

# FEM-Detailuntersuchungen an Tragwerken unter Einsatz von pNh-Übergangselementen

Harald Berger, Kerstin Graeff-Weinberg

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Mechanik

## Zusammenfassung

Detailuntersuchungen an Tragwerken führen bei FE-Berechnungen immer wieder auf das Problem einer geeigneten Netzgestaltung. Während in weiten Bereichen ein grobes Netz ausreicht, muß an kritischen Stellen ein sehr feines Netz gewählt werden, um gerade dort hinreichend genaue Ergebnisse zu erhalten.

Mit Hilfe der im Beitrag vorgestellten pNh-Übergangselemente gelingt es, hochgradige Netzverfeinerungen mit wenig Elementen in kompatibler Weise zu realisieren, so daß auch bei komplexen Modellen in ausgewählten Details Aussagen über das Beanspruchungsverhalten mit hoher Genauigkeit gewonnen werden können. Die darüberhinaus beschriebene spezielle Strategie zur Netzgenerierung gewährleistet den effektiven Einsatz dieser Elemente. Anhand eines Beispiels aus dem Bauwesen werden die Vorteile der vorgestellten Methode verdeutlicht.

## 1 Einleitung

Um insbesondere bei sehr komplexen FE-Analysen eine hohe Effizienz zu erzielen, ist es notwendig, das Finite-Elemente-Netz gezielt auf das zu lösende Problem auszurichten. Das bedeutet, daß die Feinheit des Elementnetzes dem zu erwartenden Lösungsverlauf möglichst optimal angepaßt werden muß.

Will man darüber hinaus auch in bestimmten Details hinreichend genaue Ergebnisse erhalten, so ist hier ohnehin ein sehr feines Netz gegenüber dem übrigen Gebiet erforderlich.

Bei der Realisierung solcher Vernetzungen ergibt sich das Problem der Gestaltung des Übergangs vom groben zum feinen Netz. Im folgenden wird zunächst auf mögliche Netzverfeinerungstechniken hingewiesen und anschließend gezeigt, wie mit Hilfe spezieller kompatibler Übergangselemente neue Möglichkeiten für extreme Netzverdichtungen geschaffen werden können.

## 2 Netzverfeinerungsmöglichkeiten

Netzverfeinerungen lassen sich prinzipiell über drei Wege realisieren:

### 1) *inkompatible Elementkopplung mittels Zwangsbedingungen*

Im Übergangsbereich zwischen großen und kleinen Elementen erfolgt die Vernetzung so, daß nur ausgewählte Knoten zusammentreffen. Die dann nicht mehr vorhandene Kompatibilität der Elemente an der Übergangsstelle wird durch zusätzliche Zwangsbedingungen für die zu approximierende Feldfunktion (Verschiebung bei Festigkeitsanalysen) realisiert. Bei diesem unter dem Begriff Penalty-Methode bekannten Verfahren wird das elastische Gesamtpotential um einen Zusatzterm erweitert, der die Konformität der Lösung im Übergangsbereich im integralen Mittel erzwingt [2]. Die Wahl der im Zusatzterm enthaltenen Penalty-Zahl kann dabei das Lösungsverhalten wesentlich beeinflussen.

Durch die verletzten Stetigkeitsbedingungen an den Elementrändern können im Übergangsbereich erhebliche Genauigkeitsverluste auftreten. Da aber die interessierenden Gebiete gerade in der Nähe der Übergangsbereiche liegen, ist dieses Verfahren zur Realisierung von lokalen Netzverdichtungen wenig geeignet [10].

## 2) *kompatible Elementkopplung durch spezielle Vernetzungstechniken*

Durch geeignete Anordnung und Gestaltung der Elemente wird bei Wahrung der Kompatibilität (zu jeder Elementseite bzw. -fläche gehört eine konforme Gegenseite bzw. -fläche) eine lokale Netzverdichtung erreicht. Bild 1 zeigt in a) bis c) drei Möglichkeiten einer derartigen Netzverfeinerung. Jede Form ist mit gewissen Nachteilen verbunden, die besonders bei dreidimensionalen Vernetzungen zum Tragen kommen. Die in Variante a) vorgenommene zielgerichtete Verringerung der Elementgröße führt zu einer schnell steigenden Anzahl von Freiheitsgraden und zur Entstehung von Elementen mit ungünstigen Seitenverhältnissen. In Variante b) wird durch verzerrte Viereckelemente eine Netzverdichtung realisiert und in c) werden zusätzlich Dreieckelemente eingesetzt.

Diese Formen der Netzverfeinerungen führen bei räumlichen Vernetzungen auf der Basis von Hexaederelementen zu erheblichen Schwierigkeiten [9]. Es entstehen häufig unzulässig stark verzerrte Elemente, bzw. es ist der Einsatz degenerierter Hexaederelemente erforderlich, die Seiten mit Viereck- und Dreieckflächen aufweisen. In jedem Fall ergeben sich Schwierigkeiten, derartige Netzverfeinerungen mit automatischen Vernetzungsprozessoren umzusetzen.

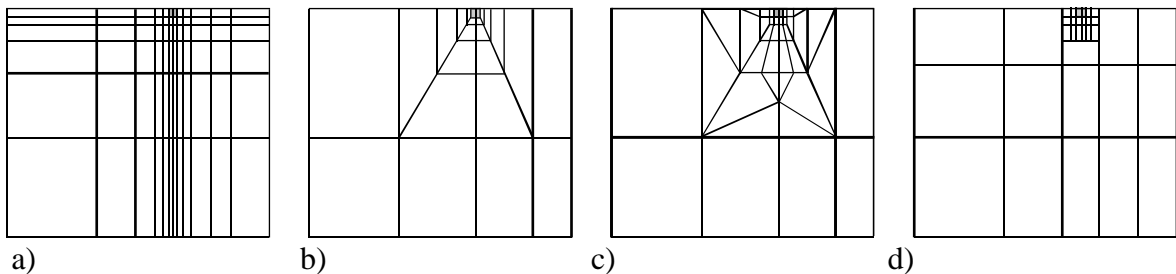


Bild 1: Netzverfeinerungen mit Standardelementen (a -c) und pNh-Elementen (d)

## 3) *kompatible Elementkopplung mit Übergangselementen*

Eine geeignete Alternative zur Realisierung von Netzverdichtungen stellt der Einsatz kompatibler Übergangselemente dar. So wurden z.B. von Scholz [10] Elemente entwickelt, die eine kompatible Kopplung von 2 Viereckelementen an ein Viereckelement und 2 oder 4 Hexaederelemente an ein Hexaederelement bei jeweils mittiger Teilung ermöglichen. Die Ansatzfunktionen werden dabei an den Koppelrändern stückweise definiert und gewährleisten somit eine volle Kompatibilität mit den angrenzenden Standardelementen.

Noch wesentlich weiterführende zwei- und dreidimensionale Übergangselemente wurden von Gabbert und Graeff-Weinberg entwickelt [5], [7]. Diese weisen folgende Eigenschaften auf:

- An der Koppelseite bzw. -fläche können beliebig viele Standardelemente angeschlossen werden (siehe Bild 2).
- Die Teilung an der Koppelseite bzw. -fläche braucht nicht äquidistant sein.
- Sowohl an der Koppelseite bzw. -fläche als auch an den übrigen Seiten bzw. Flächen können Ansatzfunktionen mit unterschiedlichen Polynomgraden realisiert werden.

Diese sogenannten pNh-Elemente eignen sich hervorragend zur Realisierung lokaler Netzverdichtungen, da sie bei hoher Lösungsgenauigkeit zu einem Minimum an Freiheitsgraden führen.

Bild 1d zeigt eine hochgradige Netzverfeinerung mit pNh-Übergangselementen.

## 3 Formulierung der pNh-Elemente

Herkömmliche p-Elemente erweitern den linearen Ansatzraum eines finiten Elementes durch zusätzliche Polynome höherer Ordnung. Dafür können beispielsweise die üblichen Ansatzfunktionen der Lagrange- oder Serendipity-Klasse verwendet werden. Aus numerischen Gründen ist jedoch bei höheren Polynomordnungen ( $p \geq 4$ ) der Einsatz hierarchischer Funktionen, wie beispielsweise den normierten Integralen der Legendre-Polynome, vorteilhafter. Sie erlauben die Addition zusätzlicher Unbekannter ohne Veränderung des ursprünglichen FE-Ansatzraumes.

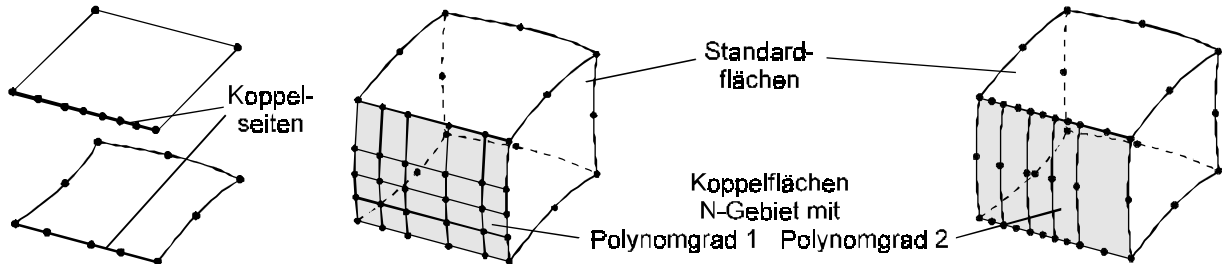


Bild 2: pNh-Elemente

pNh-Elemente unterscheiden sich von den p-Elementen dadurch, daß auf einer oder mehreren Elementseiten Zwischenknoten eingeführt werden, die N h-Formfunktionen aufspannen (Bild 2). Diese Technik führt auf bereichsweise definierte Formfunktionen niederer Ordnung. Anzahl und Länge der h-Abschnitte sind variabel. Hier werden pNh-Elemente mit stückweise linearen und stückweise quadratischen h-Formfunktionen betrachtet.

Die Herleitung der pNh-Ansatzfunktionen erfolgt mit der Methode der gemischten Interpolation [1],[4]. Mit dieser Interpolationstechnik ist es möglich, eine in ihrem Definitionsbereich stetige Funktion mehrerer Variablen zu konstruieren, deren Verlauf auf den Rändern des Definitionsbereiches vorgeschrieben ist. Eine ausführliche Darstellung dieser Interpolationstechnik findet man bei Röhr [8]. Hier sollen exemplarisch die Ansatzfunktionen für ein ebenes, isoparametrisches pNh-Viereckelement, das durch die lokalen Koordinaten  $\xi_1$  und  $\xi_2$  ( $\xi_i \in [-1, 1]$ ) beschrieben wird, hergeleitet werden. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei dazu angenommen, daß sich die zusätzlichen Zwischenknoten auf der Elementseite  $\xi_2 = -1$  befinden. Die Elementseite ist dadurch in N Randabschnitte unterteilt. Der k-te Randabschnitt beginnt an der Stelle  $\xi_{1k}$  der natürlichen  $\xi_1$ -Koordinate und endet bei  $\xi_{1k+1}$ , dem Beginn des nächsten Abschnittes,  $k = 1 \dots N$ . Mittenknoten innerhalb des k-ten Randabschnittes befinden sich bei  $\xi_{1k+\frac{1}{2}}$ . Weiterhin wird  $-\xi_{10} = \xi_{1N+2} = 1 + |\epsilon|$  definiert, mit  $\epsilon \rightarrow 0$ . Die Knoten der Nh-Seite werden fortlaufend nummeriert. Bei stückweise quadratischen Abschnitten haben folglich die Eckknoten ungerade, die Mittenknoten gerade Knotennummern.

Für den einfachen Fall eines geradlinig berandeten Elementes gilt mit den linearen Interpolationsfunktionen  $I^L$

$$\begin{aligned} I_1^L(\xi_i) &= \frac{1}{2}(\xi_i - 1) \\ I_2^L(\xi_i) &= \frac{1}{2}(\xi_i + 1) \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1)$$

beispielsweise für die Elementseite bei  $\xi_2 = 1$  der Verschiebungsansatz

$$\bar{\mathbf{u}}(1, \xi_2) = I_1^L(\xi_2) \bar{\mathbf{u}}(1, -1) + I_2^L(\xi_2) \bar{\mathbf{u}}(1, 1) \quad (2)$$

Zur Beschreibung des Randverschiebungsansatzes auf der Seite  $\xi_2 = -1$  wird zunächst die natürliche  $\xi_1$ -Koordinate des Elementes durch eine abschnittsweise definierte Randkoordinate  $\xi_1$  ausgedrückt. Man gelangt für den k-ten Randabschnitt zu der Koordinatentransformation

$$\xi_1 = \frac{\xi_{1k} - 2\xi_1 - \xi_{1k+1}}{\xi_{1k} - \xi_{1k+1}} \quad \xi_1 \in [\xi_{1k}, \xi_{1k+1}] \quad \xi_1 \in [-1, 1] \quad (3)$$

Mit den Interpolationsfunktionen (1) können nun die Randverschiebungsfunktionen abschnittsweise beschrieben werden. Für den  $k$ -ten linearen Abschnitt gilt

$${}^k \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1) = I_1^L(\xi_1) \bar{\mathbf{u}}(\xi_{1k}, -1) + I_2^L(\xi_1) \bar{\mathbf{u}}(\xi_{1k+1}, 1) \quad \xi_1 \in [\xi_{1k}, \xi_{1k+1}] \quad (4)$$

Verallgemeinert man die intervallbezogene Formulierung (4) so, daß sie auf der gesamten Elementseite definiert ist, dann erhält man den Randverschiebungsansatz

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1) = \sum_{k=1}^{N+1} \Phi_k(\xi_1) \bar{\mathbf{u}}(\xi_{1k}, -1) \quad (5)$$

Die Formfunktionen  $\Phi_k$  sind in  $\xi_1 \in [-1, 1]$  stetig und besitzen die Eigenschaften

$$\Phi_k(\xi_1) = \begin{cases} \neq 0 & : \quad \xi_{1k-1} < \xi_1 < \xi_{1k+1} \\ 1 & : \quad \xi_1 = \xi_{1k} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

Für eine stückweise lineare Approximation hat  $\Phi_k$  die Form

$$\Phi_k = \frac{1}{2h_k} \varphi_k(\xi_1) \quad (7)$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_k(\xi_1) &= \eta + |\xi_1 - \xi_{1k-1}| - 2|\xi_1 - \xi_{1k}| + |\xi_1 - \xi_{1k+1}| \\ \eta_k &= (\xi_{1k-1} - 2\xi_{1k} + \xi_{1k+1}) \text{sign}(\xi_1 - \xi_{1k}) \\ h_k &= \frac{1}{2}(\eta_k - \xi_{1k-1} + \xi_{1k+1}) \quad k = 1 \dots N \end{aligned}$$

Die Randverschiebungsfunktionen lassen sich nun mit den linearen Interpolationsfunktionen (1) in das Gebietsinnere projizieren. Man erhält so eine Projektion in  $\xi_1$ -Richtung

$$P_{\xi_1}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_1) \tilde{\mathbf{u}}(-1, \xi_2) + I_2^L(\xi_1) \tilde{\mathbf{u}}(1, \xi_2) \quad (8)$$

und analog dazu in  $\xi_2$ -Richtung

$$P_{\xi_2}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_2) \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1) + I_2^L(\xi_2) \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, 1) \quad (9)$$

Die Interpolationsoperatoren  $P_{\xi_1}$  und  $P_{\xi_2}$  stehen orthogonal aufeinander und sind durch die Randverläufe eindeutig bestimmt. Überlagert man beide Projektionen, ergibt sich nur dann eine eindeutige Interpolationsfunktion mit exakter Darstellung der vorgegebenen Randfunktionen, wenn die durch die Interpolationsoperatoren zusätzlich aufgebrauchten Randterme wieder von der Gesamtfunktion abgezogen werden. Für den gemischten Interpolationsoperator erhält man so

$$P[\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2)] = P_{\xi_1} + P_{\xi_2} - P_{\xi_1} P_{\xi_2} \quad (10)$$

Die resultierende Funktion  $P[\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2)]$  ist im Elementgebiet stetig und entspricht für  $\xi_i = \pm 1$  den vorgegebenen Randfunktionen. Damit lautet die vollständige Interpolationsfunktion für den Verschiebungszustand des bilinearen pNh-Elementes

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_2)[(1 - \xi_1) \bar{\mathbf{u}}(1, -1) + (1 + \xi_1) \bar{\mathbf{u}}(1, 1)] + \frac{1}{2}(1 - \xi_2) \sum_{k=1}^{N+1} \Phi_k(\xi_1) \bar{\mathbf{u}}(\xi_{1k}, -1) \quad (11)$$

Durch Einsetzen der Verschiebungseinheitszustände isoliert man die Ansatzfunktionen für die einzelnen Knoten.

Für eine stückweise quadratische Interpolation der Elementseite  $\xi_2 = -1$  ist mit (3) wieder abschnittsweise zu approximieren. Der pNh-Rand hat dann einen Mittenknoten innerhalb jedes Randabschnittes. Aus  $N$  Randabschnitten resultieren  $2N+1$  Knoten auf der Nh-Seite. Mit den quadratischen Formfunktionen

$$\begin{aligned} I_1^Q(\xi_i) &= \frac{1}{2} \xi_i (\xi_i - 1) \\ I_2^Q(\xi_i) &= 1 - \xi_i^2 \\ I_3^Q(\xi_i) &= \frac{1}{2} \xi_i (\xi_i + 1) \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (12)$$

nimmt die Randinterpolation (4) dann die Form

$${}^k \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1) = I_1^O(\xi_1) \bar{\mathbf{u}}(\xi_{1k}, -1) + I_2^O(\xi_1) \bar{\mathbf{u}}(\xi_{1k+\frac{1}{2}}, -1) + I_3^O(\xi_1) \bar{\mathbf{u}}(\xi_{1k+1}, -1) \quad \xi_1 \in [\xi_{1k}, \xi_{1k+1}] \quad (13)$$

an. Die Formfunktionen für eine stückweise quadratische Approximation verändern sich gegenüber (7) für die Eckknoten zu

$$\Phi_{2k-1}(\xi_1) = \frac{1}{h_k} \left( \frac{1}{2} h_k \text{sign}(\xi_1 - \xi_{1k}) - \xi_1 + \xi_{1k} \right) \varphi_k(\xi_1) \quad (14)$$

und für die Mittenknoten zu

$$\Phi_{2k}(\xi_1) = \frac{2}{h_k} (\xi_1 - \xi_{1k}) \varphi_k(\xi_1) \quad (15)$$

Die Eigenschaften (6) der Formfunktionen bleiben erhalten. Aus diesen Ansatzfunktionen werden mit (8, 9) und (10) wieder die Verschiebungsinterpolation des Elementes und die Ansatzfunktionen aller Eck- und Zwischenknoten bestimmt.

Zu pNh-Elementen höherer Polynomordnung gelangt man, indem die Randterme  $\tilde{\mathbf{u}}(\pm 1, \xi_2)$  und  $\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \pm 1)$  durch höherwertige Randverschiebungsansätze ersetzt werden. Mit (8) bis (10) kann wieder die Interpolationsfunktion für den Verschiebungszustand abgeleitet werden.

Prinzipiell erfolgt die Konstruktion dreidimensionaler pNh-Elemente genauso. Die Randverläufe beschreiben dann Flächen, die durch die Interpolationsoperatoren ins Elementinnere projiziert werden. Die möglichen Elementkonfigurationen sind entsprechend vielfältiger. Bei aneinandergrenzenden Flächen ist die Anzahl der Knoten aufeinander abzustimmen. Ein pNh-Hexaederelement habe beispielweise  $N_1 \cdot N_2$  bereichsweise Ansätze bei  $\xi_3 = -1$ . Bei linearen h-Abschnitten folgen daraus  $N_1+1$  Knoten entlang den Seitenkanten bei  $\xi_2 = \pm 1$  und  $N_2+1$  Knoten entlang den Seitenkanten bei  $\xi_1 = \pm 1$ . Innerhalb der Elementfläche liegen  $(N_1-1)(N_2-1)$  Knoten. Bei quadratischen h-Abschnitten mit Kompatibilität zu Serendipity-Elementen beträgt die Anzahl der Knoten entlang  $\xi_2 = \pm 1$  dann  $2N_1+1$  und entlang  $\xi_1 = \pm 1$  entsprechend  $2N_2+1$ . In der pNh-Fläche liegen hier  $(2N_1-1)(2N_2-1)$  Knoten. Die Seitenverschiebungsfunktionen werden wieder in das Gebietsinnere projiziert.

$$P_{\xi_1}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_1) \tilde{\mathbf{u}}(-1, \xi_2, \xi_3) + I_2^L(\xi_1) \tilde{\mathbf{u}}(1, \xi_2, \xi_3) \quad (16)$$

$$P_{\xi_2}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_2) \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1, \xi_3) + I_2^L(\xi_2) \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, 1, \xi_3) \quad (17)$$

$$P_{\xi_3}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_3) \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2, -1) + I_2^L(\xi_3) \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2, 1) \quad (18)$$

Die vollständige Interpolationsfunktion für den Verschiebungszustand erhält man dann mit dem gemischten Interpolationsoperator [8]

$$P[\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] = P_{\xi_1} + P_{\xi_2} + P_{\xi_3} - P_{\xi_1} P_{\xi_2} - P_{\xi_2} P_{\xi_3} - P_{\xi_1} P_{\xi_3} + P_{\xi_1} P_{\xi_2} P_{\xi_3} \quad (19)$$

Die hier vorgestellten pNh-Elemente sind Viereck- bzw. Quaderelemente. Analog lassen sich weitere pNh-Elemente mit beliebiger Knotenkonfiguration herleiten. Um die Geometrie der pNh-Elemente isoparametrisch zu approximieren, sind die Knotenverschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$  in (2) und (4) bzw. (13) durch die Knotenkoordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$  zu ersetzen. Die Gleichungen beschreiben dann die Randkonturen des Elementes. Die stückweise linearen Ansätze können so polygonartige, die quadratischen Ansätze stückweise parabolische Kanten exakt erfassen.

Die Ansatzfunktionen der pNh-Elemente sind im gesamten Elementgebiet definiert. Sie garantieren einen  $C^0$ -stetigen Verlauf der approximierten Funktion im Elementinneren und an den Elementgrenzen. Alle Ansatzfunktionen enthalten mindestens ein vollständiges Polynom erster Ordnung und können somit konstante Spannungszustände exakt erfassen.

Infolge der bereichsweisen Interpolation und den daraus folgenden Unstetigkeiten in den ersten Ableitungen ergeben sich für die numerische Umsetzung einige Besonderheiten. Zur numerischen Integration wird das Elementgebiet so in Subgebiete unterteilt, daß in jedem Subgebiet differenzierbare Ansatzfunktionen vorliegen.

Ähnlich wird bei der Spannungsberechnung vorgegangen. Diese wird zunächst auch für die Subgebiete durchgeführt. Repräsentative Spannungswerte in den Knotenpunkten der Ele-

mente erhält man dann, indem anschließend über aneinandergrenzende Subgebiete gemittelt wird.

Für Beispielrechnungen mit isoparametrischen  $pN_h$ -Elementen wurde das Programmsystem COSAR (Computer System for Analysis & Research) verwendet. COSAR ist ein umfassendes, leistungsstarkes Finite-Elemente-System, das die Analyse von einfachen Balkenstrukturen bis hin zu komplexen 3D-Modellen ermöglicht [3]. Eingesetzt werden überwiegend Elemente der Serendipity-Klasse, wobei maximal quadratische Ansätze  $p=2$  verwendet werden. Die isoparametrischen  $pN_h$ -Elemente sind deshalb kompatibel zu den Serendipity-Elementen. Entwickelt wurden ebene, rotationssymmetrische und räumliche  $pN_h$ -Elemente mit frei wählbarer Anzahl  $h$ -Abschnitte (maximal  $N=20$  in einer lokalen Koordinatenrichtung).

#### 4 Eine Netzgenerierungsstrategie zum Einsatz der $pN_h$ -Elemente

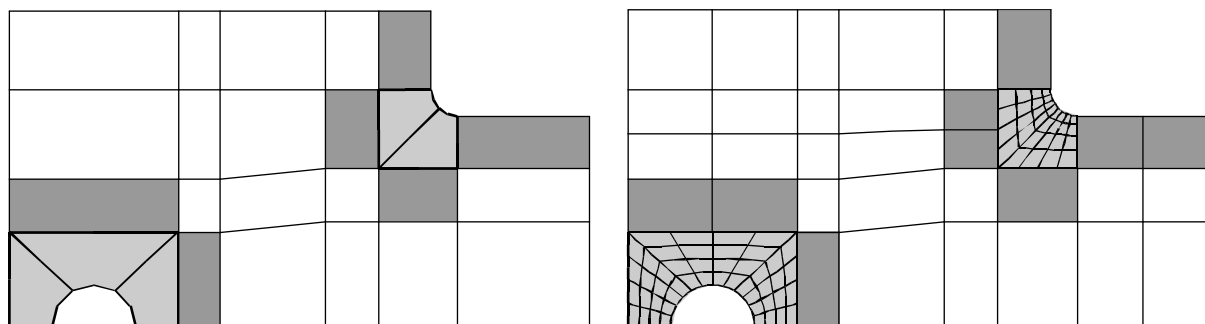
Die praktische Anwendung des  $pN_h$ -Elementkonzeptes hängt wesentlich von der Bereitstellung geeigneter Preprozessoren ab.

Ein sinnvoller Einsatz der  $pN_h$ -Elemente zur Netzverfeinerung, insbesondere im dreidimensionalen Bereich, ist nur bei Verfügbarkeit entsprechender automatischer Netzgeneratoren möglich. Aus diesem Grund wurde aufbauend auf dem Vernetzungsprozessor des Programmsystems COSAR ein Konzept entwickelt, das es ermöglicht, im interaktiven Prozeß derartige Netze zu generieren.

Der ursprünglich vorhandene Prozessor basiert auf der Zerlegung der Geometrie in Viereck- bzw. Quadergebiete, die verzerrt sein können und auch gekrümmte Berandungen aufweisen dürfen. Die Geometriegebiete werden dann durch Vorgabe bestimmter Teilungskriterien mit Elementen so überzogen, daß eine insgesamt kompatible Vernetzung entsteht. Bei sehr komplizierten Geometrien können in Restbereichen zusätzlich Dreiecksgebiete bzw. degenerierte Quadergebiete erzeugt werden. In der Vernetzung kommen dann entsprechende degenerierte Elemente, die zum Elementkatalog von COSAR gehören, zum Einsatz.

Bei der Erzeugung von Vernetzungen mit  $pN_h$ -Elementen wird auf die Zerlegung der Geometrie in Viereck- bzw. Quadergebiete zurückgegriffen. Zur Realisierung der Netzverdichtung werden einerseits Gebiete mit grober und mit feiner Teilung selektiert, die mit Standardelementen vernetzt werden, und andererseits Gebiete, die Übergangsbereiche darstellen, in denen die  $pN_h$ -Elemente zum Einsatz kommen.

Bild 3 zeigt die Zerlegung in entsprechende Teilgebiete und verdeutlicht den Einbau der  $pN_h$ -Elemente.



- grober Bereich mit Standardelementen
- Bereich mit  $pN_h$ -Übergangselementen
- feiner Bereich mit Standardelementen

a)

b)

Bild 3: Gebietszerlegung in Standard- und Übergangsbereiche (a) und Netzeinteilung (b)

Nach Vorgabe von Teilungsparametern für die Standardgebiete werden diese mit jeweils kompatiblen Vernetzungen überzogen. Anschließend werden automatisch die pNh-Elemente in den Übergangsbereichen mit den erforderlichen stückweisen Kanten generiert.

## 5 Anwendungsbeispiel

Untersucht wird der Beanspruchungszustand der im Bild 4 dargestellten Geschoßdecke, die auf Stützen gelagert ist.

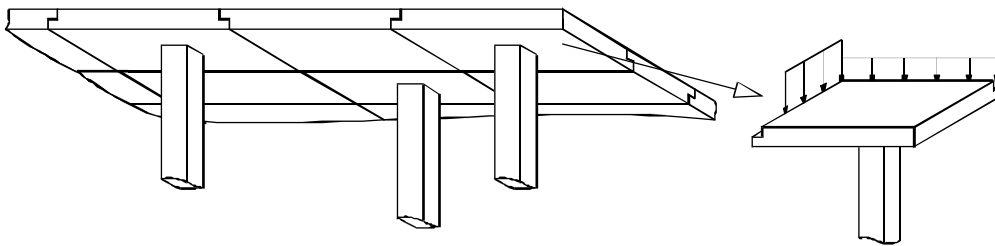


Bild 4: Gestützte Geschoßdecke mit Berechnungssegment

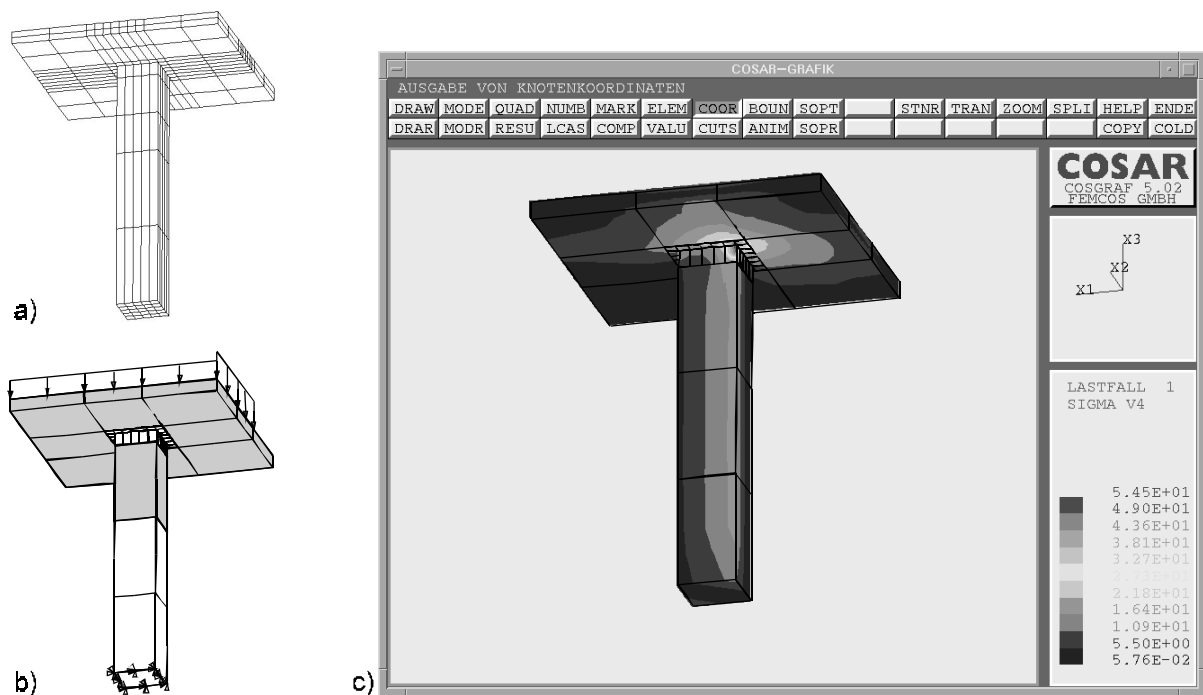


Bild 5: Geschoßdeckensegment mit Stützpfeiler

- a) Konventionelle Vernetzung: 372 Elemente, 2172 Knoten
- b) Einsatz von pNh-Elementen (gekennzeichneter Bereich): 134 Elemente, 608 Kn.
- c) Spannungsverteilung

Durch die Stempelwirkung der Stützen besteht die Gefahr des Durchstanzens. Eine genaue Erfassung des Beanspruchungszustandes im Übergang zwischen Stütze und Decke ist deshalb erforderlich. Die wesentlichen Lasten werden über die Ränder der Deckensegmente eingetragen. Bild 5 zeigt exemplarisch ein Ecksegment mit unsymmetrischer Belastung.

Um eine hinreichend feine Unterteilung im Übergangsbereich zu erzielen, würde bei konventionellen Vernetzungstechniken ein Modell mit hoher Freiheitsgradzahl entstehen, da sich die Teilungstiefe über große Bereiche der Decke und der Stütze fortsetzen würde (siehe Bild 5a). Unter Verwendung von pNh-Elementen bleibt das feine Netz auf den interessierenden Bereich konzentriert. Bild 5b zeigt die Vernetzung mit Kennzeichnung der Bereiche, die aus Übergangselementen bestehen.

Hier wurden pNh-Elemente eingesetzt, die sowohl an den Standardflächen als auch an den Koppelflächen quadratische Ansätze aufweisen. Durch den Einsatz der pNh-Elemente ergibt sich eine Verringerung der Freiheitsgradzahl um 72%, was zu einer Rechenzeiteinsparung von 54% führt.

## 6 Ausblick

Die vorgestellten pNh-Elemente in Verbindung mit darauf abgestimmten Netzgeneratoren eröffnen neue Möglichkeiten, viele Probleme im Bereich der Netzverfeinerung besser zu bewältigen. Erfahrungen müssen jedoch noch gesammelt werden, wo sinnvolle Grenzen bezüglich des Grades der Verfeinerung in einer Stufe bei praktischen Aufgabenstellungen liegen. Automatische Kriterien für mehrstufige Verfeinerungen sind dazu zu entwickeln.

Die pNh-Elemente lassen sich aber auch bei weiteren Problemstellungen vorteilhaft einsetzen. So können sie zum Beispiel bei der Modellierung von Kontaktproblemen angewendet, um hier eine sehr feine Unterteilung der Kontaktzone bei umliegendem groben Netz zu erreichen [6].

## Literatur

1. Cavendish, J. C.; Hall, C. A.: A new class of transition blended finite elements for the analysis of solid structures. *Int.J.Num.Meth.Engng.* 20, (1984), 241-253.
2. Gabbert, U.: Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktion-Methode. *Technische Mechanik* 4, 2, (1983), 40-46.
3. Gabbert, U.; Zehn, M.: Universelles FEM-System COSAR - ein zuverlässiges Berechnungswerkzeug für den Ingenieur. In: *Berichte der III. COSAR-Konferenz: Qualität und Zuverlässigkeit von FEM-Berechnungen*, Magdeburg, (1992).
4. Gordon, W. J.: Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation. *SIAM J.Num.Anal.* 8, (1971), 158-177.
5. Graeff-Weinberg, K.; Berger, H.: Ein neues FE-Konzept zur Kopplung inkompatibler Vernetzungen. *Technische Mechanik* 15, Heft 3, (1995), 215-227.
6. Graeff-Weinberg, K.; Berger, H.: Verbesserte FE-Diskretisierung bei Kontaktaufgaben. *Technische Mechanik* 16, Heft 3, (1996), 257-270.
7. Graeff-Weinberg, K.: Ein Finite-Elemente-Konzept zur lokalen Netzverdichtung und seine Anwendung auf Koppel- und Kontaktprobleme. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 1996.
8. Röhr, U.: Entwicklung und Anwendung einer kombinierten Finite-Elemente-Methode für die Strukturanalyse des Schiffskörpers. Habilitation, WPU Rostock, (1988).
9. Schneiders, R.: State of the Art in Generation of Hexahedral Element Meshes. VTT Research Notes 1707, Utgivare-Publisher, Espoo, Finland, 1995, 38-44.
10. Scholz, E.: Kompatible finite Übergangs-, Rand- und Standardstrukturelemente zur effektiven mechanischen Strukturanalyse von Rand- und Übergangsbereichen. Dissertation, TU Magdeburg, (1986).



---

Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg  
e-mail: [harald.berger@mb.uni-magdeburg.de](mailto:harald.berger@mb.uni-magdeburg.de)  
Tel.:0391/6712406, Fax: 0391/6712439