

Authors

Dudek Mariusz

Cracow University of Technology
Institute of Roads and Railways
Ul. Warszawska 24
31-155 Kraków, Poland
mariusz@transys.wil.pk.edu.pl
Tel. 0048-12-628-2326

Richter Matthias

Chemnitz University of Technology
Faculty of Mathematics
09107 Chemnitz, Germany
matthias.richter@mathematik.tu-chemnitz.de
Tel. 0049-371-531-2669

Zuverlässigkeit und strukturelle Parameter von Verkehrsnetzen

1. Einleitung

Die Zuverlässigkeit eines Verkehrsnetzes hat einen großen Einfluss auf die Beurteilung des Straßennetzes. An Hand von verschiedenen Ring-Radius-Strukturen wird der Nachweis eines Zusammenhangs zwischen gewissen strukturellen Kenngrößen und der Verkehrsnetz-zuverlässigkeit geführt. Das Ziel besteht darin, auf Grund struktureller Analysen Aussagen über die Zuverlässigkeit des Verkehrsnetzes zu treffen. Strukturelle Bewertungen sind mit einem vergleichsweise geringen Aufwand an Input-Daten und Rechenzeit bestimmbar. Der Zusammenhang zwischen diesen Bewertungen und weiteren praxisrelevanten Kenngrößen (wie etwa den mittleren Fahrzeiten) ist seit längerem bekannt ([3], [4]). Diese Untersuchungen werden nun durch die Einbeziehung der Verkehrsnetz-zuverlässigkeit ergänzt.

2. Strukturelle Parameter von Straßennetzen

In [4] wurde festgestellt, dass sich unter vielen möglichen strukturellen Parametern die zwei folgenden am besten zur Beurteilung des Straßennetzes eignen.

- *Dispersion eines Verkehrsnetzes*, das ist die mittlere Anzahl von Bögen auf einem kürzesten Weg zwischen zwei Knoten des Netzes. Weil diese Kennziffer für Netze mit unterschiedlicher Knotenanzahl verwendet wird, sollte man die durchschnittliche Dispersion des Graphen (Quotient aus der Dispersion des Graphen und der Anzahl seiner Knoten) berechnen.
- *Unterentwicklung eines Netzes*, definiert als

$$Km = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j=1}^n [zhko(i,j) - zhk(i,j)],$$

wobei n die Anzahl der Knoten des Netzes ist und $zhk(i,j)$ zu einem geordneten Knotenpaar (i,j) die minimale Anzahl von Kanten angibt, die aus dem Graphen entfernt werden müssen, damit sein Zusammenhang so verloren geht, dass i und j getrennt sind. Bezeichnet $val(i)$ die Anzahl von Kanten, mit denen der Knoten i inzident ist, so gilt offenbar

$$zhk(i,j) \leq \min (val(i), val(j)) =: zhko(i,j).$$

Aus der Vielzahl der theoretisch denkbaren Verkehrsnetzstrukturen spiegelt die Ring-Radius-Struktur die realen Straßennetze am besten wider. Eine Ring-Radius-Struktur ist charakterisiert durch eine Menge R von Ringen R_1, R_2, \dots, R_S (paarweise knotendisjunkte Zyklen), und eine Menge M von radialen Verbindungen, die alle einen Knoten i_0 (das Zentrum) gemeinsam haben. Je zwei radiale Verbindungen haben außer diesem Zentrum keinen Knoten gemeinsam. Außerdem ist jeder Ring zu jeder radialen Verbindung kantendisjunkt.

Solche Ring-Radius-Strukturen kommen in vielen (auch mittelgroßen) Städten vor. Sie sind zum Beispiel geeignet, die Einführung einer Verkehrsberuhigung im Stadtzentrum zu untersuchen. Die Verminderung des Fahrzeugsverkehrs in der Innenstadt ist notwendig, um ihre Funktion als kulturelles Zentrum vor Abbau zu schützen.

Die konkrete Struktur des betrachteten Ring-Radius-Netzes wurde nach der Analyse von realen Straßennetzen von sieben polnischen mittelgroßen Städten gewählt. Das vollständige Modell, das die Basis für die weitere Analyse ist, ist in Abbildung 1 skizziert.

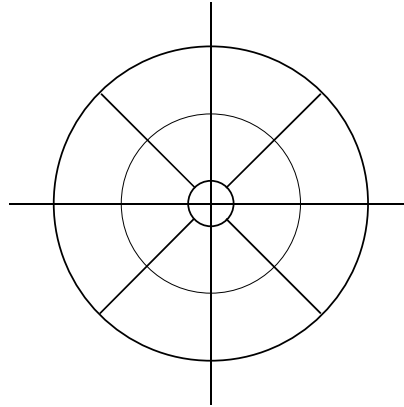


Abbildung 1: vollständige Ring-Radius-Struktur

Eine Besonderheit stellen die vier radialen Straßenzüge dar, die den inneren Ring mit dem Außenring verbinden, aber nicht durch das Zentrum verlaufen. Das in Abbildung 1 dargestellte Straßennetz war der Ausgangspunkt für weitere Modifikationen. Im ersten Schritt der Verkehrsberuhigung wurde die Durchfahrt durch den zentralen Punkt gesperrt. Dann wurde auch der Verkehr im inneren Ring verboten. Es wurden auch Straßennetze mit und ohne Verkehrsberuhigung im Zentralpunkt ohne Außenring, nur mit Innenring und mit allen drei Ringen, aber ohne die oben beschriebenen Radial-Straßen analysiert.

3. Zuverlässigkeit des Verkehrsnetzes

Zur Berechnung der Zuverlässigkeit wird das Verkehrsnetz als bewerteter Graph $G=G(V,A)$ aufgefasst, wobei V die Knoten- und A die Kantenmenge bezeichnet. Jeder Kante k aus A wird eine Durchlasswahrscheinlichkeit p_k zugeordnet. m sei die Anzahl der Kanten, n sei die Anzahl der Knoten in G .

Zur Analyse der Zuverlässigkeit des Verkehrsnetzes ist zunächst die Definition relevanter Zuverlässigkeitskenngrößen notwendig. Hier wird insbesondere die paarweise Zusammenhangswahrscheinlichkeit $P(u,v)$ zweier fixierter Knoten u und v untersucht. $P(u,v)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein funktionstüchtiger Weg zwischen u und v existiert. Ein Weg heißt dabei funktionstüchtig, wenn er nur aus verfügbaren (funktionstüchtigen) Kanten besteht. Es werden die Annahmen getroffen, dass

- alle Knoten absolut zuverlässig sind,
- alle Kanten sich entweder im Zustand "funktionstüchtig" oder "nicht funktionstüchtig" befinden, wobei die Zustände der Kanten voneinander stochastisch unabhängige binäre Zufallsgrößen sind.

Eine Wahlmöglichkeit liegt einerseits in der Festlegung der Knoten u und v . Hier wurden verschiedene Varianten untersucht. Andererseits bestehen noch Freiheiten in der Festlegung der Wahrscheinlichkeit der Funktionstüchtigkeit der einzelnen Kanten. Hier ist es sicher sinnvoll, alle Straßen einer Kategorie (zum Beispiel alle Außenringstraßen) mit der gleichen Bewertung

zu versehen. Zur Unterscheidung der Zuverlässigkeiten zwischen verschiedenen Straßentypen kann etwa die Anzahl der verfügbaren Fahrspuren herangezogen werden.

Zur Berechnung von $P(u,v)$ werden in der Literatur verschiedene Möglichkeiten beschrieben, (vgl. etwa [1], [2]). Ist man insbesondere an einer exakten Berechnung von $P(u,v)$ und nicht nur an einer Abschätzung interessiert, sind die entsprechenden Verfahren numerisch im allgemeinen sehr aufwendig. Für die uns interessierenden Netzstrukturen ist hierbei insbesondere zu beachten, dass auf Grund der Komplexität eine äquivalente Darstellung der Struktur als Kombination von Reihen- und Parallelschaltungen schwer realisierbar und die Auswertung auf Grund der Abhängigkeit der einzelnen Schaltungselemente zudem aufwendig ist.

Sind w_1 und w_2 zwei Wege in G von u nach v , so ergibt sich die Durchlasswahrscheinlichkeit $P(w_j)$ für jeden dieser Wege gemäß

$$P(w_j) = \prod_{k \in w_j} p_k .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass w_1 oder w_2 durchlässig sind, ergibt sich zu

$$P(w_1 \cup w_2) = P(w_1) + P(w_2) - P(w_1 \cap w_2) .$$

Da nun aber w_1 und w_2 Kanten gemeinsam haben können, sind die zugehörigen Ereignisse im allgemeinen nicht stochastisch unabhängig, was die Berechnung von $P(w_1 \cap w_2)$ erschwert. Daher ist es zweckmäßig, solche Kombinationen von „gewählten“ und „nicht gewählten“ Kanten zu finden, die paarweise unvereinbar sind. Dabei soll zu jeder dieser Kombinationen ein Weg von u nach v gehören und alle diese Wege sollen erfasst werden. Eine Möglichkeit wäre offenbar die Untersuchung der Durchlässigkeit *aller* Kombinationen der Möglichkeiten „gewählt“ und „nicht gewählt“ sämtlicher Kanten (vollständige Enumeration). Der von uns verwendete Algorithmus ist ein Branch-and-Bound-Verfahren, das darauf beruht, dass möglichst viele sich einander ausschließende Einzelereignisse, die jeweils zur Durchlässigkeit oder Nichtdurchlässigkeit zwischen u und v führen, zusammengefasst werden. Es sei

- $KW(i)$ die Länge des kürzesten Weges in G vom Knoten i zum Knoten v .
- $M(i)$ die aktuelle *Markierung* von i , dabei sei $M(i)=j$, wenn i von j aus über die Kante (j,i) markiert wurde.

- Weiterhin sei
$$S(k) = \begin{cases} 1, & \text{falls Kante } k \in A \text{ gesperrt ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- EB sei der betrachtete Entscheidungsbaum mit

$$EB(i) = \begin{cases} (k,j), & \text{falls folgende Bedingung (+) erfüllt ist,} \\ (-k,0), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bedingung (+): Der Knoten i des Entscheidungsbaumes ist vom Knoten $i-1$ durch Aufnahme der Kante k aus A entstanden, wobei der Knoten j aus V markiert wurde.

- $P(a)$ sei die zum Ast a des Entscheidungsbaumes gehörende Wahrscheinlichkeit, t sei die aktuelle Tiefe, in der wir uns im Entscheidungsbaum befinden.

Der verwendete Algorithmus besteht nun aus 3 Schritten.

Schritt 1:

Berechne $KW(i)$ für alle i aus V . $M(u):=n+1$. $M(i):=0$ für $i \neq u$. $S(k):=0$ für alle k aus A . $t:=1$. $EB(1):=(m+1,n+1)$. $P:=0$.

Schritt 2:

$t:=t+1$.

Falls es keine nicht gesperrte Kante gibt, die einen markierten mit einem nicht markierten Knoten in G verbindet, gehe zu Schritt 3.

Sonst: Wähle von allen nicht gesperrten Kanten, die einen markierten mit einem nicht markierten Knoten verbinden, ein $k=(i,j)$ mit folgender Eigenschaft aus:
 i ist markiert, j ist nicht markiert, $KW(j)$ ist minimal.
 Markiere $M(j):=i$. Setze $EB(t):=(k,j)$.
 Falls $j \neq v$: Wiederhole Schritt 2.
 Sonst: Berechne $P(a)$ und $P:=P+P(a)$. Ersetze $EB(t):=(-EB(t)[1],0)$. Setze $M(v):=0$.
 Setze $S(|EB(t)[1]|):=1$. Wiederhole Schritt 2.

Schritt 3:

$t:=t-1$.

Falls $EB(t)[1]<0$ setze $S(|EB(t)[1]|):=0$. Wiederhole Schritt 3.

Sonst: Falls $EB(t)[1]=m+1$: Beende den Algorithmus.

Falls $EB(t)[1] \neq m+1$: Ersetze $M(EB(t)[2]):=0$. Ersetze $EB(t):=(-EB(t)[1],0)$. Setze $S(-EB(t)[1]):=1$. Gehe zu Schritt 2.

Beim Ende des Algorithmus entspricht P der gesuchten Zusammenhangswahrscheinlichkeit $P(u,v)$. Man überlegt leicht, dass die zur Bildung von P herangezogenen Summanden zu paarweise unvereinbaren Ereignissen gehören. Jedes solche Ereignis ist mit einem durchlässigen Weg von u nach v verbunden. Desweiteren werden durch den Algorithmus alle für die Durchlässigkeit „günstigen“ Ereignisse erfasst.

4. Einfluss verschiedener Faktoren auf die Zuverlässigkeit.

Zur Berechnung der paarweisen Zusammenhangswahrscheinlichkeiten werden Punkte gewählt, die sich jeweils auf gegenüberliegenden Seiten des Straßennetzes befinden. Es werden 2 Varianten untersucht, die in Abb. 2 dargestellt sind.

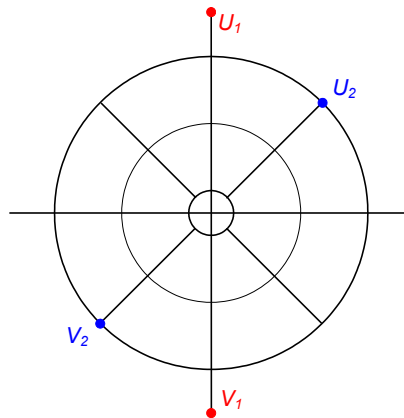


Abbildung 2: Ortsbestimmung der Punkte für die Zuverlässigkeitsanalyse

Die Verbindung (u_1, v_1) charakterisiert eine Verbindung zur Stadtdurchfahrt, wobei Einfahrt und Ausfahrt an den radialen Hauptstraßen erfolgen. Verbindung (u_2, v_2) charakterisiert eine innerstädtische Verbindung zwischen zwei an der Peripherie der Stadt liegenden Punkten.

Für die Verfügbarkeiten der einzelnen Kanten wurden verschiedene Kombinationen von Durchlasswahrscheinlichkeiten betrachtet, wobei diese Wahrscheinlichkeiten entsprechend des jeweiligen Straßenstandards angepasst wurden.

Die Berechnung der Zuverlässigkeit für die vollständige Ring-Radius-Struktur mit und ohne Durchfahrt durch Stadtzentrum konnte wegen des hohen numerischen Aufwandes derzeit noch nicht durchgeführt werden. Aus einer ersten Analyse für acht verbleibende Varianten des Straßennetzes kann man die folgenden Schlussfolgerungen ziehen:

- Die Durchlasswahrscheinlichkeit $P(u_1, v_1)$ reagiert bei allen betrachteten Modifikationen des Netzes sensibler auf eine Veränderung der eben erwähnten Kantenwahrscheinlichkeiten als $P(u_2, v_2)$.
- Bei den betrachteten Modifikationen zeigt es sich deutlich, dass das Vorhandensein des Außenringes beide Zusammenhangswahrscheinlichkeiten am stärksten positiv beeinflusst.
- Je besser das Straßennetz entwickelt ist, desto weiter nähern sich die Durchlasswahrscheinlichkeiten gewissen Grenzwerten an. Bei $P(u_1, v_1)$ entspricht dieser Grenzwert beispielsweise naturgemäß dem Produkt der Zuverlässigkeiten der äußeren beiden Kanten. Kleine Modifikationen in den Zuverlässigkeiten der anderen Kanten haben (bei gut entwickelten Straßennetzen) kaum noch Einfluss auf die Gesamtzuverlässigkeit.
- Die Verkehrsberuhigung im Stadtzentrum kann ohne einen nennenswerten Einfluss auf die Zuverlässigkeit erfolgen, wenn mindestens zwei Ringstraßen vorhanden sind.
- Das Vorhandensein radialer Nebenstraßen beeinflusst die Verkehrsnetzzuverlässigkeit - auch bei der Verbindung (u_2, v_2) - recht wenig.

5. Zusammenhang zwischen Zuverlässigkeit und strukturellen Parametern

Eine Analyse des Zusammenhangs zwischen der Zuverlässigkeit und den im Abschnitt 2 vorgestellten strukturellen Parametern wurde mit 8 Varianten des Straßennetzes durchgeführt. Hier werden zusammenfassend die Ergebnisse für 4 Varianten von Kombinationen von Durchlasswahrscheinlichkeiten der einzelnen Kanten dargestellt. Dadurch erhält man folgende Wechselbeziehung zwischen der Zuverlässigkeit und der Kennziffer der Unterentwicklung des Straßennetzes:

- Für die Punkte (u_1, v_1) , die der Einfahrt und Ausfahrt aus der Stadt entsprechen und an den radialen Hauptstraßen liegen (rote Markierung in Abb. 3):

$$ZV = -1,58 \cdot Km^2 + 0,367 \cdot Km + 0,888 \quad R^2 = 0,48$$

Hierbei bezeichnen ZV – die Zuverlässigkeit des Straßennetzes und
 Km – die Kennziffer der Unterentwicklung des Straßennetzes.

- Für die Punkte (u_2, v_2) , die an der Peripherie der Stadt liegen (blaue Markierung in Abb. 3):

$$ZV = -1,27 \cdot Km^2 - 0,254 \cdot Km + 1,06 \quad R^2 = 0,98$$

Auffällig ist der große Unterschied der Bestimmtheitsmaße bei den beiden betrachteten Beispielen.

Bei der Analyse der Wechselbeziehung zwischen Zuverlässigkeit und durchschnittlicher Dispersion des Straßennetzes erhält man weniger aussagekräftige Ergebnisse:

- Für zwei Punkte (u_1, v_1) , die der Einfahrt und Ausfahrt aus der Stadt entsprechen und an den radialen Hauptstraßen liegen (rote Markierung in Abb. 4):

$$ZV = 0,0258 \cdot Dm^2 - 0,409 \cdot Dm + 1,95 \quad R^2 = 0,48$$

Hierbei bezeichnet Dm – die durchschnittliche Dispersion des Straßennetzes.

- Für zwei Punkte (u_2, v_2) , die an der Peripherie der Stadt liegen (blaue Markierung in Abb. 4):

$$ZV = 0,243 \cdot Dm^2 - 2,17 \cdot Dm + 5,43 \quad R^2 = 0,91$$

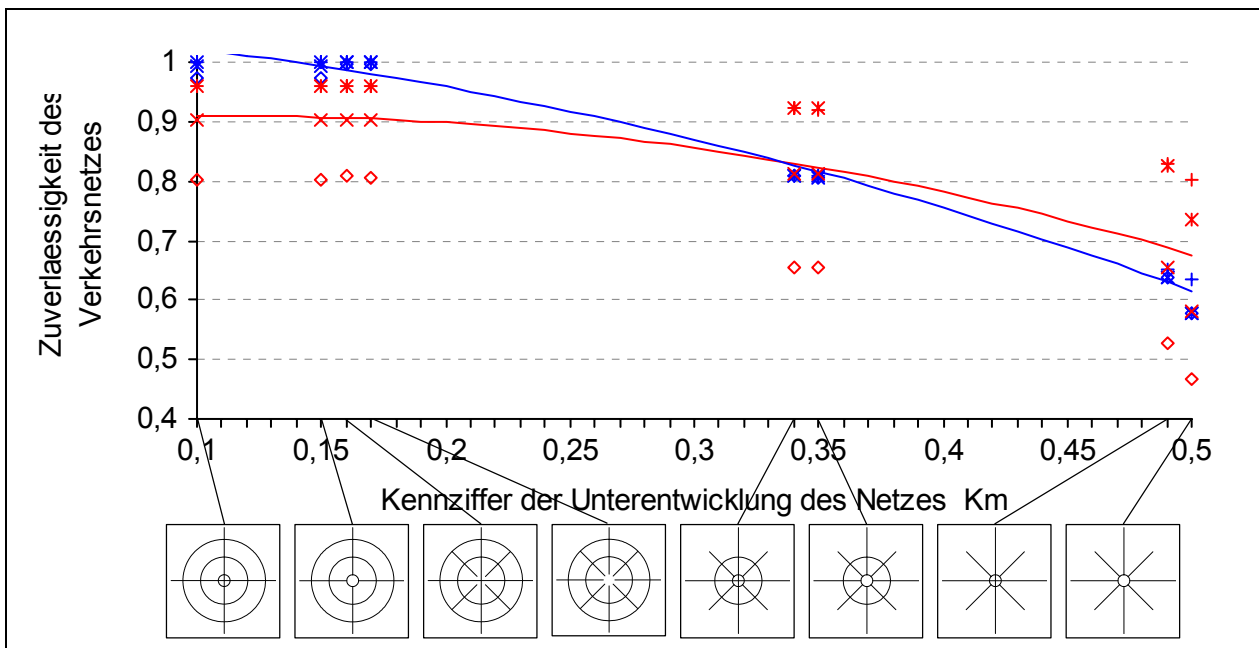


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen Zuverlässigkeit des Straßennetzes und Kennziffer seiner Unterentwicklung

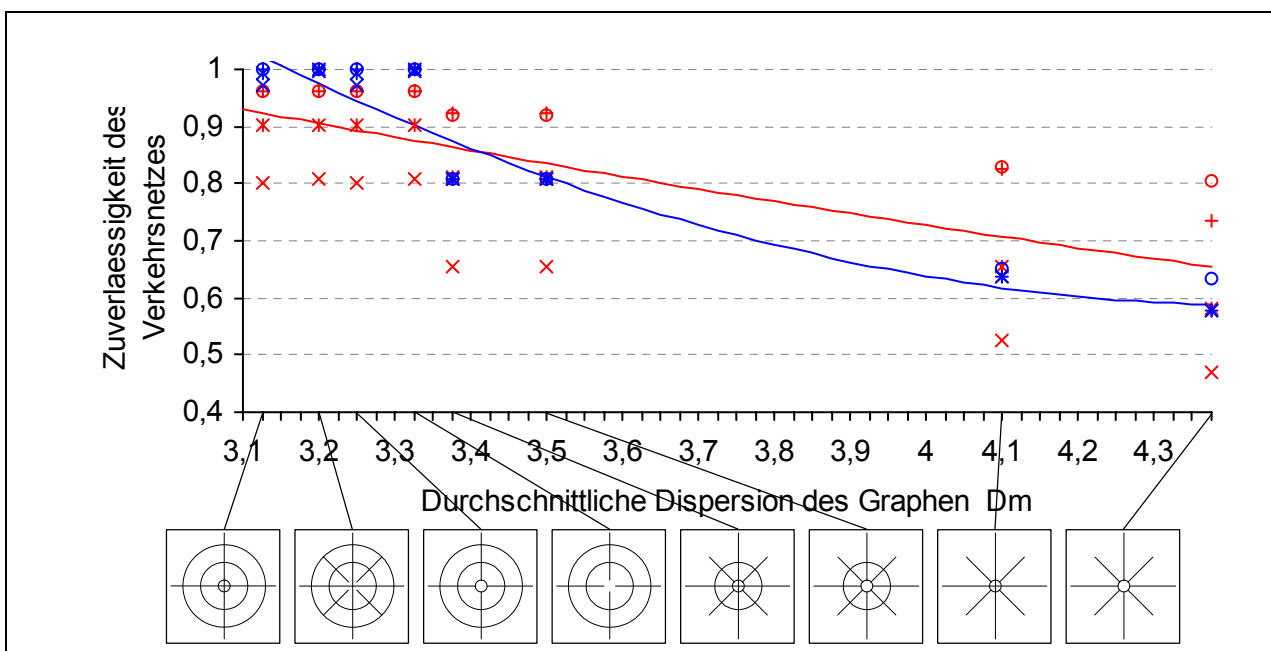


Abbildung 4: Zusammenhang zwischen Zuverlässigkeit des Straßennetzes und seiner durchschnittlichen Dispersion

Literatur

- [1] Beichelt F., Franken P., *Zuverlässigkeit und Instandhaltung. Mathematische Methoden.* Verlag Technik, Berlin, 1983.
- [2] Bell M.G.H., Iida Y., *Transportation Network Analysis.* Chichester, Wiley, 1997.
- [3] Dudek M., Rudnicki A., Hempel L. *Zum Zusammenhang zwischen strukturellen und funktionellen Parametern eines Verkehrsnetzes.* IKM 2000, Weimar, 2000.
- [4] Hempel L., Dudek M., *Zur Bewertung der Struktur von Verkehrsnetzen.* IKM 1997, Weimar, 1997.