Konzepte zur numerischen Lösung von Grenzwiderstandsaufgaben unter Berücksichtigung des adaptiven Tragverhaltens von Stahlbetonkonstruktionen

E. Raue, R. Weitzmann
Bauhaus-Universität Weimar

1 Einleitung

Berechnungsmethoden mit Berücksichtigung des physikalisch nichtlinearen Verhaltens von Stahlbetonkonstruktionen werden mit Einführung der europäischen und nationalen Normung verstärkten Einsatz in der Tragwerksplanung finden. Hierbei sind im Gegensatz zu linearen Berechnungen zeitliche Aspekte der Tragwerksbeanspruchung zu berücksichtigen. Ein Lösungsansatz zur Beherrschung von Lastfolgeeffekten kann auf der Grundlage der Theorie des adaptiven Tragwerkes abgeleitet werden. Wie die nachfolgenden Erläuterungen zeigen, lassen sich derartige Probleme unter Verwendung von Algorithmen der mathematischen Optimierung lösen. Von besonderem Interesse sind dabei spezielle Formulierungen zur Bestimmung von Grenzwiderständen, die zur Bemessung von Stahlbetontragwerken herangezogen werden können.

Im Beitrag werden zwei Konzepte zur numerischen Bestimmung von adaptiven Grenzwiderständen auf der Basis der nichtlinearen Optimierung vorgestellt, diese sind:

- Konzept des superponierten Restzustandes (Konzeption 1)
- Konzept der gekoppelten plastischen Antwort (Konzeption 2).

Es wird von einem elastisch-plastischen Verhalten der untersuchten Struktur ausgegangen.

2 Extremalprinzipen zur Bestimmung von Grenzzuständen mit Sicherung der Tragwerksadaption

2.1 Der adaptive Grenzzustand

Klassische Grenzzustandsbetrachtungen gehen von der Voraussetzung proportionaler einsinniger Belastungssteigerung aus. Im Normalfall wird aber eine Veränderung der Belastung über die Zeit zu verzeichnen sein. Unter diesem Aspekt ist eine uneingeschränkte Anwendung dieser Modelle für die Behandlung von Lastfolgeproblemen kritisch zu beleuchten. Folgende akkumulative Schädigungsmechanismen sind möglich:

- *Alternierende Plastizierung*: Im Laufe der Belastungsgeschichte werden ein oder mehrere Querschnitte plastischen Formänderungen in entgegengesetzten Richtungen unterworfen. Dies führt, verglichen mit Ermüdungsproblemen (high cycle fatigue), schon nach wenigen Zyklen zur Verminderung der Querschnittskapazität oder zum Bruch (low cycle fatigue).

- *Progressive Plastizierung*: Im Laufe der Belastungsgeschichte werden in einem oder mehreren Querschnitten kontinuierlich plastische Formänderungen in derselben Richtung auftreten, die sich aufsummieren und zum Versagen des Querschnittes führen.

Diese Formen der Schadensakkumulation können nicht auftreten, wenn sich bei gegebener Belastungs- und Widerstandsverteilung nach einer endlichen Zahl von Lastwiederholungen ein stabiler Restverformungs- bzw. Restspannungszustand ausbildet und alle weiteren

Lastwechsel lediglich elastische Formänderungen erzeugen. Der zugehörige Grenzzustand wird als Einspiel-, shake down- oder Adaptionsgrenzzustand bezeichnet.

Die Aufgaben zur Bestimmung des adaptiven Grenzzustandes können sowohl als Grenzlast- als auch Grenzwiderstandsaufgabe formuliert werden. Aus der Sicht der Tragwerksplanung sind vor allem Methoden zur Bestimmung des Grenzwiderstandes von Interesse, da diese zur Lösung von Bemessungsaufgaben herangezogen werden können. Der adaptive Grenzwiderstand beschreibt einen solchen Tragwerkszustand, bei dem nach dem Einspielen keine Dissipationsleistung mehr erbracht wird. Der Beitrag befaßt sich mit dieser Form der Grenzzustandsbeschreibung, wobei der Widerstand durch eine geeignete Größe des verwendeten mechanischen Modells z.B. bei Stabtragwerken durch das Fließmoment s(x) zu untersetzen ist. Es gilt:

$$s(x) = r\, s_0(x). \tag{1}$$

Bei einem einparametrischen Problem wird die Ausgangsverteilung s_0 als bekannt vorausgesetzt und lediglich der Widerstandsfaktor r variiert. Im folgenden werden zwei Modelle zur Bestimmung des einparametrischen adaptiven Grenzwiderstandes vorgestellt, wobei diese in kinematischer Formulierung angegeben werden.

2.2 Das Konzept des superponierten Restzustandes (Konzeption 1)

Ein linear elastisch-plastischer Körper wird durch eine unendliche Folge willkürlich wiederkehrender Lastfelder **f** eines gegebenen Lastprogramms unterhalb der adaptiven Grenzlast beansprucht. Das Konzept des superponierten Restzustandes beruht auf der Annahme, daß für diesen Körper die Gesamtantwort im Einspielzustand als Linearkombination aus einem linear elastischen Anteil (Index e) und einem Restanteil (Index r) für die Spannungen σ, Dehnungen ε und Verformungen **u** aufgefaßt werden kann:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_r \tag{2a}$$
$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_r \tag{2b}$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r\,. \tag{2c}$$

Abb. 1 Zur vektoriellen Zerlegung der Tragwerksantwort

In Abb. 1 wird diese vektorielle Verknüpfung exemplarisch dargestellt. Die Restanteile verbleiben nach völliger Entlastung im Tragwerk und bilden eine neue Ausgangskonfiguration für den nächsten Lastschritt. Die Restfelder selbst setzen sich aus elastischen und plastischen Anteilen zusammen, die bis zum Erreichen des Einspielzustandes kumulativ aufgebaut werden.

Unter der Voraussetzung, daß die Restfelder keinen Einfluß auf die elastischen Teilantworten ausüben, sind die Restfelder nur von den umhüllenden Antworten des elastischen Teilsystems abhängig. Die Berechnung kann somit entkoppelt in drei Teilschritten ausgeführt werden:

Schritt 1 Berechnung der elastischen Umhüllungsantwort
Schritt 2 Berechnung des Restzustandes
Schritt 3 Superposition von elastischen Anteilen und Restanteilen der Tragwerksantwort

Alle zeitabhängigen Aspekte werden im ersten Teilschritt berücksichtigt. Unter geometrisch linearen Verhältnissen kann die Umhüllende durch Anwendung der Superpositionsregeln bestimmt werden. Die Zugehörigkeit einer Antwort zum Vektor der umhüllenden elastischen Spannungsreaktion σ_e kann bezüglich der Fließfunktionen Φ bei Kenntnis des Restspannungszustandes σ_r eingeschätzt werden. Für die Analyse deformationsbasierter Grenzzustände [1] nach dem Konzept des superponierten Restzustandes müssen ebenfalls die zu den Deformationsbedingungen zugehörigen elastischen Verformungs- und Deformationsumhüllenden $\mathbf{u}_e$ und ε_e bestimmt werden. Die Ermittlung erfolgt analog zur elastischen Spannungsumhüllenden. Prinzipiell bestehen keine methodischen Unterschiede bei der Ermittlung der Umhüllungsvektoren für statisch oder dynamisch beanspruchte Körper. Im statischen Fall werden die Extremwerte aus den Antworten aller Lastkombinationen herausgefiltert, wohingegen im dynamischen Fall die Werte des gesamten Untersuchungszeitraums betrachtet werden.

Bei der Berechnung des Restzustandes muß folgendes Komplemetaritätsproblem (Kuhn-Tucker-Problem) zugrundegelegt werden:

Gleichgewichtsbedingung	$\mathbf{A}^T \sigma_r = \mathbf{0}$	$\in V$	(3a)
Verträglichkeitsbedingung	$\mathbf{A}\,\mathbf{u}_r - \varepsilon_r = \mathbf{0}$	$\in V$	(3b)
Materialgesetz	$\mathbf{D}^{-1}\sigma_r + \boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right) - \varepsilon_r = \mathbf{0}$	$\in V$	(3c)
	$\lambda \geq \mathbf{0}$	$\in V$	(3d)
	$\lambda^T\Phi(\sigma_e + \sigma_r, r\mathbf{s}_0\lambda) = 0$	$\in V$	(3e)
Statische Randbedingungen	$\mathbf{A}_S^T\boldsymbol{\sigma}_r - \mathbf{g}_s = \mathbf{0}$	$\in S_f$	(3f)
Geometrische Randbedingungen	$\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_s = \mathbf{0}$	$\in S_u$	(3g)

Die Belastungsintensität liegt im Bereich der Adaption des Tragwerkes, falls sich ein Restzustand angeben läßt, von dem aus die Laständerungen nur elastische Zusatzformänderungen erzeugen und die Fließbedingungen

$$\Phi(\sigma_e + \sigma_r, r\mathbf{s}_0\lambda) \leq 0 \qquad \in V \qquad (3h)$$

nicht verletzen. Unter diesen Bedingungen ergeben sich endliche Verformungsgrößen, die bei Anwendung von deformationsbasierten Grenzzustandskonzepten mit Hilfe von Deformationskriterien bewertet werden können

$$\varepsilon_e + \varepsilon_r - \varepsilon_0 \leq 0 \qquad \in V \qquad (3i)$$
$$\mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_0 \leq 0 \qquad \in V. \qquad (3j)$$

Der Grenzzustand kann durch Formulierung der Extremalbedingung

$$r \rightarrow \text{Min} \qquad (4)$$

und unter Beachtung von Gl. (3a-j) direkt ermittelt werden.
Die separate Untersuchung des Restzustandes entspricht der traditionellen Strategie zur Lösung adaptiver Grenzzustandsaufgaben. Die vorgeschaltete Untersuchung der elastischen Teilantwort ermöglicht eine erhebliche Straffung des numerischen Aufwandes bei Lastfolgeuntersuchungen. Vorteilhafte Anwendung findet das Konzept neben der Lösung

statischer Aufgaben ebenfalls bei der Lösung von Problemstellungen aus dem Erdbebeningenieurwesen [2].

2.3 Das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort (Konzeption 2)

Im Gegensatz zum Konzept des superponierten Restzustandes werden die elastischen und plastischen Teilantworten des Systems gemeinsam in einem Berechnungsschritt bestimmt. Grundlage des Konzeptes ist die Annahme, daß im Einspielzustand allen möglichen Antworten des Systems nur *ein* plastischer Deformationszustand ε_p zugrundeliegt. Dieser Zustand bildet sich infolge wechselnder Einwirkung von k Lastkombinationen **f** bis zum Erreichen des Adaptionszustandes aus. Der Gesamtzustand muß folgenden Bedingungen genügen, wobei der hochgestellte Index die Zugehörigkeit zur Lastkombination j (j=1,...,k) bezeichnet:

Gleichgewichtsbedingung	$\mathbf{A}^T\boldsymbol{\sigma}^{(j)} - \mathbf{f}^{(j)} = \mathbf{0}$	$\in V$	(5a)
Verträglichkeitsbedingung	$\mathbf{A}\mathbf{u}^{(j)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = \mathbf{0}$	$\in V$	(5b)
Materialgesetz	$\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = \mathbf{0}$; $\boldsymbol{\lambda}^{(j)} \geq \mathbf{0}$	$\in V$	(5c)
	$\boldsymbol{\lambda}^{(j)T}\Phi(\boldsymbol{\sigma}^{(j)}, r\mathbf{s}_0) = \mathbf{0}$	$\in V$	(5d)
Statische Randbedingungen	$\mathbf{A}_S^T\boldsymbol{\sigma}^{(j)} - \mathbf{g}_S = \mathbf{0}$	$\in S_f$	(5e)
Geometrische Randbedingungen	$\mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}_S = \mathbf{0}$	$\in S_u$	(5f)

Das System spielt ein, falls keine Verletzungen der Fließbedingungen

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}^{(j)}, r\mathbf{s}_0) \leq \mathbf{0} \qquad \in V \qquad (5g)$$

vorliegen. Deformationsbedingungen können nach Gl. (3i-j) zusätzlich formuliert werden. Analog zur Vorgehensweise nach Abschnitt 2.2 wird zur Lösung der Grenzwiderstandsaufgabe der Widerstandsfaktor r einem Minimum zugeführt.

Unter gleichen Voraussetzungen liefern das Konzept des superponierten Restzustandes und das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort übereinstimmende Ergebnisse bei der Berechnung des adaptiven Grenzzustandes. Die bevorzugten Anwendungsgebiete des Konzepts der gekoppelten plastischen Antwort erschließen sich aus der Möglichkeit zur Untersuchung aller Anteile der Tragwerksantwort in einem einzigen Analyseschritt. So ist es möglich, den Einfluß von plastischen Formänderungen auf andere Material- oder Systemeigenschaften direkt zu erfassen. Diese Eigenschaft ist vor allem bei der Lösung von Aufgaben aus der Tragwerksplanung von Nutzen, da bei einer Widerstandsänderung in der Regel auch Veränderungen anderer Tragwerksparameter wie z.B. der Steifigkeit und Duktilität während der Analyse zu erfassen sind.

Für dynamische Untersuchungen führt die Anwendung des Konzeptes der gekoppelten plastischen Antwort zu einer äußerst komplexen Aufgabenstruktur. Demgegenüber sind Verfahren, die das Grenzzustandsmodell nach dem Konzept des superponierten Restzustandes mit externen Iterationen kombinieren, in der numerischen Behandlung effektiver. Das Konzept der gekoppelten plastischen Antwort wird deshalb vorzugsweise in Verbindung mit statischen Untersuchungen angewandt.

3 Numerische Berechnung adaptiver Grenzzustände mit Methoden der nichtlinearen Optimierung

Die im Abschnitt 2 angegebenen Extremalprinzipe müssen für eine numerische Behandlung in diskrete Beziehungen überführt werden. Hierzu bieten sich die etablierten Verfahren der Finite-Elemente-Methode an. Nach Diskretisierung liegen die Aufgaben als nichtlineare Optimierungsprobleme vor und können in dieser Form direkt gelöst werden. In Tafel 1 und 2 sind für die zwei vorgestellten Konzepte die Optimierungsschemata angegeben.

Tafel 1 Berechnung des adaptiven Grenzwiderstandes nach dem Konzept des superponierten Restzustandes

		u_r	λ	r	1		
Zielfunktion ZF				1		$\rightarrow$	Min
Gleichgewichtsbed. GGB		A^TQA	$- A^TQ\,A_p$			=	0
Plastizitätsbedingung PLB		A_p^TQA	$- A_p^TQA_p$	$- s_0$	s_e	$\leq$	0
Komplementaritätsbed. KB	λ^T (	A_p^TQA	$- A_p^TQA_p$	$- s_0$	s_e	) =	0
Nichtnegativitätsbed. NNB			-1			$\leq$	0

u_r = Vektor Restverform.

Q = inv. Flexibilitätsmatrix

λ = Vektor Fließparameter

A_p = Koeff. lineare Fließbedingungen

s_e = Vektor der elast. Umhüllenden

A = mech. Transformationen

Tafel 2 Berechnung des adaptiven Grenzwiderstandes nach dem Konzept der gekoppelten plastischen Antwort

		$u^{(1)}$	...	$u^{(k)}$	$\lambda^{(1)}$	...	$\lambda^{(k)}$	r	1		
ZF								1		$\rightarrow$	Min
GGB		A^TQA			$- A^TQ\,A_p$				$f_0^{(1)}$	=	0
			$\ddots$			$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
				A^TQA			$- A^TQ\,A_p$		$f_0^{(k)}$	=	0
PLB		A_p^TQA			$-A_p^TQA_p$	...	$-A_p^TQA_p$	$- s_0$		$\leq$	0
			$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
				A_p^TQA	$-A_p^TQA_p$	...	$-A_p^TQA_p$	$- s_0$		$\leq$	0
KB	$\lambda^{T(1)}$ (	A_p^TQA			$-A_p^TQA_p$	...	$-A_p^TQA_p$	$- s_0$		) =	0
	$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$\lambda^{T(k)}$ (			A_p^TQA	$-A_p^TQA_p$	...	$-A_p^TQA_p$	$- s_0$		) =	0
NNB							-1			$\leq$	0

In Tafel 2 kann die Abhängigkeit der Steifigkeit **EI** vom Fließmoment (als Funktion von **u** und λ) z.B. mit Hilfe folgender linearer Zusatzbedingung:

$$\mathbf{EI} = \mathbf{A}_{EI} \, (\mathbf{QAu} - \mathbf{Q} \, \mathbf{A}_p\lambda) - \mathbf{EI}_0 \qquad (6)$$

und durch Hinzufügen eines neuen Variablensatzes für die Steifigkeit **EI** erfaßt werden. $\mathbf{A}_{EI}$ und $\mathbf{EI}_0$ enthalten die Koeffizienten bzw. die konstanten Glieder der Zusatzbedingung, die vor Beginn der Berechnung durch eine Querschnittsanalyse zu bestimmen sind.

4 Beispiel

Für den in Abb. 2 dargestellten Rahmen werden die Restmomentenzustände im adaptiven Grenzzustand nach den beiden vorgestellten Konzepten berechnet. In den Ergebnissen können deutliche Unterschiede festgestellt werden, die darauf zurückzuführen sind, daß die Steifigkeiten je nach verwendeter Berechnungskonzeption im Tragwerk unabhängig (Konzeption 1) bzw. abhängig (Konzeption 2) von der Widerstandsverteilung im Berechnungsmodell formuliert sind.

Abb. Beispiel

5 Literatur

[1] Raue.E.; Weitzmann, R.: Bemessungsmodell für Stahlbetontragwerke unter Berücksichtigung von Deformationsbeschränkungen, 37. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschuß für Stahlbeton, Weimar 1999

[2] Raue, E.; Weitzmann, R.; Marx, S.: Earthquake resistant design of reinforced concrete frames; Eurodyn ’99, Balkema, Prag, 7.-10. Juni 1999