

Berücksichtigung des zeitlich zufälligen Lastverhaltens und zufälliger Systemeigenschaften bei der adaptiven Grenzlastanalyse*

Dr.-Ing. Karl-Heinz Müller, Dipl.-Ing. Marko Broßmann

Bauhaus – Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen

1 Problem

Um Kapazitäten eines Tragwerkes bei Schnittgrößenumlagerungen infolge Plastizierungen erschließen zu können, werden in den modernen Normen Laststeigerungen über die elastische Grenzlast hinaus zugelassen. Diese Laststeigerungen sind durch die Einhaltung von Grenzzustandskriterien, passend zum physikalisch nichtlinearen Tragverhalten, zu beschränken.

Als Begrenzung der Belastung ist die adaptive Grenzlast (Einspiellast), ausgedrückt durch den *adaptiven Grenzlastfaktor* p_A , dann geeignet [3, 4], wenn mehrere Lasten unabhängig voneinander, wiederholt und in beliebiger Reihenfolge auf ein Tragwerk einwirken.

Durch die adaptive Grenzlast wird die Akkumulation des Schadens infolge plastischer Deformationen limitiert, da bei einer Belastungsintensität $p \leq p_A$ die plastische Dissipationsarbeit nach einer endlichen Anzahl von Lastwechseln unabhängiger Lastfälle nicht mehr wächst und das Tragwerksverhalten für alle weiteren Lastwechsel rein elastisch ist. Somit bildet sich im adaptiven Grenzzustand ein stabiler Restschnittgrößenzustand aus.

Die deterministische Ermittlung der adaptiven Grenzlast [3, 4] sowie einfache probabilistische Lastmodelle [6, 7] setzen zeitunabhängige Lasten und gleichwertige Lastkombinationen voraus. Im Gegensatz dazu können unter Nutzung zeitabhängiger probabilistischer Modelle Lastintensitäten und Auftretswahrscheinlichkeiten der Lastkombinationen innerhalb einer Lebensdauer $[0, T]$ erfasst werden [8]. Dabei erfordert die Berechnung des stochastischen adaptiven Grenzlastfaktors mit der mathematischen Optimierung eine Überführung von zeitvarianten Lastmodellen in äquivalente zeitinvariante Lastmodelle [2, 5].

In diesem Beitrag wird unter Nutzung zeitinvarianter Lastmodelle für stochastische Lastprozesse der Einfluss der Berücksichtigung des zufälligen Charakters des Systems auf den Einspielzustand untersucht.

2 Mechanisches Modell

2.1 Tragwerkstyp und Voraussetzungen

Die Untersuchungen werden an ebenen Stabtragwerken aus Stahlbeton durchgeführt. Annahmen sind: statische Belastungen, Theorie erster Ordnung, linear elastisch – ideal plastisches Materialverhalten in diskreten Stellen mit ausreichender plastischer Rotationsfähigkeit, BERNOULLISCHE Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte, zeit- und temperaturunabhängige Tragwerkeigenschaften, Ausschluss von Stabilitätsversagen, ausreichende Querkrafttragfähigkeit.

2.2 Diskretisierung des Tragwerks

Das Stabtragwerk wird in n_e Stabelemente diskretisiert, die an den Stabrändern jeweils Normalkraft N (gleich groß an beiden Enden) und Biegemoment M als statische Freiheitsgrade besitzen. Die Randquerkräfte hängen von den Randbiegemomenten ab. Die unbekanntenen Elementschnittgrößen $\mathbf{s}_e = [N_e \ M_{e1} \ M_{e2}]^T$ werden im Gesamtschnittgrößenvektor \mathbf{s} zusammengefasst:

$$\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1^T \ \dots \ \mathbf{s}_e^T \ \dots \ \mathbf{s}_{n_e}^T]^T \quad (1)$$

* gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG innerhalb des SFB 524

2.3 Belastungsmodell

Einwirkungen werden nur in den n_k Knoten als Knotenkräfte eingetragen. Die n_G ständigen und n_L veränderlichen Lastfälle setzen sich demnach aus Einzelkräften bzw. –momenten zusammen. Für jeden der veränderlichen Lastfälle L_i ($i=1\dots n_L$) werden die Knotenlastvektoren $\mathbf{L}_{i,k} = [L_{i,k,x} \ L_{i,k,y} \ L_{i,k,\varphi}]^T$ im Gesamtknotenlastvektor \mathbf{L}_i zusammengefasst:

$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{L}_{i,1}^T \ \dots \ \mathbf{L}_{i,k}^T \ \dots \ \mathbf{L}_{i,n_k}^T]^T \quad (i = 1 \dots n_L) \quad (2)$$

Die Definitionen gelten analog für ständige Lastfälle, wobei \mathbf{L} , L bzw. i durch \mathbf{G} , G bzw. g zu ersetzen sind.

Aus den n_L unabhängigen veränderlichen Lastfällen L_i ($i = 1 \dots n_L$) können Kombinationen mit k Lastfällen ($k=1 \dots n_L$) gebildet werden. Es sei $M_m^k = \{i \mid L_i \text{ gehört zu } m\text{-ter } k\text{-Kombination}\}$. Dann existieren $n_k^k = C_{n_L}^k$ Lastkombinationen K_m^k ($m = 1 \dots n_k^k$), die aus k kombinierten Lastfällen bestehen. Insgesamt gibt es $n_Q = \sum_{k=1}^{n_L} n_k^k$ Lastkombinationen, die durchnummeriert mit Q_q ($q=1 \dots n_Q$) bezeichnet werden, wobei $Q_q = K_m^1$ ($q = m = 1 \dots n_L$) gilt. Die zu den Lastkombinationen Q_q ($q=1 \dots n_Q$) gehörenden Knotenlastvektoren \mathbf{Q}_q werden durch Addition der jeweils kombinierten Knotenlastvektoren \mathbf{L}_i gebildet.

2.4 Formulierung der Fließfunktion

Die Tragfähigkeit eines Stahlbetonquerschnittes mit linear elastisch – ideal plastischem Materialverhalten wird mittels der Fließfunktion beschrieben, welche die Interaktion zwischen Biegemoment und Normalkraft beinhaltet. Diese Fließfunktion (Abbildung 1) wird in acht Abschnitten linear approximiert, welche die Zulässigkeit der Schnittgrößenvektoren (N_e , M_{er}) ($e=1 \dots n_e$; $r=1,2$) für alle betrachteten Querschnitte definieren:

$$a_{N_{erf}} \cdot N_e + a_{M_{erf}} \cdot M_{er} \leq 1 \quad (e = 1 \dots n_e; r = 1,2; f = 1 \dots 8) \quad (3)$$

(e : Nr. des Elementes, r : Nr. des Randes, f : Nr. des Geradenabschnittes)

Diese Zulässigkeitsbedingungen werden mit der Plastizitätsmatrix \mathbf{A}_P und dem $16n_e$ -dimensionalen Einheitsvektor \mathbf{b}_P zusammengefasst:

$$\mathbf{A}_P \cdot \mathbf{S} \leq \mathbf{b}_P \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{P1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{Pe} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{Pn_e} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_{Pe} = \begin{bmatrix} a_{N_{e1,1}} & a_{M_{e1,1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_{e1,8}} & a_{M_{e1,8}} & 0 \\ a_{N_{e2,1}} & 0 & a_{M_{e2,1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_{e2,8}} & 0 & a_{M_{e2,8}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Mit der Definition $\mathbf{b} = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{S}$ als elastische Tragwerksantwort wird Ungleichung (4) zu:

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{b}_P \quad (7)$$

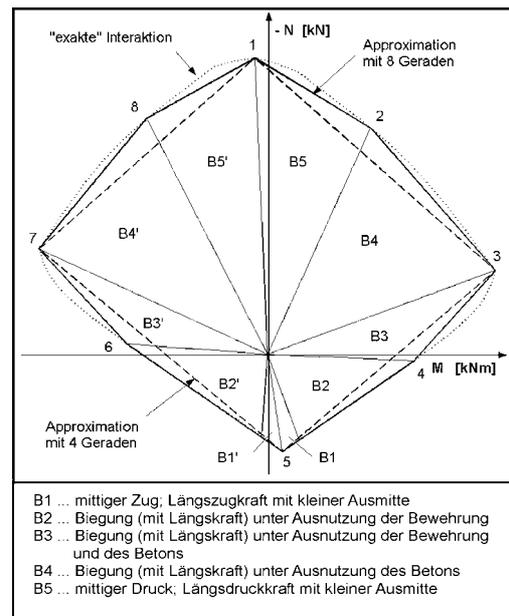


Abbildung 1: Lineare Approximation der Biegemomenten-Normalkraft-Interaktion

2.5 Methode der adaptiven Grenzzustandsanalyse

Aus Extremalprinzipien der Mechanik lassen sich Optimierungsaufgaben zur Bestimmung des adaptiven Grenzlastfaktors p_A bzw. des Restschnittgrößenzustandes \mathbf{S}_R eines statisch unbestimmten Tragwerkes ableiten [3], die keine aufwendigen Lastpfad- und Lastfolgeuntersuchungen erfordern.

Da die Fließbedingungen stückweise linearisiert sind, kann der plastische Grenzlastfaktor p_A mit den Methoden der linearen und quadratischen Optimierung in 3 Schritten bestimmt werden:

1. Berechnung der elastischen Antworten $\mathbf{b}_{EG} = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{S}_{EG}$ infolge der Überlagerung

$$\mathbf{V} = \sum_{g=1}^{n_G} \mathbf{G}_g \quad \text{aller ständigen Lasten bzw. der elastischen Antworten}$$

$\mathbf{b}_{EQq} = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{S}_{EQq}$ ($q = 1 \dots n_Q$) infolge jeder der n_Q Lastkombinationen $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_q$ der veränderlichen Lasten mit der quadratischen Optimierung:

$$\text{ZF: } 0.5 \cdot \mathbf{S}_E^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_E \rightarrow \min \quad (8)$$

$$\text{NB: } \mathbf{A}_G \cdot \mathbf{S}_E + \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (9)$$

\mathbf{H} ... Flexibilitätsmatrix des Tragwerks, \mathbf{A}_G ... Koeffizientenmatrix der Gleichgewichtsbedingungen

2. Bestimmung des auf die Fließfunktion bezogenen Vektors \mathbf{b}_{EQextr} der Extremwerte aus den elastischen Antworten infolge aller Kombinationen \mathbf{Q}_q ($q=1, \dots, n_Q$) der veränderlichen Lasten für jedes Element e ($e=1 \dots n_e$), an jedem Rand r ($r=1, 2$) und bezogen auf jeden linearen Abschnitt f ($f=1 \dots 8$):

$$\mathbf{b}_{EQextr} = \left[\max_{q=1}^{n_Q} (b_{EQq,1}) \quad \dots \quad \max_{q=1}^{n_Q} (b_{EQq,16n_e}) \right]^T \quad (10)$$

3. Berechnung des adaptiven Grenzlastfaktors p_A und von zugehörigen statisch zulässigen (nicht notwendigerweise eindeutigen) Restschnittgrößen \mathbf{S}_R mit der linearen Optimierung:

$$\text{ZF: } p_A \rightarrow \max \quad (11)$$

$$\text{GGB: } \mathbf{A}_G \cdot \mathbf{S}_R = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\text{FB: } \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{S}_R + p_A \cdot \mathbf{b}_{EQextr} \leq \mathbf{b}_P - \mathbf{b}_{EG} \quad (13)$$

Die Sicherung der statischen Randbedingungen und des Gleichgewichtes der inneren Kräfte wird durch die Gleichgewichtsbedingung (12) erreicht. Die Einhaltung der Fließbedingungen unter allen n_Q Lastkombinationen der veränderlichen Lasten wird durch die lineare Restriktion (13) sichergestellt. Diese Restriktion geht aus Gleichung (7) hervor, in der sich die Antwort \mathbf{b} aus folgenden Anteilen zusammensetzt:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_R + p_A \cdot \mathbf{b}_{EQextr} + \mathbf{b}_{EG} \quad \text{mit } \mathbf{b}_R = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{S}_R \quad (14)$$

3 Lastmodelle

3.1 POISSONScher Rechteck-Puls-Prozess als Modell einer zeitabhängigen Last

Die statisch wirkenden veränderlichen Lasten $L_i(t)$ ($i=1 \dots n_L$) werden als POISSONSche Rechteck-Puls-Prozesse modelliert [2]. Ein solcher Prozess besitzt zufällige Eintrittszeitpunkte, zufällige Dauern und zufällige Puls-Intensitäten und ist durch drei Merkmale eindeutig bestimmt:

λ_i : Eintrittsrate der Pulse des Prozesses [1/Jahr]

μ_i : mittlere Dauer der Pulse [Jahre]

$F_{L_i}(x)$: Verteilungsfunktion der Puls-Intensität L_i

Diese Prozesse $L_i(t)$ besitzen folgende Eigenschaften [2]:

(E1): Die Abstände $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ zwischen den Eintrittszeitpunkten sind mit λ_i exponentialverteilt

(E2): Die Anzahl N_T der Eintrittszeitpunkte innerhalb der Lebensdauer $[0, T]$ ist POISSON-verteilt mit dem Parameter λ_i

(E3): Das Maximum L_i^* aller Pulse von $L_i(t)$ innerhalb der Lebensdauer $[0, T]$ besitzt näherungsweise folgende Verteilung:

$$F_{L_i^*}(x) \approx e^{-\lambda_i T (1 - F_{L_i}(x))} \quad (15)$$

3.2 Modell der zeitabhängigen elastischen Antworten

Die Vektoren der zeitabhängigen elastischen Antworten $\mathbf{b}_{ELi}(t)$ ($i = 1 \dots n_L$) entstehen durch lineare Transformationen aus den zeitabhängigen Knotenlastvektoren $\mathbf{L}_i(t)$:

$$\mathbf{b}_{ELi}(t) = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{S}_{ELi}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_{ELi}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}_i(t) \quad (i = 1 \dots n_L) \quad (16)$$

$\mathbf{C} \dots$ Koeffizientenmatrix zur Transformation der Knotenlastvektoren in elastische Schnittgrößen

Folglich sind die zeitabhängigen elastischen Antworten wie die Lasten POISSONSche Rechteck-Puls-Prozesse mit den gleichen Prozessparametern λ_i und μ_i wie die Lastprozesse. Die Parameter der Verteilungsfunktionen $F_{b_{ELi,erf}}(x)$ ($i = 1 \dots n_L$; $e = 1 \dots n_e$; $r = 1, 2$; $f = 1 \dots 8$) der Puls-Intensitäten der Antwortprozesse $b_{ELi,erf}(t)$ ($i = 1 \dots n_L$) erhält man aus den Puls-Intensitäts-Verteilungen $F_{L_i}(x)$ der Lastprozesse durch die Transformation (16).

3.3 Superposition POISSONScher Rechteck-Puls-Prozesse

Die Überlagerung mehrerer Belastungsprozesse erfolgt auf der Ebene der elastischen Antworten für jedes Element e ($e = 1 \dots n_e$), an jedem Rand r ($r = 1, 2$), bezogen auf jeden linearen Abschnitt f ($f = 1 \dots 8$). Die sich gemäß der m -ten k -Kombination überlagernden Impulse der k Antwortprozesse $b_{ELi,erf}(t)$ ($i \in M_m^k$) gehören wieder zu einem POISSONSchen Rechteck-Puls-

Prozess $b_{EKm,erf}^k(t)$ mit den Merkmalen $\left(\lambda_m^k, \mu_m^k, F_{b_{EKm,erf}^k}(x) \right)$ [2]:

$$\lambda_m^k = \prod_{i \in M_m^k} \lambda_i \cdot \left(\sum_{j \in M_m^k} \prod_{s \in M_m^k \setminus \{j\}} \mu_s \right) \quad (17)$$

$$\mu_m^k = \frac{\prod_{i \in M_m^k} \mu_i}{\sum_{j \in M_m^k} \prod_{s \in M_m^k \setminus \{j\}} \mu_s} \quad (18)$$

$$F_{b_{EKm,erf}^k}(x) = *_{i \in M_m^k} F_{b_{Li,erf}}(x) \quad (\text{Faltung}) \quad (19)$$

Der hochgestellte Index k stellt keine Potenz dar, sondern er beschreibt jeweils, zu welcher Klasse die Lastfälle kombiniert sind.

Im Falle normalverteilter Puls-Intensitäten ist die Faltung (19) einfach, da $F_{b_{EKm,erf}^k}$ dann ebenfalls eine Normalverteilung ist. Jeder Überlagerungsprozess $b_{EKm,erf}^k(t)$ ($k = 1 \dots n_L$; $m = 1 \dots n_k^k$) besitzt die Eigenschaften (E1), (E2) und (E3) mit den entsprechenden Parametern.

Für alle n_Q Kombinationen können analog zu (15) die Verteilungen $F_{b_{EKm,erf}^k}(x)$ der Maxima der

Pulswerte der Prozesse $b_{EKm,erf}^k(t)$ in $[0, T]$ angegeben werden (Extremwertverteilungen).

Nach (E2) ergibt sich für jede Kombination jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Antwort-Puls in $[0, T]$ vorkommt:

$$P_{EKm}^k = 1 - P(N_T = 0) = 1 - e^{-\lambda_m^k \cdot T} \quad (k = 1 \dots n_L; m = 1 \dots n_k^k) \quad (20)$$

Diese Auftretenswahrscheinlichkeiten liegen für Eintrittsraten von üblichen Lasten im Hochbau, sinnvolle Lebensdauern und kleine k nahe bei Eins. Für Kombinationen größeren Umfangs werden sie aber schnell signifikant.

4 Stochastischer adaptiver Grenzlastfaktor

Es wird eine Monte-Carlo-Simulation in zwei Stufen vorgenommen. Für jede Realisierung $n = 1 \dots N$ des Tragwerks sind Extremwerte der elastischen Antworten zu bilden. Für jede Lastkombination Q_q ($q=1 \dots n_Q$) werden nach Gleichung (19) die Puls-Intensitäts-Verteilungen $F_{b_{EQq,erf,n}}$ ($e=1 \dots n_e$; $r=1,2$; $f=1 \dots 8$) und nach Gleichung (17) die Eintrittsrate λ_q bestimmt. Aus den Realisierungen $r_{q,n}$ ($q=1 \dots n_Q$) einer in $[0;1]$ gleichverteilten Zufallsgröße R werden die Realisierungen $b_{EQq,erf,n}^*$ der Antwort-Extremwerte durch folgende aus Gleichung (15) unter Berücksichtigung von Gleichung (16) hervorgehenden Transformationen erzeugt:

$$b_{EQq,erf,n}^* = F_{b_{EQq,erf,n}}^{-1} \left[1 + \frac{\ln(r_{q,n})}{\lambda_q \cdot T} \right] \quad (q = 1 \dots n_Q) \quad (21)$$

Mit dem nach Gleichung (10) entstehenden Vektor $\mathbf{b}_{EQextr,n}$ wird eine Realisierung des zufälligen adaptiven Grenzlastfaktors p_A bestimmt. Die Gesamtheit aller Realisierungen von p_A führt zu einer Schätzung für die Versagenswahrscheinlichkeit P_f :

$$P_f = P\{p_A - 1 < 0\} \quad (22)$$

Als Maß für die Ergebnisqualität wird der Variationskoeffizient v_{P_f} der Versagenswahrscheinlichkeit verwendet [2]:

$$v_{P_f} = \frac{1 - P_f}{\sqrt{N \cdot P_f}} \quad (23)$$

Bei einer Vernachlässigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition wird für Lastkombinationen Q_q ($n_L < q \leq n_Q$) auf die Transformation (21) verzichtet. Es werden die Extremwerte der elastischen Antworten verwendet, die durch Addition der Antwort-Extremwerte der beteiligten Lastkombinationen Q_q ($q=1 \dots n_L$) entstehen, d. h., die Extremwerte der Pulshöhen der einzelnen Lastfälle treten gleichzeitig auf (konservative Annahme).

5 Beispiel Stahlbetonrahmen

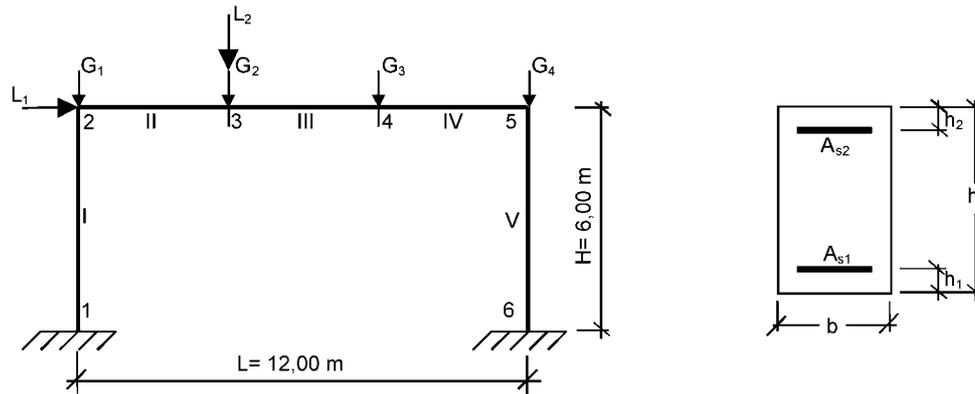
An einem ebenen eingespannten Stahlbetonrahmen (Abbildung 2) soll untersucht werden, wie sich eine unterschiedliche stochastische Modellbildung des Tragwerks und die Berücksichtigung bzw. die Vernachlässigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition auf die Beurteilung der Versagenswahrscheinlichkeit des Tragwerks auswirken.

Dabei werden Material- und Querschnittskenngößen an den Rändern der $n_e=5$ finiten Stabelemente und die ständigen Lasten als zufällige zeitunabhängige Größen modelliert. Die äquivalenten Kenngößen zweier Querschnitte, die dem gleichen Knotenpunkt und dem gleichen Bauteil (Riegel oder Stütze) zugeordnet sind, werden stets durch eine gemeinsame Zufallsgröße beschrieben. Räumliche Autokorrelationen der Kenngößen werden, falls berücksichtigt, mit folgendem Modell erfasst:

$$\rho_x(x) = e^{-\alpha|x|} \quad 0 \leq \alpha \leq \infty \quad ; \quad x \dots \text{Abstand zweier Punkte in [m]}; \quad (24)$$

Unterschiedliche Kenngößen werden als voneinander unabhängig angenommen. Die $n_L=2$ veränderlichen Lasten werden als voneinander unabhängige POISSONSche Rechteck-Puls-Prozesse modelliert. Dadurch ergeben sich $n_Q=3$ Lastkombinationsmöglichkeiten mit folgenden Merkmalen:

$$\begin{aligned} \text{Wind:} & \quad Q_1 = K_1^1(t) = L_1(t): \quad \lambda_1^1 = 5/\text{Jahr} \quad \mu_1^1 = 0.005 \text{ Jahre} \quad X_1 \in NV(384 \text{ kN}, 115.2 \text{ kN}) \\ \text{Schnee [1]:} & \quad Q_2 = K_2^1(t) = L_2(t): \quad \lambda_2^1 = 1/\text{Jahr} \quad \mu_2^1 = 0.1 \text{ Jahre} \quad X_2 \in NV(432 \text{ kN}, 129.6 \text{ kN}) \end{aligned}$$



Bezeichnung	Formelzeichen	Einheit	Element e	Rand r	Verteilungsfunktion $F_X(x)$	Mittelwert $E(X)$	Standardabweichung $\sigma(X)$	Variationskoeffizient $v(X)$	Beiwert für kor. Modell α
Betondruckfestigkeit	$f_{c,e,r}$	[N/mm ²]	I; II; III; IV; V	1; 2	Log.Normal	38	5.266	0.1386	0.06
E-Modul Beton	$E_{c,e,r}$	[N/mm ²]	I; II; III; IV; V	1; 2	Log.Normal	32000	9600	0.3000	0.06
Stahlfestigkeit	$f_{v,e,r}$	[N/mm ²]	I; II; III; IV; V	1; 2	Log.Normal	592	59.2	0.1000	0.03
E-Modul-Stahl	$E_{s,e,r}$	[N/mm ²]	I; II; III; IV; V	1; 2	Log.Normal	200000	30000	0.1500	0.03
Querschnittshöhe	$h_{e,r}$	[mm]	I; V	1; 2	Normal	950	9.7	0.0102	0.06
Querschnittshöhe	$h_{e,r}$	[mm]	II; III; IV	1; 2	Normal	700	8.2	0.0117	0.06
Querschnittsbreite	$b_{e,r}$	[mm]	I; II; III; IV; V	1; 2	Normal	500	7.0	0.0140	0.06
u. Randfaserabstand	$h_{1,e,r}$	[mm]	I; II; III; IV; V	1; 2	Normal	70	5.0	0.0714	0.06
o. Randfaserabstand	$h_{2,e,r}$	[mm]	I; II; III; IV; V	1; 2	Normal	70	5.0	0.0714	0.06
u. Bewehrungs-QS	$A_{S1,e,r}$	[mm ²]	I; II; III; IV; V	1; 2	Normal	5000	150.0	0.0300	0.06
u. Bewehrungs-QS	$A_{S2,e,r}$	[mm ²]	I; V	1; 2	Normal	5000	150.0	0.0300	0.06
u. Bewehrungs-QS	$A_{S2,e,r}$	[mm ²]	II; III; IV	1; 2	Normal	3000	90.0	0.0300	0.06
			mittl. Dauer μ [1/a]	Rate λ [a]					
Eigenlast	$G_{1,4}$	[kN]			Normal	53.125	2.656	0.0500	0.06
Eigenlast	$G_{2,3}$	[kN]			Normal	35.000	1.750	0.0500	0.06
Windlast	L_1	[kN]	0.005	5.0	Normal	384.0	115.2	0.3000	
Schneelast	L_2	[kN]	0.100	1.0	Normal	432.0	129.6	0.3000	

Abbildung 2: Statisches System und Kennwerte des Beispielfrahmens

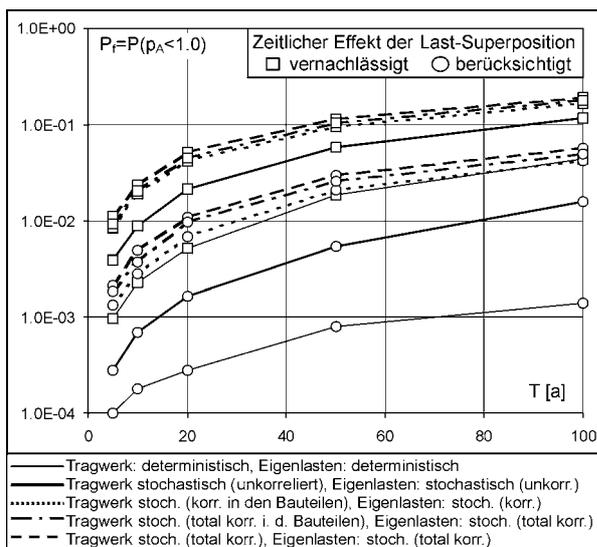


Abbildung 3: Einfluss des stochastischen Tragwerksmodells mit und ohne Berücksichtigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition auf die Versagenswahrscheinlichkeit P_f in Abhängigkeit von der Lebensdauer T

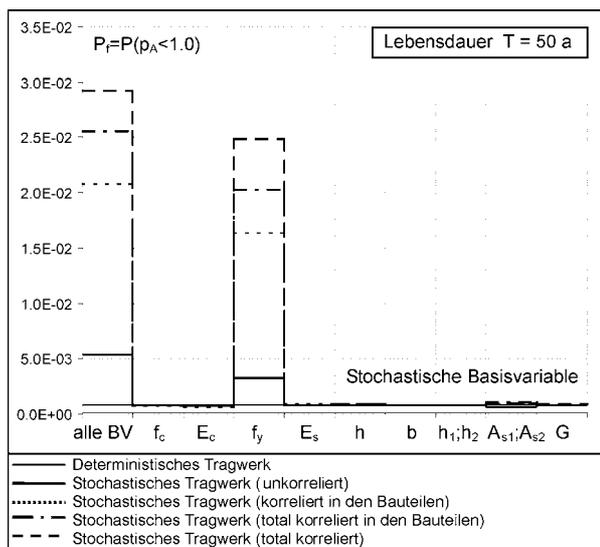


Abbildung 4: Einfluss der zufälligen Tragwerkskenngrößen unter Berücksichtigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition auf die Versagenswahrscheinlichkeit P_f für die Lebensdauer T=50 Jahre

Der bei der Berücksichtigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition entstehende gefilterte Überlagerungsprozess hat dann die Parameter:

$$Q_3 = K_1^2(t): \quad \lambda_1^2 = 5 \cdot 1 \cdot (0.005 + 0.1) = 0.525 / \text{Jahr} \quad \mu_1^2 = \frac{0.005 \cdot 0.1}{0.005 + 0.1} = 0.00476 \text{ Jahre}$$

Die Schätzung der Versagenswahrscheinlichkeiten nach (22) für verschiedene Lebensdauern T und verschiedene stochastische Modelle mit und ohne Berücksichtigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition erfolgt mit der in Kapitel 4 beschriebenen Simulationsmethode, wobei jeweils $5 \cdot 10^4$ ($T \leq 10$ a) bzw. $2.5 \cdot 10^4$ ($T \geq 20$ a) Realisierungen berechnet werden. Abbildung 3 verdeutlicht für alle Fälle die erwartungsgemäße Zunahme der Versagenswahrscheinlichkeit des Tragwerks mit wachsender Lebensdauer T . Weiterhin ist festzustellen:

- Eine Vernachlässigung der stochastischen Eigenschaften des Tragwerks führt, abhängig vom stochastischen Modell, zu einer tendenziell mit steigender Lebensdauer T zunehmenden *Unterschätzung* der Versagenswahrscheinlichkeit um eine halbe bis ganze Zehnerpotenz für kleine T und um eine bis 1.5 Zehnerpotenzen für große T .
- Eine Vernachlässigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition hat dagegen eine *Überschätzung* der Versagenswahrscheinlichkeit in der gleichen Größenordnung zur Folge. Tendenziell nimmt der prozentuale Fehler aber bei der Berücksichtigung von zufälligen Tragwerkseigenschaften mit steigender Lebensdauer und steigender Tragwerkskorrelation ab.
- Die Annahme totaler Korrelation im Tragwerk führt zu einer oberen Schranke der Versagenswahrscheinlichkeit. Diese liegt um etwa das 6-fache bei Berücksichtigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition und um etwa das 2-fache bei deren Vernachlässigung über dem unkorrelierten Fall.
- Die Versagenswahrscheinlichkeiten bei der Annahme von totaler Korrelation in den Bauteilen aber totaler Unabhängigkeit zwischen den verschiedenen Bauteilen sind nur unwesentlich kleiner als beim total korrelierten Tragwerk.
- Die Versagenswahrscheinlichkeiten sind prinzipiell abhängig von den Größenordnungen der räumlichen Korrelationen. In diesem Beispiel liegen sie nahe an der oberen Schranke, da das Verhalten des Tragwerks im Grenzzustand der Adaption sehr stark von der Festigkeit des Bewehrungsstahls bestimmt wird und für diesen eine starke Korrelation vorausgesetzt wird.

Die Abbildung 4 stellt Versagenswahrscheinlichkeiten gegenüber, die sich für die Annahme eines deterministischen Tragwerks bzw. unter Berücksichtigung aller oder jeweils einer zufälligen Basisvariablen für die Lebensdauer $T=50$ Jahre ergeben. Als deterministisch angenommene Kenngrößen werden mit ihrem Mittelwert berücksichtigt. Es können folgende Feststellungen getroffen werden:

- Als einzelne zufällige Basisvariable bringt nur die Stahlzugfestigkeit f_y eine signifikante Abweichung vom deterministischen Tragwerk mit sich. Die zugehörigen Versagenswahrscheinlichkeiten liegen in Abhängigkeit vom Grad der Korrelation zwischen 15% und 20% unterhalb der unter Berücksichtigung aller zufälligen Basisvariablen ermittelten Werte.
- Die restlichen Basisvariablen besitzen einzeln nahezu keine Bedeutung, erbringen in ihrer Gesamtheit aber eine Steigerung der Versagenswahrscheinlichkeit um den o. a. Anteil.

Für die in Abbildung 5 dargestellten Variationskoeffizienten der Versagenswahrscheinlichkeiten, die unter Berücksichtigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition bestimmt wurden, ist festzustellen:

- Der Variationskoeffizient v_{P_f} der Versagenswahrscheinlichkeit nimmt für alle Lebensdauern mit steigender Tragwerkskorrelation stetig ab. Dementsprechend steigt die Genauigkeit der Schätzwerte der Versagenswahrscheinlichkeit P_f mit der Tragwerkskorrelation. Dieses Verhalten ist erwartungsgemäß, da P_f mit der Tragwerkskorrelation stetig steigt (Abbildung 3) und die Anzahl der Realisierungen innerhalb der einzelnen Lebensdauern konstant ist.

- Innerhalb der korrelierten Fälle sind bei konstanter Lebensdauer nur relativ kleine Differenzen zwischen den einzelnen Variationskoeffizienten erkennbar, da auch die zugehörigen Versagenswahrscheinlichkeiten nur kleine Veränderungen aufweisen.
- v_{Pf} fällt erwartungsgemäß für alle stochastischen Modelle stetig mit steigender Lebensdauer. Die verhältnismäßig kleine Differenz zwischen $T=10$ a und $T=20$ a begründet sich in der Verminderung der Anzahl der Realisierungen von $5.0 \cdot 10^4$ auf $2.5 \cdot 10^4$.

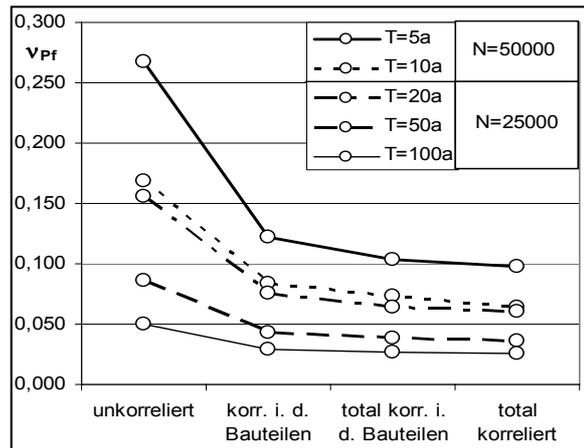


Abbildung 5: Variationskoeffizienten v_{Pf} der Versagenswahrscheinlichkeit für verschiedene Lebensdauern in Abhängigkeit vom stochastischem Modell

6 Zusammenfassung

Für den Fall von unabhängigen zeitlich zufälligen Verkehrslasten, die auf ein Tragwerk mit stochastischen Eigenschaften einwirken, wurde ein zeitinvariantes stochastisches Lastmodell für die zeitvarianten Lastkombinationen als Voraussetzung für eine stochastische adaptive Grenzlastanalyse verwendet. Die Kenngrößen des Tragwerks und die ständigen Lasten wurden als zeitunabhängige Zufallsgrößen modelliert.

Am Beispiel eines ebenen Stahlbetonrahmens unter einer Windlast und einer Schneelast wurden die Auswirkungen des zeitlich zufälligen Lastverhaltens und der stochastischen Tragwerkskenngrößen sowie derer Korrelationen auf die Versagenswahrscheinlichkeit des Tragwerks bezüglich des adaptiven Grenzzustandes beurteilt.

Es ist für alle angewendeten stochastischen Modelle festzustellen, dass die Versagenswahrscheinlichkeit im Fall der Berücksichtigung des zeitlichen Effektes der Last-Superposition um etwa eine Zehnerpotenz unter der liegt, die diese Effekte vernachlässigt. Die Versagenswahrscheinlichkeit erhöht sich signifikant, wenn stochastische Tragwerkeigenschaften in Ansatz gebracht werden. Die größte Bedeutung besitzt dabei die Zufälligkeit der Zugfestigkeit der Bewehrung. Alle anderen Zufallsgrößen beeinflussen die Versagenswahrscheinlichkeit nur in ihrer Gesamtheit, einzeln betrachtet sind sie nahezu bedeutungslos.

Weitere Untersuchungen sollten für mehr als zwei Lasten, für beliebige Puls-Intensitäts-Verteilungen bzw. unter Berücksichtigung der Zeit- und der Lastabhängigkeit der Tragwerkeigenschaften durchgeführt werden.

7 Literatur

- [1] Spaethe, G.: Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1987
- [2] Wen, Y.-K.: Structural Load Modeling and Combination for Performance and Safety Evaluation. Elsevier, 1990
- [3] Raue, E.: Zur Bestimmung der adaptiven Grenzlast statisch unbestimmter Tragwerke. Industrie- und Spezialbau - Theorie und Anwendung, Festschrift Prof. E. Hampe, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar 1993
- [4] Timmler, H.-G.; Saad, M.: Anwendung der Theorie adaptiver Tragwerke auf ebene Stahlbetonrahmen. Industrie- und Spezialbau – Theorie und Anwendung, Festschrift Prof. E. Hampe, Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Weimar 1993
- [5] Rackwitz, R.: Einwirkungen auf Bauwerke. In: Der Ingenieurbau – Tragwerkszuverlässigkeit und Einwirkungen, Herausgeber: G. Mehlhorn, Ernst & Sohn, Berlin, 1997
- [6] Raue, E.; Vaidogas, E.; Müller, K.-H.: Bewertung der Grenzlast statisch unbestimmter Tragwerke. IKM 1997, Bauhaus-Universität Weimar (auf CD)
- [7] Müller, K.-H.; Broßmann, M.: Probabilistische Beurteilung von Grenzlastfaktoren für ein Stahlbetontragwerk. Thesis – Wissenschaftliche Zeitschrift der Bauhaus-Universität Weimar, 46.Jg., Weimar 2000
- [8] Müller, K.-H.; Broßmann, M.: Berücksichtigung des zeitlich zufälligen Lastverhaltens bei der adaptiven Grenzlastanalyse. Massivbau – Beiträge aus Theorie und Praxis, Schriftenreihe der Bauhaus-Universität Weimar, Heft 113, Festschrift anlässlich des 60. Geburtstages von Prof. Dr.-Ing. habil. Erich Raue, Weimar 2002, S. 31-39