

# Lebensdauerorientierter Entwurf der Hängestangen bei Bogenbrücken - Modellierung als Mehrebenenproblem

Dietrich Hartmann, Mozes Galffy, Andres Wellmann

*Lehrstuhl für Ingenieurinformatik im Bauwesen, Ruhr-Universität Bochum*

[hartus@inf.bi.rub.de](mailto:hartus@inf.bi.rub.de)

## 1 Einleitung

Bauwerke sind – so verlangen es unsere Vorschriften im Interesse der Gesellschaft – so zu entwerfen, zu berechnen, zu dimensionieren und zu konstruieren, dass sie über die vorge-sehene Lebens- bzw. Nutzungsdauer zuverlässig alle an sie gestellten Anforderungen erfül-len. Die Gebrauchstauglichkeit und die Tragfähigkeit hängen dabei vorrangig vom Verhalten des Tragwerks unter Belastung ab. Will man zu realistischen Aussagen über die Lebens- bzw. Nutzungsdauer eines Tragwerks kommen, muss man konsequenterweise – unabhän-gig davon, ob es sich bei dem Bauwerk um ein Gebäude, ein Hochhaus, eine Industriehalle, eine Brücke o.a.m. handelt – sowohl die relevanten Einwirkungen, Belastungen und Bean-spruchungen als auch die Beanspruchbarkeiten auf der Widerstandsseite als zeitlich verän-derliche Prozesse auffassen. Viele dieser Prozesse sind zudem stochastisch und oft multi-korreliert. Im Bezugszeitraum der Lebensdauer bzw. Nutzungsdauer des Tragwerks können diese Prozesse nachhaltige Schädigungen (Deteriorationen) verursachen, die sich dann stu-fenartig zu Schäden aufsummieren (Schadensakkumulation).

Die lebensdauerorientierte Entwurfsaufgabe stellt sich damit als eines der schwierigsten Probleme dar: Selbst bei moderat komplexen Tragwerken (Industriehallen, Institutsbauten, einfeldrigen Brücken, etc.) treten komplizierte Phänomene auf, die auf mehreren Ebenen ab-laufen und unterschiedliche Zeitskalen umspannen. So werden die o.e. Schädigungsinkre-mente beispielsweise durch eine Momentendynamik verursacht, während die sichtbaren Schäden durch einen Langzeitprozess mit ebenfalls komplizierter Charakteristik entstehen.

Angesichts der schwierigen Ausgangslage ist es nahe liegend, sich bei der Lösung der kom-plexen, lebensdauerorientierten Entwurfsaufgabe auf den Einsatz von Computern und auf leistungsfähige Methoden der Informatik abzustützen. Wünschenswert ist insbesondere ein computerbasiertes Entwurfs- und Konstruktionsleitsystem, das unter Berücksichtigung aller relevanten Beanspruchungen und Beanspruchbarkeiten für den Bezugszeitraum der Le-bensdauer eine möglichst wirtschaftliche Auslegung (Dimensionierung und konstruktive Durchbildung) des betrachteten Tragwerks erlaubt. Von einem derartigen System erwartet man zudem, dass bei der Lösung der Entwurfsaufgabe auch alle einzuhaltenden Nachweise mitgeliefert werden. Die Entwicklung eines solchen Entwurfsleitsystems gelingt aber nur, wenn man imstande ist zu erkennen, welche Lösungsparadigmen der Informatik erforderlich sind, und wenn man weiß, wie sich diese mit Lösungsmethoden der Strukturmechanik bzw. des Konstruktiven Ingenieurbaus verbinden lassen.

## 2 Entwurfssystem für Bogenbrücken

Aufbauend auf den Erfahrungen (siehe [1], [2], [3], [4]), die mit einem bereits erprobten, computerbasierten Entwurfs- und Konstruktionsleitsystem für Industriehallen mit Rahmensysteme als Tragwerk (vgl. Abb. 1) gesammelt werden konnten, wird zur Zeit ein lebensdauerorientiertes Entwurfssystem für Stabbogenbrücken mit Hängern (vgl. Abb. 2) aufgebaut. Über den bisher erreichten Entwicklungsstand soll nachfolgend berichtet werden. Gegenstand dieses Beitrags ist aber auch die geplante weitere Umsetzung von Lösungskonzepten zur Realisierung des angestrebten computerbasierten Entwurfssystems.



Abb. 1: Industriehalle



Abb. 2: Stabbogenbrücke

Untersuchungen an vielen bisher ausgeführten Stabbogenbrücken haben gezeigt bzw. zeigen, dass die Hängeranschlussbereiche dieser Brücken (vgl. Abb. 3 und 4) oft ungewöhnlich schädigungssensitiv sind, so dass offensichtlicher Klärungsbedarf zur Abschätzung der Lebensdauer besteht.



Abb. 3: Hänger mit Anschlüssen



Abb. 4: unterer Hängeranschlussbereich

Anders als bei den bislang untersuchten Industriehallen (Abb. 1), bei denen – Erfüllung der üblichen Bemessungsnachweise vorausgesetzt – das Ermüdungsversagen allein durch dynamische Windbelastung, allerdings erst nach außerordentlich langer Zeit (500 Jahre und mehr) eintritt, muss bei vielen Stabbogenbrücken unter Windlast mit erheblich geringeren Lebensdauern als oftmals erwartet gerechnet werden. Hierdurch reduziert sich die Rechenzeit, die erforderlich ist, um merkliche Schädigungen im Tragwerk bzw. in den Schwachstellen des Tragwerks festzustellen, im Vergleich zu Industrie-Rahmensystemen erheblich; dies ist insbesondere dann von Nutzen, wenn man an einer optimalen, beispielsweise möglichst wirtschaftlichen oder wartungsarmen, Auslegung eines Tragwerks interessiert ist.

## 2.1 Formulierung der Entwurfsaufgabe als Optimierungsproblem

Der entscheidende Schritt in Richtung einer informatisch korrekten, allgemein gültigen Formulierung der Entwurfsaufgabe besteht darin, das Entwurfsproblem in ein computergerechtes, äquivalentes Ersatzproblem zu überführen. Dies gelingt dadurch, dass man – bezogen auf die formalisierbaren Aspekte eines Entwurfs – das ursprüngliche Entwurfsproblem als Optimierungsproblem auffasst und dementsprechend ein Optimierungsmodell aufbaut. Das Optimierungsmodell – da Tragwerke Gegenstand der Betrachtung sind, spricht man besser von einem Strukturoptimierungsmodell – dient dann als rationale, mathematisch-numerische Basis für die Implementierung auf dem Computer. Die Überführung eines Entwurfsproblems in ein „äquivalentes“ Optimierungsproblem ist dabei nicht neu; sie wird seit 1960, als L. Smith die Strukturoptimierung erstmals in die Ingenieurwissenschaften einführte [5], zahlreich angewendet.

Beim Aufbau des Strukturoptimierungsmodells muss jedoch darauf geachtet werden, dass die komplexe Realität der ursprünglichen Entwurfsaufgabe voll erfasst wird. Das betrifft sowohl die systemische Komplexität des Tragwerks (Stabbogenbrücke) als auch die Komplexität der stochastischen, zeitvarianten Einwirkungs- bzw. Belastungsprozesse und der aus diesen Prozessen induzierten - sich ebenfalls stochastisch und zeitvariant verhaltenen - Tragwerksantworten (Beanspruchungen). Des weiteren müssen die stochastischen, zeitvarianten Beanspruchbarkeiten auf der Widerstandsseite berücksichtigt werden. Der stochastische Prozesscharakter innerhalb des Optimierungsproblems stellt dabei eine besondere Herausforderung dar und führt auf eine gegenüber der konventionellen Strukturoptimierung neuartige Problemstellung. Es entsteht ein mehrdimensionales, nichtlineares stochastisches Optimierungsproblem mit einem Optimierungskriterium (Zielfunktion) und Nebenbedingungen, die in jedem Zeit- sowie Raumpunkt zu erfüllen sind. Vom mathematischen Standpunkt betrachtet liegt somit ein semi-infinites Optimierungsproblem vor, dessen Lösung nur möglich ist, wenn man verschiedene numerische und nichtnumerische Lösungsparadigmen der modernen Informatik, der stochastischen Strukturmechanik und des Konstruktiven Ingenieurbaus geschickt miteinander vereint. Da im vorliegenden Fall, wie auch schon bei der Untersuchung der Industriehallen, den dynamischen Anteilen der Windlast große Bedeutung in Bezug auf das Schädigungsverhalten - und damit die Lebens- bzw. Nutzungsdauer - zukommt, spielt auch das Wind Engineering eine tragende Rolle.

Das semi-infinites Optimierungsproblem lässt sich in seiner allgemeinsten Form wie folgt definieren:

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{ f_{opt}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}(t)) \mid \mathbf{g}_{opt}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}(t)) \leq 0 \right\} \quad (1)$$

Hierbei bedeuten:

- X** = Entwurfsvektor, dessen Komponenten charakteristische Auslegungsparameter des Tragwerks sind,
- Y** = Vektor der einfachen Zufallsvariablen, sog. Basisvariablen, deren stochastische Verteilung bekannt ist, und die keine Entwurfsvariablen darstellen,
- Z(t)** = zeitvarianter Vektor, dessen Komponenten Zufallsprozesse sind, die in Form von Belastungs- bzw. Beanspruchungszeitfunktionen auftreten,
- $f_{opt}$  = Optimierungskriterium, wobei eine mechanisch sinnvolle Größe (z.B. Gewicht, Spannungsspitzen, o.ä.) oder auch eine Versagenswahrscheinlichkeit als Entwurfsziel verwendet werden kann,
- $\mathbf{g}_{opt}$  = Vektor der Restriktionen, wobei strukturmechanische, konstruktive, und auch zuverlässigkeitsorientierte, probabilistische Restriktionen in Form von Grenzzustandsaussagen zu beachten sind.

Für den Fall, dass ein mechanisch sinnvolles Entwurfsziel, z.B. das Gewicht des Tragwerks, als Optimierungskriterium gewählt wird und zuverlässigkeitsorientierte Restriktionen definiert werden, spricht man auch von einem inversen, zeitvarianten Zuverlässigkeitsproblem. Wenn anderenfalls eine Versagenswahrscheinlichkeit das Entwurfsziel ist, die deshalb nicht mehr im Satz der Restriktionen auftaucht, dafür aber die mechanische Größe, die im Fall des inversen Zuverlässigkeitsproblems das Entwurfsziel war, hat man es mit einem zum inversen Zuverlässigkeitsproblem dualen Problem zu tun.

Derzeitig wird – aus Machbarkeitsgründen – das o.g. Entwurfsleitsystem nur für das inverse Zuverlässigkeitsproblem entwickelt. Als einfach zu handhabendes Entwurfsziel wird dabei anstelle der Gesamtkosten des Tragwerks das Gesamtgewicht des Tragwerks als Optimierungskriterium festgelegt. Unter der Annahme, dass die übrigen Grenzlastzustände der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit erfüllt werden, wird zudem innerhalb des Restriktionsvektors  $\mathbf{g}_{opt}$  als einzige, zuverlässigkeitsorientierte Restriktion  $g_{opt,k}$  nur die bei Stabbogenbrücken als wichtig erkannte Ermüdungsrestriktion für wirbelerregte Schwingungen zugelassen:

$$g_{opt,k} = g_{HCF} = P(D(t) \geq D_{grenz}) - P_{zul} \leq 0, \quad (2)$$

- $g_{HCF}$  = Grenzzustand der Ermüdung (HCF = High Cycle Fatigue),
- $P(\dots)$  = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von (...)
- $D(t)$  = Schädigungsablauf im Makrozeitbereich des stochastischen, zeitvarianten Einwirkungsprozesses bzw. Trägerprozesses,
- $D_{grenz}$  = stochastischer Grenzscha-den, dessen Überschreitung das Ermüdungsversagen charakterisiert,
- $P_{zul}$  = zulässige Versagenswahrscheinlichkeit, die je nach Lastfall zwischen  $10^{-4}$  und  $10^{-7}$  liegen kann.

Die Ermittlung des Schädigungsablaufs  $D(t)$  für die Lebensdauerabschätzung gemäß (2) erstreckt sich dabei über mehrere Ebenen, die z. T. durch höchst unterschiedliche Computerrealisierungen gekennzeichnet sind (Mehrebenenproblem).

In Abb. 5 wird ganz allgemein die Vorgangskette zur Schädigungsermittlung und der damit verbundenen Lebensdauerabschätzung dargestellt: Ausgehend von den Einwirkungen wird die Ermittlung der Belastungs-Zeitfunktionen vorgenommen, die ihrerseits über das strukturelle Tragwerksmodell die Tragwerksantworten bzw. Beanspruchungs-Zeitfunktionen hervorrufen. Aus den Beanspruchungs-Zeitfunktionen werden dann für die maßgeblichen Schwachstellen des Tragwerks Kennfunktionen der Beanspruchungen gewonnen, die mit geeigneten Kennfunktionen für die Beanspruchbarkeiten auf der Widerstandsseite des Tragwerks - in der Zuverlässigkeitsbedingung (2) durch die Größe  $D_{grenz}$  repräsentiert - verglichen werden. Die Vergleichsbetrachtung mündet in eine Lebensdauerabschätzung ein, analog zur Vorgehensweise beim üblichen Betriebsfestigkeitsnachweis. Gegenüber klassischen Betriebsfestigkeitsnachweisen werden jedoch weiterführende stochastische Zuschärfungen eingearbeitet, zum Beispiel wird der Grenzscha-den selbst als stochastisch streuende Größe definiert.

Bei der Umsetzung der einzelnen Ebenen des Ablaufs zur Lebensdauerabschätzung kommt es dabei nicht – wie etwa in der Schädigungsmechanik (Continuum Damage Mechanics) – darauf an, die „absolute Detailschärfe“ zu erreichen. Da die Strukturoptimierung und damit die optimale Auslegung des Tragwerks im Vordergrund des Interesses stehen, reicht es im Hinblick auf den enormen Rechenaufwand bei der Optimierung aus, „nur“ hinreichend genaue Abschätzungen der Lebensdauer anzustreben. Was man folglich für die stochastische Strukturoptimierung braucht, ist eine aussagekräftige „operationale Vergleichsplattform“, die

es erlaubt, miteinander konkurrierende, durch den später verwendeten Optimierungsalgorithmus erzeugte „Entwurfskandidaten“ gleichrangig zu bewerten.

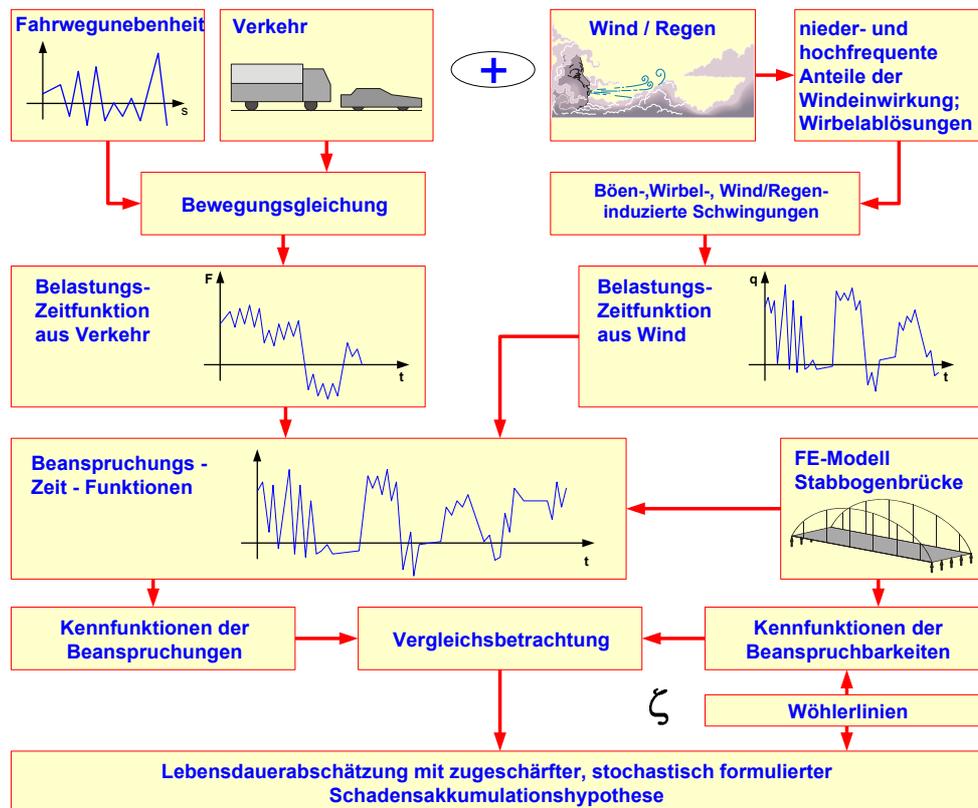


Abb. 5: Ablauf zur Lebensdauerabschätzung

## 2.2 Schwachstellenanalyse

Das oben definierte Optimierungsproblem und die dort eingebettete Lebensdauerabschätzung setzen zwingend voraus, dass man die kritischen Stellen, an denen das Tragwerk im Bezugszeitraum der Lebens- bzw. Nutzungsdauer versagt oder möglicherweise versagen kann, genau kennt. Die Lokalisierung von möglichen Schwachstellen (Schwachstellenanalyse) ist folglich ein wichtiger Schritt im Entwurfskonzept und stellt eine wichtige Ebene innerhalb des Mehrebenenproblems dar.

Für die - als ein mögliches Referenztragwerk verwendete - Stabbogenbrücke in Bockholt wurde eine derartige Schwachstellenanalyse im Hinblick auf Querschwingungen infolge Wirbelablösung durchgeführt, da diese für kritische Hänger der Brücke als besonders schadigungsrelevant im Hängeranschlussbereich erkannt wurden: Wirbelerregte Schwingungen quer zur Windrichtung treten insbesondere bei kreisförmigen Querschnitten, wie Hängern, auf. Ab einer bestimmten Windgeschwindigkeit entstehen im Totbereich des Hängers sich aus der Strömung des Windes ablösende Wirbel. Ist der Unterschied zwischen der Wirbelablösefrequenz und der maßgeblichen Eigenfrequenz des Hängers klein ( $<15\%$ ), wird der Wirbelablöseprozess mit der Schwingung des Hängers synchronisiert und die Wirbelablösefrequenz gleicht sich der Hängereigenfrequenz an. Diese Angleichung nennt man Lock-in-Effekt. Die Breite des Lock-in-Bereichs hängt dabei von der Schwingungsamplitude des Hängers ab.

Gefährdungen durch böeninduzierte Schwingungen, bei denen Schwingungen infolge der Schwankungsanteile des Windes um eine – durch den statischen Windanteil verursachte – statische Auslenkung auftreten, waren bei der betrachteten Brücke nicht relevant. Wind-

Regen induzierte Schwingungen, die oftmals kritisch sind, blieben vorerst unberücksichtigt, um weiteren, zusätzlichen Forschungsbedarf zu vermeiden. Auch Ermüdungsversagen infolge Verkehr wurde nicht in Betracht gezogen.

Der vorgenommenen Schwachstellenanalyse wird ein Finite-Element-Modell der Brücke zu Grunde gelegt. Hierbei wird der korrekten Erfassung der Einspannverhältnisse und den einwirkenden Zugkräften in den Hängern größte Bedeutung beigemessen, da eine genaue Erfassung der Eigenfrequenzen und Eigenformen der Hänger unabdinglich ist. Als maßgebliche Windbelastung dient eine Quererregerkraft  $F(t)$ , die dem Ansatz von Ruscheweyh für laminare Anströmung folgt [6]. Es wird dabei angesetzt:

$$F(t) = \frac{\rho v^2(t)}{2} C_{lat} d \sin \phi(t) L_w \quad (3)$$

mit

- t = Zeit
- $\rho$  = Luftdichte
- v = mittlere Windgeschwindigkeit
- $C_{lat}$  = aerodynamischer Erregerkraftbeiwert
- d = Hängerdurchmesser
- $L_w$  = Wirklänge = 6 d

sowie der Phase  $\phi(t)$  der Quererregerkraft mit

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (4)$$

wobei

- $\omega(\tau)$  = Kreisfrequenz der Erregerkraft im Zeitpunkt t.

Die Kreisfrequenz hängt dabei davon ab, ob die Windgeschwindigkeit im kritischen Lock-in-Bereich ist oder nicht. Außerhalb des Lock-in-Bereichs wird mit der Strouhal-Zahl S ( $S \approx 0.2$  für Kreiszyylinder) die Kreisfrequenz

$$\omega(\tau) = \frac{2\pi S v(\tau)}{d} \quad (5)$$

verwendet, im Lock-in-Bereich dagegen

$$\omega(\tau) = 2\pi f \quad (6)$$

gesetzt, wobei

- f = Eigenfrequenz des Hängers.

Unter der vereinfachten Annahme, dass die Windgeschwindigkeit während eines Windereignisses (Wind mit einer Dauer im Minuten- bzw. Stundenbereich) linear mit der Zeit zunimmt, werden bei der dynamischen FE-Analyse alle Hänger der Stabbogenbrücke (vgl. Abb. 6) gleichzeitig quer zur Windrichtung angeregt. Die Amplituden der Quererregerkräfte F sind bei

allen Hängern (Typ 1 bis 5, s. Abb. 6) gleich; ihr zeitlicher Verlauf ist aber von Hänger zu Hänger unterschiedlich, da jeder einzelne Hänger eine andere Eigenfrequenz hat, die einen unterschiedlichen Lock-in-Bereich zur Folge hat. Die dynamische Berechnung beruht auf der bekannten Zeitschrittintegration nach Newmark-Wilson, mit der Verformungs-Zeitverläufe numerisch stabil berechnet werden können. Für die Systemdämpfung (innere Dämpfung mit Material- und Strukturdämpfung) wird – abgestützt auf Messungen – ein logarithmisches Dämpfungsdekrement von  $\delta = 0.0018$  gewählt. Die Dämpfung wird dabei rechnerintern durch Abmindern der berechneten Verschiebungen und Geschwindigkeiten nach jedem Iterationsschritt realisiert.

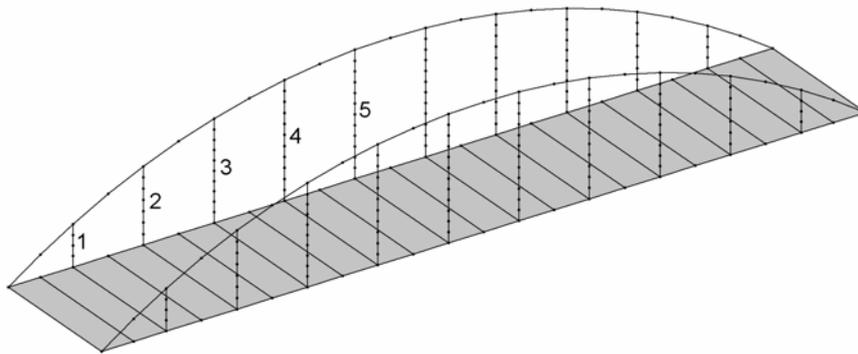


Abb. 6: FE-Modell der Brücke Bockholt

Nach Auswertung der Berechnungsergebnisse zeigt sich, dass - anders als erwartet - der Hänger vom Typ 2 (vgl. Abb. 6) die größten Schwingungsamplituden aufweist und damit auch die größten Doppelspannungsamplituden hat, die später als geeigneter Schädigungsindikator für die Schadensakkumulation herangezogen werden sollen. Die Verwendung der Doppelspannungsamplituden zur Erfassung von Schädigungen lehnt sich an die Vorgehensweise beim klassischen, in der Ingenieurpraxis anerkannten Betriebsfestigkeitsnachweis an, da dieses Konzept bereits bei der Lebensdauerabschätzung der oben erwähnten Industriehallen erfolgreich war.

### 2.3 Verwendung eines Strukturspannungskonzeptes

Die Lokalisierung des für das Ermüdungsversagen infolge Querschwingung maßgeblichen Hängers fokussiert zwar die Lebensdauerabschätzung auf eine bestimmte Stelle im Gesamttragwerk, für quantitative Aussagen über die interessierenden Spannungen und ihre Verteilung, insbesondere über die Größe von Spannungsspitzen im Detail, reicht sie aber nicht aus. Aus diesem Grund muss eine weitere Modellierebene betrachtet werden: die Modellierung des Hängeranschlussbereichs. Hierbei wird dem so genannten Strukturspannungskonzept gefolgt, das sich bei der Berechnung der Lebensdauer für Bauteile unter betrieblichen Belastungsfolgen (vgl. [7]) neben dem bekannten Nennspannungs-, Kerbspannungs- und Kerbgrundkonzept sowie dem bruchmechanischen Konzept bewährt hat.

Das Strukturspannungskonzept berücksichtigt Details der konstruktiven Ausbildung im maßgeblichen Bauteil, wie beispielsweise geometrische Kerben, Steifigkeitsverhältnisse u.dgl., so dass die Strukturspannungen vor Ort gut erfasst werden. Unberücksichtigt bleiben allerdings Einflüsse von Schweißnähten. Um zu möglichst genauen Werten der interessierenden Strukturspannungen zu kommen, die gemäß Abb. 5 die Grundlage für den Vergleich mit experimentell gewonnenen Wöhlerlinien<sup>1</sup> bilden, wird der Hängerausschlussbereich mit finiten Scheibenelementen für die Bleche und Volumenelemente für die – an die Bleche angeschlossenen – Hänger modelliert. Die gewählte Finite-Element-Idealisierung ist der Abb. 7 zu entnehmen.

<sup>1</sup> erwähnt sei, dass bei diesem Vergleich die Wöhlerlinie des Bauteils unter Berücksichtigung seiner Gestaltsfestigkeit (bzgl. Größen-, Oberflächen- und Kerbeinflusses) abgeschätzt werden muss

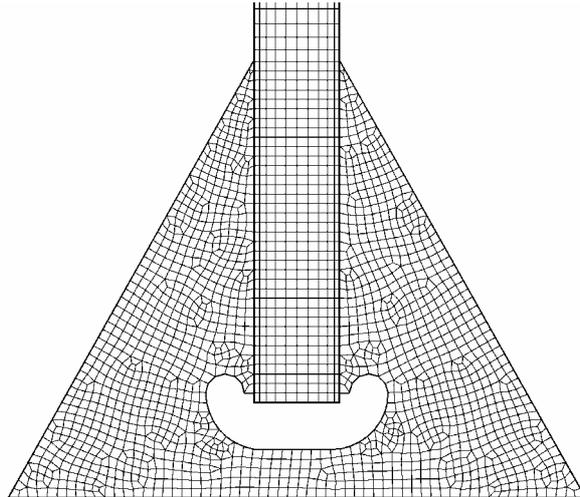


Abb. 7: Finite-Element-Modell des Hängeranschlussbereichs

Die Strukturspannungen infolge Querschwingung werden dabei aus den Schnittlasten der zuvor (s. Kap. 2.2) beschriebenen Schwingungsanalyse über eine Multiplikation mit Spannungskonzentrationsfaktoren ermittelt. Zur Ermittlung dieser Faktoren wird eine FE-Analyse durchgeführt, bei der drei Einheitslastfälle definiert werden:

- |             |   |
|-------------|---|
| Lastfall 1: | Normalkraft im Hänger   |
| Lastfall 2: | Querkraft parallel zur Ebene des Anschlussblechs, 1 m über der Einspannung des Blechs         |
| Lastfall 3: | Querkraft normal zur Ebene des Anschlussblechs, ebenfalls 1 m über der Einspannung des Blechs |

Die für die o.g. Lastfälle 1 bis 3 ermittelten Spannungen sind dabei als Spannungskonzentrationsfaktoren zu bewerten.

In Abb. 8 sind die zum Lastfall 3 berechneten Vergleichsspannungen in  $\text{kN/cm}^2$  dargestellt.

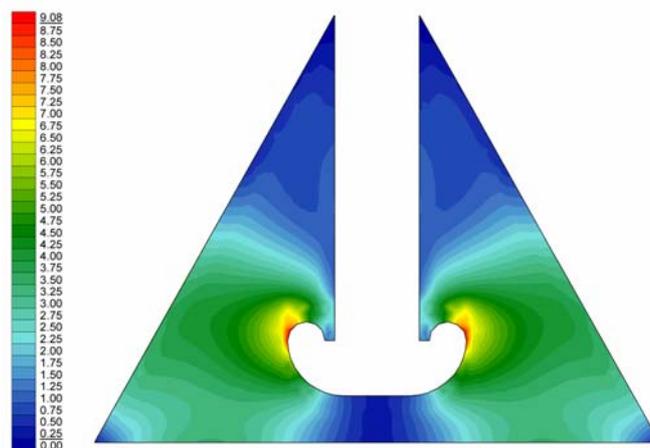


Abb. 8: Spannungsverteilung für den Einheitslastfall 3

Aus der Verteilung der Spannungskonzentrationsfaktoren ist die Schwachstelle, die mit der Schwingungsanalyse am Gesamtsystem nur grob lokalisiert werden konnte, punktgenau im zweidimensional aufgelösten Hängeranschlussbereich festlegbar.

## 2.4 Stochastische Strukturanalyse/Kovarianzanalyse

Zur Grob- und Feinlokalisierung der relevanten Schwachstellen im Tragwerk reichen die oben beschriebenen deterministischen Berechnungen aus. Eine realitätsnahe Lebensdauerprognose muss aber im Hinblick auf die vielen Unwägbarkeiten im Zeitverlauf der Tragwerksnutzung die stochastische Prozessnatur von Einwirkungen, Beanspruchungen sowie Beanspruchbarkeiten berücksichtigen. Im Rahmen des vorliegenden Beitrags soll deshalb auf die Erweiterung des Entwurfsleitsystems auf stochastische Prozesse eingegangen werden. Die Erweiterung ist jedoch zur Zeit noch Gegenstand der Forschung und noch nicht abgeschlossen. Das Konzept der stochastischen Erweiterung wurde jedoch schon bei der Entwicklung des o.e. Entwurfsleitsystems für Industriehallen erfolgreich eingesetzt, so dass eine analoge Übertragung auf die Situation bei Stabbogenbrücken[SFB 398] zielführend ist.

Dreh- und Angelpunkt der stochastischen Erweiterung sind die Newtonsche Bewegungsgleichung für Tragwerke, die als lineare diskrete Schwingungssysteme in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (7)$$

beschrieben werden können, wobei

$\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$  = Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix,  
 $\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$  = Strukturantworten,  
 $\mathbf{f}(t)$  = ggf. mehrfach korrelierte Zufallserregungen/Einwirkungen

Kann lineares Verhalten unterstellt werden, vereinfacht sich die Berechnung erheblich. Insbesondere reduziert sich der Aufwand der durchzuführenden stochastischen Optimierung, die durch eine wiederholt zu durchlaufende Iterationsschleife gekennzeichnet ist, wobei die Anzahl der Wiederholungen a priori unbekannt ist. Lineares Verhalten kann dann angenommen werden, wenn drei Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Die Berechnung gemäß (7) erfolgt um die statische Mittellage als den Arbeitspunkt, der durch eine statische Vorlaufrechnung mit dem Mittelwert der stochastischen Belastung erfolgt, so dass bereits der größte Teil eventueller Nichtlinearitäten erfasst ist.
2. Phasenverschiebungen von Schwingungen der gestützten und der zu stützenden Bauteile finden nicht statt.
3. Die nichtlineare Abnahme von Schwingungsamplituden infolge Dämpfung kann näherungsweise gut erfasst werden.

Für lineare Schwingungssysteme ist bekannt, dass ihre Schwingungsamplituden bei Erregung des Tragsystems mit einem stochastischen Prozess, der im Bereich der Momentandynamik näherungsweise gaußsche Charakteristik<sup>2</sup>, d.h. Stationarität und Ergodizität, aufweist, gleichfalls eine gaußsche Verteilungsdichte haben. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der kinematischen Größen  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$  vereinfacht sich damit gegenüber allgemeinen stochastischen Prozessen grundlegend. Die Mittelwerte der Kinematiken können direkt aus den Bewegungsgleichungen (7) bestimmt werden. Zur Berechnung der ebenfalls interessierenden Varianzen der Schwingungsantwort, die zusammen mit den Mittelwerten den betrachteten Zufallsprozess hinreichend genau beschreiben, stehen dabei für lineare Systeme ausgefeilte Methoden der linearen Systemtheorie (Spektralanalyse und Kovarianzanalyse) zur Verfügung.

---

<sup>2</sup> erkennbar bei einer spektralen Zerlegung von Zeitreihen der Einwirkung

Die Kovarianzanalyse (vgl. [8], [9], [10]) spart gegenüber der Spektralanalyse beträchtlich Rechenzeit ein, was sich zusätzlich positiv in Bezug auf die stochastische Optimierung auswirkt. Aus diesem Grund wird die Kovarianzanalyse als Basismethode zur direkten Ermittlung der Varianzen gewählt.

Alle Varianzen der Schwingungsantwort werden bei der Kovarianzanalyse über die Kovarianzmatrix, hier mit  $\mathbf{P}_{z_G z_G}$  bezeichnet, gewonnen. Auf eine ausführliche Herleitung der Matrix  $\mathbf{P}_{z_G z_G}$  soll verzichtet werden, da hierzu auf die umfangreichen Vorarbeiten [1], [2], [3], [4]), verwiesen werden kann. Nur das Wesentliche der Vorgehensweise sei erläutert, um die Schlüsselstellung der Kovarianzmatrix für die Lebensdauerabschätzung mit Wahrscheinlichkeitsaussagen gemäß (2) deutlich zu machen.

Zunächst sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen (3) in eine Zustandsraumdarstellung zu überführen. Man erhält so ein lineares Vektordifferentialgleichungssystem der Form

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \quad (8)$$

oder verkürzt

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{f}(t). \quad (9)$$

Damit sich das in der linearen Systemtheorie entwickelte mathematische Lösungsrepertoire nutzen lässt, muss die stochastische Erregerlast  $\mathbf{f}(t)$ , die einem „farbigen Rauschen“ entspricht, mittels eines Formfilters auf „weißes Rauschen“ zurückgeführt werden. Dies erfordert eine sog. Realisierung. Der Formfilter, der durch

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_1(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{f}(t) &= \mathbf{C}_1 \mathbf{z}_1(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

gegeben ist, wobei

$\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1$  = zu berechnende Formfiltermatrizen  
 $\mathbf{w}(t)$  = gegebenes weißes Rauschen

lässt sich ebenfalls als lineares Vektordifferentialgleichungssystem darstellen. Das mathematisch völlig gleichartige Aussehen des Gleichungssystems (8) bzw. (9), auch als Strukturfilter bezeichnet, und des Formfilters (10) für den Lastprozess erlaubt die Verkettung zu einem Gesamtfiter. Zuvor erhalten dazu die Kinematiken  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}$  des Tragsystems den Index 2 (Tragwerk), während der Index 1 das Lastsystem kennzeichnet. Es ergibt sich dann

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_1(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \mathbf{z}_1(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{D}_1 \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) \quad (11)$$

bzw.:

$$\dot{\mathbf{z}}_G(t) = \mathbf{A}_G \mathbf{z}_G + \mathbf{B}_G \cdot \mathbf{w}(t) \quad (12)$$

Hierbei ist  $\mathbf{T}$  eine Kopplungsmatrix.

Das somit entstandene Gleichungssystem (11) für das Gesamtsystem (Tragwerk + Last) wiederum lässt sich in die äquivalente Ljapunow-Matrizengleichung

$$\mathbf{A}_G \mathbf{P}_{Z_G Z_G} + \mathbf{P}_{Z_G Z_G} \mathbf{A}_G^T + \mathbf{B}_G \mathbf{B}_G^T = 0 \quad (13)$$

mit

$$\mathbf{P}_{Z_G Z_G} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}_G t} \cdot \mathbf{B}_G \mathbf{B}_G^T \cdot e^{\mathbf{A}_G^T t} \cdot dt = \mathbf{P}_{Z_G Z_G} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xz_1} \\ \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xz_1} \\ \mathbf{P}_{z_1x} & \mathbf{P}_{z_1x} & \mathbf{P}_{z_1z_1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

umformen, die dann mit bekannten Methoden der Systemtheorie die gesuchten Varianzen für die Kinemat  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}$ , genauer gesagt die spektralen Momente  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_4$ ,  $\lambda_4$  der Autospektren des stochastischen Antwortprozesses, liefert.

## 2.5 Zuverlässigkeitsberechnung

Aufbauend auf der Kovarianzanalyse lässt sich der stochastische Charakter der - für das Ermüdungsverhalten als ausschlaggebend angesehenen - Doppelspannungsamplituden  $\Delta\sigma$  erfassen, deren Bedeutung aus den klassischen Betriebsfestigkeitsanalysen (Palmgren-Miner bzw. S-N-Verfahren) hinlänglich bekannt ist. Über die im Kapitel zuvor bereits erwähnten spektralen Momente der Kinemat  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $\ddot{\mathbf{x}}$ , die über den Vektor  $\mathbf{\Lambda}$  mit

$$\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4\}^T \quad (15)$$

in das Mehrebenenproblem eingebracht werden, kann eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Doppelspannungsamplituden  $\Delta\sigma$  angegeben werden mit

$$f_{\Delta\sigma}(\Delta\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \exp\left(\frac{2 \cdot \Delta\sigma}{g_1 \sqrt{\lambda_0}}\right) + \frac{g_2}{4\lambda_0 R^2} \cdot \Delta\sigma \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\sigma}{2R \sqrt{\lambda_0}}\right)^2\right) + \dots \quad (16)$$

$$\dots + \frac{g_3}{4\lambda_0} \cdot \Delta\sigma \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\sigma}{2\sqrt{\lambda_0}}\right)^2\right)$$

wobei

$$R = \frac{\alpha - x_m - g_1^2}{1 - \alpha - g_1 + g_1^2}, \quad g_2 = \frac{1 - \alpha - g_1 + g_1^2}{1 - R}, \quad g_1 = \frac{2(x_m - \alpha^2)}{1 + \alpha^2}, \quad g_3 = 1 - g_1 - g_2 \quad (17)$$

als Partizipationsfaktoren bezeichnet werden und

$$x_m = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_4}} \quad (18)$$

die mittlere bezogene Frequenz der Spannung ist. Die Dichtefunktion (16) wurde schon von Dirlik [11] vorgeschlagen; sie basiert auf einer analytischen, semi-empirischen Zählmethode und hat den großen Vorteil, dass gegenüber den üblichen Zählmethode, die sonst zur Ermittlung von Kennfunktionen für stochastische Beanspruchungen (vgl. Abb. 5) eingesetzt werden, wie etwa die einparametrische Spitzenwert-, Klassendurchgangs- bzw. Spannenverfahren oder das zweiparametrische Rainflow-Verfahren, erhebliche Rechenzeit gespart wird. Für die beabsichtigte Optimierung vergrößert sich damit der Gewinn an Rechenzeit um ein Weiteres.

Mit Kenntnis der Dichtefunktion nach Dirlik und durch Verwendung einer geeigneten Wöhler-Kurve für das mit der Schwachstellenanalyse identifizierte Bauteil, im vorliegenden Fall den Hängeranschlussbereich des kritischen Hängers der Brücke, lässt sich dann für den Mikrozeitbereich der Momentendynamik eine sog. Ermüdungs-Last-Funktion der Form

$$\Psi_{ELF} (t_{stat}, \mathbf{v}_{ref}, (f_{\Delta\sigma}(\Delta\sigma); \mathbf{\Lambda}) | \mathbf{v}_{ref}) \quad (19)$$

aufbauen, wobei

- $t_{stat}$  = Dauer des 10-Minuten Windes als elementares Fastereignis mit stationärem Verhalten
- $\mathbf{v}_{ref}$  = mittlere Windgeschwindigkeit als Referenzmaß
- $\mathbf{\Lambda} | \mathbf{v}_{ref}$  = bedingte Wahrscheinlichkeit für  $\mathbf{\Lambda}$  bei Annahme von  $\mathbf{v}_{ref}$

Details zur Konstruktion der Funktion  $\Psi_{ELF}$  können der Arbeit [3] entnommen werden, wo Vorschläge für Stahlhallenrahmen erarbeitet wurden. Die analoge Anwendung auf Stabbo-genbrücken wird dabei als machbar angesehen.

Für die tatsächliche Windeinwirkungsdauer  $t_D$  kann dann mit der Ermüdungs-Last-Funktion (19) ein elementarer Schädigungssprung

$$\Delta D = \frac{t_D / t_{stat}}{N_D \Delta\sigma_D^p} \cdot \Psi_{ELF} \quad (20)$$

ermittelt werden, wobei zusätzlich die Dauerfestigkeit  $\Delta\sigma_D$ , die zugehörige Lastspielwechselzahl  $N_D$  (z.B.  $2 \cdot 10^6$ ) sowie der Neigungswinkel der für das betrachtete Bauteil maßgeblichen Wöhlerlinie eingeht.

Zur Ermittlung der eigentlich interessierenden Schädigung  $D(t)$  gemäß (2) kommt man, wenn man die jeweiligen Schädigungssprünge  $\Delta D$  nach (20) im Bezugszeitraum der Lebens- bzw. Nutzungsdauer „akkumuliert“. Die Akkumulation wird als Quasi-Evolutionsgleichung formuliert, bei dem ein Trägerprozess für die Schädigungsevolution im Makrozeitbereich definiert wird. Dieser Trägerprozess sammelt die elementaren Schädigungseinträge  $\Delta D$  aus dem Mikrozeitbereich ein und transportiert sie in den Makrozeitbereich der irgendwann sichtbaren Schädigungen. Die Evolutionsgleichung ist dabei eine „einfache“ Summation

$$D(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \Delta D_n, \quad (21)$$

wobei  $N(t)$  die probabilistische Natur der Akkumulation beschreibt und eine stochastische Variable darstellt.

Der langjährig andauernde Trägerprozess im Makrozeitbereich wird für Windeinwirkungen am besten als mehrfach markierter, stochastischer Erneuerungsprozess (vgl. Abb. 9) modelliert (vgl. hierzu auch [3]).

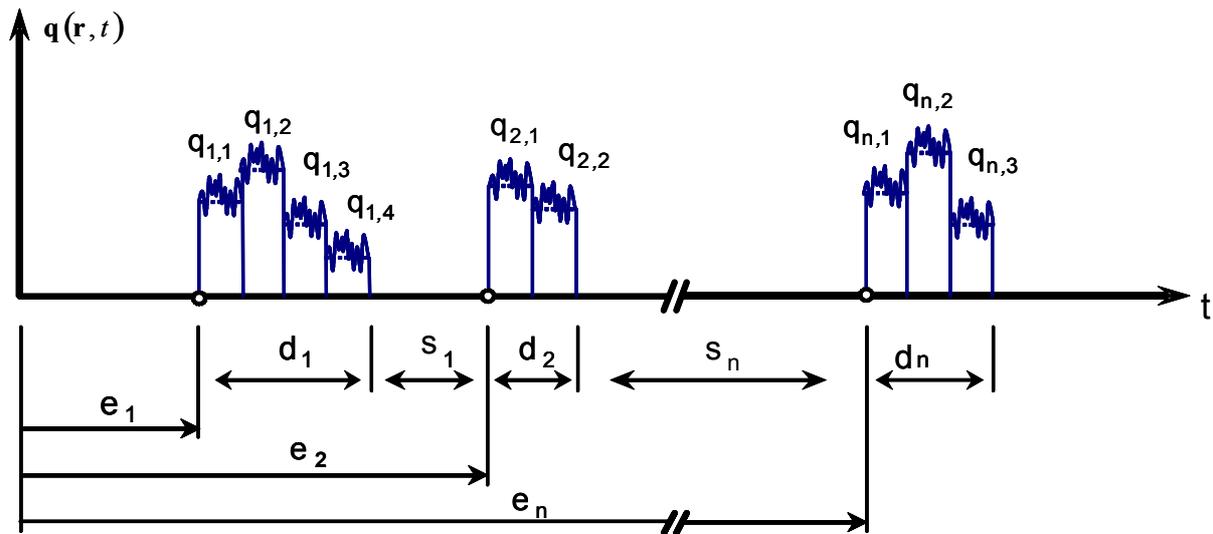


Abb. 9: Trägerprozess im Makrozeitbereich

Der Erneuerungsprozess (gefilterter Poisson-Prozess) besitzt dabei für das Windgeschehen typische Eigenschaftsparameter, wie

1. die zufälligen Lasteintritts- bzw. Erneuerungszeitpunkte  $e_i$  für das Winddruckfeld  $q$ , ausgedrückt über exponentiell verteilte Ruhezeiten  $s_i$ ,
2. die zufälligen Weibull-verteilten Lastintensitäten in Form von mittleren Windgeschwindigkeitsdrücken  $q_{i,j}$ , und
3. die zufälligen, ebenfalls exponentiell verteilten Lastdauern  $d_i$ .

Jeder im Rahmen der Optimierung in Betracht zu ziehende „Entwurfskandidat“, der – bei der Suche nach einem besten Entwurf mit anderen „Entwurfskandidaten“ wetteifert – muss innerhalb der Optimierungsiteration einer vollständigen stochastischen Lebensdauersimulation unterzogen werden. Hierbei sind die unterschiedlichen Dichtefunktionen der beteiligten stochastischen Basisvariablen auf Einwirkungs- und Widerstandsseite zu beachten. Es ergeben sich deshalb für jeden Entwurfskandidaten unterschiedliche „Ermüdungspfade“, die in Abb. 10 dargestellt werden.

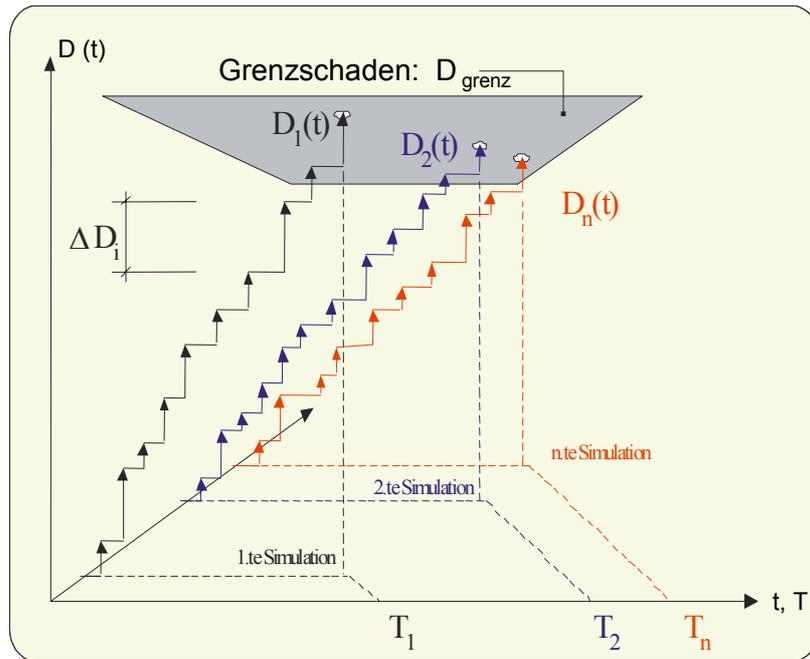


Abb. 10: Stochastische Simulation mit verschiedenen Ermüdungspfadern

Über alle Ermüdungspfade hinweg ist dann gemäß der Zuverlässigkeitsrestriktion (2) zu überprüfen, ob mit

$$D(t) \geq D_{\text{grenz}} \quad (22)$$

Versagen eintritt. Die Wahrscheinlichkeit  $P(t)$  für dieses Versagen darf hierbei die zulässige Schranke  $P_{\text{zul}}$  nicht überschreiten.

### 3 Aufbau eines verbesserten Windlastmodells

Das vereinfachte, nur für laminare Anströmung geltende Windlastmodell nach Ruscheweyh [6], das bislang der Ermittlung wirbelinduzierter Schwingungen zugrunde gelegt wurde, soll im weiteren Verlauf der Forschungsarbeit verbessert werden. Diese Verbesserung ist angeordnet, weil die Qualität der Lebensdauerabschätzung entscheidend von der Güte der Modellierung für die maßgeblichen Einwirkungen abhängt.

Nach dem derzeitigen Erkenntnisstand lassen sich die für die Querschwingungen infolge Windwirbelablösung verantwortlichen Erregerkräfte wesentlich besser mit einem Faltungsmodell erfassen, das auch für turbulente Windgeschwindigkeitsfelder gilt. Das Modell beruht auf einem Faltungsintegral (vgl. [12]). Dieser Vorgehensweise folgend lässt sich die Quererregerkraft aus Gleichung (3) zuschärfen mit

$$F(t) = K \frac{\rho}{2} d C_s L_w \int_0^t v^n(\tau) e^{\alpha(\tau)} \cos \phi(\tau) d\tau,$$

mit 
$$\alpha(\tau) = \int_t^\tau \xi(x) dx, \quad \phi(\tau) = \int_t^\tau \omega(x) dx + \phi_0. \quad (23)$$

$$\xi(x) = \sqrt{\ln 4} I_v \omega(x), \quad \omega(x) = \frac{2\pi S}{d} v(x).$$

wobei die gegenüber (3) neu hinzutretenden Größen folgende Bedeutung haben:

- $C_s$  : = aerodynamischer Kraftbeiwert
- $\alpha$  : = Exponent für den Abklingvorgang, abhängig vom Turbulenzgrad  $I_v$
- $I_v$  = Turbulenzgrad
- $K, n$  = Fitparameter zur Anpassung an reale Verhältnisse

Der Lock-in-Bereich wird über den Parameter berücksichtigt, wobei gilt:

$$\phi_0 = -\arctan \frac{u}{\omega_0 y}. \quad (24)$$

$\omega_0$  = Eigen-Kreisfrequenz des Hängers.

Außerhalb des Lock-in-Bereichs ist

$$\phi_0 = 0 \quad (25)$$

wobei im Verhältnis  $u/y$  der Gleichung (24)

- $u$  = die örtliche Schwinggeschwindigkeit
- $y$  = der örtlicher Ausschlag des Hängers

sind.

Das zugeschärfte Modell zeigt im Vergleich mit Messungen an einem Einmassenschwinger (starrs, federnd gelagertes Rohr) bei Schwingung quer zur Windrichtung gute Übereinstimmung. Weitere Messungen, sowohl im Grenzschichtwindkanal des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum und an einer anderen Referenzbrücke (Hiltruper Brücke, s. Abb. 2, 3 und 4) sind in Vorbereitung.

## 4 Zusammenfassung

Der lebensdauerorientierte Entwurf von Stabbogenbrücken, mit Zuschnitt auf die Auslegung von Hängern, die durch Ermüdung infolge wirbelinduzierter Querschwingungen gefährdet sind, wird als stochastisches semi-infinites Optimierungsproblem formuliert. Zur Lösung dieses Problems sind mehrere Modellierungsebenen erforderlich, so dass ein Mehrebenenproblem entsteht. Es wird der derzeitige Entwicklungs- und Implementierungsstand bei der Umsetzung des Mehrebenenproblems in ein Entwurfsleitsystem (Software) aufgezeigt. Außerdem werden die Konzepte der noch ausstehenden Forschungsarbeit, die bereits erfolgreich beim lebensdauerorientierten Entwurf von Industriehallen mit Rahmensystem als Haupttragwerk eingesetzt wurden, diskutiert und ihre Einbildung in die bisher umgesetzte Forschungsarbeit erläutert.

## 5 Danksagung

Der DFG wird für die Forschungsförderung im Rahmen des Teilprojekts C5 des Sonderforschungsbereichs SFB 398 „Lebensdauerorientierte Entwurfskonzepte“ Dank ausgesprochen. Ohne die für die III. Phase der Förderung bewilligten Mittel wäre die bisherige Forschungsarbeit nicht möglich gewesen.

## 6 Literatur

- [1] Hartmann, D., Weber, H., Faber, O., Niemann, H.-J.: Lifespan-Oriented Design Concepts of Steel Structures with respect to Random-Load-Response Processes, Proceed. 8<sup>th</sup> Int. Conf. on Computing in Civil and Building Engineering, Aug. 14-17, 2000, Stanford University, California, USA, ASCE, Volume 2, pp. 964-971, ASCE, Reston, Virginia, USA 2000
- [2] Weber, H., Hartmann, D., Lenzen, A., Niemann, H.-J.: Modellierung von mehrfach korrelierten Lasteinwirkungen zur Schwachstellenprognose in der Tragwerksplanung und -überwachung, Dynamische Probleme, Modellierung und Wirklichkeit, Mitteilung des Curt-Risch-Instituts der Universität Hannover, S. 255–269, Hannover, 2000
- [3] Faber, O. U.: Zeitabhängige Zuverlässigkeit schlanker Stahltragwerke unter Windbelastung im Grenzzustand der Ermüdung, Dr.-Ing. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2001
- [4] Hartmann, D.: Lebensdauerorientierter Entwurf von Tragwerken mit Computern – ein Mehrebenenproblem; Festschrift Friedhelm Stangenberg, Aus dem Stahlbeton- und Spannbetonbau und benachbarten Bereichen, Lehrstuhl für Stahlbeton- und Spannbetonbau, Ruhr-Universität Bochum, Oktober 2002
- [5] Schmit, L. A. Jr.: Structural Design by Systematic Synthesis, Proceedings of 2<sup>nd</sup> Conference on Electronic Computation, Structural Division, ASCE, Pittsburg, PA, USA, Sept. 1960
- [6] Ruscheweyh, H.: Ein verfeinertes, praxisnahes Berechnungsverfahren wirbelerregter Schwingungen von schlanken Baukonstruktionen im Wind, Beiträge zur Anwendung der Aeroelastik im Bauwesen, Heft 20. Innsbruck/Lausanne, 1986
- [7] Haibach, E.: Betriebsfestigkeit, Düsseldorf, VDI-Verlag, 1989
- [8] Müller, P.C., Popp, K.: Kovarianzanalyse von linearen Zufallsschwingungen mit zeitlich verschobenen Erregerprozessen, Zeitschrift Angew. Math. u. Mech. 59, T144 – T146, 1979
- [9] Müller, P.C., Schiehlen, W.O.: Lineare Schwingungen, Wiesbaden, Akademische Verlagsgesellschaft, 1976
- [10] Waller, H., Schmidt, R.: Schwingungslehre für Ingenieure, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1989
- [11] Dirlik, T.: Application of Computers in Fatigue Analysis, Ph.D.Thesis, University of Warwick, England, 1985
- [12] Lou, J.: Quasi-stationäre Modellierung und numerische Simulation der Wind-Wechselwirkungen an zylindrischen Bauwerken, Dr.-Ing. Dissertation, Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 97-3, Institut für konstruktiven Ingenieurbau. Ruhr-Universität Bochum, 1997