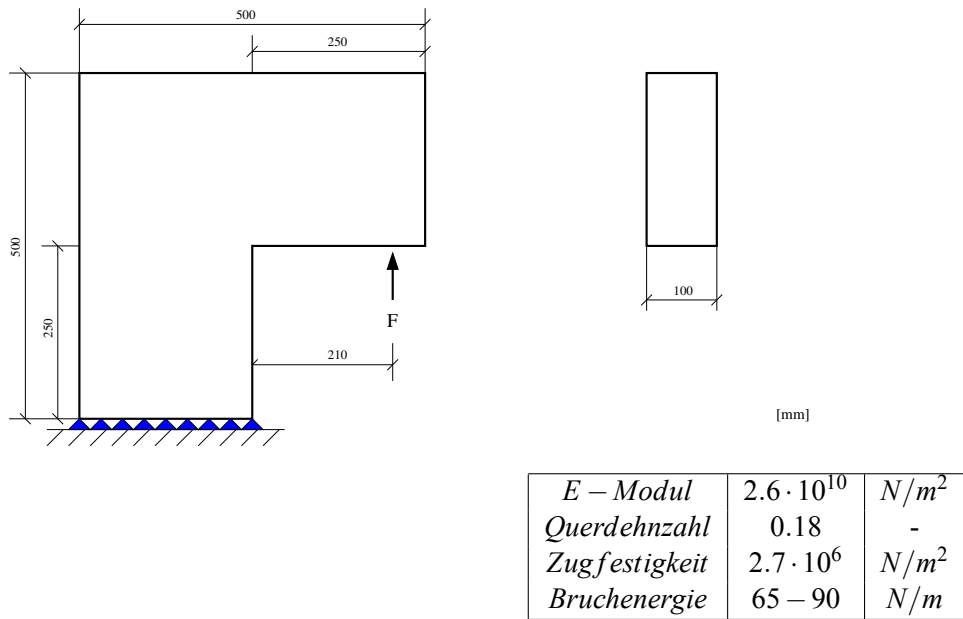


Abbildung 7.1: L-förmige Betonscheibe mit außermittigem Lastangriff und Materialparameter.

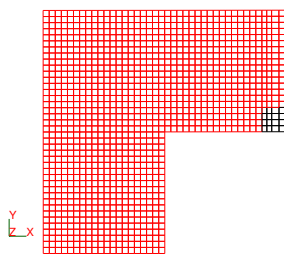


Abbildung 7.2: Anfangsdiskretisierung der Betonstruktur in SLang.

Für die FE-Berechnung werden die Materialparameter der nachfolgenden Tabelle angesetzt. Alle Formbeiwerte werden auf numerisch Null belassen.

Nr.	Parameter	Wert	Dimension
1	K_N	$1.0 \cdot 10^{13}$	N/m
2	K_T	$1.0 \cdot 10^{12}$	N/m
3	$\tan \varphi$	0.8	-
4	χ_0	$2.7 \cdot 10^6$	N/m ²
5	c_0	$4.5 \cdot 10^6$	N/m ²
6	G_f^l	90	N/m
7	G_f^{fla}	100	N/m
8	σ^{dil}	$30 \cdot 10^6$	N/m ²

Tabelle 7.1: Materialparameter für das Kontakt-Materialgesetz.

Es folgt eine Darstellung des Spannungs- und Verformungszustands während der Rissentwicklung (7.3) sowie die Gegenüberstellung der Last-/ Verschiebungsverläufe aus numerischen und experimentellen Daten (Abbildung 7.4).

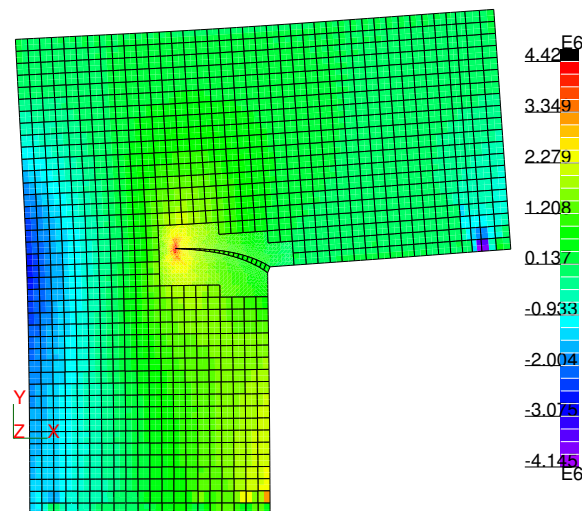


Abbildung 7.3: Netzfreie Rissentwicklung, Spannungszustand und Verformungszustand der Betonstruktur.

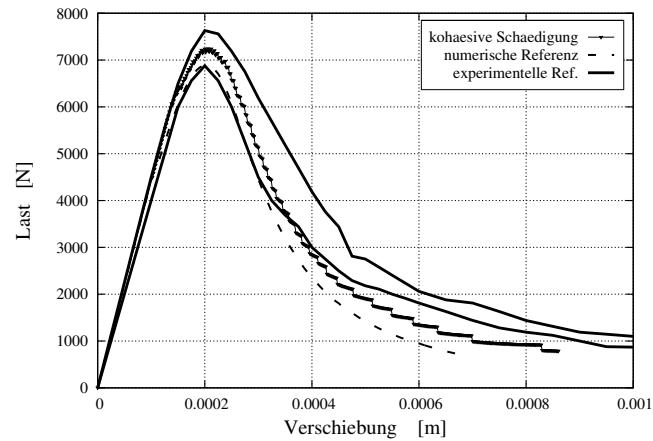


Abbildung 7.4: Last-/ Verschiebungsdiagramm der numerischen Simulation (kohäsive Schädigung) und Vergleich mit Referenzen.

Entsprechend der Annahme stellt sich ein steilerer Verlauf in der zweiten Hälfte des Risspfades, generiert durch das Kontakt-Materialgesetz für kohäsive Risse, ein.

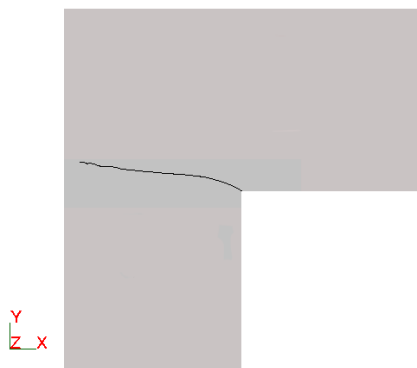


Abbildung 7.5: Betonscheibe nahe gerissenem Zustand.

Der Vergleich dieser numerischen Rissentwicklung mit experimentell ermittelten Rissen zeigt die deutlich bessere Abbildung der realen Rissfortschrittsentwicklung bei Berücksichtigung kohäsiver Schädigung. Die folgenden Abbildungen veranschaulichen dies.

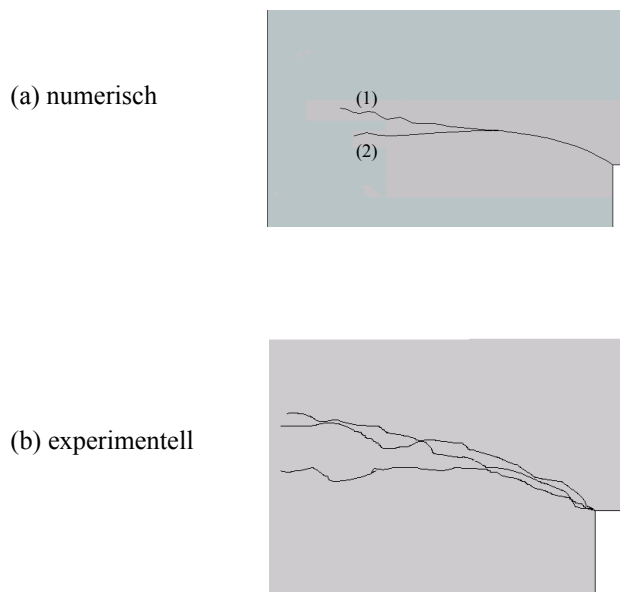
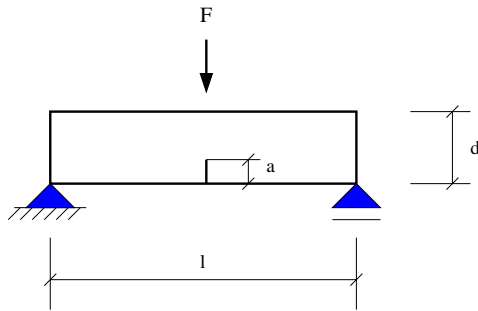


Abbildung 7.6: Gegenüberstellung der Risspfade, generiert aus verschiedenen Materialgesetzen, (a) mit Berücksichtigung (1) und ohne Berücksichtigung (2) kohäsiven Rissverhaltens und der Vergleich mit Versuchsergebnissen (b).

7.3 Betonbalken

Das zweite Anwendungsbeispiel ist eine numerische Simulation der Rissentwicklung eines mittig belasteten Biegebalkens aus Beton. Die folgende Abbildung enthält die Geometrie- und Materialdaten des Versuchs.



E-Modul E	$3.65 \cdot 10^{10}$	N/m ²
Querdehnzahl ν	0.1	-
Zugfestigkeit f_{ct}	$3.19 \cdot 10^6$	N/m ²
Bruchenergie G_f	100	N/m
Länge l	0.6	m
Höhe d	0.15	m
Initial-Risslänge a	0.045	m

Abbildung 7.7: Schematische Darstellung des Balkens mit zentrierter Belastung.

Die angesetzten Materialbeiwerte folgen in der Tabelle 7.2. Formbeiwerte bleiben auch bei dieser Simulation unberücksichtigt.

Nr.	Parameter	Wert	Dimension
1	K_N	$1.0 \cdot 10^{14}$	N/m
2	K_T	$1.0 \cdot 10^{13}$	N/m
3	$\tan \varphi$	0.8	-
4	χ_0	$3.19 \cdot 10^6$	N/m ²
5	c_0	$4.5 \cdot 10^6$	N/m ²
6	G_f^I	100	N/m
7	G_f^{IIa}	150	N/m
8	σ^{dil}	$30 \cdot 10^6$	N/m ²

Tabelle 7.2: Materialparameter für das Kontakt-Materialgesetz.

Die Diskretisierung in SLang zeigt den bereits vorhandenen Durchbruch (Carpin-teri) im Zugbereich als Initial-Risspfad im Anfangszustand. Am oberen Ende der

Kerbe wird der Riss einsetzen. Ab dieser Zone besteht die Struktur nach beiden Seiten aus 200 vierknotigen 2-D Elementen mit insgesamt 1707 Knoten.

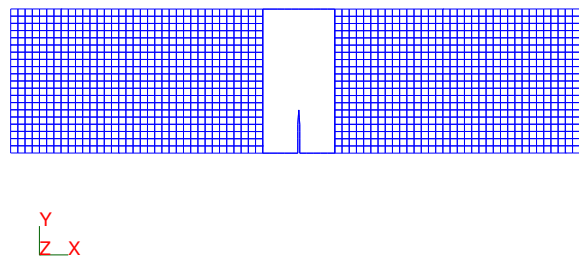


Abbildung 7.8: Diskretisierung des Einfeldbalkens in SLang.

Es folgen die Berechnungsergebnisse für den Verlauf der Rissentwicklung. Abbildung 7.9 stellt zunächst die gesamte vernetzte Struktur im verformten Zustand mit dem aktuellen Risspfad dar. Die detaillierte Bruchzone ist in Abbildung 7.10 dargestellt.

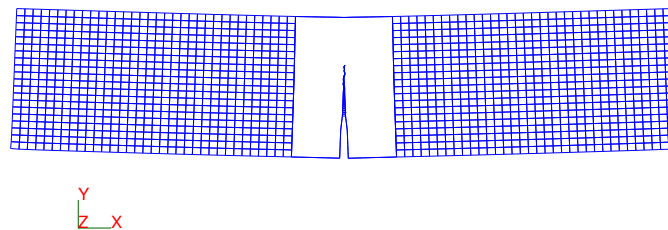


Abbildung 7.9: Vertikaler Rissverlauf im verformten Zustand oberhalb der Kerbe.

In der Bruchzone und innerhalb der Rissöffnung ändert sich die Diskretisierung mit fortschreitendem Risswachstum. Die waagrechten Linien innerhalb der Rissöffnung signalisieren die eingebauten Kontaktelemente und die damit noch mögliche Spannungsübertragung über die beiden Rissufer.

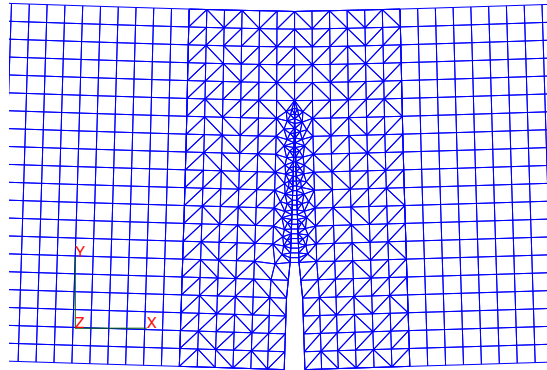


Abbildung 7.10: Darstellung der Bruchzone im verformten Zustand mit den Kontaktelementen zwischen den Rissufern.

Abbildung 7.11 zeigt den Spannungszustand im Rissbereich während der numerischen Simulation und Generierung von ca. 40 % des zu erwartenden Rissverlaufs.

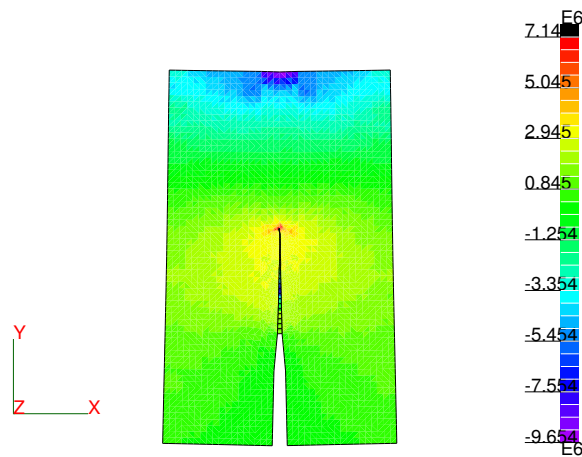


Abbildung 7.11: Spannungs- und Verformungszustand in der Bruchzone.

Mit dem Verifikationsdiagramm werden die numerischen Daten mit numerischen Referenzen gegenübergestellt. Die durchgehende Kurve (exponentiell) beschreibt den Verlauf der durch das neu-implementierte elasto-plastische Kontakt-Materialgesetz beeinflussten FE-Berechnung (Abb. 7.12).

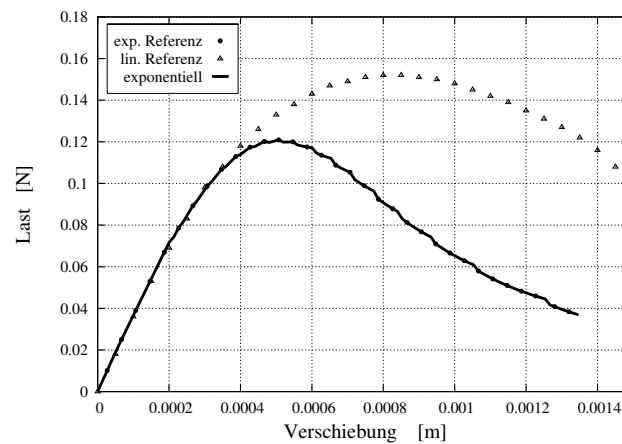


Abbildung 7.12: Last-/ Verschiebungsdiagramm als Vergleich mit Referenzen.

Der Unterschied zwischen linearem (Referenz) und exponentiellem Entfestigungsvorgang wird anhand dieser Kurven deutlich. Die numerische Referenz mit exponentiellem Charakter stimmt mit den generierten Daten bzw. dem daraus resultierenden Verlauf exakt überein. Dies scheint auch ein Indiz dafür zu sein, dass auf Basis dieses Anwendungsbeispiels der besondere Charakter des Modells bei kohäsiver Schädigung nicht zur Wirkung kommt.

Kapitel 8

Identifikation der Materialparameter

8.1 Materialparameter der Festigkeiten

In diesem Kapitel soll ausführlicher auf die Wahl der Formbeiwerte für ein entsprechendes Modell eingegangen werden. Dies ist für die Anwendung des Materialgesetzes von grundlegender Bedeutung.

Um das durch das Kontakt-Materialgesetz simulierte Materialverhalten hinsichtlich einer Rissanalyse anpassen zu können, werden vier Formbeiwerte zum manuellen Optimieren integriert. Wie schon erwähnt, handelt es sich dabei um folgende Parameter:

- Formbeiwert der Zugfestigkeit α_χ
- Formbeiwert der Scherfestigkeit α_c
- Formbeiwert der Dilatanzspannung α_σ^{dil}
- Formbeiwert für die aktuelle Schädigung α_c^{dil} aufgrund von Schubbeanspruchung

Die Ermittlung der beiden Formbeiwerte α_χ und α_c stellt insofern kein Problem aufgrund der trivialen Durchführbarkeit entsprechender Versuche zur Gewinnung experimenteller Daten, wie das beispielsweise bei einem Zugversuch der Fall ist. Schwieriger gestaltet sich dies für die Formbeiwerte der Dilatanz.

Für den ersten Verifikationsversuch (Zugversuch) wurde der angenommene Formbeiwert der Zugfestigkeit mit numerisch Null angesetzt. Der Zugversuch wird aufgrund dessen nochmals bei einer Grenzbruchenergie im Mode I von $G_I^f = 0.1$ N/mm durchgeführt. Die folgende Abbildung zeigt den Einfluss verschiedener Initialwerte für diesen Parameter.

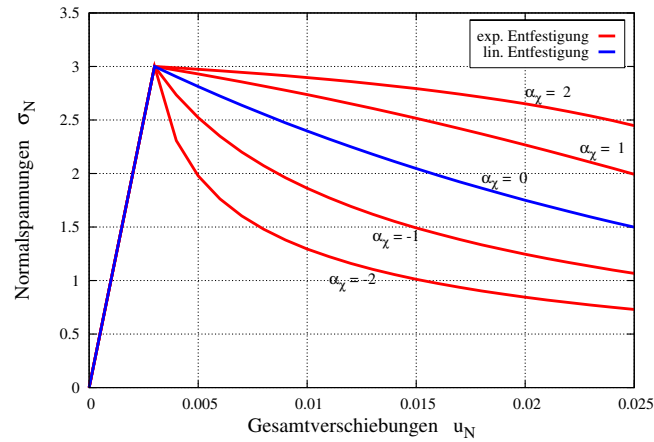


Abbildung 8.1: Numerischer Zugversuch unter Einfluss des Formbeiwertes α_χ .

Mittels eines Optimierers lassen sich die numerischen Daten bzw. Verläufe an die aus den experimentellen Daten resultierenden Kurven approximieren, was somit die Ermittlung der Formbeiwerte α_χ und α_c ermöglicht. Für die Ermittlung der Formbeiwerte der Dilatanz stellt sich die Frage einer Strategiefindung erneut (Abschnitt 8.2).

Am Beispiel des Formbeiwertes der Zugfestigkeit α_χ werden folgende Untersuchungen im Hinblick auf das Entfestigungsverhalten unter Zugbeanspruchung vorgenommen. Bei einer linearen ($\alpha_\chi = 0$) Skalierung der Zugfestigkeit in Abhängigkeit der Formänderungsarbeit ergibt sich für die Zugfestigkeit in Abhängigkeit von der Rissöffnung u_N^{cr} folgende Formulierung:

$$\chi = \chi_0 \cdot \exp\left(\frac{-\chi_0 u_N^{cr}}{G_f^I}\right) \quad (8.1)$$

Für u_N^{cr} gilt folglich:

$$u_N^{cr} = \frac{G_f^I}{\chi_0} \ln \frac{\chi_0}{\chi} \quad (8.2)$$

Die dabei umgesetzte Formänderungsarbeit W_{cr} wird durch das Flächenintegral der Festigkeits-/ Rissöffnungsbeziehung entsprechend Abbildung 8.2 beschrieben. Es ergibt sich für W^{cr} :

$$W^{cr} = \int_0^{u_N^{cr}} \chi du_N^{cr} = -G_f^I \cdot \exp\left(\frac{-\chi_0 u_N^{cr}}{G_f^I}\right) \quad (8.3)$$

Abbildung 8.2 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen Entfestigungsvorgang und Formänderungsarbeit.

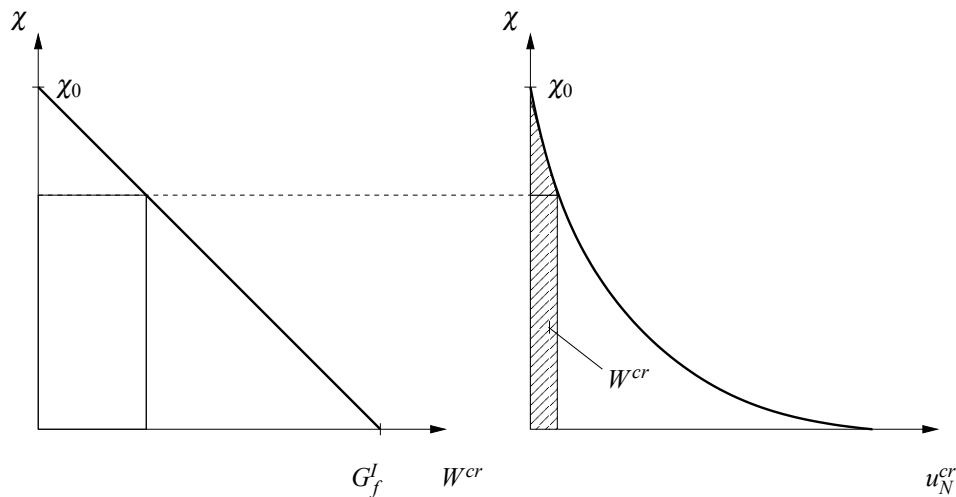


Abbildung 8.2: Entfestigung bei reiner Zugbeanspruchung in Abhängigkeit von der Formänderungsarbeit W^{cr} (links) und von der Rissöffnung u_N^{cr} (rechts).

Für den allgemeinen Fall (α_χ unbekannt) lassen sich experimentelle Daten ermitteln, welche als Optimierungsproblem aufbereitet eine approximierte Funktion $\chi = f(u_N^{cr})$ mit entsprechenden Formbeiwerten ergeben sollten.

8.2 Materialparameter der Dilatanz

8.2.1 Numerische Simulation

Der Parameter der Dilatanzspannung σ^{dil} kann mit dem numerischen Versuch analog dem Hassanzadeh-Experiment (Zug und Schub gekoppelt) ermittelt werden. Für eine erneute Berechnung mit modifizierten Parametern wird der Test 3 erneut durchgeführt. Die Materialparameter werden bis auf die Formbeiwerte α_i und die Dilatanzspannung σ^{dil} übernommen. Damit die Coulomb'sche Reibung aktiviert wird, muss sich die Druckspannung einem Höchstwert nähern. Diesen Grenzzustand kann man bei einer entkoppelten Betrachtung der Dilatanzbeiwerte für eine erneute Testkonfiguration wie folgt beschreiben:

- Die kohäsive Schädigung aufgrund der Dilatanz sollte so gering wie möglich gehalten werden.

- Gleichzeitig sollte sich der Grenzzustand der Dilatanz (keine fortschreitende Volumenzunahme) so schnell wie möglich einstellen.

Um diese Forderungen numerisch umsetzen zu können, ist es notwendig, den Einfluss der Dilatanzbeiwerte f_c^{dil} und f_σ^{dil} für diesen Sachverhalt beurteilen zu können. Die folgende Abbildung zeigt, dass diese Bedingungen näherungsweise erfüllt werden können, wenn gilt:

- der Formbeiwert für die kohäsive Schädigung α_c^{dil} ist positiv und wird relativ hoch angesetzt (> 5)
- im Gegenzug gilt für den Formbeiwert $\alpha_\sigma^{dil} = -\alpha_c^{dil}$, der damit sehr schnell zu Null konvergiert

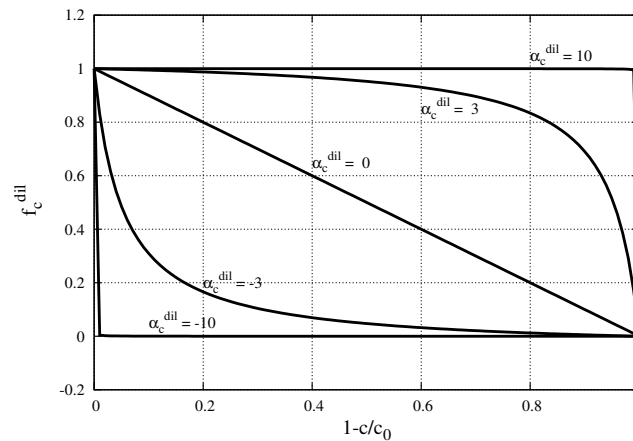


Abbildung 8.3: Dilatanzbeiwert f_c^{dil} unter Einfluss des Formbeiwertes α_c^{dil} .

Bei $\alpha_c^{dil} = 10$ scheint die Forderung nach geringer kohäsiver Schädigung während des Entfestigungsvorganges hinreichend erfüllbar. Daher werden für den folgenden numerischen Test in SLang folgende Materialparameter bzw. Formbeiwerte angesetzt:

- $\alpha_c^{dil} = 10$
- $\alpha_\sigma^{dil} = -\alpha_c^{dil} = -10$
- $\alpha_c = \alpha_\chi = 0$

Der Test wird jeweils für verschiedene Werte für eine angenommene Dilatanzspannung σ_0^{dil} wiederholt:

- $\sigma_0^{dil} = 50 \text{ MPA}$
- $\sigma_0^{dil} = 56 \text{ MPA}$
- $\sigma_0^{dil} = 1 \cdot 10^2 \cdot \chi_0$
- $\sigma_0^{dil} = 2 \cdot 10^2 \cdot \chi_0$

Wie erwartet skaliert die Normalspannung gegen die Dilatanzspannung. Ebenso stellt sich annähernd diese Spannung als Maximum ein, wenn die Initial-Dilatanzspannung σ_0^{dil} ein Vielfaches der Zugfestigkeit beträgt. Als Resultat des FE-Tests anhand eines Elements lässt sich für die Dilatanzspannung festhalten:

$$\sigma^{dil} = \max |\sigma_N| \quad \text{wenn } \sigma_N < 0 \quad (8.4)$$

Die folgende Abbildung stellt die Verläufe und deren Annäherung an die Dilatanzspannung graphisch dar. Entsprechend dem Fall [1] (Dilatanzspannung ist bekannt) und [2] ist ersichtlich, dass nach Erreichen der Dilatanzspannung nur noch die Coulomb'sche Reibung aktiviert wird und die Spannungen sehr schnell bei fortschreitender Rissentwicklung abgebaut werden. Dies gilt ebenso für den tangentialen Spannungszustand.

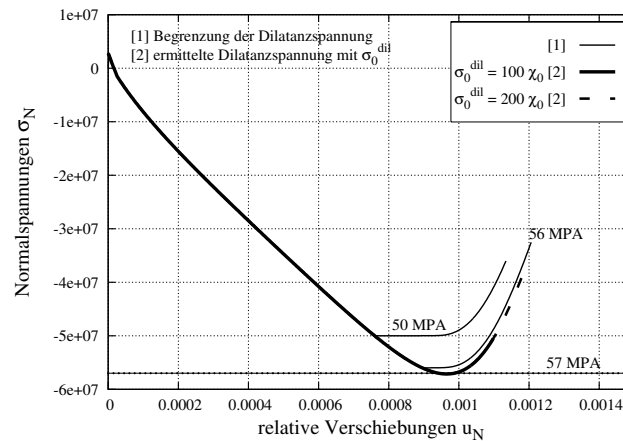


Abbildung 8.4: Ermittlung der Dilatanzspannung σ^{dil} anhand einer sehr hoch angesetzten Initial-Dilatanzspannung σ_0^{dil} .

8.2.2 Experimentelle Ermittlung

Ein experimenteller Versuch zur Feststellung des Grenzwertes der Druckspannung infolge von Dilatanz (σ^{dil}) ist in aufwendiger Form als Abscherversuch unter einer Drucklast durch die Kombination einer weg- und kraftgesteuerten Beanspruchung analog dem Verifikationstest 2 (Kapitel 6, Abschnitt 6.2.2) möglich. Ein dazu realisierbarer Versuchsaufbau für die Ermittlung der Dilatanzspannung würde sich folgendermaßen gestalten:

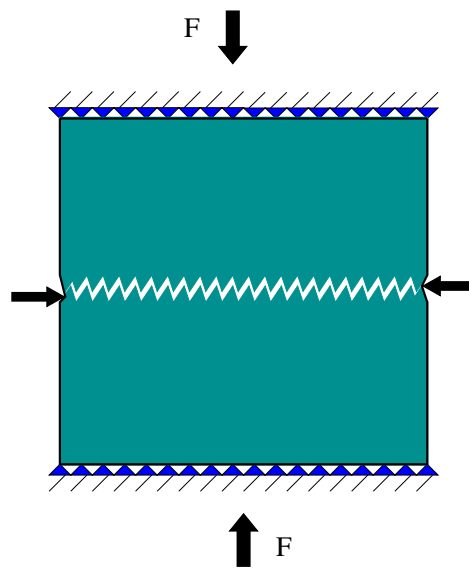


Abbildung 8.5: Mögliche Versuchsanordnung zur experimentellen Ermittlung von σ^{dil} .

Die Durchführung des Experiments verläuft dabei folgendermaßen:

- beidseitiges, kraftgesteuertes Generieren der (Maximal-)Druckkraft durch Zusammenpressen des gerissenen Betonkörpers
- bei Erreichen der Maximal-Last setzt die weggesteuerte Abscherbeanspruchung ein
- Dilatanzspannung ist erreicht, wenn die aufgebrachte Druckspannung das Auftreten von Rissöffnungen verhindert

Exemplarisch wird auf numerischer Ebene der Verifikationstest 2 nochmals durchgeführt. Hierfür wird die äußere Druckkraft annähernd an σ^{dil} erhöht. Die anfangs negativen Rissöffnungen konvergieren schließlich bei einer Gesamtdruckkraft von 29.56 MPa gegen numerisch Null, d.h. der Dilatanzeffekt (Volumenzunahme) ist minimal bzw. bleibt aus. Die folgenden Abbildungen veranschaulichen diesen Sachverhalt.

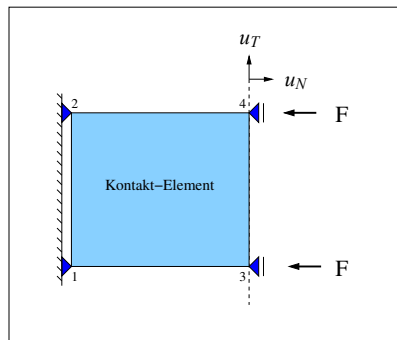


Abbildung 8.6: Druckbeanspruchung mit $F_D = 29.56 \text{ MPa}$ (N/mm^2) in Form von energetisch äquivalenten Knotenlasten $F = 0.5 \cdot F_D$.

Als Ergebnis der Berechnung folgt die Gegenüberstellung der relativen Rissverschiebungen zur Veranschaulichung der Minderung des Dilatanzinflusses.

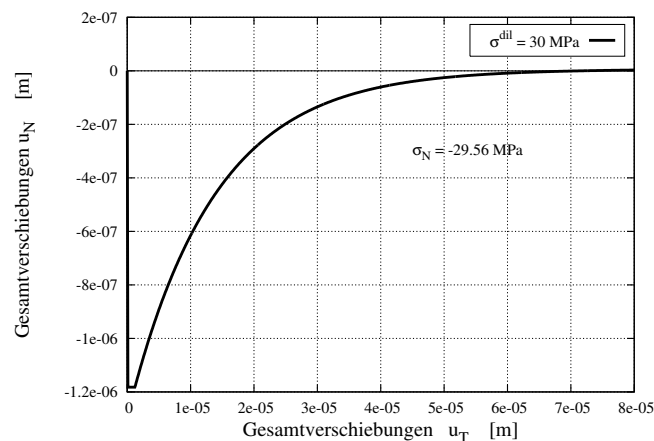


Abbildung 8.7: Druckbeanspruchung auf dem Niveau von σ^{dil} und die damit verbundene Verhinderung der Dilatanz.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Die Motivation für eine softwaretechnische Umsetzung des vorgestellten Materialgesetzes ergab sich aus der zugrundeliegenden speziellen Modellcharakteristik zur Abbildung einer realistischen Rissflächen-Degradation sensitiver Strukturen. Es wurde auf Basis der Closest Point Projection Iteration ein impliziter Algorithmus für ein weggesteuertes Iterationsverfahren entwickelt und an die Gesetzmäßigkeiten des Materialmodells angepasst. Damit wurde die Grundlage zur Generierung einer Schnittstelle für ein bestehendes FE-Softwaresystem gelegt. Für eine Integration wurde das für Forschungszwecke entwickelte und an der Bauhaus-Universität Weimar verfügbare stochastische FE-Softwarepaket SLang herangezogen und die Implementation entsprechend vorgenommen. Die Anwendung im FE-Kontext ist damit auf Basis der bereits in SLang implementierten Kontaktelemente möglich. Für die Verifikation der numerischen (SLang-generierten) Modellresultate standen einerseits numerische Daten andererseits experimentelle Daten für insgesamt drei Testmodelle zur Verfügung. Dabei konnte die Richtigkeit der Testresultate hervorgegangen aus reiner Zugbelastung, aus gekoppelter Schub- und Zugbeanspruchung sowie aus Schubbeanspruchung mit konstanter Druckkraft in Form von Spannungs-/ Verschiebungsbeziehungen belegt werden. Aufbauend darauf konnten zwei bereits als Referenz dienende Anwendungsbeispiele erfolgreich mit zufriedenstellenden Konvergenzresultaten durchgeführt werden. Auf den Aspekt der Ermittlung der Formbeiwerte und auf weitere fundamentale Zusammenhänge diesbezüglich wurde ebenso eingegangen, um eine sinngemäße, praktische Anwendung des Materialgesetzes auf Entfestigungsprobleme in der Strukturmechanik zu ermöglichen.

Literaturverzeichnis

- [1] I. Carol et al.: <http://nw.ialad.uibh.ac.at/WP2>. *Developing Cracks: Benchmarking*.
- [2] J. Galvez/ J. Cervenka/ D. Cendon/ V. Saouma. *A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete*. Cement and Concrete Research 32, 2002.
- [3] M. Hillerborg/ M. Modeer/ P.E. Peterson. *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete Research, 6: 773-782, 1976.
- [4] W. Krätzig and Y. Basar. *Tragwerke 3. Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997.
- [5] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, 1998.
- [6] I. Carol/ P.C. Prat/ C.M. López. *Normal/Shear cracking model: Application to discrete crack analysis*. Journal Of Engineering Mechanics ASCE, 123: 765-773, August, 1997.
- [7] C. Bucher et al. *SLang - the Structural Language, Version 5.0.5, User Documentation*. Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University Weimar, March, 2004.
- [8] T. Most and C. Bucher. *Mixed mode crack simulation using Virtual Crack Extension and a normal/shear cohesive crack model within a meshless discretization*. EUROMECH Colloquium 460 on Numerical Modelling of Concrete Cracking, 21 - 23 February 2005, University of Innsbruck, Austria, 2005.
- [9] M. Hassanzadeh. *Determination of fracture zone properties in mixed mode I and II*. Engineering Fracture Mechanics, 35-4/5: 845-853, 1990.
- [10] B. Winkler. *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*. Ph.D. thesis, University of Innsbruck, Austria.

- [11] A. Carpinteri/ A. Di Tommaso/ M. Fanelli. *Influence of material parameters and geometry on cohesive crack propagation*. in: F. Wittmann (Ed.), *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete - Proc. Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete*, Lausanne, Switzerland, October 1-3, 1985, Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [12] T. Most/ J.F. Unger/ C. Bucher. *Cohesive discrete crack modeling using Virtual Crack Extension technique within the Natural Neighbor Galerkin Method*. Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University Weimar, Marienstr. 15, D-99423 Weimar, Germany, 2004.
- [13] U. Häussler-Combe. *Elementfreie Galerkin-Verfahren: Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten zur Berechnung von Stahlbetontragwerken*. Habilitation, Universität Karlsruhe, 2001.
- [14] M. Jirasek. *Numerical Modeling of Deformation and Failure of Materials*. Lecture Notes, December, 2000.
- [15] H. Werkle. *Finite Elemente in der Baustatik - Statik und Dynamik der Stab- und Flächentragwerke*. Verlag Vieweg, 2. Auflage, 2001.
- [16] H. Schwetlick und H. Kretschmar. *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure - Eine computerorientierte Einführung*. Fachbuchverlag Leipzig, 1. Auflage, 1991.
- [17] D. Louis. *C/C++*. *Professionell programmieren mit aktuellen Standards*. Markt + Technik Verlag München, 2002.

Teil I

Anhang

Spezifikationen in SLang

C-Routinen für das Interface:

- material_law_fcm_carol_2d.c
- material_law_fcm_carol_2d_implicit.c

Verfügbare Elemente zur Anwendung des Materialgesetzes:

- (2-D) Kontaktelement: CONTACT4N

Attribut zur Initialisierung des Materialgesetzes:

- CONTACT FCM CAROL 2D

Abfolge der Übergabeparameter/ Materialparameter:

1. Materialsteifigkeit des Kontaktelements orthogonal zur Rissfuge K_N
2. Zugfestigkeit f_{ct}
3. Mode I Bruchenergie G_f^I
4. tangentielle Materialsteifigkeit des Kontaktelements K_T
5. Reibungsbeiwert $\tan \varphi$
6. Kohäsion c
7. Mode IIa Bruchenergie G_f^{IIa}
8. Dilatanzspannung σ^{dil}
9. Formbeiwert der Zugfestigkeit $\alpha_{f_{ct}}$
10. Formbeiwert der Kohäsion α_c
11. Formbeiwert der Dilatanz in Abhängigkeit der Normalspannung α_σ^{dil}
12. Formbeiwert der Dilatanz in Abhängigkeit der kohäsiven Schädigung α_c^{dil}

Statische Variablen (Geschichtsvariablen):

1. Formänderungsarbeit W^{cr}
2. Rissöffnung u_N^{cr}
3. Rissgleitung u_T^{cr}

Teil II

Anhang

Daten-CD

Inhalt der CD-ROM:

- I. Carol/ P.C. Prat/ C.M. López. Normal/Shear cracking model: Application to discrete crack analysis, Journal Of Engineering Mechanics ASCE, 123: 765-773, August, 1997.
- Daten des Hassanzadeh-Experiments
- PDF-Version dieser Dokumentation
- C-Quellcode des Materialgesetzes für das SLang-Interface
- SLang-Routinen der Verifikation
- SLang-Routinen der Anwendungsbeispiele
- Lauffähige Linux-Version (i586) von SLang 5.0.7 mit dem implementierten Kontakt-Materialgesetz

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Rheinbreitbach, 09.03.2005

Kai Schrader