

Ein adaptiertes Polyreferenz-Verfahren und seine Anwendung in der Systemidentifikation

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen
der Bauhaus-Universität Weimar

vorgelegt von

Olaf Huth
geboren am 24. April 1968
in Halle/Saale

Weimar, 31. März 2002

Gutachter:

1. Prof. Dr. techn. Christian Bucher
2. Prof. Dr. rer. nat. habil. Klaus Gürlebeck
3. Dr. Ing. habil. Michael Oeljeklaus

Für meine Eltern und Geschwister
Für Susanne

Danksagung

Für die Betreuung und Begutachtung meiner Arbeit, für die stete Bereitschaft zu fachlichen Diskussionen und den daraus entstandenen Anregungen, die wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen, gilt mein Dank insbesondere Herrn Professor Christian Bucher. Von großem Wert für den Fortschritt der Arbeit waren die Hinweise von Herrn Professor Klaus Gürlebeck zur Regularisierung von Gleichungssystemen. Herrn Doktor Michael Oeljeklaus danke ich für seine Anregungen zum projektiven Eingangsgößenverfahren und für sein Interesse an meiner Arbeit. Beiden danke ich nicht zuletzt für die Übernahme der Gutachten. Den Mitarbeitern des Institutes für Strukturmechanik gilt mein Dank für ein offenes und kooperatives Arbeitsklima. In diesem Zusammenhang möchte ich mich bei Herrn Doktor Wolfram Meinhold für die Zusammenarbeit, die zur Konstruktion des Impulshammers führte, bedanken. Stellvertretend für die wertvolle Hilfe der Mitarbeiter des ISM innerhalb des Forschungsprojektes EXTRA II möchte ich Herrn Jörg Riedel für die Zusammenarbeit während des Projektes Tuckhude und Herrn Doktor Volkmar Zabel für die Unterstützung bei der Durchführung der Versuche in Darnstedt danken. Herrn Doktor Matthias Ebert danke ich für die Bereitstellung seiner Messungen an progressiv geschädigten Stahlbetonbalken. Ich danke den Mitarbeitern der Versuchstechnischen Einrichtungen und der Abteilung Versuchswesen für ihre Hilfe bei der Durchführung von Labor- und in-situ Experimenten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Filterung von Signalen	5
2.1	Digitale Filterung im Zeitbereich	5
2.1.1	Einleitung	5
2.1.2	Theorie der Filtergleichung	7
2.1.3	Realisierung eines nichtrekursiven Filters mit der Methode der Fenster-technik	10
2.1.4	Entwurf eines Bandpasses	12
2.2	Ein Laborexperiment	14
2.2.1	Beispiel einer Filterung	15
3	Bestimmung modaler Parameter mit dem adaptierten Polyreferenz- Verfahren	17
3.1	Das klassische Polyreferenz-Verfahren	18
3.1.1	Bestimmung der komplexen Eigenwerte	19
3.1.2	Bestimmung der komplexen Residuen	25
3.2	Das adaptierte Polyreferenz-Verfahren	26
3.3	Verifikation an Laborversuchen	31
3.3.1	Stahlbetonbalken	31
3.3.2	Stahlbalken	40
4	Lokalisierung von Systemveränderungen	47
4.1	Lokalisierung basierend auf Eigenformen	48
4.1.1	Der COMAC-Wert	48
4.1.2	Der MDLAC-Wert	49
4.1.3	Die Krümmung der Eigenformen	50
4.1.4	Die Flexibilitätsmatrix	51

4.1.5	Messung der Verdrehungen der Eigenformen	52
4.1.6	Experimentelle Untersuchung	53
5	Konstruktion eines Impulshammers	55
5.1	Erfordernisse an den Impulshammer	55
5.2	Anzustrebende Impulsdauer für die transiente Bauwerkserregung . . .	56
5.3	Aufbau und Wirkungsweise des Impulshammers	58
5.4	Laborversuche	60
5.5	In-situ Versuche	61
6	Parameteridentifikation mit der Methode der modalen Sensitivität	67
6.1	Einleitung zur Parameteridentifikation	67
6.2	Iterative Lösung des Normalgleichungssystems	69
6.3	Lösung des Normalgleichungssystems	72
6.3.1	Die Tikhonov-Phillips-Regularisierung	72
6.3.2	Wahl des Regularisierungsparameters	74
6.4	Parameteridentifikation am Beispiel des Stahlbalkens	75
6.4.1	Numerische Untersuchungen	75
6.4.2	Experimentelle Untersuchungen	77
7	Parameteridentifikation mit dem Projektiven Eingangsgrößenverfahren (PEGV)	79
7.1	Theorie der Projektion des PEGV	80
7.2	Betrachtung des Einflusses von Störungen	83
7.3	Formulierung der Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV	84
7.4	Formulierung der Zufallsfelder	86
7.5	Ein Beispiel zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV	87
7.5.1	Beschreibung des Plattenmodells	87
7.5.2	Versuchskonfiguration	89
7.5.3	Simulationen und Auswertung	89
8	Zusammenfassung	93
A		103
A.1	Programmtechnische Umsetzung	103
A.1.1	Filterung und Resampling der Zeitreihen	103

A.1.2	Das klassische Polyreferenz- Verfahren	105
A.1.3	Das adaptierte Polyreferenz-Verfahren	107
A.1.4	Verfahren der Lokalisierung	108
A.1.5	Parameteridentifikation mit der Methode der modalen Sensitivität	109
A.1.6	Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV	110
B		113
B.1	Normierung des Antwortspektrums eines dynamischen Systems auf einen Halbsinusstoss	113
B.2	Berechnung der Eigenwert- und Eigenvektorableitung	115
C		117
C.1	Eine Sensitivitätsbetrachtung des PEGV	117
D		119
D.1	Lokalisierungsverfahren	119
D.2	Parameteridentifikationsverfahren	122

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in das Gebiet der Systemidentifikation ein. Besonderes Augenmerk wird auf die Detektion, die Lokalisierung und die Quantifizierung von Systemveränderungen gerichtet. Für diese Ziele werden -basierend auf Schwingungsmessungen- modale Parameter sowie Ein- und Ausgangsgrößen im Frequenzbereich extrahiert.

Die in dieser Arbeit entwickelte Adaption des Polyreferenz-Verfahrens beruht auf einer veränderten Bestimmung der Fundamentalmatrix mit Hilfe der verallgemeinerten Singulärwertzerlegung. Eine Vorfilterung, die eine Reduktion der Frequenzanteile im Signal bewirkt, ist dabei Voraussetzung. Diese basiert auf den Einsatz rekursiver Filtertechniken und der einfachen Singulärwertzerlegung. Als Resultat können modale Parameter auch im Falle, wenn eng benachbarte und verrauschte Signalanteile vorliegen oder nur wenige Mess- und Anregungspunkte zur Verfügung stehen, präzise bestimmt und damit auch sehr geringe Systemveränderungen detektiert werden. Die mit dem adaptierten Polyreferenz-Verfahren extrahierten modalen Parameter werden in der Lokalisierung von Systemveränderungen eingesetzt.

Zur Bestimmung modaler Parameter auch an realen Bauwerken wird die Konstruktion eines Impulshammer vorgestellt. Besonderes Gewicht wird dabei auf die Gestaltung des Erregerkraftspektrums gelegt.

Die Arbeit enthält eine mögliche Vorgehensweise zum Abgleich von Finite-Elemente Modellen. In vielen praxisnahen Fällen sind weit weniger modale Parameter vorhanden, als freie, zum Abgleich bestimmte Parameter gesucht werden. Das Gleichungssystem ist hier schlechtgestellt und benötigt eine Regularisierung.

Eine andere Möglichkeit zur Korrektur von Rechenmodellen bietet das Projektive Eingangsgrößenverfahren, das auf der Basis unvollständig gemessener Ein- und Ausgangsgrößen arbeitet. In einer Versagenswahrscheinlichkeitsstudie wird die Robustheit des Verfahrens gegenüber Rauscheinflüssen untersucht.

Abstract

This PhD thesis is related to the field of system identification focusing on detection of occurrence, localization and amount assessment of the damage. This is done as well by extraction of modal parameters as input- and output residuals from vibration measurements.

The presented work describes a developed adaption of the polyreference-procedure. It is based on a determination of the fundamental matrix by using the generalized singular value decomposition. A pre-filtering of the time series which kept the signals in a narrow frequency band highly supports this application. Two kinds of filter techniques can be combined: The classical way of recursive filter technique and the tool of the singular value decomposition. Therefore, modal parameters can be determined precisely in different cases if

- the data are strongly corrupted by noise,
- only few measuring- and excitation points are available,
- close-spaced frequency parts appear in the signal.

This facts allow the detection of small structural changes in dynamic systems. The modal parameters extracted by the adapted polyreference-procedure are applied to localize the damage.

For the extraction of modal parameters on real structures the construction of an impact hammer is presented with particular respect to the configuration of the excitation spectra.

This work contains a possible way for a finite element model updating. In many relevant cases, if much more free parameters are searched than modal parameters are available, this problem is ill-posed and needs regularization.

The Projective Input Residual Method (PIRM) follows another way to correct computational models. It is operational on the extraction of input- and output residuals. Within a reliability study the robustness of the PIRM against noise influences is investigated.

Häufig verwendete Symbole

x, \dot{x}, \ddot{x}	Verschiebung, Geschwindigkeit, Beschleunigung
f	Eingangs(Erreger-)signal
\mathbf{x}^m	gemessener Vektor der Verschiebungen
\mathbf{f}^m	gemessener Erregungsvektor
k	Index einer Reihe
K	Gesamtanzahl der Intervalle einer Reihe
H	Übertragungsfunktion
h	Impulsantwort
t	Zeit
Δt	Zeitschritt, Abtastintervall
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
$\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$	Massenmatrix, Dämpfungsmatrix, Steifigkeitsmatrix
\mathbf{A}, \mathbf{B}	Zustandsraummatrizen
ω	Kreisfrequenz
f_e	Eigenfrequenz
D_e	Lehrsches Dämpfungsmaß
\mathbf{S}_ω	dynamische Steifigkeitsmatrix
\mathbf{H}_ω	Frequenzgangmatrix
ϕ, Φ	Eigenvektor, Modalmatrix
λ, Λ	Eigenwert, Matrix der Eigenwerte
\mathbf{S}	Sensitivitätsmatrix
R	Residuum
$\mathcal{R}(\mathbf{H})$	Signal-, Bildraum der linearen Abbildung \mathbf{H}
$\mathcal{R}(\mathbf{H})^\perp$	orthogonales Komplement der linearen Abbildung $\mathcal{R}(\mathbf{H})$
$\mathcal{N}(\mathbf{H})$	Nullraum der linearen Abbildung \mathbf{H}
$\mathcal{N}(\mathbf{H})^\perp$	orthogonales Komplement der linearen Abbildung $\mathcal{N}(\mathbf{H})$
n	Anzahl der Freiheitsgrade
m	Anzahl der gemessenen Ausgangskomponenten
$m \ll n$	m wesentlich kleiner als n
p	Anzahl der gemessenen Eingangskomponenten
n_p	Anzahl der Parameterkomponenten
n_k	Anzahl der Knoten eines Finite Element-Modells

J	Zielfunktional
\mathbf{v}	Residuenvektor
\mathbf{a}	frei wählbarer Parametersatz
\mathbf{a}^0	wahrer Parametersatz
$\mathbf{C} \in \{0, 1\}^{m \times n}$	Messmatrix
$\bar{\mathbf{C}} \in \{0, 1\}^{m \times n}$	komplementäre Messmatrix
\mathbf{W}	Wichtungsmatrix
$\ \cdot\ _2$	Euklidische Norm
\mathbf{P}^\dagger	Pseudoinverse einer Matrix
\mathbf{A}^T	die zu \mathbf{A} transponierte Matrix
$\mathbf{A}^H := \mathbf{A}^{*T}$	die zu \mathbf{A} adjungierte Matrix ($\mathbf{A}_{i,j}^H := \mathbf{A}_{j,i}^*$)
$\mathbf{A}\mathbf{x}$	Matrix-Vektor-Multiplikation
\mathcal{F}	Fouriertransformation
\mathcal{F}^{-1}	inverse Fouriertransformation
$\Re(z), \Im(z)$	Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl z
\sum	Summenzeichen
\angle	Winkel
$\hat{\mathbf{A}}$	Approximation von \mathbf{A}
$Dg(x_0)$	Totales Differential der Funktion g im Punkt x_0
$\nabla f(x_0)$	$= \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial(x_1)}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial(x_n)} \right)^T$ (Gradient von f in x_0)
$\nabla^2 f(x_0)$	$= \left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial(x_i)\partial(x_j)} \right)_{i,j}$ (Hessematrix von f in x_0)

Kapitel 1

Einleitung

Gegenwärtig zielt ein wesentlicher Aspekt der Forschungstätigkeit auf dem Gebiet des Bauingenieurwesens darauf ab, Entwurfskonzepte für Bauwerke zu entwickeln, die eine Überwachung (engl.: *monitoring*), eine Abschätzung ihrer weiteren Lebensdauer und darauf aufbauend, die Planung und Durchführung von Inspektions-, Wartungs-, und Reparaturmassnahmen und damit eine kostengünstige Revitalisierung der Bauwerke in bestimmten Zeitintervallen zu ermöglichen. Schäden sollen frühzeitig erkannt und deren Behebung effizient durchgeführt werden können. Damit werden gleichzeitig Umwelt- und wirtschaftliche Ressourcen geschont. Deutlich wird das gesellschaftliche Interesse an dieser Aufgabenstellung durch die Einrichtung der Sonderforschungsbereiche, „Lebensdauerorientierte Entwurfskonzepte unter Schädigungs- und Deteriorationsaspekten“ (SFB 398), „Sicherstellung der Nutzungsfähigkeit von Bauwerken mit Hilfe innovativer Bauwerksüberwachung“ (SFB 477) und „Werkstoffe und Konstruktionen für die Revitalisierung von Bauwerken“ (SFB 524), die durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert werden.

Bedingt durch die Komplexität dieses Vorhabens kommen verschiedene Verfahren zur Anwendung, die sich in ihren physikalischen Wirkprinzipien generell voneinander unterscheiden. Diese bestimmen neben der Anwendungsbreite auch die spezifischen Kosten der Untersuchungen. Die Notwendigkeit wechselseitigen Zusammenwirkens wird durch den Sachverhalt verdeutlicht, dass mit Hilfe eines Verfahrens immer nur wenige Eigenschaften eines Tragwerks bestimmt werden können und dieses erworbene Wissen auch nur in der (*Makro-*, *Mikro-*) Dimension des Tragwerks gilt, in der die dazu notwendigen experimentellen Untersuchungen vorliegen.

Einen wichtigen Aspekt zur Beurteilung der Restlebensdauer eines Tragwerks stellt die Abschätzung der zum Zeitpunkt der Prüfung vorhandenen Tragfähigkeit dar. Die Vielschichtigkeit dieser Problematik wurde bereits in der Konzeption und Durchführung vergangener Forschungsprojekte (Steffens u. a. (1997)), (DeRoeck u. a. (2000)) untersucht. Verfahren, die die Verformungsantwort eines Tragwerks auf der Basis von statischen Belastungen experimentell bestimmen, beziehen sich auf die *Makro*-Ebene eines Tragwerks und lassen eine Aussage über die Tragfähigkeit eines Bauwerks zu. Sie sind jedoch durch einen erhöhten experimentellen Aufwand gekennzeichnet. Mit anderen Methoden, z.B. Ultraschallverfahren oder Wirbelstromverfahren auf der Basis magneto-induktiver Messungen, die bereits zur Schadensdiagnose von Brückenseilen oder Schienenprofilen erfolgreich angewendet werden, lassen sich nur Bereiche im *Mikro*-Maßstab des Bauwerks untersuchen. Sie besitzen jedoch den Vorteil, mit ihnen wesentlich geringfügigere Schäden als mit Methoden der dynamischen Schadensdiagnose und Systemidentifikation diagnostizieren zu können.

Die Gebiete der dynamischen Schadensdiagnose und Systemidentifikation stellen ein Bindeglied in der Betrachtung zwischen der *Makro*- und *Mikro*-Ebene eines Tragwerks dar. Tragwerksveränderungen, die während der Nutzung eintreten, können lokalisiert (Schadensdiagnose) und es können Hinweise für die Anwendung von Verfahren der *Mikro*-Ebene abgeleitet werden. Gleichzeitig kann mit Hilfe der dynamischen Systemidentifikation ein numerisches Modell des Tragwerks entwickelt werden, das das Bauwerk in bestimmten Eigenschaften auch unter dem Aspekt der Prüfung vorhandener Tragfähigkeit repräsentieren und damit z.B. die statischen Prüfverfahren wirkungsvoll ergänzen kann. Dies wird mit den Methoden des Angleichs von numerischen Modellen an die am realen Tragwerk gemessenen Parameter angestrebt (engl.: *Model Updating*) (Friswell und Mottershead (1995), Natke u. a. (1997), Oeljeklaus (1998)). Eine andere Möglichkeit der Realisierung eines dynamischen Systems stellt die Resynthese aus Messungen gewonnener Eigenfunktionen (Lenzen (1994)) dar. Dieses Verfahren liefert aber keine Aussage zu den Verteilungen von Steifigkeits-, Masse- und Dämpfungsbeziehungen im Tragwerk. Weitere Arbeiten, die eine Einführung, eine Listung, Darstellung und teilweise Bewertung der auf dem Gebiet der Systemidentifikation und Schadensdiagnose entstandenen Verfahren liefern, sind z.B. die von Link (2001), Maia u. a. (1997), Natke und Cempel (1997), Silva u. a. (1997).

Verfahren, die auf Schwingungsmessungen basieren, stellen indirekte Methoden dar.

Aus den gemessenen Parametern kann nicht sofort eine Aussage über eine Eigenschaft des Tragwerks abgeleitet werden. Indirekte Methoden besitzen den Nachteil einer langen Verarbeitungskette (Abb. 1.1) der gemessenen Signale und unterliegen damit einer größeren Gefahr als direkte Methoden (z.B. statische Prüfverfahren), durch gemessene und numerische Fehler an Präzision in der Aussage zu verlieren. Die vorliegende Arbeit verdeutlicht den Zusammenhang zwischen einer verbesserten

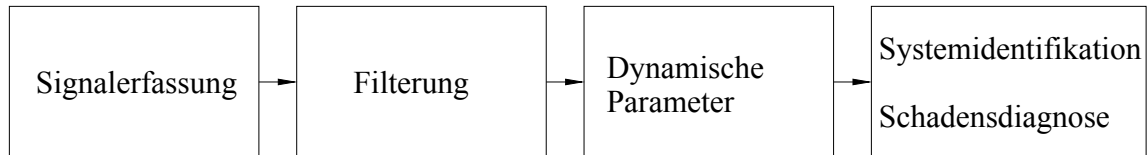


Abbildung 1.1: Verarbeitungskette der dynamischen Systemidentifikation

Signalanalyse und einer präziseren Bestimmung modaler Parameter (komplexe Eigenwerte, komplexe Eigenformen), auf denen viele Verfahren der dynamischen Schadensdiagnose und Systemidentifikation beruhen. In Kapitel 3 wird dazu eine Vorgehensweise vorgeschlagen, mit der in Abhängigkeit vom Schwierigkeitsgrad die modalen Parameter bestimmt werden können. Dafür wird das klassische Polyreferenz-Verfahren (PRZ) (Vold u. a. (1982), Deblauwe u. a. (1987), Maia u. a. (1997)), das auf der Basis einer Impulserregung arbeitet, mit Hilfe der Quotienten Singulärwertzerlegung (QSVD) (VanLoan (1976), Paige und Saunders (1981)) adaptiert. Mit der Adaption wird eine Genauigkeitssteigerung der ermittelten modalen Parameter und eine Vergrößerung der Anwendungsbreite des PRZ-Verfahrens erzielt. Für die Anwendung der QSVD ist die a priori Kenntnis der Dimension des Signalraumes (d.h. wieviele Eigenfunktionen des Systems sind im Signal enthalten) von wichtiger Bedeutung. Durch den gezielten Einsatz von robusten Filteralgorithmen (Kapitel 2) kann diese Dimension in vielen praktischen Fällen eindeutig bestimmt werden. In Kapitel 5 wird die Konstruktion und der Test eines Impulshammers vorgestellt, mit dessen Hilfe modale Parameter auch von realen Tragwerken auf der Basis einer Impulserregung bestimmt werden können.

Aufbauend auf einem numerischen und im Labor durchgeführten Versuch eines schrittweise progressiv geschädigten Stahlbalkens werden im Kapitel 4 verschiedene Algorithmen der Schadensdiagnose auf ihre Wirksamkeit hin untersucht.

Die Schadensdiagnose kann einen wichtigen Beitrag zur Systemidentifikation liefern.

Ist der Ort einer erfolgten Systemveränderung bekannt, kann die Zahl der freien Variablen in der Parameteridentifikation erheblich eingeschränkt werden. Darauf basierend erfolgt die Quantifizierung der eingetragenen Schädigung durch die Methode des *Model Updating*. Das dabei entstehende Gleichungssystem wird iterativ gelöst (Kapitel 6).

Die Verwendung von Ein- bzw. Ausgangsgrößen (Natke (1992)) als Basis der Verfahren der Systemidentifikation verkürzt erheblich den Bearbeitungsaufwand gemessener Schwingungsdaten. Oeljeklaus (1998) entwickelte das *Projektive Eingangsgrößenverfahren* (PEGV), das auf der Formulierung einer nahezu konvexen Fehlerfunktion arbeitet. Im Kapitel 7 erfolgt eine Betrachtung der Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV. Das PEGV besitzt den Nachteil der Anfälligkeit gegenüber Störeinflüssen, die aus dem Umgebungsrauschen stammen und es wird anhand einer Studie gezeigt, dass bei stärkerem Einfluss des Rauschens die durch eine vergrößerte Anzahl von Messaufnehmern eingebrachte Information verloren geht und eine kleinere Anzahl der Messaufnehmer eine verringerte Versagenswahrscheinlichkeit des Verfahrens liefert.

In Kapitel 8 werden die Vorgehensweisen und Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefaßt und es wird ein Ausblick gegeben.

Kapitel 2

Filterung von Signalen

2.1 Digitale Filterung im Zeitbereich

2.1.1 Einleitung

Experimentell ermittelte Daten liegen zunächst in analoger Form vor, bevor sie mit einem Analog/Digital Wandler (A/D) in eine diskrete Abtastung des analogen Signals umgewandelt werden. Eine analoge Filterung besitzt gegenüber einer digitalen den Vorteil, dass sehr viele Probleme, die z.B. im Zusammenhang mit der Filterung eines Signals durch die Operation einer Faltung bzw. Entfaltung entstehen können, entfallen. In Abhängigkeit ihrer weiteren Verarbeitung benötigen diskret aufgezeichnete Signale eine Filterung. Der Einsatz von Frequenzbandfiltern bezieht seine Motivation in dieser Arbeit aus folgenden Punkten.

Das Zeitsignal setzt sich aus der durch das dynamische System nach einer Einwirkung wiedergegebenen Reaktion x_s und einer durch Messrauschen, Fremderregungen etc. aufmodulierten Störung x_e zusammen (Abb. 2.1). Jene additiven Anteile erschweren die Identifikation der modalen Parameter im Zeitbereich. Mit einer in diesem Abschnitt beschriebenen Filterung wird die Varianz der Störungen stark reduziert. Dies trifft jedoch nur auf jene Störanteile zu, die nicht im Wunschfrequenzgang¹ oder Übergangsbereich des Filters liegen. Deshalb werden, in einer zweiten Filterstufe, verbleibende Störanteile mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (SVD) (Abschn. 3.2, S. 26) eliminiert.

¹Der Begriff des Wunschfrequenzganges stammt aus der Signaltheorie (Unbehauen (1997)). Er bezeichnet genau jene Frequenzanteile, die im Signal nach einer Filterung enthalten sind.

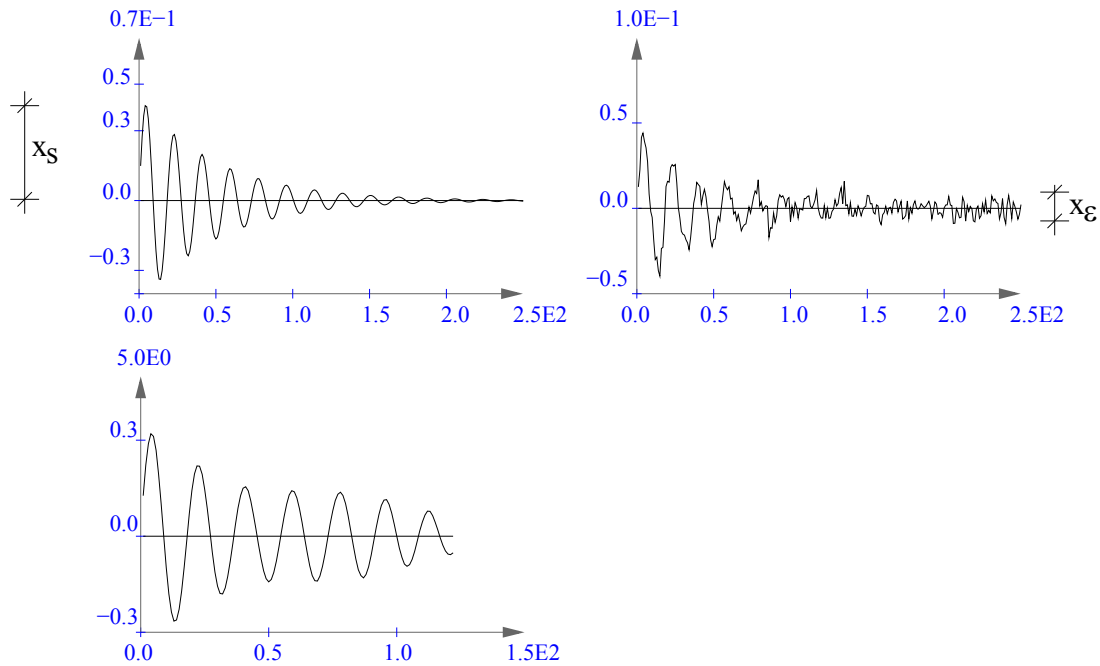


Abbildung 2.1: Generiertes Signal, durch 10 % Rauschen des Maximalwertes des generierten Signals verunreinigtes Signal, durch eine Filterung bereinigtes Signal

Die Verwendung der Quotienten-Singulärwertzerlegung (QSVD) setzt das Wissen um die zu erwartende Dimension des Signalraumes, d.h. das Wissen um die Anzahl der zu identifizierenden Frequenzen, voraus. Eine Filterung kann den zu betrachtenden Frequenzbereich einschränken und erlaubt damit eine a priori Bestimmung des Signalraumes (Abschn. 3.2).

Bei der Transformation von Signalen vom Zeit- in den Frequenzbereich und umgekehrt können Abschneideeffekte auftreten, die sich als das sogenannte Gibbsche Phänomen äussern. Zur Illustration dieses Phänomens wird die Bestimmung der Impulsreaktionsfunktion (3.10, S. 19) genannt. Die zeitliche Länge des aufgenommenen Signals t_Ω wird durch den Nutzer festgelegt und damit erfolgt ein „Abschaltvorgang“ des dynamisch erregten Systems, bevor dieses zur statischen Gleichgewichtslage gefunden hat. Durch den Abschaltvorgang entsteht zum Zeitpunkt t_Ω eine Unstetigkeit und diese wirkt im Frequenzbereich als eine rechteckige (damit unstetige) Fensterfunktion. Dies bedeutet, wenn die abgebrochenen Zeitreihen in den Frequenzbereich transformiert werden, entsteht mit der Frequenz $\Omega = \frac{1}{t_\Omega}$ das nach der Berechnung der Impulsreaktionsfunktion und der Rücktransformation des Signals in den Zeitbereich im Signal sichtbare Gibbsche Phänomen (Abb. 2.2). Durch Einführung einer Sperrfrequenz eines Filters $\Omega_s < \Omega$ im Tiefpass- oder $\Omega_s > \Omega$ im Hochpassbereich

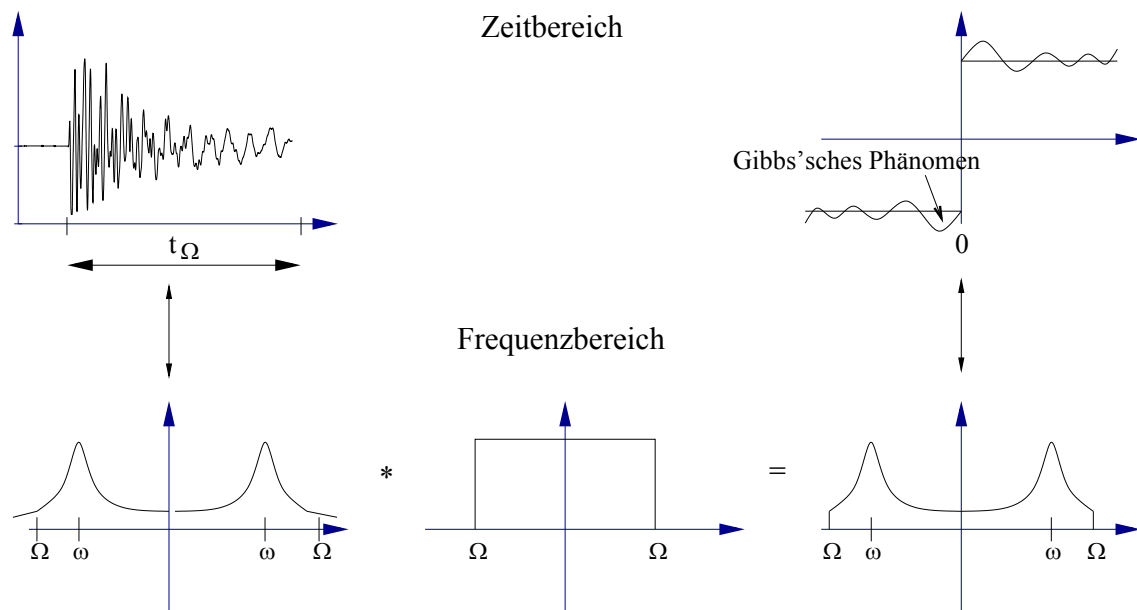


Abbildung 2.2: Entstehung des Gibbs'schen Phänomens durch Ausschalten des dynamischen Systems

lässt sich der Überschwinger ausfiltern.

DAT-Recorder arbeiten mit dem durch das Aufzeichnungssystem a priori festgelegten Abtastintervall Δt . Das Minimum von Δt liegt oft in einem für die Bestimmung modaler Parameter nicht erforderlichen kleinen Betrag vor. Notwendig wird ein Neuaufzeichnen der Zeitreihen (engl.: *resampling*). Dabei sind die höheren Frequenzanteile, die durch das neu gewählte Abtastintervall Δt nicht mehr abgebildet werden können, auszufiltern. Wichtig ist, dass das Neuaufzeichnen der Zeitreihen nach der Filterung durchgeführt wird.

In den nächsten Abschnitten werden Prinzip und Anwendung der in dieser Arbeit verwendeten Filtertechniken erläutert. Als weiterführende Literatur für dieses Gebiet der Signaltheorie wird Kammeyer und Kroschel (1998), Oppenheim und Schaffer (1992) und Unbehauen (1997) empfohlen.

2.1.2 Theorie der Filtergleichung

Durch Abtastung kontinuierlicher Signale $x_k(t)$ werden diskrete Signale erhalten. Für die weiteren Ausführungen wird eine äquidistante Abtastung des kontinuierlichen Signals vorausgesetzt.

Ein Antwortsignal kann zeitlich um k_0 Abtastschritte in die Vergangenheit verschoben werden.

$$x(k) = f(k - k_0) \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet f das Eingangssignal. Prinzipiell kann jedes Signal als Summe von gegeneinander verschobenen und bewerteten Impulsfolgen dargestellt werden, unabhängig davon, welche der Folgen verzögert wird.

$$x(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i)f(k-i) \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet $\delta(k)$ die dem Einheitsstoss (dieser ist dem Dirac-Stoss abgewandelt)

$$\delta(t) := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

analoge Impulsfolge

$$\delta(k) := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Die Übertragungsfunktion stellt eine Eigenschaft eines Systems dar, die bei linearem Systemverhalten auch als Proportionalitätskonstante zwischen dem Eingangssignal $f(k)$ und dem Ausgangssignal $x(k)$ interpretiert werden kann.

$$x(k) := H[f(k)] \quad (2.5)$$

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip angewendet werden kann. Demzufolge sind Eingangs- und Ausgangssignal als eine Linearkombination von einzelnen Teilfolgen darstellbar.

Als zeitinvariant wird ein System bezeichnet, wenn das Ausgangssignal $x(k)$ nur vom Eingangssignal $f(k)$ abhängt und unabhängig vom Zeitpunkt der Erregung ist. Diese Klasse von Systemen wird als LTI (Linear-Time-Invariant)-Systeme bezeichnet und ihre Übertragungsfunktion ist durch die Impulsantwort des Systems auf den Einheitsstoss definiert.

$$h(k) := H[\delta(k)] \quad (2.6)$$

Wird ein derartiges System mit einem Signal $f(k)$ erregt, kann durch diskrete Faltung zwischen der Impulsantwort $h(k)$ und dem Eingangssignal $f(k)$ das Ausgangs-

signal $x(k)$ erzeugt werden

$$\begin{aligned} x(k) &:= H[f(k)] = H \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) \right] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)h(k-i) = f(k) * h(k) = h(k) * f(k) \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ein System wird als stabil bezeichnet, wenn eine beschränkte Eingangsfolge eine ebenfalls beschränkte Ausgangsfolge erzeugt (BIBO-System: Bounded-Input, Bounded-Output). Diese Eigenschaft ist gewährleistet, wenn die Summe aller Impulsantworten kleiner als unendlich ist.

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h(i)| < \infty \quad . \quad (2.8)$$

Kausalität eines Systems liegt vor, wenn dieses nur von den Eingangswerten der Vergangenheit abhängig ist. Für die Berechnung eines Wertes $x(k_0)$ werden nur die Eingangswerte $f(k)$ mit $k \leq k_a$ berücksichtigt und somit wird (2.7) modifiziert zu

$$x(k_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k_0-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i)f(k_0-i) \quad . \quad (2.9)$$

Durch Einführung der Wichtungsfaktoren (Filterkoeffizienten) b_μ und c_ν können Eingangs- und Ausgangssignal direkt zueinander in Beziehung gebracht werden.

$$\sum_{\nu=0}^n c_\nu x(k-\nu) = \sum_{\mu=0}^m b_\mu f(k-\mu) \quad (2.10)$$

Durch Umstellen von (2.10) mit der Voraussetzung $b_0 = 1$ kann der aktuelle Ausgangswert $x(k)$ als Summe aus der Linearkombination der letztfolgenden m Eingangswerte und aus der Linearkombination der letztfolgenden $n-1$ Ausgangswerte berechnet werden.

$$x(k) = \sum_{\mu=0}^m b_\mu f(k-\mu) - \sum_{\nu=1}^n c_\nu x(k-\nu) \quad (2.11)$$

Ist $n = 0$, so entfällt die rechte Summe und der aktuelle Wert des Ausgangssignals ist nur von den Eingangswerten abhängig (nichtrekursive Systeme). Ist $n \geq 1$, wird das Ausgangssignal zum Zeitpunkt k_a auch von früheren Ausgangswerten mit $k < k_a$ beeinflusst (rekursive Systeme).

2.1.3 Realisierung eines nichtrekursiven Filters mit der Methode der Fenstertechnik

Mit (2.10), deren Filterkoeffizienten b_μ der Impulsantwortfunktion $h(k)$ entsprechen, wird die Übertragungsfunktion des kausalen LTI-Systems -auch als Wunschfrequenzgang bezeichnet- bestimmt

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k} \quad . \quad (2.12)$$

Eine häufig angewendete Methode zur Bestimmung der Filterkoeffizienten $h(k)$ stellt die Fenstertechnik dar. Dabei wird die Übertragungsfunktion mit einer gewünschten Filterkennlinie im Bereich $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ vorgegeben. Durch die Eigenschaft der Periodizität des Frequenzganges (2.12) lässt sich der Wunschfrequenzgang aus der inversen zeitdiskreten Fourier-Transformation

$$h(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)e^{-j\Omega k} d\Omega \quad (2.13)$$

darstellen. Ein ideales frequenzselektives Filter wird durch die Annahme einer Rechteckfunktion für die Übertragungsfunktion sehr gut approximiert und durch die Einführung der charakteristischen Sperrfrequenz Ω_s werden die Filterkoeffizienten definiert zu

$$h(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\Omega_s}^{\Omega_s} \cos \Omega k d\Omega \quad . \quad (2.14)$$

Die hierzu notwendige unendlich lange Impulsfolge ist nicht realisierbar. Sie wird deshalb nach p Koeffizienten abgebrochen. Für ein nichtkausales Filter läuft k dabei von $\frac{-p+1}{2}$ bis $\frac{p-1}{2}$. Die Filterordnung besitzt die ungerade Dimension $N = p + 1$. Um Kausalität zu gewährleisten, kann die Folge von (2.1) um $k_0 = \frac{p}{2}$ verschoben werden. Die Folge läuft damit von 0 bis p .

Bedingt durch die nun begrenzte Anzahl an Koeffizienten entsteht das Gibbsche Phänomen. Die nicht mehr beachteten Koeffizienten fehlen bei der inversen Fourier-Transformation und die ideale Filterkennlinie kann nicht mehr approximiert werden. Zur Unstetigkeitsstelle (also an der Sperrfrequenz Ω_s) hin beginnt die Übertragungsfunktion zu oszillieren. Die Frequenz der Oszillation nimmt mit steigender Anzahl der Koeffizienten zu. Verdeutlicht wird dieses Phänomen in der Abb. 2.3. An der Sprungstelle entsteht ein ansteigender bzw. fallender Funktionsabschnitt als ein Übergangsbereich des Filters. Zur Verminderung des Gibbschen Phänomens werden die Filterkoeffizienten durch Einführung von Fensterfunktionen $w(k)$ bewertet. Die

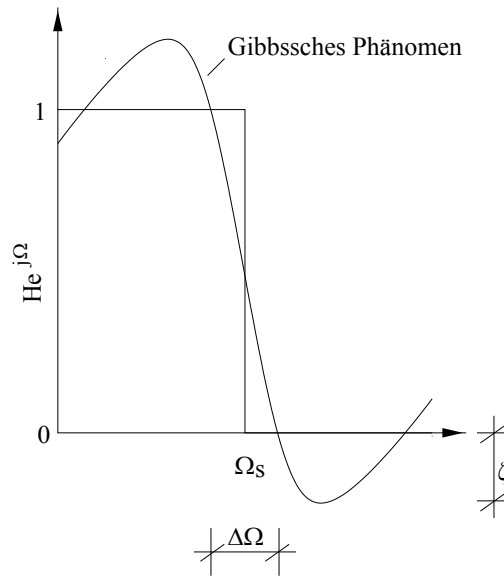


Abbildung 2.3: Übergangsbereich $\Delta\Omega$ und Höhe des Überschwingers ζ (Gibbssches Phänomen)

unstetige Rechteckfunktion wird durch eine stetige Funktion ersetzt (Abb. 2.4). Der Nachteil der Fensterfunktion besteht in der Verbreiterung des Übergangsbereiches an der Grenzfrequenz. Ein schmaler Übergangsbereich stellt jedoch eine wichtige Eigenschaft eines Filters dar, insbesondere wenn im Frequenzspektrum eng benachbarte Signalanteile getrennt werden sollen.

Erläutert wird im folgenden das *Kaiser*-Fenster, das eine sehr flexible Fensterbewertung erlaubt. Aufgrund der beiden Parameter p und α kann der erlaubte Approximationsfehler und die Filterflankensteilheit eingestellt werden. Die Koeffizienten der Fensterfunktionen werden ermittelt zu

$$w(k) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{kp/2}{p/2}\right)^2})}{I_0(\alpha)}, & 0 \leq k \leq p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.15)$$

I_0 stellt eine modifizierte Bessel-Funktion erster Art, nullter Ordnung dar.

$$I_0(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(x/2)^i}{i!}\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \quad (2.16)$$

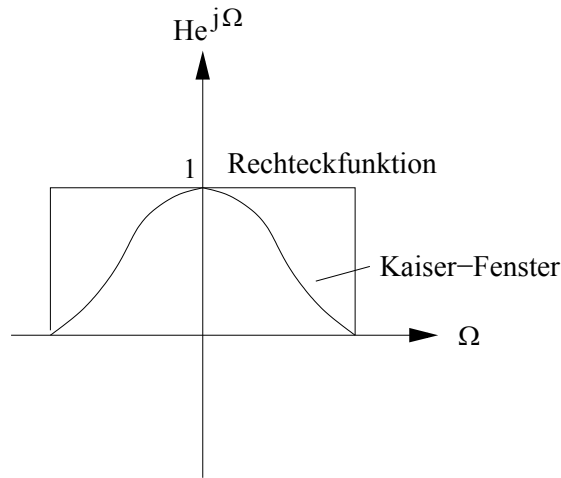


Abbildung 2.4: Gegenüberstellung einer Rechteckfunktion und der Realisierung eines Kaisers-Fensters

Die Summe wird abgebrochen nach Unterschreiten der Schranke

$$|u_{n+1} / \sum_{i=1}^n u_i| \leq \epsilon \quad . \quad (2.17)$$

Die Wahl von ϵ sollte moderat erfolgen. Mit $\epsilon = 10^{-9}$ können gute Resultate erzielt werden. Bedingt durch den Abbruch der Fourierreihe ist noch eine weitere Korrektur notwendig: Die Normierung der Filterkoeffizienten, deren Summe K den Wert 1 ergeben muss.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^p h(k) \\ h_{\text{norm}}(k) &= \frac{1}{K} h(k), \quad k = 0, 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.1.4 Entwurf eines Bandpasses

Systeme mit abschnittswise konstantem Amplitudengang werden als frequenzselektive Filter bezeichnet, deren Grundformen als Tiefpass, Hochpass, Bandpass oder Bandsperre in der Signaltheorie bekannt sind. Dabei steht der Wortteil „-pass“ für die Eigenschaft des Durchlassens von Frequenzen. Aus einem Tiefpassfilter oder einem Hochpassfilter sind prinzipiell alle drei anderen Filtertypen realisierbar.

Der hier vorgeschlagene Bandpass besteht aus zwei Tiefpassfiltern. Der Entwurf des Bandpasses beginnt mit der Festlegung eines Toleranzschemas, in der die Filtergenauigkeit ζ (also die Höhe des Überschingers) und der Übergangsbereich $\Delta\Omega$ (die Breite des ansteigenden bzw. fallenden Funktionsabschnittes) definiert werden. Die Bestimmung der Filterordnung N und des Fensterparameters α geht auf *Kaiser*

(Kammeyer und Kroschel (1998)) zurück. Sie sind abhängig vom erlaubten Fehler δ und dem gewünschten Übergangsbereich.

$$A = -20 \lg \zeta \quad (2.19)$$

$$p = \frac{A - 7.95}{2.285 \Delta \Omega} \quad (2.20)$$

p wird auf ganzzahlige Werte gerundet. Der Parameter α wird bestimmt zu

$$\alpha = \begin{cases} 0.1101(A - 21), & A > 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 < A \leq 50 \\ 0, & A \leq 21 \end{cases} \quad (2.21)$$

Notwendig ist noch die Bildung der Differenzen der Filterkoeffizienten zwischen den beiden Tiefpässen

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{1}{\pi|p/2-k|} [\sin(\Omega_{s1}|p/2-k|)] - \sin(\Omega_{s2}|p/2-k|) \quad k = 0, \dots, p \\ c(p/2) &= \frac{1}{\pi}(\Omega_{s1} - \Omega_{s2}) \quad . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mit (2.15) und (2.22) wird die korrigierte Impulsantwort berechnet zu

$$h(k) = w(k)c(k) \quad (2.23)$$

und die Impulsantwort nach (2.18) normiert.

Aufgrund seiner Fensterung besitzt das nichtrekursive Filter stabile Eigenschaften und ist leicht handhabbar. Es besitzt einen eindeutig exakten Arbeitsbereich, der sich aus der benötigten Filterordnung zur Erzielung der gewünschten Spezifikation und der Länge der zu filternden Zeitreihe ergibt. Eine höhere Filterordnung ergibt ein exakteres Filter und benötigt eine längere Zeitdauer bis zum exakten Arbeitsbeginn. Durch einen *Remez*-Filterentwurf (Oppenheim und Schafer (1992)) kann die Filterordnung reduziert werden.

Zur Ermittlung der Filterkoeffizienten für rekursive Systeme wird auf Kammeyer und Kroschel (1998), Oppenheim und Schafer (1992) und Unbehauen (1997) verwiesen. Durch seine Phasenverschiebung wird beim rekursiven Filter eine doppelte Filterung notwendig und durch die Rekursivität ergeben sich längere Einspielzeiten. Sie erscheinen deshalb für kurze Signale, die z.B. aus einer Impulsreaktionsfunktion stammen, weniger geeignet (Huth und Winge (2000)).

2.2 Ein Laborexperiment

Um die Verfahren in den Abschnitten 2 und 3 zu verifizieren, wird ein Stahlbalken mit einem Hohlprofilquerschnitt $50 \times 30 \times 4$ mm (Abb. 2.5) in einem Laborexperiment untersucht. Dynamisch erregt wird der Balken durch einen Hammer-

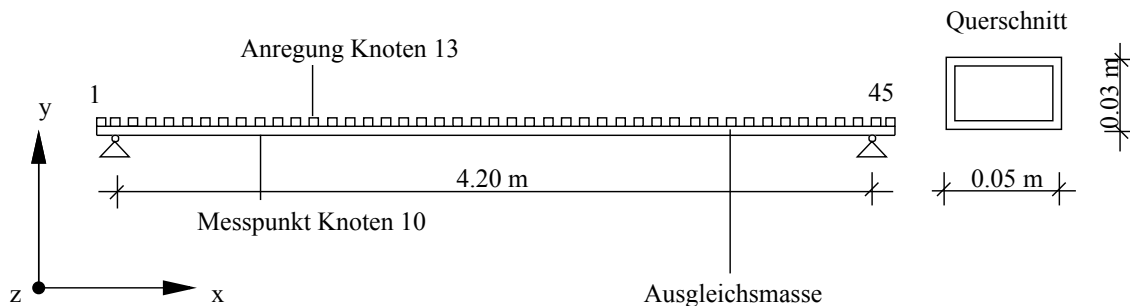
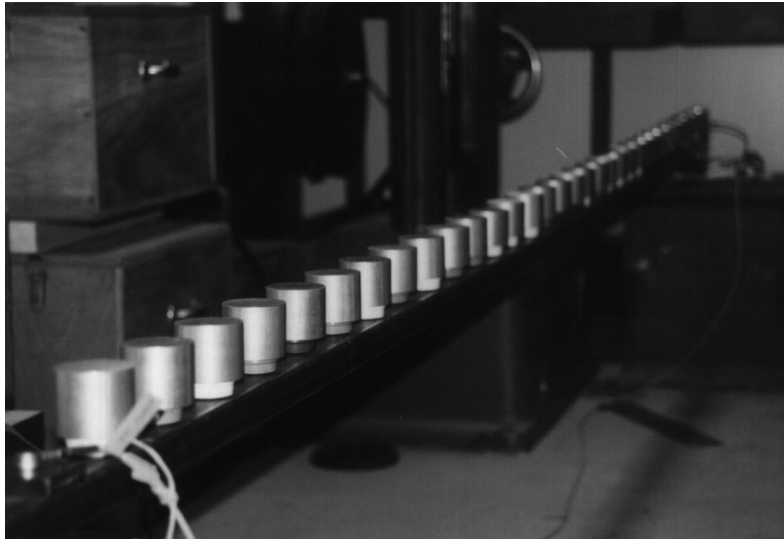


Abbildung 2.5: Foto und Skizze des untersuchten Stahlbalkens

impuls in der Form eines Halbsinusstosses mit der Anregungsdauer $t_f = 0.012$ s. Die Aufzeichnungsdauer des Signals beträgt $t_l = 4$ s mit einem Abtastintervall $\Delta t = 6.10352 \cdot 10^{-5}$ s. Die verwendeten Beschleunigungsaufnehmer KB 12 (Metra Radebeul) (wirksamer Frequenzbereich 1-150 Hz) besitzen eine nicht zu vernachlässigende Masse. Insgesamt wird an 45 Punkten gemessen. Jedoch stehen nicht so viele Beschleunigungsaufnehmer zur Verfügung, um die Messung in einem Zyklus realisieren zu können. Um das System in seiner Massenverteilung konstant zu halten, werden Massstücke aus Aluminium mit einem angeschraubten Stahlblech und einem

Magneten an den Messpunkten fixiert. Die Numerierung der Messpunkte bezieht sich auf die Knoten des dazu parallel erstellten FE-Modells. Der Abstand zwischen den Knoten beträgt 0.10 m.

2.2.1 Beispiel einer Filterung

Die Wirkungsweise des vorgeschlagenen Bandpassfilters soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Die Impulsreaktionsfunktion der Abb. 2.6 beinhaltet mehrere spektrale Anteile. Einzelne sollen davon ausgefiltert werden. Aufgrund der nur endlichen Länge der Impulsreaktionsfunktion und der Forderung nach einer hohen Filtergenauigkeit, im Beispiel mit $\zeta = 3 \cdot 10^{-4}$ realisiert, fällt der Übergangsbereich mit $\Delta\Omega = 1$ Hz relativ breit aus. Dies genügt jedoch, um die zweite Biegeeigenfunktion bei $f_e = 16.0$ Hz zu separieren.

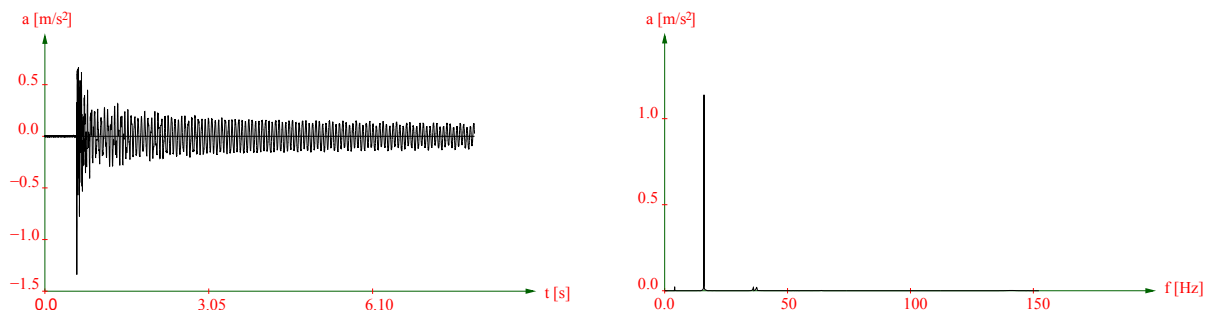


Abbildung 2.6: Impulsreaktionsfunktion und Fourierspektrum (Magnitude) der Zeitreihe des Messpunktes 10

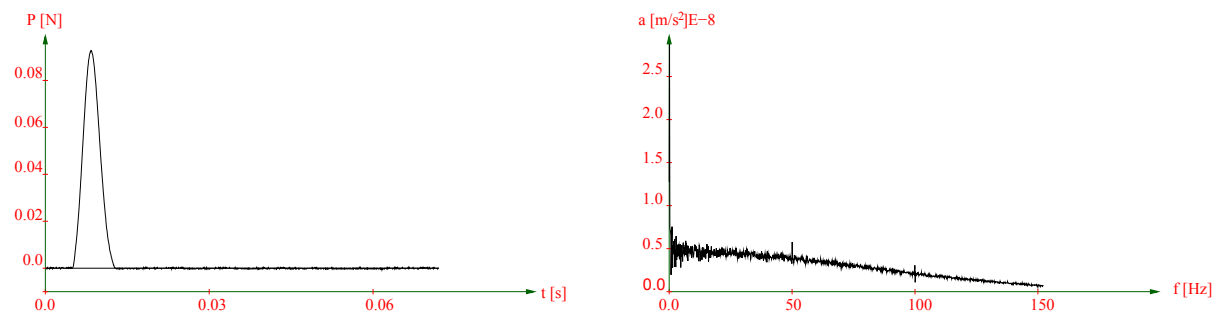


Abbildung 2.7: Zeitverlauf und Fourierspektrum (Magnitude) der Erregung

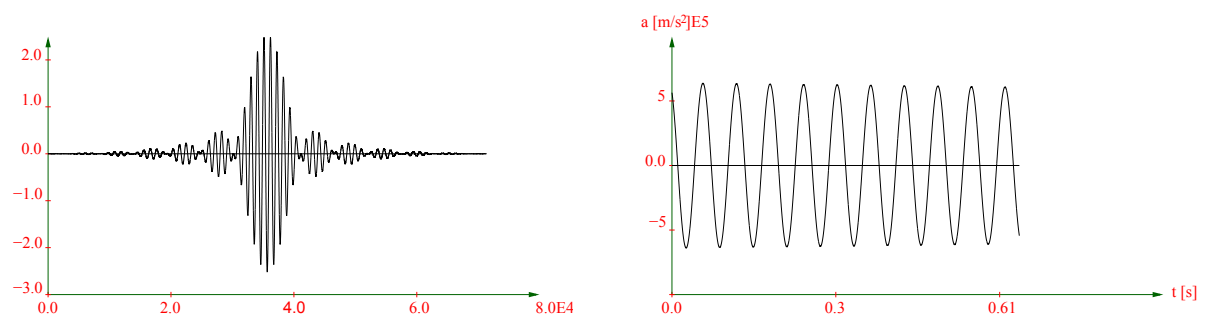


Abbildung 2.8: Filterkoeffizienten und gefilterte Zeitreihe mit Frequenzanteilen 14 – 17 Hz

Kapitel 3

Bestimmung modaler Parameter mit dem adaptierten Polyreferenz-Verfahren

Sehr viele Verfahren der dynamischen Schadensdiagnose und Systemidentifikation beruhen auf der Anwendung modaler Parameter (Link und Meskouris (1996)), deren Bestimmung auf unterschiedlichen Erregungsprinzipien und Auswertungsalgorithmen basieren kann. Maia u. a. (1997) haben verschiedene Verfahren zur Bestimmung modaler Parameter im Frequenz- und Zeitbereich systematisiert. Der Nachteil der im Frequenzbereich arbeitenden und auf der Fouriertransformation (i.A. numerisch umgesetzt durch die Fast-Fouriertransformation FFT) beruhenden Verfahren ist bekannt: eine nur endliche Abtastung der Spektrallinien in Abhängigkeit des Vielfachen von $\Delta\omega$. Dieses steht mit der Länge des verfügbaren Zeitsignals $K\Delta t$ im indirekt proportionalen Zusammenhang

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{K\Delta t} \quad (3.1)$$

mit K als der Anzahl aller berücksichtigten Samples einer Zeitreihe. Insbesondere für Ausschwingvorgänge stellt dies einen gravierenden Nachteil dar, da die Länge des Zeitsignals begrenzt ist.

Dem gegenüber sind die Zeitbereichsverfahren nicht an eine Rasterung durch $\Delta\omega$ gebunden, sie besitzen jedoch die Eigenschaft, in ihren Resultaten empfindlicher gegenüber Rauscheinflüssen zu sein und dadurch an Anwendungsbreite zu verlieren. In diesem Kapitel wird das auf einer Impulserregung beruhende Polyreferenz-Verfahren (PRZ) (engl.: *Polyreference Complex Exponential method (PRCE)*) (Vold

u. a. (1982), Deblauwe u. a. (1987), Maia u. a. (1997)) durch die Einführung der Quotienten Singulärwertzerlegung (QSVD) (VanLoan (1976), Paige und Saunders (1981)) adaptiert. Damit kann das PRZ-Verfahren auch in jenen Fällen angewendet werden, in denen

- eng benachbarte und verrauschte Signalanteile,
- nur wenige Messpunkte und Anregungspunkte vorliegen und
- die betrachtete Systemeigenform des dynamischen Systems nicht genügend angeregt wird.

Lenzen (1994) führte die QSVD zur Realisierung von dynamischen Systemen ein, jedoch ist der Einsatz der QSVD an bestimmte Bedingungen geknüpft, auf die in diesem Kapitel eingegangen wird.

3.1 Das klassische Polyreferenz-Verfahren

Das klassische Polyreferenz-Verfahren stellt ein *Multi-Input - Multi-Output (MIMO)* - Identifikationsverfahren für modale Parameter dar. Es beinhaltet einen Zwei-Stufen-Algorithmus. Im ersten Schritt werden die komplexen Eigenwerte, also die Eigenfrequenzen und Dämpfungen und in einem zweiten Schritt aus den Residuen die modalen Koeffizienten Amplitude und Phasenwinkel des Signals bestimmt.

Unter der Annahme eines linearen Materialverhaltens und kleiner Deformationen lautet die Bewegungsgleichung für dynamische Systeme mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = 0, \dot{\mathbf{x}}(0) = 0$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad . \quad (3.2)$$

Zustandsraumdarstellung

Die Dimension der Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{f} ist gleich der Anzahl n der Freiheitsgrade des numerischen Modells. Durch Substitution $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{x}}$ erfolgt die Überführung in den Zustandsraum einer Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{w} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \quad . \quad (3.3)$$

Diese in Matrixschreibweise formuliert, liefert die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \quad . \quad (3.4)$$

Bei Einführung einer Systemmatrix \mathbf{A} und einer Eingangsmatrix \mathbf{B} , die den Ort und die Größe der Anregung definiert und mit $\mathbf{z}^T = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{w}^T]$ erfolgt die aus der Systemtheorie bekannte Beschreibung der Kontrollgleichung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t) \quad . \quad (3.5)$$

Für zeitdiskrete Systeme lautet (3.5)

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{f}_k \quad . \quad (3.6)$$

Die Beziehungen zwischen den kontinuierlichen und diskreten Systemen für die Formulierung der Systemmatrizen werden geschrieben zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-\tau)} \mathbf{B} d\tau \quad . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Laplace Raumdarstellung

Die Bewegungsgleichung (3.2) in den Laplace Raum transformiert, liefert

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K}] \mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (3.8)$$

bzw. nach Umstellung

$$\frac{\mathbf{X}(s)}{\mathbf{F}(s)} = \frac{1}{\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K}} \quad . \quad (3.9)$$

3.1.1 Bestimmung der komplexen Eigenwerte

Die Pole von (3.9) stellen die komplexen Eigenwerte $s_r = \xi_r + j\omega_r$ mit $\xi_r = \omega_r D_e$ und ω_r als der Eigenkreisfrequenz zu der Eigenform $r = 1, \dots, 2N$ dar. Das Verfahren beruht auf den Impulsreaktionsfunktionen $h(t)$ eines dynamischen Systems, welche durch eine inverse Fouriertransformation \mathcal{F}^{-1} der Übertragungsfunktionen H_ω gebildet wird

$$h(t) := \mathcal{F}^{-1} H_\omega \quad . \quad (3.10)$$

Es erfolgt eine Filterung nach (2.11, S. 9) und Zerlegung der einzelnen Signalanteile und ein Neuzeichnen in dem zur Darstellung der modalen Parameter notwendigen Zeitintervall¹.

Die Impulsreaktionsfunktion (IRF) ist als eine gedämpfte Exponential-Funktion mit

¹Dieses erfolgt unter Berücksichtigung des Abtasttheorems und vorrangig aus Gründen der Rechenzeiterparnis.

separiertem komplexem Residuum gekennzeichnet. Für eine IRF am Punkt p und einer Anregung am Punkt j gilt

$$h_{pj}(t) = \sum_{r=1}^{2N} R_{pjr} e^{s_r t} \quad . \quad (3.11)$$

Hier kennzeichnen $p = 1, \dots, n$ den Ausgang, $j = 1, \dots, q$ den Eingang und N die Anzahl der Freiheitsgrade im gefilterten Frequenzbereich. Für q verschiedene Eingänge folgt

$$\begin{aligned} h_{p1}(t) &= \sum_{r=1}^{2N} R_{p1r} e^{s_r t} \\ h_{p2}(t) &= \sum_{r=1}^{2N} R_{p2r} e^{s_r t} \\ &\vdots \\ h_{pq}(t) &= \sum_{r=1}^{2N} R_{pqr} e^{s_r t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Residuen und die Elemente ϕ_{pr} , ϕ_{qr} des r -ten Eigenvektors r sind durch einen Skalierungsfaktor Q_r verbunden

$$R_{pjr} = Q_r \phi_{pr} \phi_{jr} \quad . \quad (3.13)$$

Wenn für das erste Residuum gilt

$$R_{p1r} = Q_r \phi_{pr} \phi_{1r} \quad , \quad (3.14)$$

so lässt sich jedes andere Residuum mit Hilfe eines modalen Wichtungsfaktors

$$W_{j1r} = \frac{\phi_{jr}}{\phi_{1r}} \quad (3.15)$$

am Punkt j ausdrücken in der Form

$$R_{pjr} = W_{j1r} R_{p1r} \quad . \quad (3.16)$$

Mit (3.13 bis 3.16) wird (3.12) umgeformt zu

$$\begin{aligned} h_{p1}(t) &= \sum_{r=1}^{2N} R_{p1r} e^{s_r t} \\ h_{p2}(t) &= \sum_{r=1}^{2N} W_{21r} R_{p1r} e^{s_r t} \\ &\vdots \\ h_{pq}(t) &= \sum_{r=1}^{2N} W_{p1r} R_{p1r} e^{s_r t} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Damit lautet (3.11) in Matrixform für alle q Eingänge

$$\begin{bmatrix} h_{p1}(t) \\ h_{p2}(t) \\ \vdots \\ h_{pq}(t) \end{bmatrix}^{q \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_{211} & W_{212} & \dots & W_{212N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{q11} & W_{q12} & \dots & W_{q12N} \end{bmatrix}^{q \times 2N} \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2N} t} \end{bmatrix}^{2N \times 2N} \begin{bmatrix} R_{p11} \\ R_{p12} \\ \vdots \\ R_{p12N} \end{bmatrix}^{2N \times 1} \quad (3.18)$$

oder vereinfacht geschrieben

$$\mathbf{h}_p(t) = \mathbf{W} \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2N} t} \end{bmatrix} \mathbf{R}_{p1} \quad (3.19)$$

mit \mathbf{W} als der modalen Wichtungsmatrix und \mathbf{R} als dem Residuenvektor. Die Signale liegen in diskreten Zeitintervallen $t_k = k\Delta t$ (k : Intervallschritt, $k = 1, 2, \dots, K$) vor und (3.11) wird modifiziert zu

$$h_{pq}(t_k) = \sum_{r=1}^{2N} R_{pqr} e^{s_r t_k} \quad (3.20)$$

Werden $L + 1$ Zeitintervalle des Signals berücksichtigt, liefert das für den Punkt p $L + 1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} h_p(0) &= \mathbf{W}\mathbf{R}_{p1} \\ h_p(\Delta t) &= \mathbf{W}\mathbf{Z}\mathbf{R}_{p1} \\ \vdots & \\ h_p(L\Delta t) &= \mathbf{W}\mathbf{Z}^L\mathbf{R}_{p1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

mit

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} e^{s_1 \Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 \Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2N} \Delta t} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Die Lösung der Berechnung der komplexen Residuen und Eigenwerte beruht auf einer Idee von *Prony* (Maia u. a. (1997)). Die Polstellen von (3.9) eines unterkritisch gedämpften Systems treten immer als komplex konjugierte Paare auf und sind modifizierte Variablen von Z . Es existiert also eine polynomiale Gleichung der Ordnung L mit reellen Koeffizienten β (als autoregressive Koeffizienten bekannt), so dass folgende Beziehung erfüllt ist

$$\beta_0 + \beta_1 Z_r + \beta_2 Z_r^2 + \dots + \beta_L Z_r^L = 0 \quad . \quad (3.23)$$

Mit der modalen Wichtungsmatrix \mathbf{W} , die die Verknüpfung der N Freiheitsgrade darstellt, wird (3.23) erweitert

$$\beta_0 + \beta_1 \mathbf{WZ}_r + \beta_2 \mathbf{WZ}_r^2 + \dots + \beta_L \mathbf{WZ}_r^L = 0 \quad . \quad (3.24)$$

β_0, \dots, β_L stellen hier reelle quadratische Matrizen der Ordnung q dar. Die Anzahl der Eigenwerte $2N$ einer polynomialen Matrix wird aus dem Produkt der vorhandenen L Zeitintervalle (entspricht der polynomialen Ordnung L) und den Matrixkoeffizienten, also den q Eingängen ermittelt

$$2N = Lq \quad . \quad (3.25)$$

Ist $Lq > 2N$ werden Eigenwerte ermittelt, die dem Rauschen zugeordnet werden müssen. Wird jede Seite von (3.19) mit β_0, \dots, β_L multipliziert, können entsprechend der polynomialen Ordnung L Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \mathbf{h}_p(0) & = & \beta_0 \mathbf{WR}_{p1} \\ \beta_1 \mathbf{h}_p(\Delta t) & = & \beta_1 \mathbf{WZR}_{p1} \\ \beta_2 \mathbf{h}_p(2\Delta t) & = & \beta_2 \mathbf{WZ}^2 \mathbf{R}_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_L \mathbf{h}_p(L\Delta t) & = & \beta_L \mathbf{WZ}^L \mathbf{R}_{p1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

gebildet werden. Diese in Summenschreibweise formuliert, führt zu

$$\sum_{j=0}^L \beta_j \mathbf{h}_p(j\Delta t) = \sum_{j=0}^L \beta_j \mathbf{WZ}^j \mathbf{R}_{p1} \quad . \quad (3.27)$$

Aus der Analogie zu (3.24)

$$\sum_{j=0}^L \beta_j \mathbf{h}_p(j\Delta t) = 0 \quad (3.28)$$

und unter der Annahme, das β_L eine Einheitsmatrix darstellt, folgt

$$\sum_{j=0}^{L-1} \beta_j \mathbf{h}_p(j\Delta t) = -\mathbf{h}_p(L\Delta t) \quad (3.29)$$

oder für alle Ausgänge $p = 1, \dots, n$ die Formulierung

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{q \times Lq} * [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_p]^{Lq \times nk} &= -[\mathbf{R}_{L1}, \mathbf{R}_{L2}, \dots, \mathbf{R}_{Lp}]^{q \times nk} \\ \mathbf{BT} &= \mathbf{R}^* \end{aligned} \quad (3.30)$$

In der Zeitmatrix \mathbf{T}_p ist die Impulsreaktionsfunktion des Ausgangs p mit k skalaren Werten über ein Zeitintervall versetzt angeordnet

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_p(0) & \mathbf{h}_p(\Delta t) & \dots & \mathbf{h}_p(k-1)\Delta t \\ \mathbf{h}_p(\Delta t) & \mathbf{h}_p(2\Delta t) & \dots & \mathbf{h}_p(k)\Delta t \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{h}_p(L-1)\Delta t & \mathbf{h}_p(L\Delta t) & \dots & \mathbf{h}_p(L+k-2)\Delta t \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Bei der Wahl von k muß beachtet werden, dass sich mit zunehmendem k das Signal-Störverhältnis verschlechtert, dagegen besteht bei einem zu klein gewähltem k die Gefahr, dass nicht genügend Information der Zeitreihe erfasst wird.

Das Gleichungssystem (3.30) ist überbestimmt, wenn $k \times n \geq Lq$ gilt und kann im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate mit Hilfe der Gaußschen Transformation durch Rechtsmultiplikation mit \mathbf{T}^T

$$\mathbf{BTT}^T = \mathbf{R}^*\mathbf{T}^T \quad (3.32)$$

zu

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^*\mathbf{T}^T[\mathbf{TT}^T]^{-1} \quad (3.33)$$

gelöst werden. Da die Matrix \mathbf{B} jetzt bekannt ist, können die Eigenwerte des Systems, die in der Matrix \mathbf{Z} enthalten sind, mit (3.24) ermittelt werden. Die Gleichung (3.24) umgeschrieben, liefert

$$\sum_{j=0}^L \beta_j \mathbf{WZ}^j = 0 \quad (3.34)$$

Jede Seite der Gleichung wird mit einem Einheitsvektor der Dimension $2N \times 1$ multipliziert. Dabei steht der Betrag 1 an der Stelle des Vektors, an der die Eigenwerte

zu berechnen sind

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^L \beta_j \mathbf{WZ}^j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^L \beta_j (e^{s_1 \Delta t})^j \mathbf{W}_1 = 0 \\
\sum_{j=0}^L \beta_j \mathbf{WZ}^j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^L \beta_j (e^{s_2 \Delta t})^j \mathbf{W}_2 = 0 \\
&\vdots \\
\sum_{j=0}^L \beta_j \mathbf{WZ}^j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^L \beta_j (e^{s_{2N} \Delta t})^j \mathbf{W}_{2N} = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Damit gilt für jeden Eigenwert r

$$\left[\sum_{j=0}^L \beta_j Z_r^j \right] \mathbf{W}_r = 0 \tag{3.36}$$

(dabei entspricht \mathbf{W}_r einer Spalte der Wichtungsmatrix \mathbf{W}). Die Gleichung (3.36) ausführlich geschrieben und mit der Bedingung $\beta_L = \mathbf{I}$ kann (3.24) umgeformt werden zu

$$[\beta_0 + \beta_1 \mathbf{Z}_r + \beta_2 \mathbf{Z}_r^2 + \dots + \beta_{L-1} \mathbf{Z}_r^{L-1}] \mathbf{W}_r = \mathbf{Z}_r^L \mathbf{W}_r \quad . \tag{3.37}$$

Durch Definition von

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0 &= \mathbf{W}_r \\
\mathbf{v}_1 &= Z_r \mathbf{W}_r = Z_r \mathbf{v}_0 \\
\mathbf{v}_2 &= Z_r^2 \mathbf{W}_r = Z_r \mathbf{v}_1 \\
&\vdots && \vdots \\
\mathbf{v}_{L-1} &= Z_r^{L-1} \mathbf{W}_r = Z_r \mathbf{v}_{L-2} \\
\mathbf{v}_L &= Z_r^L \mathbf{W}_r = Z_r \mathbf{v}_{L-1}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

folgt aus (3.37)

$$\beta_0 \mathbf{v}_0 + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_{L-1} \mathbf{v}_{L-1} = Z_r \mathbf{v}_{L-1} \tag{3.39}$$

und diese in Matrixschreibweise formuliert, liefert

$$\begin{bmatrix} -\beta_{L-1} & -\beta_{L-2} & \dots & -\beta_1 & -\beta_0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{Lq \times Lq} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{L-1} \\ \mathbf{v}_{L-2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}^{Lq \times 1} = Z_r \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{L-1} \\ \mathbf{v}_{L-2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}^{Lq \times 1} . \quad (3.40)$$

Die Gleichung (3.40) repräsentiert das bekannte Standard Eigenwertproblem $(\bar{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I}) \Phi_x = 0$, dessen Lösung die Lq komplexen Eigenwerte Z_r und die zu jeder Spalte \mathbf{W}_r der modalen Wichtungsmatrix \mathbf{W} korrespondierenden Eigenvektoren liefert. Damit ist die Matrix \mathbf{W} bekannt und die Residuen \mathbf{R} können berechnet werden.

3.1.2 Bestimmung der komplexen Residuen

L Zeitintervalle berücksichtigend, wird (3.19, S. 21) verändert zu

$$\begin{bmatrix} h_{p0} \\ h_{p1} \\ \vdots \\ h_{pL} \end{bmatrix}^{(L+1)q \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{WZ}^0 \\ \mathbf{WZ}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{WZ}^s \end{bmatrix}^{(L+1)q \times 2N} [\mathbf{R}]^{LN \times 1} \quad (3.41)$$

oder kürzer formuliert

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{WZR}_{p1} \quad (3.42)$$

Die Residuen werden analog der Vorgehensweise in (3.33) geschätzt durch

$$\mathbf{R}_{p1} = [\mathbf{WZ}^H \mathbf{WZ}]^{-1} \mathbf{WZ}^H \mathbf{H}_p \quad (3.43)$$

Mit dem Real- $\Re(R_{p1})$ und dem Imaginärteil $\Im(R_{p1})$ werden die Magnitude

$$R_{\text{mag}} := \sqrt{\Re(R_{p1})^2 + \Im(R_{p1})^2} \quad (3.44)$$

und die Phasenbeziehung

$$\phi := \arctan \frac{\Im(R_{p1})}{\Re(R_{p1})} \quad (3.45)$$

der Eigenformen des dynamischen Systems definiert. Diese werden normiert, indem der größte auftretende Wert den Betrag 1 erhält.

3.2 Das adaptierte Polyreferenz-Verfahren

Gleichung (3.30) wird in der Art und Weise modifiziert, dass die einzelnen \mathbf{T}_p Matrizen nicht in einer Reihe, sondern in einer Spalte angeordnet werden. Für q Eingänge gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \dots & \mathbf{T}_{1q} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \dots & \mathbf{T}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}_{p1} & \mathbf{T}_{p2} & \dots & \mathbf{T}_{pq} \end{bmatrix}^{Kp \times Kq} \quad . \quad (3.46)$$

Diese Matrix ist als Hankelmatrix in der Systemtheorie (Unbehauen (1997)) bekannt. Deren Rang r kann durch eine Vorfilterung nach (2.11, S. 9) a priori gewählt werden. Verdeutlichen läßt sich dies durch eine Zerlegung der Hankelmatrix mit Hilfe der Standard Singulärwertzerlegung (SVD). Die Hankelmatrix $\mathbf{H}^{Kp \times Kq}$ wird durch die SVD zerlegt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{U} \text{diag} \Sigma \mathbf{V}^H \\ \mathbf{H} &= \mathbf{U} \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0 \} \mathbf{V}^H \end{aligned} \quad (3.47)$$

mit den orthogonalen Matrizen $\mathbf{U}^{Kp \times Kp}$, $\mathbf{V}^{T(Kq \times Kq)}$, die die links- bzw rechtssingulären Vektoren beinhalten. Deren Spalten bilden die Basen der Unterräume des Signal- und Nullraumes mit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{H}) &= \text{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) \\ \mathcal{N}(\mathbf{H}) &= \text{span}(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_{Kq}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

und den zugehörigen orthogonalen Komplementäräumen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{H})^\perp &= \text{span}(\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{Kp}) \\ \mathcal{N}(\mathbf{H})^\perp &= \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \quad . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Für $q, p = 1$ und $K = 250$ Zeitintervalle des gemessenen Signals wird am Messpunkt 10 des untersuchten Stahlbalkens Abb. 2.5, S. 14, eine Zeitmatrix $\mathbf{T}_{11}^{K \times K}$ aufgebaut. Deren Singulärwerte repräsentieren die Anteile vorhandener Signalanteile am gesamten Signal und sind in der Abb. 3.1 aufgetragen. Deutlich wird ein gleichmäßiger Übergang der Beträge der Singulärwerte. Signal- und Rausraum sind nur schwer voneinander zu trennen. Die Vorfilterung ermöglicht dies (Abb. 3.2, 3.3). Ebenfalls deutlich ist der „Knick“ an der gestrichelten Linie zu erkennen der den Übergang zwischen Signal- und Rausraum kennzeichnet. Zur Genauigkeitsteigerung der Identifikation bietet sich die Durchführung der SVD an. Aufgrund der notwendigen Fensterung des Filters sind noch nicht jene Rauschanteile eliminiert, die im

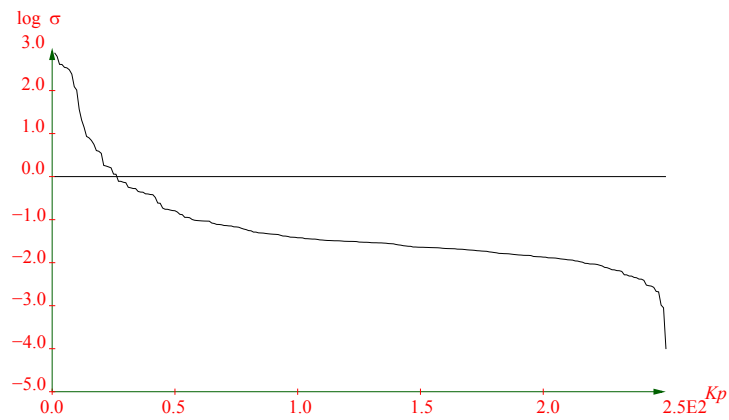


Abbildung 3.1: Darstellung der Singulärwerte der ungefilterten IRF

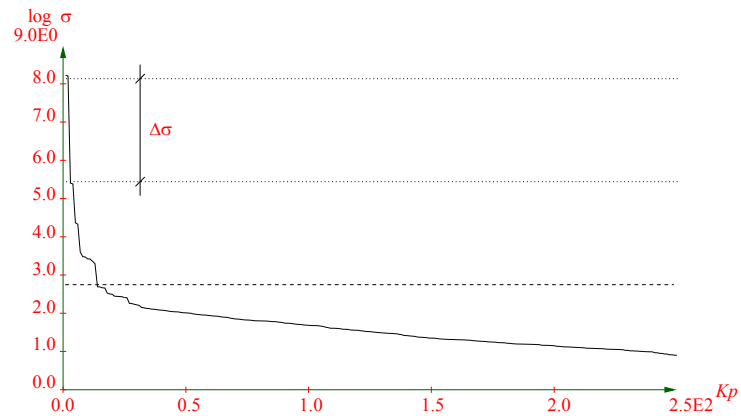


Abbildung 3.2: Darstellung der Singulärwerte auf die Frequenzanteile zwischen 14 – 17 Hz gefilterten IRF

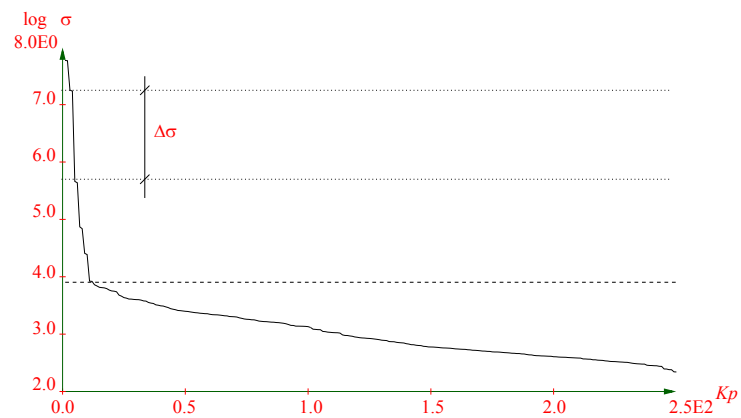


Abbildung 3.3: Darstellung der Singulärwerte auf die Frequenzanteile zwischen 36 – 39 Hz gefilterten IRF

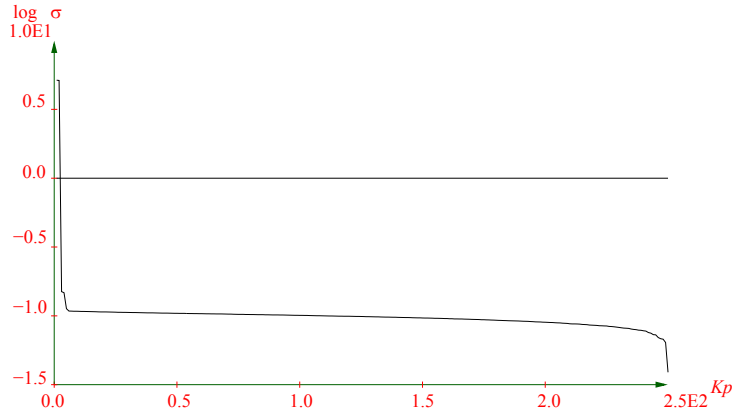


Abbildung 3.4: Darstellung der Singulärwerte nach der Filterung durch die SVD für die Frequenzanteile zwischen 14 – 17 Hz

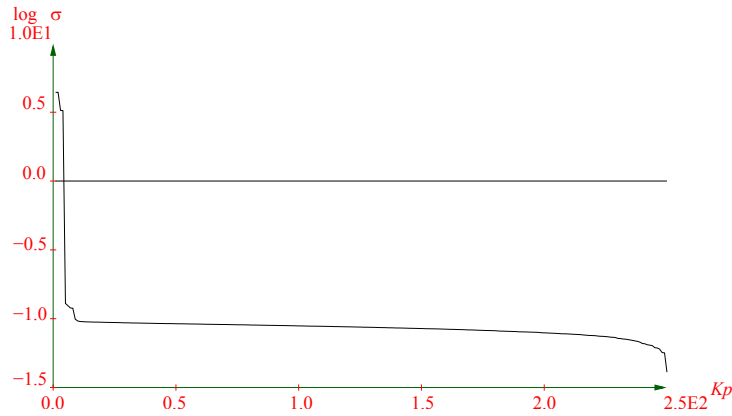


Abbildung 3.5: Darstellung der Singulärwerte nach der Filterung durch die SVD für die Frequenzanteile zwischen 36 – 39 Hz

Übergangsbereich des Filters liegen. Anhand des jetzt bekannten Ranges r der Hankelmatrix \mathbf{H} zu $r = \text{rg } \mathbf{H}$, definiert durch die von Null verschiedenen Singulärwerte der Diagonalmatrix Σ , erfolgt die Bestimmung der Dimensionen der Unterräume Signal- \mathcal{R} und Nullraum \mathcal{N} (der auch als Rauschraum bezeichnet wird) mit

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{signal}} + \mathbf{H}_{\text{noise}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{Kp \times r} & \mathbf{U}_2^{Kp \times (Kp-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1^r & \\ & \Sigma_0^{(Kp-r) \times (Kq-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^{r \times Kq} \\ \mathbf{V}_2^{(Kq-r) \times Kq} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Im Anschluss daran wird die Hankelmatrix neu gebildet

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (3.51)$$

In den Abb. 3.4, 3.5 sind die Singulärwerte der durch (3.48) und (2.23) gefilterten Signale aufgetragen. Signifikant erscheint die Reduktion des Rauschanteiles im Signal. Bedingt durch die Linearität des dynamischen Systems herrscht Zeitinvarianz vor und damit ist es möglich, eine zweite Hankelmatrix \mathbf{H}_2 über einem global verschobenen Zeitintervall zu bilden. Jede der Zeitmatrizen (3.31) wird damit verändert zu

$$\mathbf{T}_{kp} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_p(\Delta t) & \mathbf{h}_p(2\Delta t) & \dots & \mathbf{h}_p(n_t)\Delta t \\ \mathbf{h}_p(2\Delta t) & \mathbf{h}_p(3\Delta t) & \dots & \mathbf{h}_p(n_t - 1)\Delta t \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{h}_p(K)\Delta t & \mathbf{h}_p(K - 1)\Delta t & \dots & \mathbf{h}_p(K + n_t - 1)\Delta t \end{bmatrix} . \quad (3.52)$$

Die beiden Hankelmatrizen werden mit Hilfe der QSVD zerlegt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_{H_1}\mathbf{V} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_{H_2}\mathbf{V} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \end{aligned} \quad (3.53)$$

mit - analog zur SVD - den orthogonalen Matrizen $\mathbf{U}^{Kp \times Kp}$, $\mathbf{V}^{T(Kq \times Kq)}$, die die links- bzw. rechtssingulären Vektoren beeinhaltten. Die Matrix \mathbf{Q} besitzt ebenfalls die Eigenschaft der Orthogonalität. Die Summe der Quadrate der einzelnen Singulärwertepaare besitzt immer den Wert 1 und die Verteilung der Beträge der Singulärwertepaare kann in drei verschiedenen Varianten erfolgen:

$$\begin{aligned} \sigma_{H_1 i} &= 1 \quad \sigma_{H_2 i} = 0 \quad i = 1, \dots, s \\ \sigma_{H_1 i} &< 1 \quad \sigma_{H_2 i} > 0 \quad i = s + 1, \dots, s + r \\ \sigma_{H_1 i} &= 1 \quad \sigma_{H_2 i} = 1 \quad i = s + r + 1, \dots, Kp \quad . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Für die Identifikation wird der zweite Fall genutzt. Bedingt durch die Verschiebung um einen Zeitschritt kann die Fundamentalmatrix $e^{\mathbf{A}\Delta t}$ (3.7) bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_{H_1}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P}_1\mathbf{S} = \mathbf{P}(e^{\tilde{\mathbf{A}}\Delta t})^0 \mathbf{S} \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_{H_2}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P}_2\mathbf{S} = \mathbf{P}(e^{\tilde{\mathbf{A}}\Delta t})^1 \mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{P}_1^\dagger \mathbf{P}_2 = [\mathbf{P}_1^T \mathbf{P}_1]^{-1} \mathbf{P}_1^T \mathbf{P}_2 = (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_{H_1})^\dagger \mathbf{V} \quad (3.56)$$

Kp	100	200	300	400	500	1000
CPU-Zeit [s]	0.28	0.83	1.72	3.65	6.2	66.52

Tabelle 3.1: CPU-Zeit zur Berechnung der QSVD in Abhängigkeit von der Dimension der Hankelmatrix Kp

\mathbf{P} und \mathbf{S} stellen die Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsmatrix dar und leiten sich aus der Systemtheorie ab (Unbehauen (1997)). Ihr Rang $rg(\mathbf{P}; \mathbf{S})$ entspricht der Dimension r der Systemmatrix \mathbf{A} . Eine andere Möglichkeit die Pseudoinverse der Matrix \mathbf{P}_1 zu bestimmen ergibt sich aus der Nutzung der SVD

$$\mathbf{P}_1^\dagger = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \quad . \quad (3.57)$$

Durch die Möglichkeit der Vorfilterung auf einen oder mehrere Signalanteile kann immer eine eindeutige Beziehung für die QSVD gefunden werden. Generell gilt ein direkt proportionaler Zusammenhang zwischen der Anzahl zu identifizierender Signale und der Dimension der Hankelmatrix. Die Anwendung der Vorfilterung bewirkt eine Einschränkung des Signalraumes und damit eine Verringerung der benötigten Anzahl der Samples einer Zeitreihe zum Aufbau der Hankelmatrix. Dies ist mit einer signifikanten Verkürzung der Rechenzeit verbunden. Den Grund dafür stellt der mit der Dimension der Hankelmatrix nichtlinear ansteigende Rechenaufwand für die Berechnung von (3.47) und (3.53) dar. Zur Verdeutlichung sind in der Tabelle 3.1 beispielhaft die Rechenzeiten für eine IRIX-Workstation mit 12 GB RAM und einem R 12000 Prozessor mit einer Taktfrequenz von 300 MHz angegeben. Demgegenüber steigt der Rechenaufwand mit jeder zusätzlichen Filterung entsprechend (2.11) nur nahezu linear an, da die Dimensionen der Vektoren der Filterkoeffizienten (2.23) sich in dem interessierenden unteren Frequenzbereich nur geringfügig voneinander unterscheiden.

Generell kann die QSVD in ihrer Genauigkeit gesteuert werden. Für die simulierten Daten ist die Genauigkeit mit $\gamma = 10^{-16}$ vorgegeben. Bei realen Messwerten vergrößert sich γ entsprechend der Abtastung des A/D -Wandlers.

Gleichung (3.56) ersetzt also (3.30). Dies ist mit dem Vorteil der Genauigkeitssteigerung und damit einem breiteren Anwendungsgebiet des PRCF-Verfahrens verbunden.

Um die Residuen des adaptierten PRZ-Verfahrens nach (3.7) zu bestimmen, muss vorher die Matrix $e^{\mathbf{A}\Delta t}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation auf die Frobeniussche

Normalform gebracht werden.

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{r \times r} \quad (3.58)$$

Dies geschieht mit dem Verfahren von *Danielewski* (Beresin und Shidkow (1971)).

Die Abb. 3.6 verdeutlicht die unterschiedliche Vorgehensweise des klassischen und des adaptierten PRZ-Verfahrens in Abhängigkeit der Schwierigkeit der Identifikation.

3.3 Verifikation an Laborversuchen

In den hier angeführten Beispielen werden das klassische und das adaptive PRZ-Verfahren bei der Bestimmung modaler Parameter und ihre Eignung zur Überwachung von Bauwerken bei Schädigungsfortschritt miteinander verglichen.

3.3.1 Stahlbetonbalken

Objektbeschreibung und Aufgabenstellung

Ebert (2001) führte experimentelle und numerische Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung stochastischer Eigenschaften durch. Innerhalb dieser Arbeit wurden mehrere Stahlbetonbalken (Abb. 3.7) durch Erhöhung der statischen Einwirkungen (sukzessiv durch die Laststufen 0 - 13 realisiert; die Laststufe 0 bezeichnet den Ursprungszustand des Balkens als Nullmessung) progressiv geschädigt. Eine Aufgabe des Versuchs bestand in der Überwachung der dynamischen Eigenschaften der Stahlbetonbalken, insbesondere der komplexen Eigenwerte. Für einen Vergleich des Frequenzgehaltes zwischen den Laststufen wurde die Übertragungsfunktion

$$H_\omega := \frac{x_\omega}{f_\omega} \quad (3.59)$$

mit x_ω als dem Spektrum des gemessenen Zeitsignales eines Messpunktes gewählt. Die 1. Systemeigenfunktion ließ sich nur entsprechend der möglichen Auflösung im

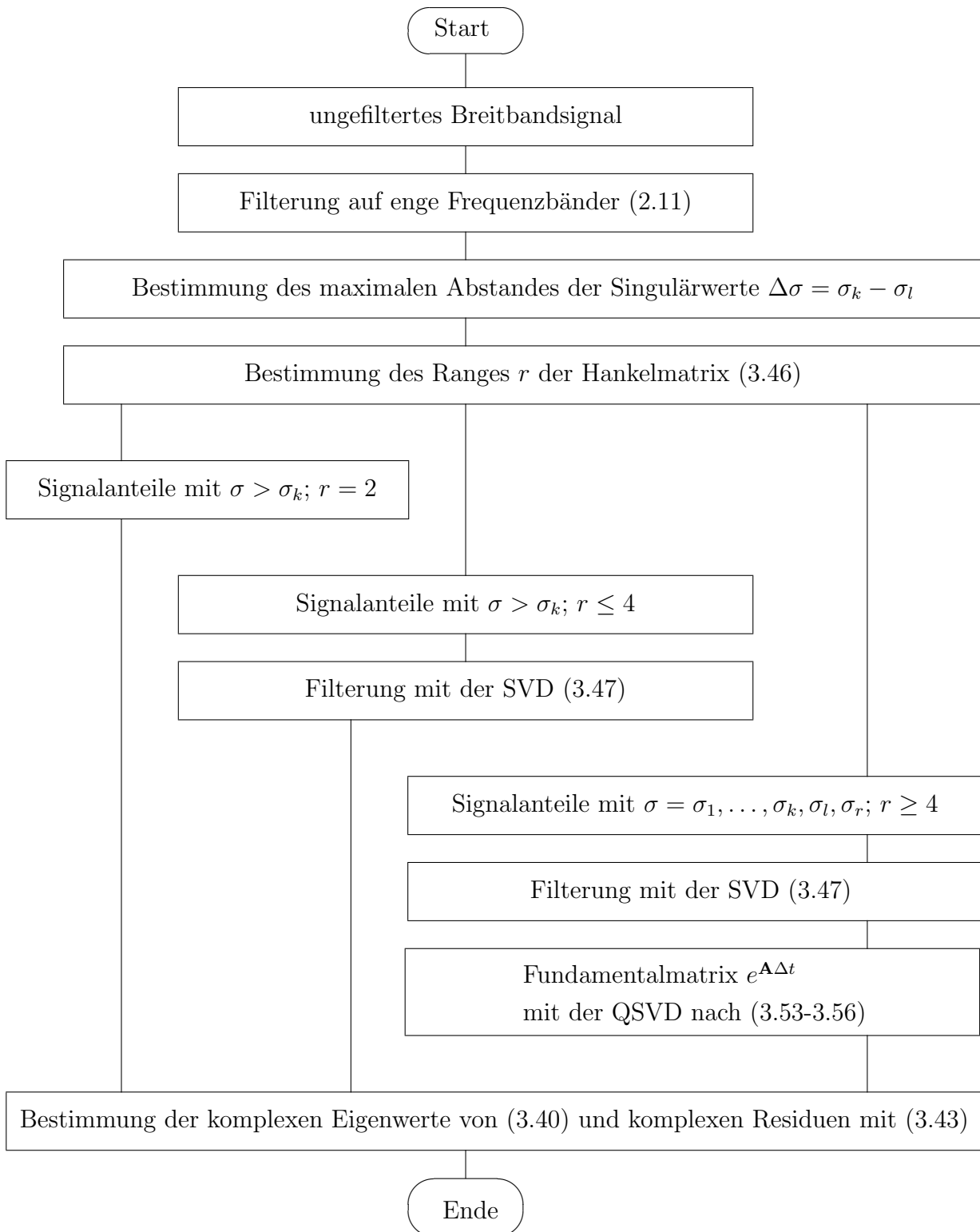


Abbildung 3.6: Bestimmung modaler Parameter mit dem klassischen (linke Spalte) und dem adaptierten Polyreferenz-Verfahren (rechte Spalte)

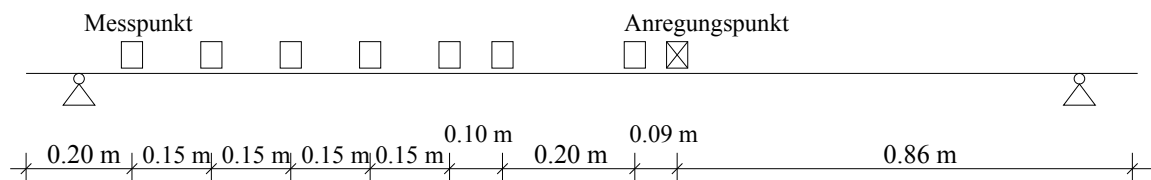
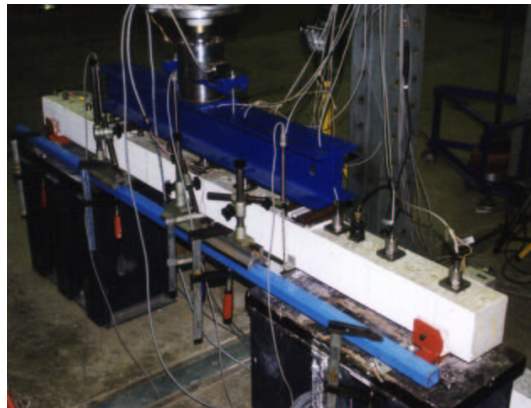


Abbildung 3.7: Foto des Versuchaufbaus und Lage der Messaufnehmer zur Prüfung des Stahlbetonbalkens aus Ebert (2001)

Frequenzbereich Δf detektieren. Daraus erfolgte die Motivation der Anwendung des klassischen und des adaptierten PRZ-Verfahrens.

Versuchsdurchführung

Die Stahlbetonbalken wurden durch Hammerimpulse erregt. Dies erfolgte zehnmal, um Zufälligkeiten in der Erregung zu verringern. An 7 Messpunkten wurde das Signal registriert (Abb. 3.7). Die Aufzeichnungsdauer des Signals beträgt $t_l = 4 \text{ s} = K \Delta t$ mit einem Abtastintervall $\Delta t = 6.10352 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ und einer maximalen Auflösung im Frequenzbereich $\Delta f = \frac{1}{K \Delta t} = 0.25 \text{ Hz}$.

Ergebnisse

In der Abb. 3.8 sind die Magnituden der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit der Laststufen im interessierenden Frequenzbereich des Verlaufs der ersten Eigenfrequenz $f_e = 10 - 55 \text{ Hz}$ dargestellt. Für die Anwendung des klassischen und des adaptierten PRZ-Verfahrens wurde das Signal auf diesen Frequenzbereich im Sinne einer besseren Trennung der einzelnen Anteile gefiltert. Für die Laststufen 0 - 4 kann der Filterbereich auch enger gefaßt werden.

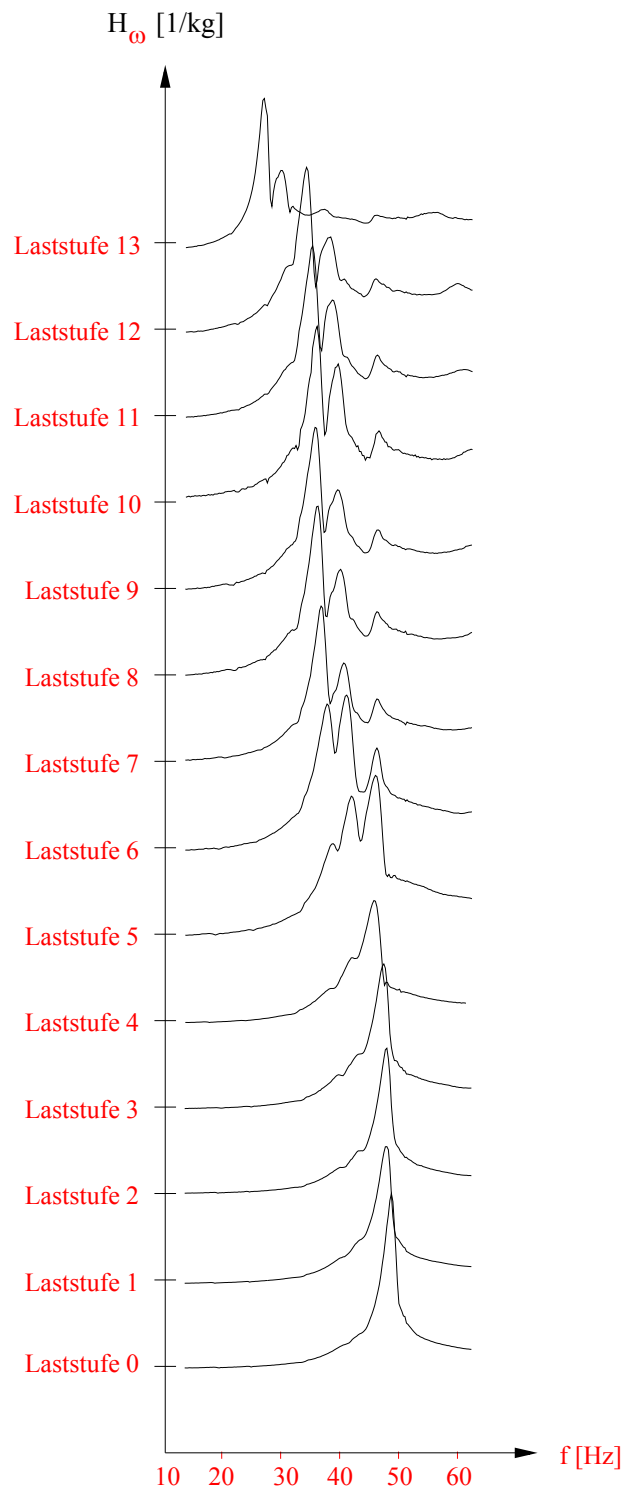


Abbildung 3.8: Veränderung des Frequenzinhaltes der Übertragungsfunktionen in Abhängigkeit der 13 Laststufen

In diesem Beispiel werden die unterschiedlichen Verarbeitungstufen (ungefiltert: PRZ; gefiltert nach (2.11): PRZ_{gef} ; mit (2.11) und der SVD (3.47) gefiltert: PRZ_{SVD} ; und das adaptierte PRZ-Verfahren: adap.PRZ) anhand eines Impulsversuches miteinander in den Tabellen 3.2 - 3.7 verglichen. In der Laststufe 4 weist die Magnitude

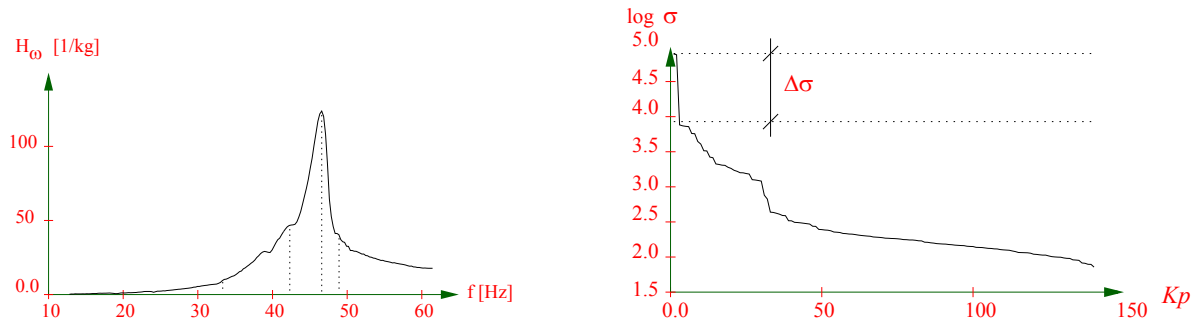


Abbildung 3.9: Magnitude der Übertragungsfunktion im gefilterten Frequenzbereich $f = 10 - 55$ Hz der Laststufe 4 mit den identifizierten Frequenzen (gestrichelte Linie) des adaptierten PRZ-Verfahrens (Tab. 3.3); Darstellung der Singulärwerte der Hankelmatrix

Nr.	PRZ_{gef}		PRZ	
	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e
1	<u>47.235</u>	<u>0.0157</u>	43.985	0.0319
2	33.182	0.1435	-	-

Tabelle 3.2: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen der Laststufe 4 (klassisches PRZ-Verfahren)

Nr.	adap.PRZ		PRZ_{SVD}	
	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e
1	49.142	0.0038	-	-
2	<u>47.538</u>	<u>0.0132</u>	<u>47.45</u>	<u>0.0108</u>
3	42.698	0.0034	41.86	0.0299
4	33.859	0.0049	-	-

Tabelle 3.3: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen der Laststufe 4 (adaptiertes PRZ-Verfahren)

der Übertragungsfunktion einen Signalanteil mit starker Beteiligung am Gesamtsignal (Abb. 3.9) auf. Dies zeigt auch die Untersuchung der Singulärwerte des Signals. Der maximale Abstand zweier Singulär-Wertepaare $\Delta\sigma$ tritt zwischen dem ersten und zweiten Singulär-Wertepaar auf. Die Identifikation mit dem ungefilterten PRZ-Verfahren erweist sich als nicht erfolgreich (Tab. 3.2, 3.3; bei mehreren identifizierten Signalen werden die modalen Parameter des Stahlbetonbalkens unterstrichen). Alle anderen Vorgehensweisen weisen eine Übereinstimmung sowohl untereinander als auch mit dem Spektrum der Übertragungsfunktion auf. Der Vorteil des adaptierten PRZ-Verfahrens wird durch die Anzahl der identifizierten Eigenfrequenzen und Dämpfungen deutlich: Jede identifizierte Eigenfrequenz läßt sich in der Übertragungsfunktion (Abb. 3.9) wiederfinden. Ähnliche Tendenzen lassen sich auch für

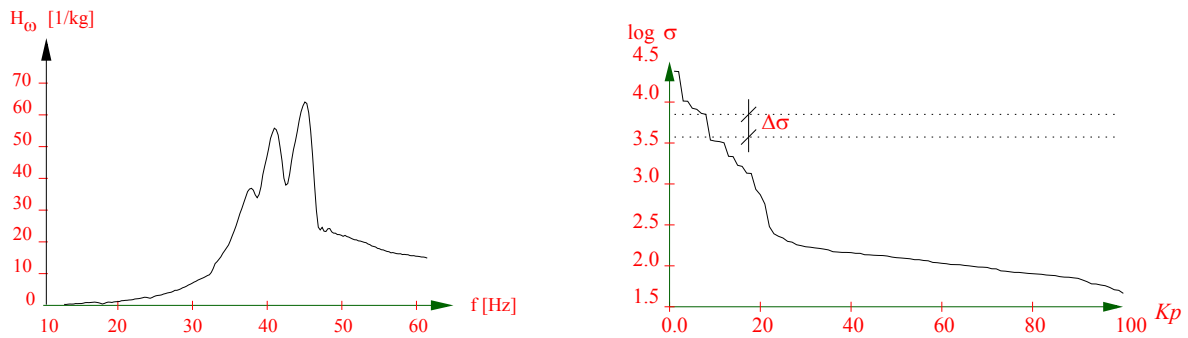


Abbildung 3.10: Magnitude der Übertragungsfunktion im gefilterten Frequenzbereich $f = 10 - 55$ Hz der Laststufe 5; Darstellung der Singulärwerte der Hankelmatrix

	PRZ_{gef}		PRZ	
Nr.	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e
1	<u>46.680</u>	<u>0.0226</u>	42.86	0.033
2	39.597	0.2245	-	-

Tabelle 3.4: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen der Laststufe 5 (klassisches PRZ-Verfahren)

die wesentlich komplizierter zu identifizierenden Signalanteile der Laststufen 5 und 6 zeigen (Tab. 3.4 - 3.7). Die Auswertung des Frequenzganges ist in den Laststufen 5 und 6 gekennzeichnet durch die im Spektrum der Magnitude (Abb. 3.10, 3.11) sichtbare neue Ausbildung von Frequenzspitzen, die eine Zuordnung zur ersten Eigenfrequenz erschweren. Verdeutlicht wird dies auch durch den verringerten Abstand

Nr.	adap.PRZ		PRZ_{SVD}	
	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e
1	49.860	0.0043	49.43	0.0412
2	<u>47.435</u>	<u>0.0064</u>	<u>46.96</u>	<u>0.0845</u>
3	43.831	0.0205	38.20	0.0199
4	32.959	0.0111	-	-

Tabelle 3.5: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen der Laststufe 5 (adaptiertes PRZ-Verfahren)

$\Delta\sigma$ zwischen den Singulär-Wertepaaren und einer größeren Anzahl dieser über dem Niveau von $\Delta\sigma$.

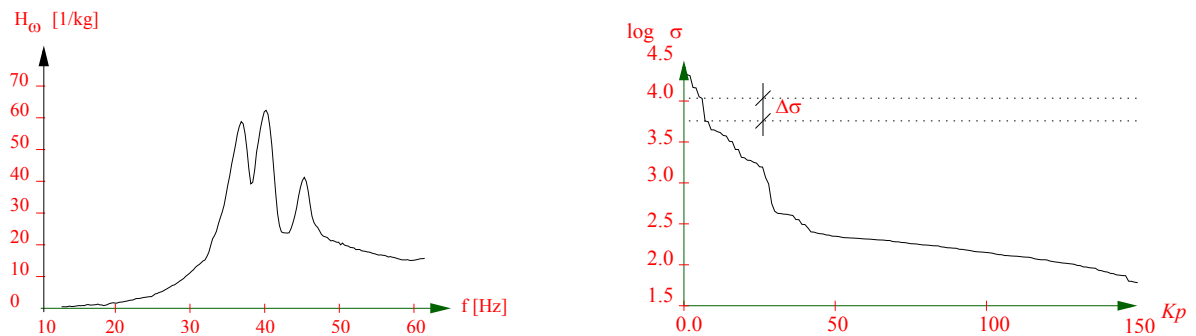


Abbildung 3.11: Magnitude der Übertragungsfunktion im gefilterten Frequenzbereich $f = 10 - 55$ Hz der Laststufe 6; Darstellung der Singulärwerte der Hankelmatrix

Nr.	PRZ_{gef}		PRZ	
	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e
1	46.796	0.0358	40.553	0.064
2	35.810	0.0552	-	-
3	34.753	0.4411	-	-

Tabelle 3.6: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen der Laststufe 6 (klassisches PRZ-Verfahren)

Nr.	adap.PRZ		PRZ_{SVD}	
	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e
1	49.271	-0.0156 ²	-	-
2	46.971	0.0334	47.966	0.014
3	43.188	-0.0058	-	-
4	<u>38.767</u>	<u>0.0203</u>	<u>38.658</u>	<u>0.0223</u>
5	33.122	0.0073	33.273	0.0172

Tabelle 3.7: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen der Laststufe 6 (adaptiertes PRZ-Verfahren)

Last- stufe	Mittelwert	Standardabweichung	Mittelwert	Standardabweichung
	Eigenfrequenz \bar{f}_e [Hz]	Eigenfrequenz σ_{f_e} [Hz]	Dämpfungsmaß \bar{D}_e	Dämpfungsmaß σ_{D_e}
0	48.126	0.0556	0.01862	0.00082
1	47.285	0.0704	0.01689	0.00498
2	47.118	0.1	0.01949	0.00436
3	46.844	0.11427	0.0175	0.0047
4	47.119	0.1942	0.01615	0.00608
5	45.003	0.5018	0.02639	0.00951
6	40.762	1.2671	0.06481	0.02234
7	37.092	0.3883	0.05380	0.01060
8	35.806	0.2851	0.03152	0.0043
9	35.814	0.2848	0.03524	0.00536
10	35.782	0.3754	0.04645	0.02741
11	35.492	0.2416	0.04551	0.01078
12	33.511	0.3988	0.07128	0.02425
13	26.837	0.1983	0.03863	0.00355

Tabelle 3.8: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Stahlbetonbalkens (klassisches PRZ-Verfahren (gefiltert mit (2.11)))

Die Tabellen 3.8, 3.9 zeigen die erste Eigenfrequenz und ihre zugehörigen Dämpfung über die einzelnen Laststufen. Mit einsetzender Rissbildung und Übergang des Stahlbetonbalkens in den Zustand II (Laststufen 5 - 6) ist ein Anwachsen der Dämpfungswerte und ab voller Ausbildung des Zustandes II (Laststufen 7 - 13) wieder ein

Nr.	Mittelwert Eigenfrequenz \bar{f}_e [Hz]	Standardabweichung Eigenfrequenz σ_{fe} [Hz]	Mittelwert Dämpfungsmaß \bar{D}_e	Standardabweichung Dämpfungsmaß σ_{De}
0	47.979	0.0940	0.02106	0.00095
1	47.374	0.0542	0.01511	0.00093
2	47.414	0.0751	0.01885	0.00147
3	46.893	0.0662	0.01304	0.00142
4-1	48.950	0.8699	0.00430	0.00290
4-2	<u>47.550</u>	<u>0.0616</u>	<u>0.01100</u>	<u>0.00102</u>
5-1	<u>44.214</u>	<u>0.8548</u>	<u>0.02235</u>	<u>0.00505</u>
5-2	39.015	0.3699	0.02154	0.00924
6-1	38.556	0.1807	0.01527	0.00394
6-2	<u>37.517</u>	<u>0.4515</u>	<u>0.03695</u>	<u>0.01037</u>
7-1	<u>37.308</u>	<u>0.8791</u>	<u>0.03567</u>	<u>0.00848</u>
7-2	34.595	0.6223	0.01631	0.01047
8-1	<u>36.620</u>	<u>0.4130</u>	<u>0.03558</u>	<u>0.00659</u>
8-2	34.206	0.2243	0.01246	0.00936
9	34.168	0.6092	0.02650	0.00364
10	32.998	0.3533	0.01388	0.00203
11	32.957	0.3459	0.00996	0.00315
12	31.168	0.3493	0.03513	0.00577
13-1	26.505	0.3703	0.0206	0.003731
13-2	<u>25.514</u>	<u>0.1979</u>	<u>0.0136</u>	<u>0.00507</u>

Tabelle 3.9: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Stahlbetonbalkens (adaptiertes PRZ-Verfahren)

Absinken festzustellen. Ebenso vergrößern sich die Standardabweichungen σ_{fe} signifikant um eine Zehnerpotenz. Mit voller Ausprägung des Zustandes II wird die Identifikation schwieriger. Die Standardabweichung der Eigenfrequenz σ_{fe} bleibt in den Laststufen 7 - 13 wesentlich größer über den Werten des Zustandes I (Laststufen 0 - 4).

3.3.2 Stahlbalken

Der Stahlbalken aus Abschn. 2.2 wird durch Einfügen von Sägeschnitten mit einer Schnittbreite von ≈ 2 mm entsprechend der Tab. 3.10 sukzessiv fortschreitend geschädigt. Das Trägheitsmoment zweiter Ordnung des Stahlbalkens um die z-Achse beträgt $I_z = 7.25 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$. Eine Abschätzung der durch die eingefügte Schädigung

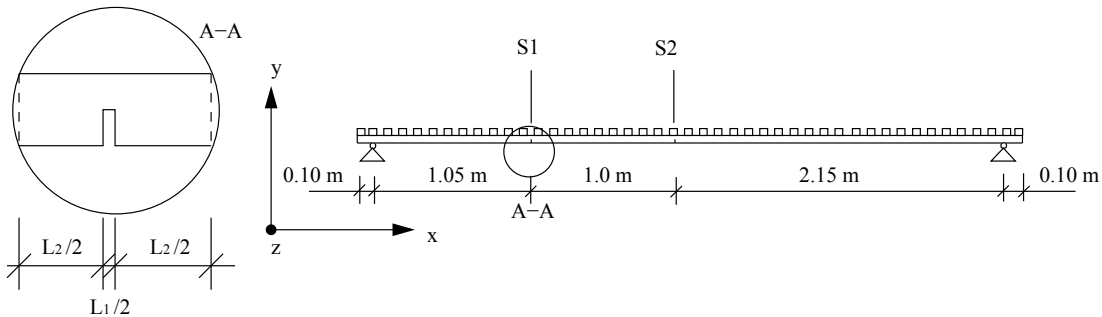
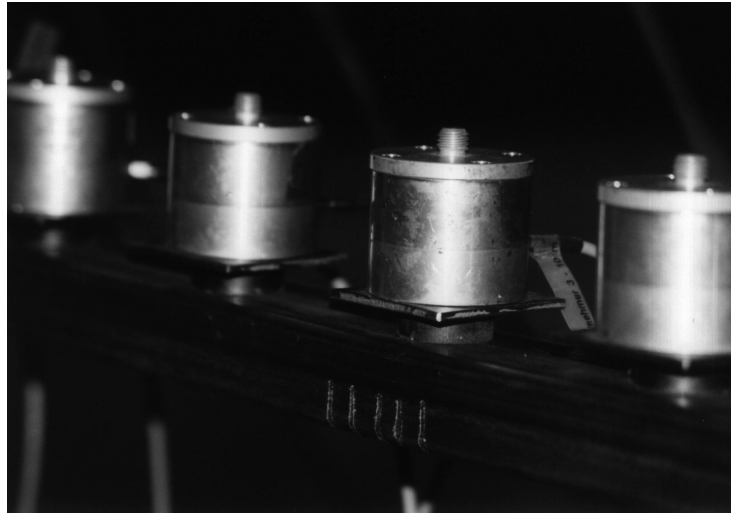


Abbildung 3.12: Foto des Rißbildes (Phase 6) und Skizze der eingetragenen Schädigung

verminderten Biegesteifigkeit $E_s I_v$ des 12. bzw. 20. finiten Elementes an der Stelle $l = 1.15 \text{ m}$ bzw. $l = 2.25 \text{ m}$ erfolgt durch

$$E_s I_v = \frac{L_e E_s I_1 I_z}{L_{e1} I_z + L_{e2} I_1} \quad (3.60)$$

mit L_e als der Länge des FE-Elementes, die mit dem Abstand benachbarter Messpunkte übereinstimmt und E_s als Elastizitätsmodul des Stahlbalkens.

Phase	Schädigungsort l [m]	Rißtiefe [mm]	”verschmierte” Biegesteifigkeit $E_s I_v$ [Nm ²]
0			15225
1	1.15	1	15162
2	1.15	2	15063
3	1.15	4	14604
4	1.15	15	11749
5	1.15	3×15	2921
6	1.15	5×15	1814
7	1.15; 2.25	5×15 ; 5×15	1814; 1814

Tabelle 3.10: Schädigungsszenario des Stahlbalkens

Biegeeigenfrequenz	1	2	3	4	5	6
Frequenzgehalt [Hz]	3-6	14-17	36-39	62-65	98-102	139-142

Tabelle 3.11: gefilterte Frequenzbänder

Versuchsdurchführung

Die dynamische Erregung wird durch einen Hammerimpuls realisiert und erfolgt zehnmals, um Zufälligkeiten in der Erregung zu verringern. An 45 Messpunkten wird das Signal registriert.

Ergebnisse

Die Identifikation von Eigenfrequenzen und zugehörigen Residuen ist durch den wirksamen Arbeitsbereich des Messaufnehmers begrenzt. Das Signalgemisch (Abb. 2.6) wird entsprechend des Arbeitsbereiches bis 150 Hz in 6 eng begrenzte Frequenzbänder (Tab. 3.11) gefiltert. Ähnlich wie im Beispiel 3.3.1 werden das adaptierte und das klassische PRZ-Verfahren miteinander verglichen. Dies geschieht exemplarisch durch Auswertung einer einzigen Impulserregung am Meßpunkt 10 des Stahlbalkens (Abb. 2.5). Beispielhaft werden in der Abb. 3.13 die durch (2.11) gefilterten IRF dargestellt. Deutlich wird, dass zur Trennung der Signalanteile eine Vorfilterung allein nicht immer genügt. Dies kann aber wie z.B. im Frequenzbereich 14 – 17 Hz der Fall sein. Verursacht wird dies durch den im Sinne der Trennung der Signalanteile relativ breiten, im Sinne der zur Filterung zur Verfügung stehenden Zeitintervalle kleinen Übergangsbereich $\Delta\Omega = 1$ Hz. Als Kriterium für die Anzahl der im Signal maßgebenden Signalanteile oder des Ranges r der Hankelmatrix

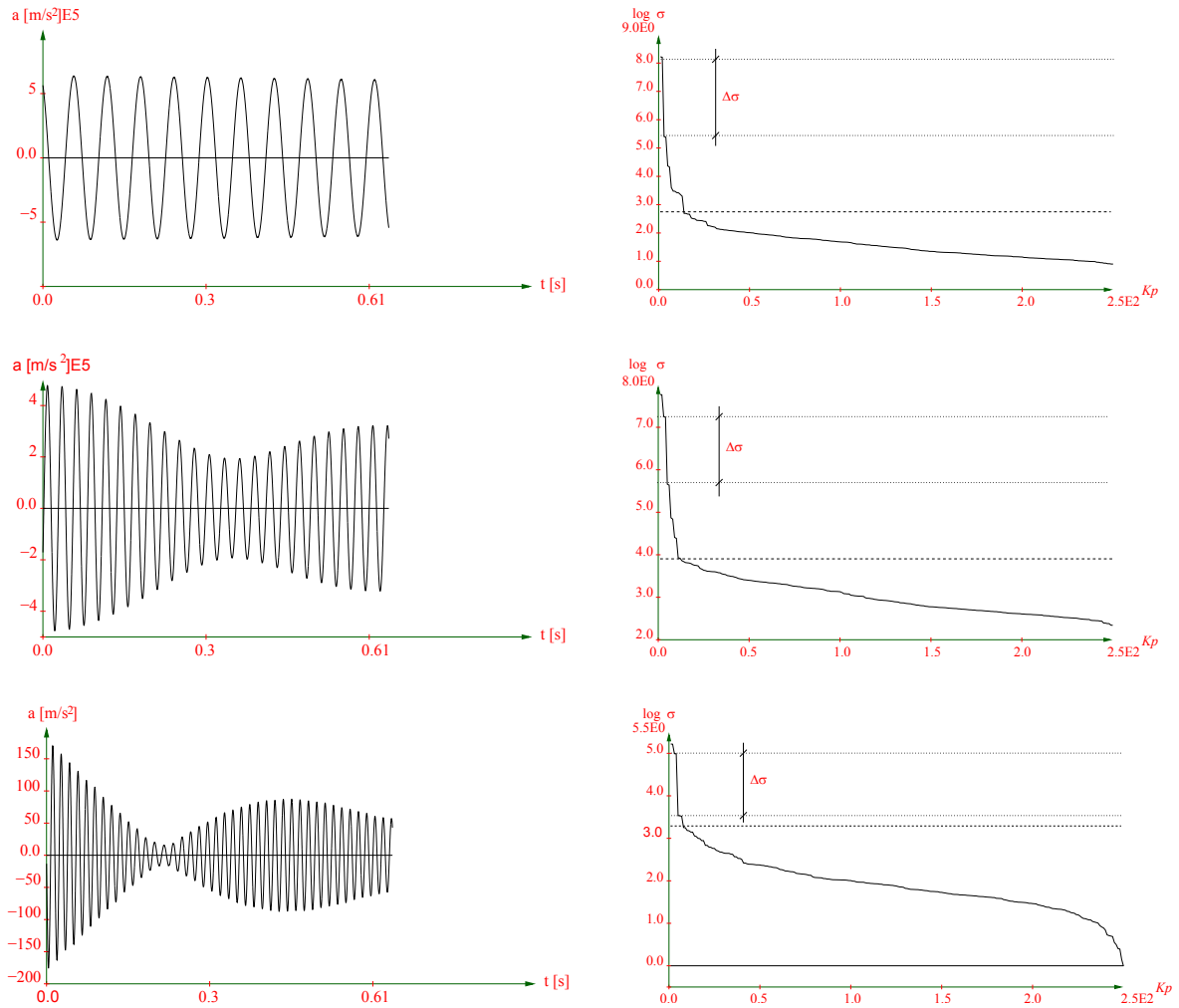


Abbildung 3.13: gefilterte Zeitreihen (14 – 17 Hz, 36 – 39 Hz, 62 – 65 Hz) und Verlauf der Singulärwerte; Phase 0

\mathbf{H} kann auch hier der maximale Abstand zwischen den Singulär-Wertepaaren $\Delta\sigma$ gelten. Oberhalb von $\Delta\sigma$ liegen z.B. im Frequenzbereich 14 – 17 Hz ein, in den Frequenzbereichen 36 – 39 Hz, 62 – 65 Hz je zwei Singulär-Wertepaare. Mit dem adaptierten PRZ-Verfahren und auch durch die Filterung mit (2.11) und (3.47) können diese (jedoch mit z.T. unterschiedlichen Resultaten) auch identifiziert werden (Tab. 3.13). Die Bestimmung der z.B. zweiten Eigenfrequenz darf als ein einfacher Fall einer Identifikation gelten; hier genügt auch die Anwendung des klassischen PRZ-Verfahrens, dem aber eine Filterung mit (2.11) vorgeschaltet wird (Tab. 3.12). Die Tabellen 3.14 - 3.15 zeigen die Resultate der identifizierten komplexen Eigenwerte mit den Mittelwerten und Standardabweichungen in Abhängigkeit der eingetragenen

		PRZ_{gef}		PRZ	
Frequenzbereich [Hz]	Nr.	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e
14-17	1	<u>15.998</u>	<u>0.00076</u>	15.122	0.0540
36-39	1	<u>36.510</u>	<u>0.00856</u>	38.371	0.0358
62-65	1	<u>63.447</u>	<u>0.01724</u>	-	-

Tabelle 3.12: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen (2.-4. vertikale Biege-eigenfrequenz; klassisches PRZ-Verfahren); Phase 0; ein Impulsversuch

		adap.PRZ		PRZ_{SVD}	
Frequenzbereich [Hz]	Nr.	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e	Eigenfrequenz f_e [Hz]	Dämpfungsmaß D_e
14-17	1	16.106	0.00870	-	-
	2	<u>15.998</u>	<u>0.00072</u>	<u>15.998</u>	<u>0.00079</u>
36-39	1	<u>37.648</u>	<u>0.00255</u>	<u>37.944</u>	<u>0.00365</u>
	2	36.157	0.00191	36.200	0.00392
62-65	1	<u>63.899</u>	<u>0.00078</u>	<u>64.596</u>	<u>0.00552</u>
	2	63.051	0.00498	62.860	0.00728

Tabelle 3.13: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen (2.-4. vertikale Biege-eigenfrequenz; adaptiertes PRZ-Verfahren); Phase 0; ein Impulsversuch

Schädigung. Erfassbar sind schon sehr geringe Schädigungen, wie die Unterschiede in den Eigenfrequenzen zwischen den Phasen 0 und 1 zeigen. Mit steigendem Schädigungsgrad weisen die höheren Eigenfrequenzen zunehmende Standardabweichungen σ_{f_e} auf, bzw. lassen sich in manchen Fällen nicht identifizieren (Tab. 3.15). Eine Ursache dafür verdeutlicht die Abb. 2.7, S. 15, aus der ersichtlich wird, dass das System besonders in der zweiten Biege-eigenfrequenz schwingt. Die anderen Schwingungsformen zeigen sich weniger gut ausgebildet.

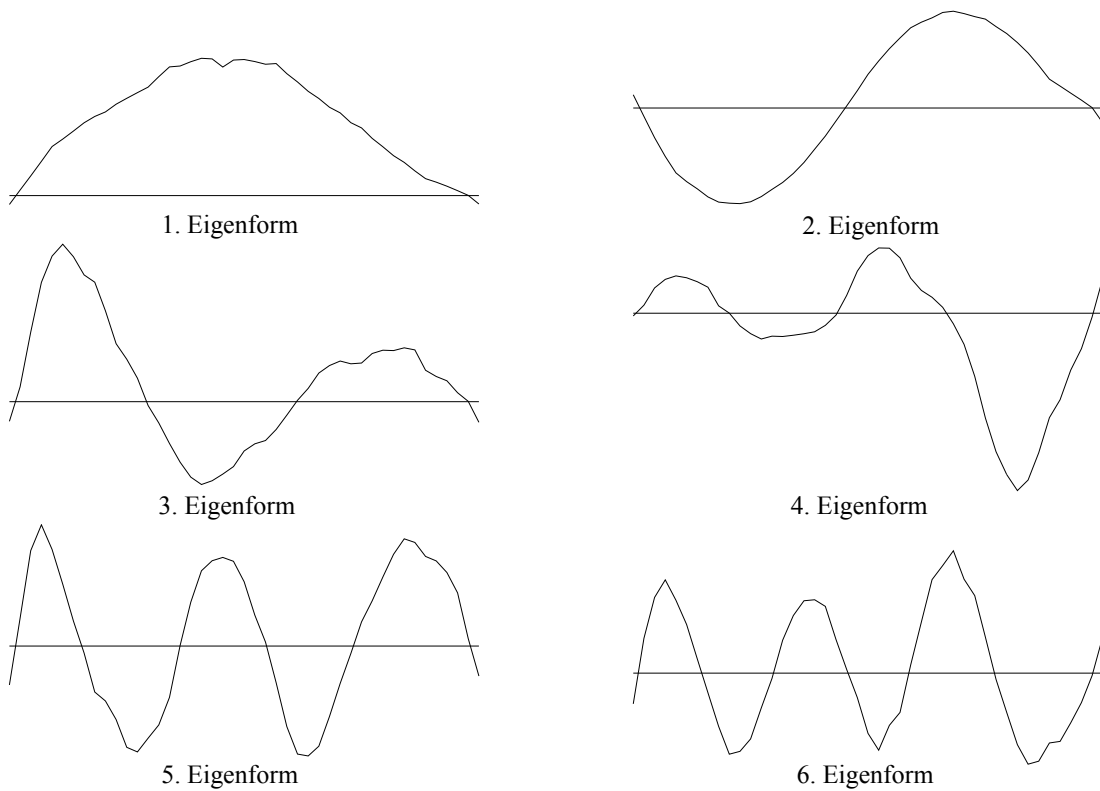


Abbildung 3.14: erste sechs identifizierte vertikale Biegeeigenformen

Mit (3.43) werden die komplexen Residuen sowie Amplitude R und Phasenwinkel ϕ der Eigenform mit (3.44, 3.45) bestimmt. In der Abb. 3.14 zeigt die 2. Eigenform den stetigsten Verlauf, eine Folge davon, dass ein großer Teil der durch den Impuls eingebrachten Energie zur Ausbildung dieser zweiten Eigenform führte.

Phase	Mittelwert Eigenfrequenz \bar{f}_e [Hz]	Standardabweichung Eigenfrequenz σ_{fe} [Hz]	Mittelwert Dämpfungsmaß \bar{D}_e	Standardabweichung Dämpfungsmaß σ_{De}
1. vertikale Biegeeigenfrequenz				
0	4.0846	0.0021024	0.000246	0.000659
1	4.0773	0.001871	0.000767	0.000307
2	4.0758	0.0029666	0.000738	0.000440
3	4.0466	0.0023341	0.001036	0.000400
4	3.8963	0.0016768	0.001030	0.000625
5	3.7512	0.0023747	0.000272	0.000291
6	3.7049	0.0071109	0.002145	0.001007
7	3.7363	0.0060678	0.007678	0.001776
2. vertikale Biegeeigenfrequenz				
0	15.999	0.000701	0.000642	3.2818e-05
1	15.996	0.000530	0.000793	1.1569e-05
2	15.981	0.001125	0.000590	6.9090e-05
3	15.77	0.000479	0.000566	3.8015e-05
4	14.906	0.000651	0.000407	5.8928e-05
5	14.241	0.000587	0.000680	5.3917e-05
6	13.73	0.001766	0.000887	6.8446e-05
7	13.751	0.001366	0.001049	7.8723e-05
3. vertikale Biegeeigenfrequenz				
0	37.558	0.03441	0.004366	0.00035274
1	37.097	0.01253	0.003057	0.00098327
2	36.572	0.12697	0.004424	0.00096891
3	36.036	0.03202	0.003838	0.00099281
4	35.289	0.00291	0.001604	6.0663e-05
5	34.814	0.04206	0.001544	0.00067414
6	34.333	0.04092	0.000832	0.00042779
7	29.742	0.01774	0.001024	0.00046512

Tabelle 3.14: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen (adaptiertes PRZ-Verfahren); 1-3. vertikale Biegeeigenfrequenz

Phase	Mittelwert Eigenfrequenz \bar{f}_e [Hz]	Standardabweichung Eigenfrequenz σ_{fe} [Hz]	Mittelwert Dämpfungsmaß \bar{D}_e	Standardabweichung Dämpfungsmaß σ_{De}
4. vertikale Biegeeigenfrequenz				
0	63.774	0.0525	0.003292	0.000807
1	63.735	0.0320	0.004046	0.000876
2	63.787	0.0350	0.003437	0.000683
3	63.826	0.0252	0.003983	0.000512
4	63.358	0.0714	0.001047	0.000488
5	62.944	0.1184	-0.003728	0.001374
6	63.041	0.0586	-0.001662	0.001322
7	60.896	0.0307	-0.000258	0.000368
5. vertikale Biegeeigenfrequenz				
0	100.11	0.097963	0.000432	0.000130
1	100.16	0.064936	0.000440	0.000235
2	-	-	-	-
3	-	-	-	-
4	99.549	0.1124	0.000694	0.000644
5	94.605	0.18564	-0.00308	0.000874
6	94.88	-	-0.00075	-
7	94.284	0.46967	-0.00052	0.00158
6. vertikale Biegeeigenfrequenz				
0	141.26	0.1019	0.000668	0.001724
1	141.32	0.0813	0.000344	0.000282
2	140.33	0.0690	0.000663	0.000162
3	138.71	0.2036	0.000549	0.000531
4	134	0.0746	0.000499	0.000104
5	132.37	0.3376	0.000838	0.000367
6	130.5	0.2703	0.001120	0.001037
7	125.97	0.1809	0.000545	0.000596

Tabelle 3.15: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen (adaptiertes PRZ-Verfahren); 4-6. vertikale Biegeeigenfrequenz

Kapitel 4

Lokalisierung von Systemveränderungen

Die Lokalisierung von Systemveränderungen ist fester Bestandteil eines Überwachungskonzeptes. Dieses basiert auf der Bestimmung weniger Parameter des Systems, die repräsentativ und sensitiv genug sind, um mit deren Hilfe Veränderungen des Systems innerhalb definierter Zeitperioden anzuzeigen und zu orten. Während Eigenfrequenzen im Rahmen von Zeitbereichsverfahren sehr gut als Indikatoren einer Veränderung der Systemeigenschaften verwendet werden können, ist in den Eigenformen zusätzlich die Information über die räumliche Verteilung der Systemeigenschaften vorhanden. Dies ist der Grund ihrer verbreiteten Anwendung in der Schadensdiagnose und der Entwicklung vielfältiger Algorithmen. Eine Reihe dieser Verfahren basieren auf einem Abgleich mit einem parallel dazu erstellten FE-Modell, womit oftmals die vollständige Messung aller Komponenten einer Eigenform notwendig wird, wie z.B. bei der minimalen Rang Anpassungs-Theorie (Zimmermann und Kaouk (1994)) oder dem Verfahren des Ausgleichs der Eigenwertgleichung (Lallement und Piranda (1990)).

Notwendig wird hier also eine Kondensation des numerischen Rechenmodells oder eine Expansion der gemessenen Eigenformen. Beide Vorgehensweisen sind aber fehlerbehaftet. Einen Überblick und ein Benchmark-Test über verschiedene Expansions- und Kondensationstechniken sind in Friswell und Mottershead (1995) enthalten.

Andere Techniken benötigen nur einen Teil der im Rechenmodell vorhandenen Eigenvektoren und diese können auch unvollständig gemessen vorliegen. In diesem Abschnitt werden verschiedene Methoden numerisch und experimentell unter dem

Aspekt der Sensitivität am Beispiel des Schädigungsszenarios des Stahlbalkens (Abschn. 3.3) getestet. Die simulierten Beschleunigungsmessungen werden mit einem gleichverteilt simulierten Messfehler von 0.5% Standardabweichung des Maximalwertes der Beschleunigungen belegt. In den Grafiken werden nur jene Phasen des Schädigungsszenarios dargestellt, in denen eine Veränderung der Lokalisierungsparameter zu erkennen ist.

Weitere Lokalisierungsalgorithmen werden im Anhang D.1 erläutert.

4.1 Lokalisierung basierend auf Eigenformen

4.1.1 Der COMAC-Wert

Eine formale Fehlerlokalisierungstechnik stellt der COMAC-Wert (Coordinated Modal Assurance Criterion) (Maia u. a. (1997)) dar. Er besitzt keine physikalische Basis und steht in engem Zusammenhang zum bekannten Modal Assurance Criterion (MAC)-Wert. Im COMAC-Wert erhält die j -te skalare Komponente des Modells oder eines experimentell ermittelten Nullzustandes ϕ_a eines Systems über alle l Eigenformen einen Vergleich mit einem Schädigungszustand ϕ_x

$$COMAC(i) := \frac{\left(\sum_{i=1}^l |\phi_a(i, j)\phi_x(i, j)| \right)^2}{\sum_{i=1}^l |\phi_a(i, j)|^2 \sum_{j=1}^l |\phi_x(i, j)|^2} . \quad (4.1)$$

Ein COMAC-Wert von eins bedeutet, dass keine Differenzen zwischen den Eigenformen existieren. Unterschiedliche Eigenformen sind durch Werte zwischen eins und null gekennzeichnet und jene können als Schädigungsindikatoren visualisiert werden. Untersuchungen von Winge (2000) zeigen, dass der COMAC-Wert anfällig gegenüber fehlerbehafteten Eigenformen ist. Zusätzliche Information kann durch Bildung der COMAC-Werte für verschiedene Erregerstandorte gewonnen werden (Kamarys (1999)). Ein COMAC-Wert von eins weist auf identische Eigenformen hin. In den Abb. 4.1 sind die Differenzen zwischen eins und den entsprechenden COMAC-Werten für das Beispiel des Stahlbalkens (Abb. 2.5, S. 14) über die Elementnummerierung aufgetragen. Die Lokalisierung ist fehlerbehaftet. Neben der identifizierten Stelle S_1 am Element 12 wird auch am Element 19 eine Schädigung indiziert.

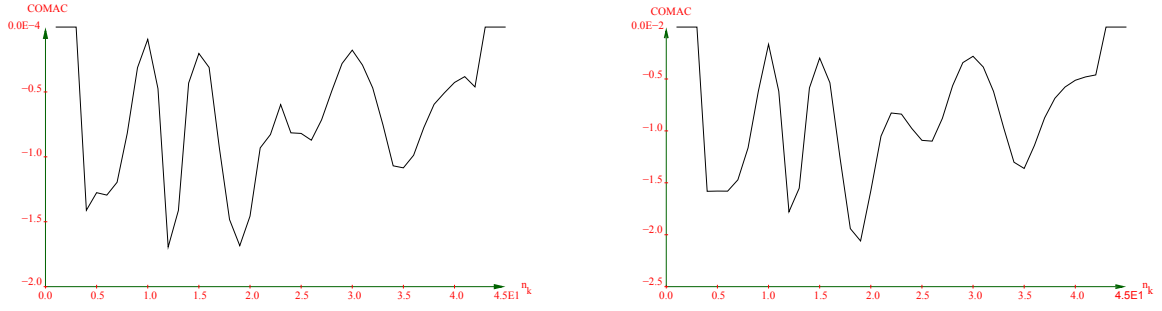


Abbildung 4.1: COMAC-Werte der Phasen 5 und 6

4.1.2 Der MDLAC-Wert

Shi u. a. (2000) stellt den MDLAC-Wert (Multiple Damage Location Assurance Criterion) vor, der nicht auf einem direkten Vergleich der Eigenformen beruht. Dabei werden die Differenzen zwischen allen berechneten und experimentell ermittelten Eigenformen mit der Sensitivität der Eigenformen gegenüber einem Parameter a (z.B. Steifigkeit) verglichen. Diese Differenzen werden im Vektor $\Delta\phi$ zusammengefasst, dabei muss die Zuordnung der Eigenformen erhalten bleiben, d.h. die Freiheitsgrade der jeweiligen gekoppelten Eigenformen müssen übereinstimmen. Der MDLAC-Wert für den Parameter a kann somit wie folgt berechnet werden:

$$MDLAC(k) = \frac{|(\Delta\phi)^T(\delta\phi(a))|^2}{(\Delta\phi)^T(\Delta\phi)(\delta\phi(a))^T(\delta\phi(a))} \quad (4.2)$$

Der Vektor $\delta\phi(a)$ entspricht einer Spalte der Sensitivitätsmatrix \mathbf{S} , in der die Ableitungen der Eigenvektoren nach den Parametern enthalten sind

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial\{\Phi_1\}}{\partial a_1} & \frac{\partial\{\Phi_1\}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\{\Phi_1\}}{\partial a_k} \\ \frac{\partial\{\Phi_2\}}{\partial a_1} & \frac{\partial\{\Phi_2\}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\{\Phi_2\}}{\partial a_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\{\Phi_{m_\Phi}\}}{\partial a_1} & \frac{\partial\{\Phi_{m_\Phi}\}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\{\Phi_{m_\Phi}\}}{\partial a_k} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Es bietet sich eine für jede Eigenform i getrennte Berechnung der MDLAC-Vektoren an. Damit wird eine Skalierung ermöglicht in der Art, dass z.B. das größte Element den Wert 1 erhält.

Hohe Werte des MDLAC-Indikators repräsentieren Bereiche, die inkorrekt modelliert wurden. Da der MDLAC-Wert direkt für einen Parameter von Elementgruppen berechnet wird, ist die Zuordnung zu Bereichen des Modells, die fehlerhaft modelliert

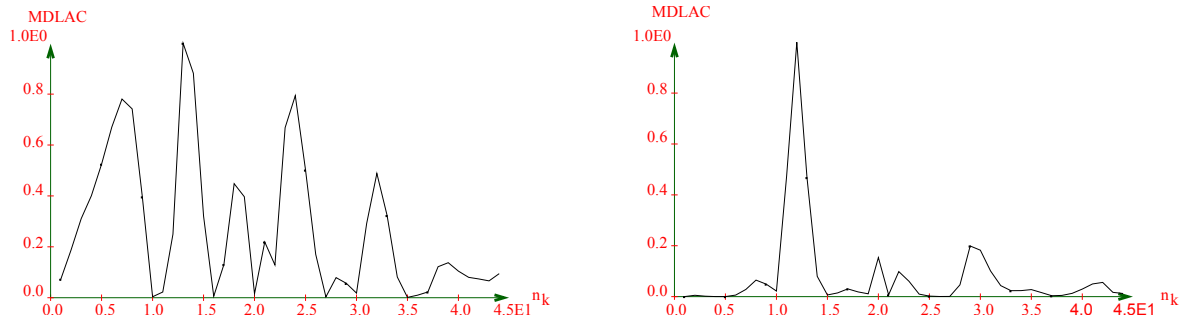


Abbildung 4.2: MDLAC-Werte der Phasen 3 und 6

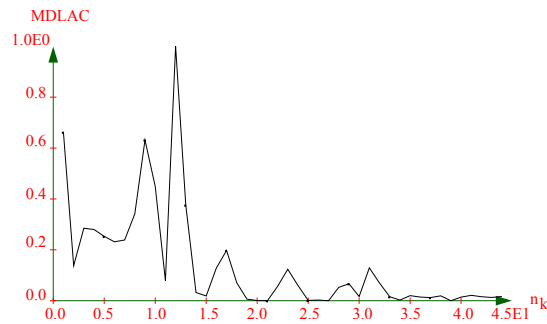


Abbildung 4.3: MDLAC-Werte der Phase 7

wurden, unmittelbar gegeben. Die Abb. 4.2, 4.3 zeigt, dass schon in der Phase 3 eine Systemveränderung am Element 12 geortet wird. Die zweite Systemveränderung wird nicht angezeigt.

4.1.3 Die Krümmung der Eigenformen

Die Krümmung der Eigenformen (Pandey u. a. (1991)) steht in direkter Beziehung zur Biegesteifigkeit des Balkenquerschnittes,

$$\phi'' = \frac{M_b}{EI} \quad (4.4)$$

mit M_b als dem Biegemoment und EI als der Biegesteifigkeit eines Abschnittes. Die Differenz in der Krümmung der Eigenformen zwischen der intakten und geschädigten Struktur wird für die Lokalisierung einer Veränderung des Systems genutzt. Die Krümmung der Eigenformen ϕ'' wird aus den Wegamplituden der Eigenformen ν numerisch durch die zentrale Differenzen-Approximation bestimmt

$$\phi'' = (\nu_{i+1} - 2\nu_i + \nu_{i-1})/L_e^2 \quad . \quad (4.5)$$

Dabei stellt i die Laufvariable und L_e die Länge des finiten Elementes dar.

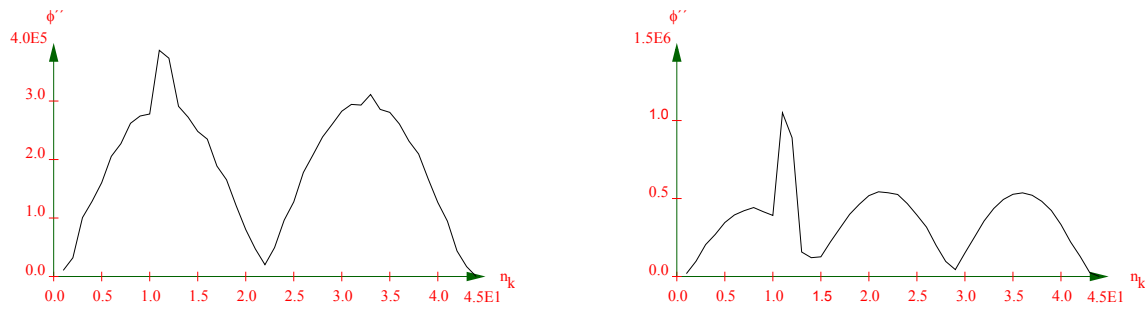


Abbildung 4.4: Krümmung der Eigenformen, 2. Eigenform Phase 6; 3. Eigenform Phase 5

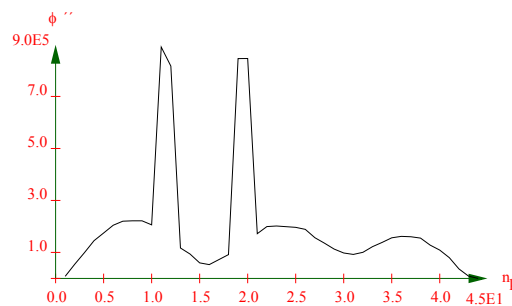


Abbildung 4.5: Krümmung der Eigenformen, 3. Eigenform Phase 7

Wie die Abb. 4.5 zeigt, werden beide eingetragenen Systemveränderungen lokalisiert. Dieses Modell gilt nur für jene Systemelemente, in denen Krümmungen vorhanden sind.

4.1.4 Die Flexibilitätsmatrix

Eine andere Methode stellt die Bestimmung der Differenz der Flexibilitätsmatrix (Pandey und Biswas (1994)) zwischen der intakten und geschädigten Struktur dar. Die Berechnung der Flexibilitätsmatrix erfolgt mit der massennormierten Modalmatrix Φ und der Matrix der Eigenwerte Λ .

$$\mathbf{F}_x = \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \phi_i \phi_i^T \quad (4.6)$$

Jede Spalte der Flexibilitätsmatrix beinhaltet den Vektor von Knotenverschiebungen (Verdrehungen) bzgl. einer Einheitslast an einem Freiheitsgrad. Die Veränderung der Flexibilitätsmatrix wird aus der Differenz zwischen der Flexibilitätsmatrix der intakten bzw. geschädigten Struktur $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_x$ ermittelt und jede Spalte dieser über die Messpunkte aufgetragen. Ein Nachteil der Methode liegt in der

Ortsabhängigkeit der Beträge von ΔF . Die Schäden werden am besten dort lokalisiert, wo die größten Biegemomente auftreten. Abb. 4.6 zeigt für das Modell des

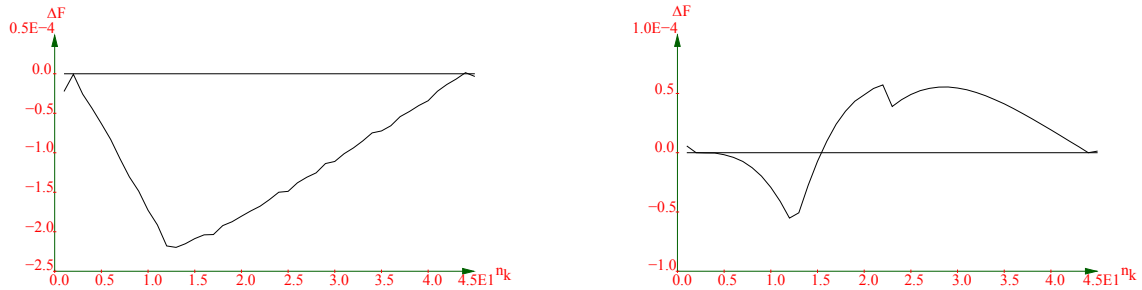


Abbildung 4.6: ΔF Verlauf für die 1. Eigenform, Messpunkt 19, Phase 6; 2. Eigenform, Messpunkt 13, Phase 7

Stahlbalkens beide eingetragenen Systemveränderungen an.

4.1.5 Messung der Verdrehungen der Eigenformen

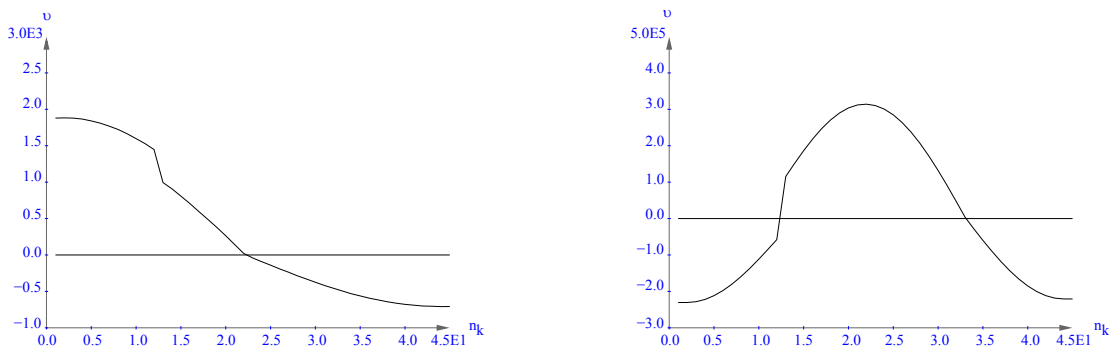


Abbildung 4.7: Verdrehung um die z-Achse der 1. und 2. Eigenform; Phase 6

In vielen Fällen werden translatorische Bewegungen der Eigenformen gemessen, da für diese eine große Auswahl von Messaufnehmern zur Verfügung stehen. Rotatorische Bewegungen ϑ der Eigenformen aufzuzeichnen ist weitaus schwieriger. Eine Möglichkeit stellt das auf dem Laser-Prinzip basierende Messsystem eines *Torsional Vibration Meter - Type 2523* von Brühl & Kjaer dar. Der Vorteil der Messung rotatorischer Komponenten von Eigenformen ist die direkte Ermittlung von Unstetigkeiten (Systemveränderungen), die durch einen Knick in der Funktion der Eigenform verdeutlicht werden.

Wertet man die Veränderungen der rotatorischen Bewegungen aus, so zeigen die

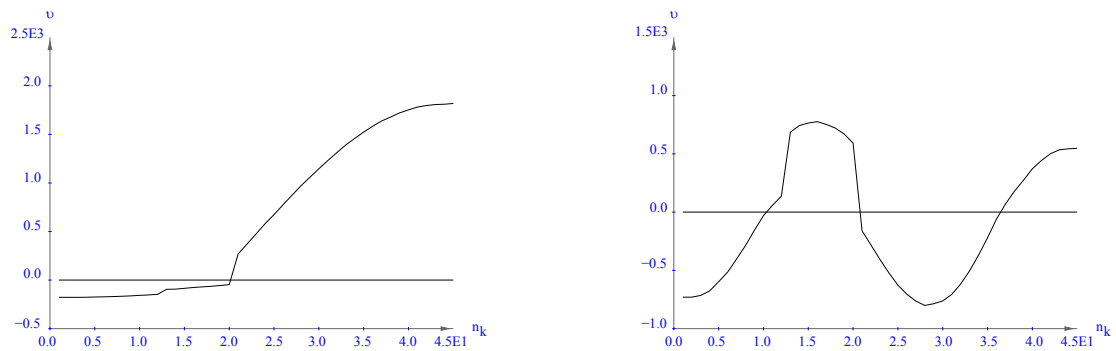
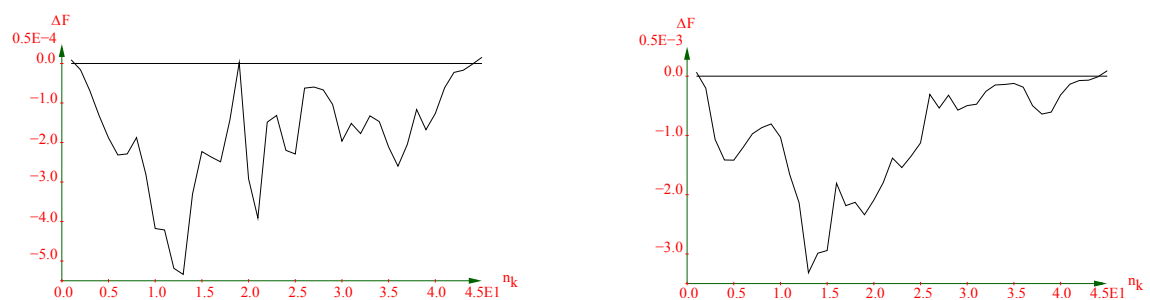


Abbildung 4.8: Verdrehung um die z-Achse der 1. und 3. Eigenform; Phase 7

Abb. 4.7, 4.8, dass beide eingetragenen Systemveränderungen lokalisiert werden, jedoch erst in der Phase 6 bzw. 7.

4.1.6 Experimentelle Untersuchung

Von allen in der numerischen Simulation getesteten Lokalisierungsverfahren weist nur das Verfahren der Differenz der Flexibilitätsmatrix in der experimentellen Untersuchung auf eine eingetragene Schädigung bei $l = 1.15$ m hin. Dies jedoch in einem späten Stadium; erst in der Phase 6 kann der Schadensort richtig identifiziert werden. Dies gilt jedoch nicht für die zweite eingetragene Schädigung bei $l = 2.0$ m in der Phase 7.

Abbildung 4.9: ΔF Verlauf für 1. Eigenform, Messpunkt 19, Phase 6; 1. Eigenform, Messpunkt 11, Phase 7

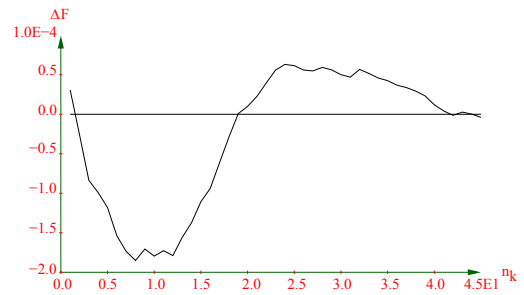
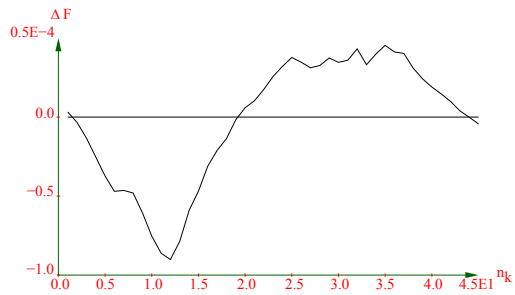


Abbildung 4.10: ΔF Verlauf für 2. Eigenform, Messpunkt 14, Phase 6; 2. Eigenform, Messpunkt 14, Phase 7

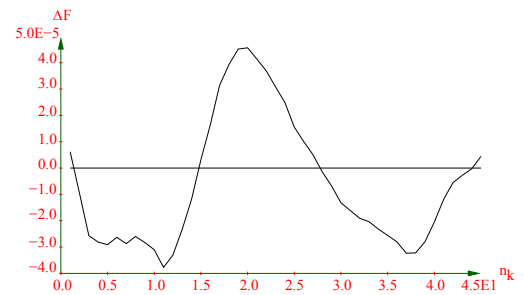
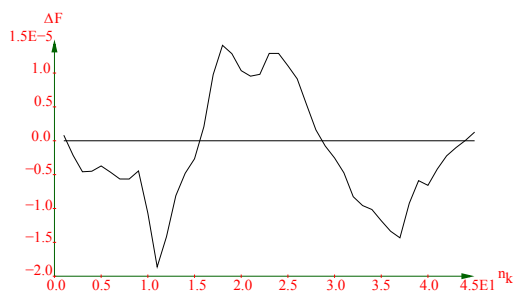


Abbildung 4.11: ΔF Verlauf für 3. Eigenform, Messpunkt 14, Phase 6; 3. Eigenform, Messpunkt 14, Phase 7

Kapitel 5

Konstruktion eines Impulshammers

5.1 Erfordernisse an den Impulshammer

Für die Anwendung hinsichtlich der im Abschn. 3 beschriebenen Verfahren auf reale Bauwerke sind einige Überlegungen zur Erzeugung des Testsignals notwendig. Neben der Gestaltung des Erregerkraftspektrums ergeben sich weitere Anforderungen an einen Impulshammer, damit der Vorteil der Impulserregung als eine kostengünstige Erregungsart erhalten bleibt:

- geringe Fallmassen und damit minimierter Transportaufwand
- einfache und schnelle Installation des Erregersystems
- schnelles Umsetzen von Erregerpunkt zu Erregerpunkt
- breitbandiges Erregerkraftspektrum
- hoher Krafteintrag im Verhältnis zu den geringen Transportmassen
- gute Reproduzierbarkeit der Impulse
- exaktes Erfassen der Kraft-Zeit-Funktion bei hoher Auflösung während der gesamten Messung und
- geringer Zeitaufwand für die Messungen .

Ein Nachteil von Impulshämmern mit geringen Fallmassen besteht darin, dass die Dauer der Erregung aufgrund der am Stoß beteiligten Materialien sehr kurz ist und z.B. Systeme mit niedrigen Eigenfrequenzen schlecht angeregt werden können. In diesem Fall besitzt das zu untersuchende System am Erregerpunkt die Admittanz eines unendlich ausgedehnten Kontinuums (Meinhold und Huth (1999)). Daraus leitet sich als ein besonderes Erfordernis die Realisierung einer ausreichenden Stoßdauer durch den Transienten-Erreger ab.

5.2 Anzustrebende Impulsdauer für die transiente Bauwerkserregung

Die Wahl der Impulsdauer hängt auch entscheidend von der Art des Testsignals und seiner Realisierbarkeit ab. Eine Diskussion der Vor- und Nachteile verschiedener Testsignale liefert Natke (1992). Als ideal geeignet erscheint der Dirac-Impuls (2.3), der ein über die Variation der Frequenz konstantes Erregerkraftspektrum liefert (Abb. 5.1). Der Dirac-Impuls kann praktisch jedoch nicht umgesetzt werden. Eine

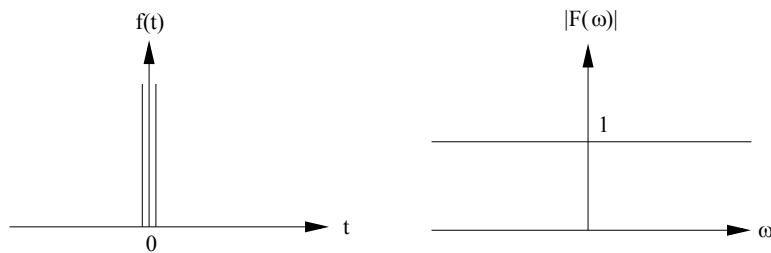


Abbildung 5.1: Zeitverlauf und Fourierspektrum des Diracstoßes

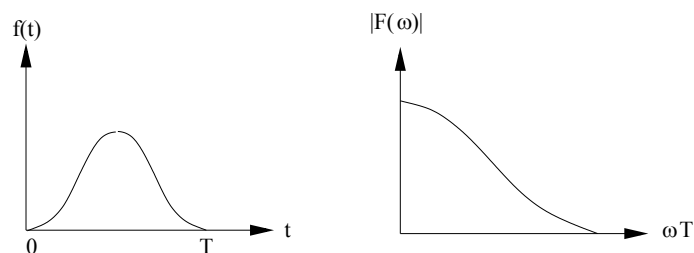


Abbildung 5.2: Zeitverlauf und Fourierspektrum des Halbsinusstoßes (Natke (1992))

leichter zu realisierende Form eines Testsignals stellt der Halbsinusstoß dar (Abb. 5.1).

Für einen Anregungszeitbereich $0 \leq t \leq \tau$ ist dieser definiert zu

$$f(t) = a_0 m \sin \frac{\pi}{\tau} t \quad (5.1)$$

mit τ als der Impulsdauer des Halbsinusstoßes und a_0 als der Beschleunigung der Masse. Die Fourier-Transformierte von (5.1) ist

$$\mathcal{F}(j\omega) = a_0 m \frac{2\pi\tau}{\pi^2 - (\tau\omega)^2} \cos \frac{\omega\tau}{2} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \quad (5.2)$$

Für die Untersuchung der Anregung einer bestimmten interessierenden Eigenfrequenz kann das System auf ein System mit einem Freiheitsgrad (SDOF) vereinfacht werden. Bei Bauwerken sind insbesondere die ersten Eigenfrequenzen von Interesse. Das Antwortspektrum des Systems, normiert auf die Erregung, wird mit f_0 als der Eigenfrequenz des Systems

$$|H_r| = \left| \frac{\ddot{x}_r}{a_0} \right| = \left| 2\pi f_0 \frac{2\pi\tau}{\pi^2 - \tau^2\omega_0^2} \right| \cos \pi f_0 \tau \quad (5.3)$$

und mit \ddot{x}_r als der vom System (SDOF) wiedergegebenen Beschleunigung (Anhang B.1) berechnet. Die Abb. 5.3 verdeutlicht (5.3). Mit steigender Anregungsdauer τ

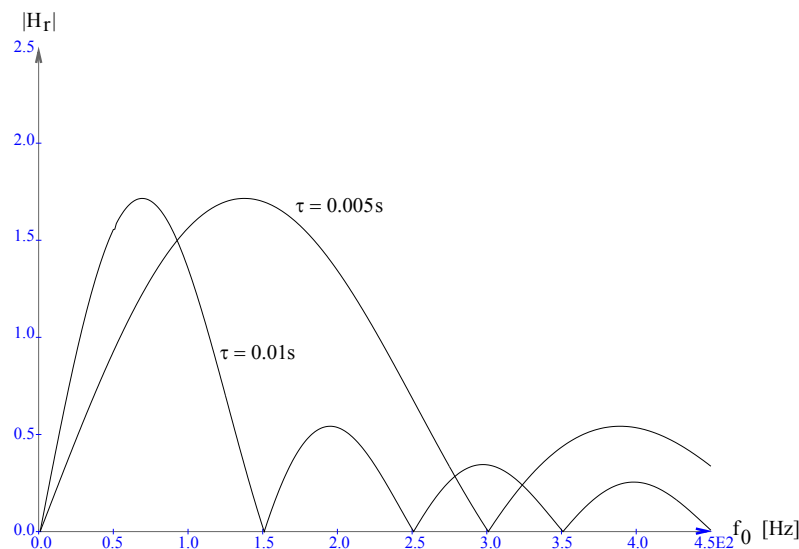


Abbildung 5.3: Auf das Spektrum des Halbsinusstoßes normiertes Antwortspektrum (SDOF) $|H_r|$

vergrößert sich die Amplitudendichte in dem unteren Frequenzbereich des Systems und ab dem Scheitelpunkt der Funktion (5.3) wird diese vermindert. Für den unteren Frequenzbereich gilt: Je geringer die Eigenfrequenz des Systems ist, umso länger

muß die Impulsdauer zur Erzielung einer Antwort des Systems sein.

Eine Anpassung oder Regelung der Anregungsfunktion kann über eine Veränderung der Eigenschaften des Aufprallmediums erfolgen. Dies kann stufenweise durch den Austausch des Aufprallmediums oder stufenlos durch eine Regelung der Deformationseigenschaften des Aufprallmediums (z.B. regelbare Stoßdämpfer) ermöglicht werden.

5.3 Aufbau und Wirkungsweise des Impulshammers



- 1 – Fallgewicht
- 2 – Führungsrohr
- 3 – Deformationsmodul
- 4 – Übertragungsmodul
- 5 – Kraftaufnehmer
- 6 – Führungsschiene
- 7 – Schwingungsdämpfer
- 8 – Transportrad
- 9 – Rahmen
- 10 – Auslösehebel



Abbildung 5.4: Konstruktion des Impulshammers

Der beim Auftreffen des Fallgewichtes ($m = 15.6 \text{ kg}$) (1) auf das Deformationsmodul (3) entstehende Impuls wird über das Übertragungsmodul (Aluminiumzylinder) (4) und über die Kraftaufnehmer (5) auf die Struktur übertragen. Das Deformationsmodul (Aufprallmedium) bestimmt durch sein Verformungsverhalten die Amplitude

der auf die Struktur übertragenen Kraft $f(t)$ und der Impulsdauer τ . In einem geschweißten Rahmen (9) wurde ein Halteprofil (10) verschraubt, das dem Führungsrohr die notwendige Steifigkeit verleiht. Der Rahmen ist statisch bestimmt auf drei Punkten gelagert. An den Fußpunkten sind Schwingungsdämpfer angebracht, die in ihrer Höhe verstellbar sind, um Unebenheiten der zu untersuchenden Struktur auszugleichen und damit eine senkrechte Führung des Fallgewichtes (1) gewährleisten zu können. Die Sicherung der Lage des Führungsrohrs erfolgt über eine mit dem Rahmen verschraubte Führungsschiene (6). Unter dem Übertragungsmodul sind hochdynamische Kraftaufnehmer mit einem Frequenzbereich $0.225 < f < 100 \cdot 10^3$ Hz im Azimut von 120° angeordnet (Abb. 5.5). Das Übertragungsmodul ist entsprechend

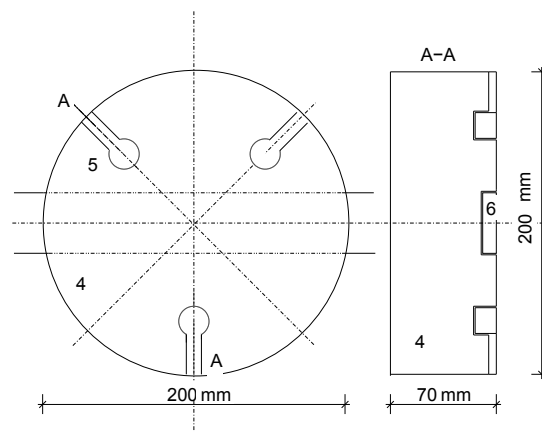


Abbildung 5.5: Anordnung der Kraftaufnehmer unter dem Übertragungsmodul

ausgeschnitten, so dass dieser durch die Führungsschiene in seiner Lage gehalten ist, aber keine kraftschlüssige Verbindung mit dem Rahmen eingeht. Damit ist gewährleistet, dass die durch das Fallgewicht in die Struktur eingebrachte Kraft vollständig aufgezeichnet wird. Auf ein Auffangen des Fallgewichtes nach dem Zurückprellen ist verzichtet worden. Der Nachschlag kann zwar durch eine Auffangvorrichtung vermieden, der über den Rahmen eingeleitete Impuls kann aber nicht mehr registriert werden. Durch Ankippen des Halteprofils kann der Erreger leicht auf den seitlich angefügten Rädern (8) transportiert werden und erlaubt so einen schnellen Ortswechsel des Erregerpunktes. Die Konstruktion weist eine leichte Handhabbarkeit auf und ist schnell und einfach zu montieren. Die Hauptbauteile besitzen Schraubenverbindungen und ihre Größe ist so dimensioniert, dass sie ohne größere Probleme durch einen PKW mittlerer Größe transportiert werden können.

5.4 Laborversuche

Aufgrund der Bedingungen im Experiment ist es kaum möglich, identische Impulse zu erzeugen und die vollständige Reproduzierbarkeit der Signale kann deshalb nur angestrebt werden. Unter diesem Aspekt und unter der im Abschn. 5.1 aufgestellten Forderungen sind verschiedene Deformationsmodule, die die Eigenschaften des Erregers maßgeblich bestimmen, getestet worden. Bei einem vollelastischen Material

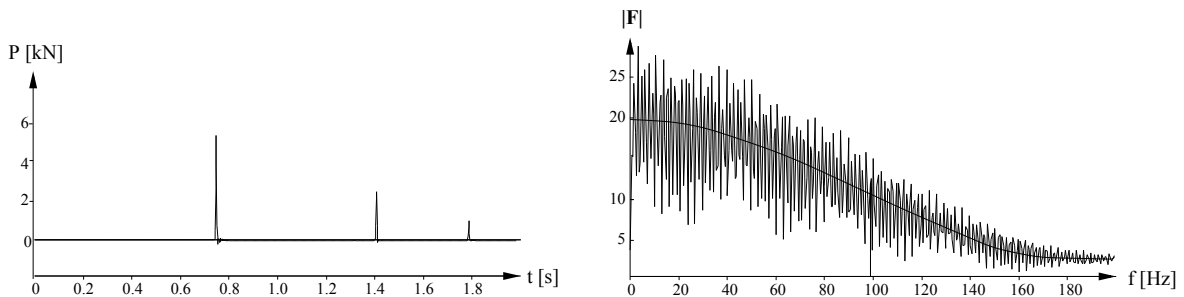


Abbildung 5.6: Kraft-Zeit-Funktion und Effektivwertspektrum eines Kraftkanals (Gummi)

(Gummi) bewirken die Nachschläge Einbrüche im Effektivwertspektrum der Anregung (Abb. 5.6). Dieser Nachteil der Nachschläge kann durch stärker ausgeprägte plastische Eigenschaften des Deformationsmodul reduziert werden. Die in Abb. 5.7

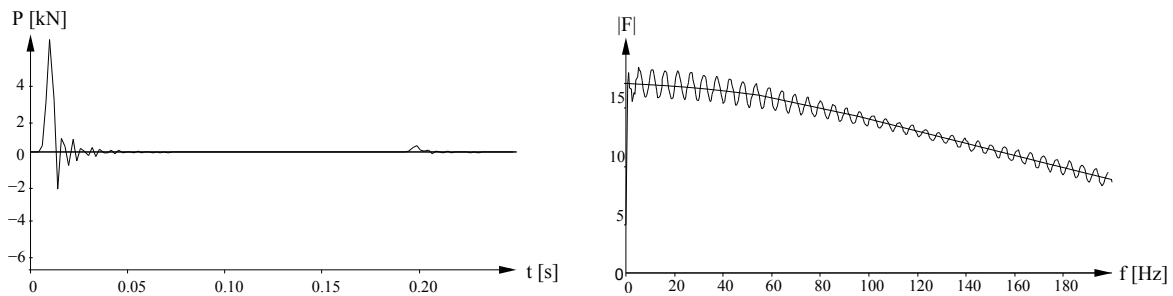


Abbildung 5.7: Kraft-Zeit-Funktion und Effektivwertspektrum eines Kraftkanals (Lederbehälter mit Sand gefüllt)

gezeigten Funktionen entsprechen einem Deformationsmodul, der aus einem Lederbehälter besteht und mit einem feinkörnigen Einkorn-Quarzsand gefüllt ist. Signifikant erscheinen die Reduktion der Anzahl der Nachschläge und die Verminderung der Amplitude des Nachschlags. Bei einem Abfangen der Nachschläge entspricht das Erregerspektrum der eingezeichneten Mittelwertlinie. Kennzeichnend für die Effektivwertspektren ist, dass besonders im niederfrequenten Bereich 0 – 200 Hz, in denen

sich die unteren Eigenfrequenzen von Bauwerken bzw. Bauwerksteilen bewegen, ausreichend Energie zur Anregung zur Verfügung steht.

5.5 In-situ Versuche

Objektbeschreibung und Aufgabenstellung

Innerhalb des Forschungsprojektes EXTRA II (Experimentelle Tragwerksanalyse) fanden an der Straßenbrücke in Darnstedt/Thüringen statische Belastungsversuche mit dem Ziel einer Neueinstufung der Brückenklasse 30/30 statt. Die Brücke wurde 1937 als 5-stegige Plattenbalkenkonstruktion errichtet und im Jahr 1987 saniert. Während der Sanierungsarbeiten erfolgte eine Abänderung des statischen Systems. Im Ursprungszustand wies das Tragwerk das statische System A (Abb. 5.8) auf. Durch Hinterfüllen der beiden Kragarmenden mit einer Kiesschüttung im Zuge der Sanierungsarbeiten besitzt das Tragwerk im gegenwärtigen Zustand das statische System B. Durch die statische Unbestimmtheit des Tragwerks ist dieses in seinen Verformungsgrößen und modalen Parametern stärker Temperaturschwankungen ausgesetzt.

Die dynamischen Untersuchungen von Bucher und Huth (1999) wurden mit dem Ziel verbunden, die statischen Belastungsversuche zu begleiten und den Impulshammer durch eine Gegenüberstellung von stationärer und transients Erregung zu erproben.

Versuchsdurchführung

Entsprechend des Fortschritts der statischen Belastungsversuche wurden dynamische Untersuchungen in

- Phase 1: vor dem Aufbau der statischen Belastungseinrichtung
- Phase 2: nach dem Abbau der statischen Belastungseinrichtung durchgeführt.

Prinzipiell fanden zwei Arten der dynamischen Erregung Anwendung. Mit einem servohydraulischen Schwingungserreger konnte eine harmonische stationäre Erregung realisiert werden. Bei einer maximalen Erregerkraft von 2 kN wurde ein Frequenzband von 9.5–28 Hz mit einer Schrittweite von $\Delta f = 0.02$ Hz durchfahren. Die Abb. 5.9 skizziert die für die Auswertung in dieser Arbeit verwendeten Meß- und Anregungspunkte. Die Anregung mit dem Impulshammer wurde pro Messung $5\times$ durchgeführt, um eine Mittelung des Erregerspektrums zu erreichen. Gemessen wurde eine

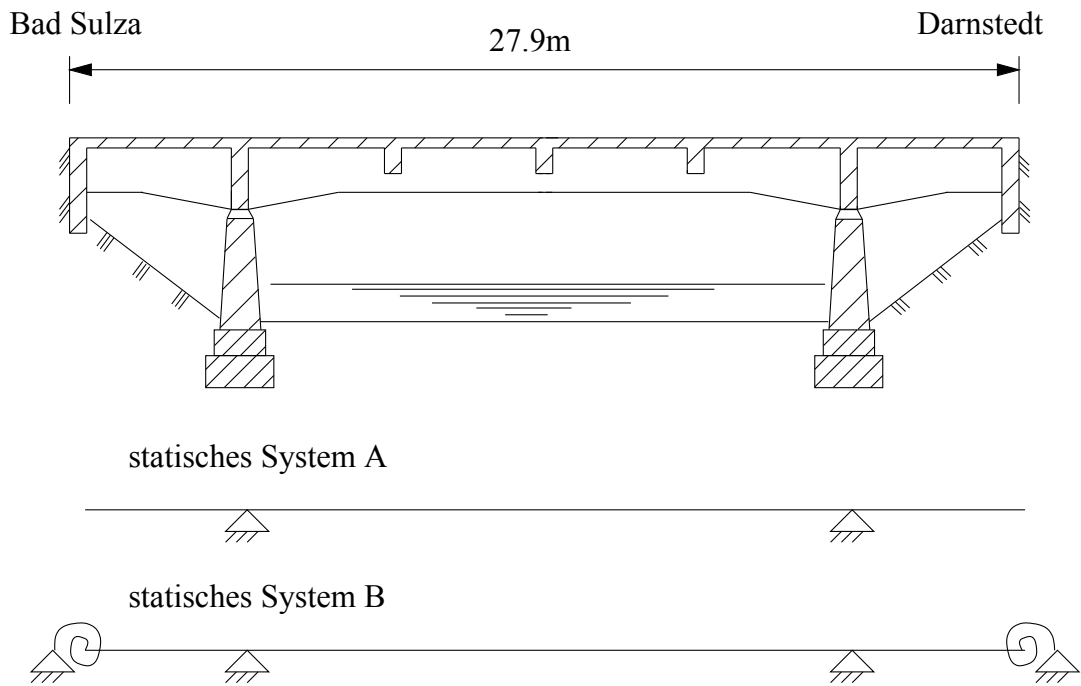


Abbildung 5.8: Brückenlängsschnitt

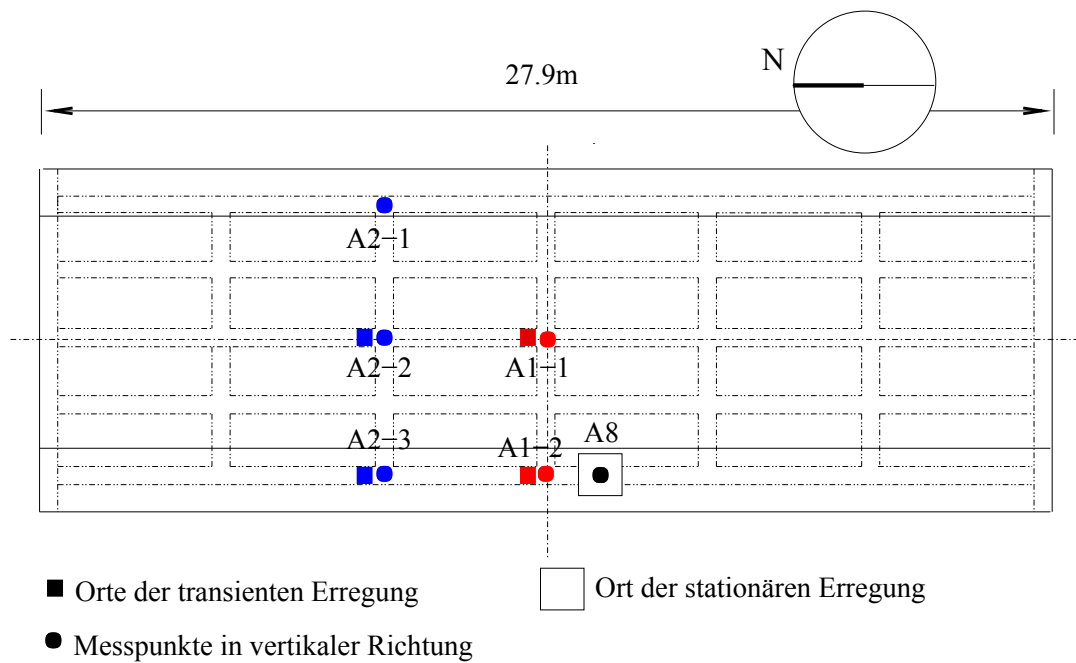


Abbildung 5.9: Lage der Mess - und Anregungspunkte

maximale Erregerkraft $f(t) = 18 \text{ kN}$ bei einer Impulsdauer von $\tau = 13 \text{ ms}$. Bei der ersten Eigenfrequenz des Systems (11.11 Hz) liefert dies ein Verhältnis $\tau/T_0 = 0.144$.

Entsprechend Abb. 5.10 gilt dann das Verhältnis

$$|H_r| = \left| \frac{a_r}{a_0} \right| = 0.52 \quad . \quad (5.4)$$

Ein wesentlich günstigeres Verhältnis kann z.B. bei Deckenplatten erzielt werden,

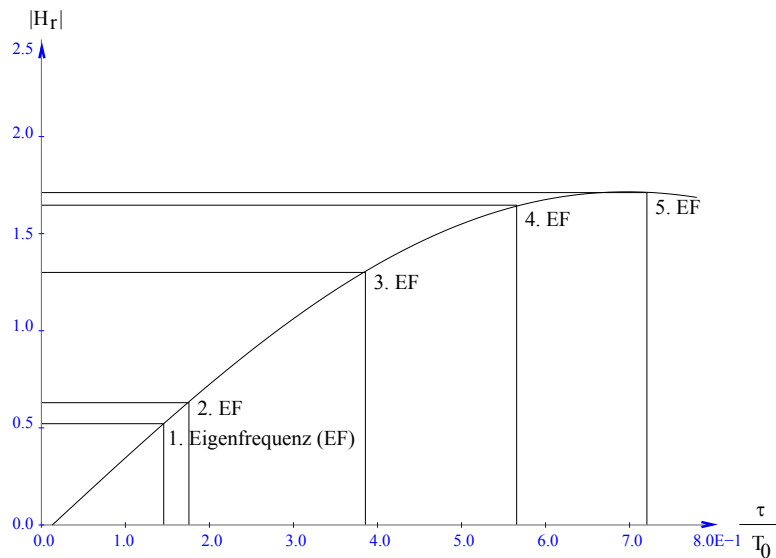


Abbildung 5.10: Spektrale Antworten der ersten 5 Eigenfunktionen der Brücke

wie in Meinhold und Huth (1999) $H_r \approx 1$ gezeigt wurde. Trotzdem können von der Brücke auch die vom Betrag geringen komplexen Eigenwerte bestimmt werden (Tab. 5.3, 5.4).

Ergebnisse

Für einen Vergleich der Eigenschaften zwischen beiden Anregungsarten wurde die Übertragungsfunktion (3.59, S. 31) gewählt. Die Interpretation der Übertragungsfunktion an den Resonanzstellen (Nullstellen des Realteils, Phasenwinkel bei $\pi/2$) führt zu einer Bestimmung der Eigenfrequenzen und aus der ersten Ableitung des Phasenwinkels nach der Erregerkreisfrequenz Ω an der Resonanzstelle $\Omega = \omega$ kann die Dämpfung ξ gewonnen werden

$$\xi = \left[-\omega \frac{d\Omega(\Omega = \omega)}{d\omega} \right]^{-1} \quad . \quad (5.5)$$

Die Abb. 5.11, 5.12 verdeutlichen die gute Übereinstimmung der Übertragungsfunktionen. Offensichtlich befinden sich im Frequenzbereich 9.5 – 28 Hz nur zwei

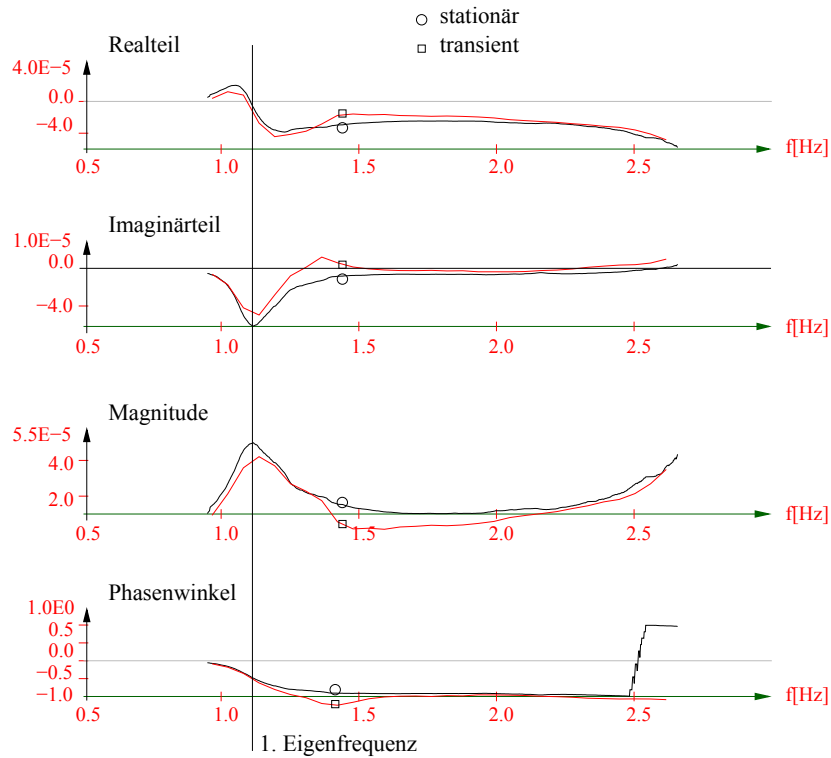


Abbildung 5.11: Vergleich der Übertragungsfunktionen in den Erregungsarten, Messpunkt A1-1, Anregung A1-2 (transient) bzw. A8 (harmonisch), Phase 1

Eigenfrequenzen. Die erste entspricht der ersten Biegeeigenfrequenz (Abb. 5.11), die zweite der ersten Torsionseigenfrequenz des Systems (Abb. 5.12). Die zweite Eigenfrequenz wird durch die transiente Erregung im Vergleich zur harmonischen Erregung weniger ausgebildet. Ein Nachteil der Übertragungsfunktion liegt in der Modellvorstellung entkoppelter Freiheitsgrade und damit der Behandlung als Einmassenschwinger zugrunde. Dies ist jedoch im Fall der Abb. 5.12 nicht mehr gegeben. Mit der Konsequenz, dass das Kriterium der Nullstelle des Realteils versagt und die erste Eigenfrequenz am Messpunkt A1-2 nicht identifiziert werden kann. Die komple-

Nr.	Eigenfrequenz \bar{f}_e [Hz]	Dämpfungsmaß \bar{D}_e
1	11.11	0.016
2	13.44	0.011

Tabelle 5.1: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen (harmonische Erregung) aus Kriterien der Übertragungsfunktion; Phase 1

zen Eigenwerte des Systems der transienten Erregung wurden mit dem adaptierten

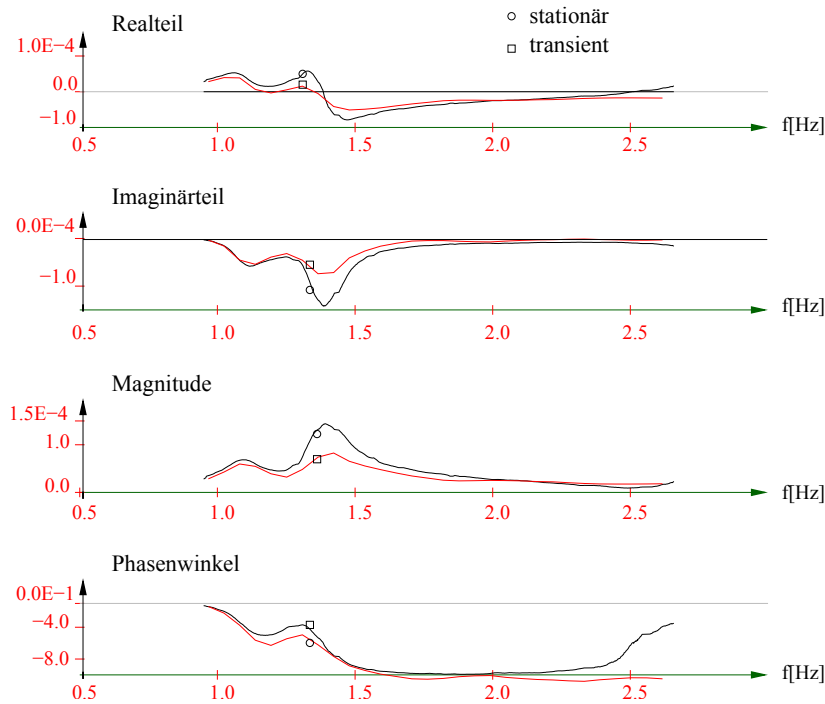


Abbildung 5.12: Vergleich der Übertragungsfunktionen, Messpunkt A1-2, Anregung A1-2 (transient) bzw. A8 (harmonisch), Phase 1

Nr.	Eigenfrequenz \bar{f}_e [Hz]	Dämpfungsmaß \bar{D}_e
1	11.19	0.076
2	13.84	0.044

Tabelle 5.2: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen (harmonische Erregung) aus Kriterien der Übertragungsfunktion; Phase 2

Polyreferenz-Verfahren bestimmt. Elimiert wurden pro Messung ein Ausreißer. Das Kriterium bildeten dabei entweder negative Dämpfungen als nicht erfolgreiche Identifikation oder starke Abweichungen vom Mittelwert bei sowohl den Eigenfrequenzen als auch den Dämpfungen des Systems.

Eine Interpretation der Versuche gestaltet sich als kompliziert. Von der Phase 1 zur Phase 2 ist ein leichtes Ansteigen der Eigenfrequenzen bei beiden Erregungsarten zu beobachten. Lediglich die 1. Eigenfrequenz (transiente Erregung) besitzt eine fallende Tendenz, jedoch liegt diese Abweichung innerhalb der angegebenen Standardabweichung (Tab. 5.3, 5.4). Während der Versuchsdurchführung wurden Temperaturdifferenzen zwischen Phase 1 und Phase 2 von $\Delta T = 15$ K gemessen.

Nr.	Eigenfrequenz \bar{f}_e [Hz]	Eigenfrequenz σ_{fe} [Hz]	Dämpfungsmaß \bar{D}_e	Dämpfungsmaß σ_{De}
1	11.129	0.3521	0.016	0.0042
2	13.849	0.1593	0.039	0.0036
3	30.081	0.9476	0.014	0.0041
4	43.476	0.2137	0.006	0.0009
5	64.489	0.7777	0.008	0.0017

Tabelle 5.3: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen (transiente Erregung); Phase 1; Temperatur $T = 6 \text{ }^\circ\text{C}$

Nr.	Eigenfrequenz \bar{f}_e [Hz]	Eigenfrequenz σ_{fe} [Hz]	Dämpfungsmaß \bar{D}_e	Dämpfungsmaß σ_{De}
1	11.026	0.3868	0.0731	0.03540
2	13.878	0.3568	0.0196	0.01416
3	28.734	0.0494	0.0158	0.00076
4	44.516	0.1467	0.0032	0.00070
5	65.869	0.1143	0.0171	0.00453

Tabelle 5.4: Identifizierte Eigenfrequenzen und Dämpfungen (transiente Erregung); Phase 2; Temperatur $T = 8 \text{ }^\circ\text{C}$

Wie bereits angedeutet, kann eine Zunahme der Beträge der Eigenfrequenzen auf eine Längenänderung des Tragwerks und Veränderung der Randbedingungen infolge Temperatureinwirkung zurückzuführen sein. Dies weist auf die Sensitivität der modalen Parameter gegenüber Temperaturschwankungen bei statisch unbestimmten Systemen hin.

Kapitel 6

Parameteridentifikation mit der Methode der modalen Sensitivität

6.1 Einleitung zur Parameteridentifikation

Zur Widerspiegelung bestimmter Eigenschaften des realen untersuchten Systems wird ein Rechenmodell benötigt, das mit diesem Ziel zweckbestimmt modelliert werden soll. In vielen Fällen wird dieses Modell Ortsdiskret erstellt und dafür bietet sich die Methode der Finiten Elemente an. Nach einem Modellierungsprozess stimmen jedoch Rechenmodell und reales System hinsichtlich gemessener Parameter nicht überein und der Angleich des Rechenmodells durch die Korrektur eines frei wählbaren Satzes von Parameterkomponenten, zusammengefasst in einem Parametervektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_k, \dots, a_{n_p})^T$, wird als Parameteridentifikation bezeichnet. Im Fall von Tragwerksreaktionen infolge dynamischer Belastungen korrigiert der Parametervektor die Matrixkoeffizienten von Steifigkeits-, Dämpfungs-, und Massenmatrizen. Für diese nehmen die Summanden-Matrizen die Form an

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^I \mathbf{M}_i; \quad \mathbf{D} = \sum_{j=1}^J \mathbf{D}_j; \quad \mathbf{K} = \sum_{k=1}^K \mathbf{K}_k \quad . \quad (6.1)$$

Es existieren verschiedene Arten von Parametern, die eine Korrektur dieser Matrizen ermöglichen: aus Messungen ermittelte modale Größen (wie in den vorherigen Abschnitten dargelegt) und/oder Übertragungsfunktionen bzw. die direkte Messung von Eingangs- und Ausgangsgrößen. Darauf basierend sind eine Reihe von Verfahren entwickelt worden, einige davon sind in Natke (1992), Link und Meskouris (1996), Natke u. a. (1997) enthalten. Eine weitere Ergänzung zu Parameteridentifikationsverfahren befindet sich im Anhang D.2.

Der Einsatz der Parameteridentifikation soll in diesem Kapitel vorrangig dem Ziel dienen, die in Abschn. 4 lokalisierte Systemveränderung zu quantifizieren. Unter der Annahme, dass sich keine weiteren Parameter innerhalb eines Untersuchungsintervalles verändern, kann mit Hilfe von Lokalisierungstechniken die Dimension des Parametervektors \mathbf{a} stark eingeschränkt werden. Eine Einschränkung ist besonders dann wichtig, wenn infolge der experimentellen Randbedingungen nur eine begrenzte Anzahl von modalen Parametern zur Verfügung steht.

Die Frage, ob Ein- und Ausgangsgrößen oder modale Parameter verwendet werden, bedingt die Art der Korrektur der Summandenmatrizen. Im Fall vorliegender Ein- und Ausgangsgrößen beruhen die Verfahren z.B. des Eingangsgrößenverfahrens (EGV) Cottin (1990), auf einer faktoriellen, linearen Korrektur der Matrizen des Rechenmodells

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^C &:= \sum_{i=1}^I a_M^i \mathbf{M}_i \\ \mathbf{D}^C &:= \sum_{j=1}^J a_D^j \mathbf{D}_j \\ \mathbf{K}^C &:= \sum_{k=1}^K a_K^k \mathbf{K}_k\end{aligned}\tag{6.2}$$

durch den Parametervektor \mathbf{a} . Die Größe dieser Summandenmatrizen richtet sich nach der Anzahl n der Freiheitsgrade des z.B. mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente diskretisierten mechanischen Modells, sie besitzen also die gleichen Zeilen- und Spaltendimensionen wie die des zu optimierenden Ausgangsmodells. Es sind nur jene Koeffizienten von Null verschieden, die durch die Parameterkomponente a_k korrigiert werden sollen. Eine Belegung des Parametervektors $\mathbf{a} = (a_1 = 1, a_k = 1, \dots, a_{n_p} = 1)^T$ bewirkt keine Korrektur.

Der Parametersatz in (6.3) besitzt eine andere Bedeutung als im Fall verwendeter modaler Parameter. Er ist mit physikalischen Parametern wie Elastizitätsmodul, Trägheitsmoment zweiter Ordnung oder Massendichte belegt. Die Matrizen (Masse, Steifigkeit) des Rechenmodells stellen damit nichtlineare Funktionen des Parametersatzes \mathbf{a} dar. Die Korrektur erfolgt durch Verwendung einer abgebrochenen

Taylor-Reihe in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^C &:= \mathbf{M}_{\text{init}} + \sum_{i=1}^I \delta a_M^i \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial a_M^i} a_M^i \\ \mathbf{K}^C &:= \mathbf{K}_{\text{init}} + \sum_{k=1}^K \delta a_K^k \frac{\partial \mathbf{K}_k}{\partial a_K^k} a_K^k\end{aligned}\tag{6.3}$$

mit $\mathbf{M}_{\text{init}}, \mathbf{K}_{\text{init}}$ als den Initialmatrizen. $\mathbf{M}_i, \mathbf{K}_k$ beschreiben die Massen- und Steifigkeitsmatrizen des i, k -ten Subsystems. Die Dämpfung wird in den meisten Fällen nicht durch das Finite-Elemente-Modell repräsentiert.

Beiden Verfahren gemeinsam ist das Problem der unvollständigen Messungen. In der Regel liegen nur eine begrenzte Anzahl m Messungen der Eingangs- und Ausgangsgrößen bzw. modalen Parametern vor, die sehr viel kleiner ist, als die Anzahl der Freiheitsgrade des Rechenmodells n , es gilt also $m \ll n$. Die Folge ist eine Mehrdeutigkeit des Parametersatzes \mathbf{a} und zudem ist dieser oft physikalisch nicht interpretierbar (Huth u. a. (1999)). Eine Weiterentwicklung liefert das Projektive Eingangsgrößenverfahren (Oeljeklaus (1998)), in der das Problem der Mehrdeutigkeit eliminiert wird.

6.2 Iterative Lösung des Normalgleichungssystems

Für eine Korrektur des Rechenmodells auf der Basis modaler Parameter bietet sich die Methode der gewichteten Fehlerquadrate (Natke und Cempel (1997)) an. Sie ermöglicht, durch die Einführung einer Gewichtsmatrix \mathbf{W} , die Lösung zu wichten und durch einen Strafterm - im Falle der verwendeten Tykhonov-Phillips-Regularisierung - zu kontrollieren. Dies bedeutet, zusätzliche Information in das entstehende Normalgleichungssystem (6.13) einzuführen. Im Allgemeinen sind die Verlustfunktionen nichtlinear gegenüber dem Parametersatz \mathbf{a} und das Problem muss linearisiert und iterativ optimiert werden.

Es wird von der linearen Approximation ausgegangen

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{S}_j \delta \mathbf{a}\tag{6.4}$$

mit $\delta \mathbf{a} = \mathbf{a}^0 - \mathbf{a}_j$ als der Abweichung zwischen dem wahren Parametersatz \mathbf{a}^0 und dem Parametersatz der j -ten Iteration. \mathbf{S}_j beinhaltet die Sensitivitätsmatrix, die

die ersten Ableitungen der Eigenwerte und Eigenvektoren gegenüber dem Parametersatz \mathbf{a}_j beinhaltet und $\delta\mathbf{z} = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j$ beschreibt den Fehler zwischen gemessenen und im j -ten Iterationsschritt ermittelten modalen Parametern. Notwendig ist die konsistente Zuordnung der modalen Parameter zur Sensitivitätsmatrix. Jeder Spalte der Sensitivitätsmatrix ist ein Parameter zugeordnet. In den ersten Zeilen befinden sich die Ableitungen der Eigenwerte, in den nachfolgenden die Ableitungen der Eigenvektoren

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial a_1} & \frac{\partial\lambda_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\lambda_1}{\partial a_{n_p}} \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_1} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_{n_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\lambda_{m_\lambda}}{\partial a_1} & \frac{\partial\lambda_{m_\lambda}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\lambda_{m_\lambda}}{\partial a_{n_p}} \\ \frac{\partial\{\Phi_1\}}{\partial a_1} & \frac{\partial\{\Phi_1\}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\{\Phi_1\}}{\partial a_{n_p}} \\ \frac{\partial\{\Phi_2\}}{\partial a_1} & \frac{\partial\{\Phi_2\}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\{\Phi_2\}}{\partial a_{n_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\{\Phi_{m_\Phi}\}}{\partial a_1} & \frac{\partial\{\Phi_{m_\Phi}\}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial\{\Phi_{m_\Phi}\}}{\partial a_{n_p}} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Der Vektor \mathbf{z} ist eine Funktion des Parametersatzes \mathbf{a} . Das Problem wird linearisiert, in dem die Ableitungen der Eigenwerte und Eigenvektoren gegenüber dem j -ten Parametersatz durch eine nach dem linearen Glied abgebrochene Taylor-Reihe approximiert werden

$$\Delta\lambda_i \approx \sum_{k=1}^m \frac{\partial\lambda_i}{\partial a_k} \Delta a_k \quad (6.6)$$

$$\Delta\phi_i \approx \sum_{k=1}^m \frac{\partial\phi_i}{\partial a_k} \Delta a_k \quad (6.7)$$

Die Berechnung der partiellen Ableitungen nach dem Parametersatz \mathbf{a} erfolgt nach Nelson (1976) (B.2) und besitzt den Vorteil, dass für die i -te Eigenvektorableitung nur der i -te Eigenvektor benötigt wird. Andere Verfahren benötigen alle Eigenvektoren (Fox und Kapoor (1968)). Die Erweiterung für den Fall wiederholt auftretender Eigenwerte wird z.B. von Dailey (1989) erschöpfend behandelt.

Der Residuenvektor leitet sich aus (6.4) ab

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{z} - \mathbf{S}_j \delta \mathbf{a} \quad . \quad (6.8)$$

In das Zielfunktional wird eine Gewichtsmatrix \mathbf{W} eingeführt, die eine unterschiedliche Bewertung der einzelnen modalen Parameter zulässt

$$J(\delta \mathbf{a}) = \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}. \quad (6.9)$$

Durch Messfehler, die zu einer Abweichung der Messwerte um ihren Mittelwert führen, können die modalen Parameter mit unterschiedlicher Präzision bestimmt werden. Die Korrektur erfolgt über auf eine auf der Hauptdiagonalen besetzte und positiv definite Wichtungsmatrix \mathbf{W} , auf der die reziproken Werte der Varianzen der modalen Parameter (die aus dem Experiment bestimmt werden) eingetragen sind

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_{\lambda_1}^2}, \frac{1}{\sigma_{\lambda_2}^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{\lambda_{m_x \lambda}}^2}, \frac{1}{\sigma_{\phi_1}^2}, \frac{1}{\sigma_{\phi_2}^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{\phi_{m_x \phi}}^2} \right) \quad . \quad (6.10)$$

In das Zielfunktional (6.9) wird (6.8) eingesetzt

$$J(\delta \mathbf{a}) = (\delta \mathbf{z})^T \mathbf{W} \delta \mathbf{z} - 2(\delta \mathbf{a}_j)^T \mathbf{S}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{z} + \delta \mathbf{a}_j)^T \mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S} \delta \mathbf{a}_j \quad (6.11)$$

und anschließend zur Bestimmung des Minimums nach der Änderung des Parametersatzes abgeleitet. Die Nullstelle dieser Ableitung ergibt das Minimum

$$\frac{\partial J(\delta \mathbf{a})}{\partial \delta \mathbf{a}} = 0 - 2 \mathbf{S}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{z} + 2 \mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S} \delta \mathbf{a}_j \quad . \quad (6.12)$$

Damit wird die Änderung des Parametersatzes

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S} \delta \mathbf{a}_j &= \mathbf{S}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{z} \\ \mathbf{Y} \mathbf{x}_y &= \mathbf{b} \end{aligned} \quad (6.13)$$

und der verbesserte Parametersatz der $j + 1$ -ten Iteration bestimmt

$$\delta \mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{a}_j + \delta \mathbf{a}_j \quad . \quad (6.14)$$

In den meisten Fällen ist die Anzahl der modalen Parameter geringer als die Dimension des Parametervektors \mathbf{a} . Werden mehrere Eigenvektoren genutzt, so ist das Gleichungssystem in vielen Fällen überbestimmt. Jedoch erweisen sich die Beträge der Ableitungen der Eigenvektoren gegenüber jenen der Ableitungen der Eigenwerte als gering. Die Matrix $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ besitzt damit einen entsprechenden Rangabfall und eine große Konditionszahl. Die Lösung von (6.13) erfordert deshalb eine Regularisierung.

6.3 Lösung des Normalgleichungssystems

6.3.1 Die Tikhonov-Phillips-Regularisierung

Die Lösung von (6.13) stellt ein inverses Problem erster Art dar, bei dem der Vektor \mathbf{x}_y als die gesuchte Größe bestimmt werden soll. Inverse Probleme sind oftmals schlecht gestellt. Sie besitzen nach den Kriterien von *Hadamard* - Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität (Lösung ist instabil bei Datenfehlern)- keine Lösung. Regularisierungsmethoden erlauben es oft, dennoch eine brauchbare Lösung zu ermitteln. Eine Übersicht über verschiedene Regularisierungsansätze geben Louis (1989) und Prells (1995). Prinzipiell bedeutet eine Regularisierung, Zusatzinformationen in den Lösungsprozess einzuführen. Gleichzeitig wird das Problem zu einem ähnlichen, aber gut gestellten Problem verlagert. Das Normalgleichungssystem liegt für gemessene Daten \mathbf{b}^m vor

$$\mathbf{Y}\mathbf{x}_y = \mathbf{b}^m \quad (6.15)$$

mit

$$\mathbf{g} = \mathbf{b}^m - \mathbf{b}^0 \quad (6.16)$$

als dem Fehlervektor. Die Bestimmung des Vektors \mathbf{x}_y erfolgt über die Pseudoinverse von \mathbf{Y}

$$\mathbf{x}_y = \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{b}^m \quad (6.17)$$

Die Schlechtgestellttheit des Problems kommt insbesondere dadurch zum Ausdruck, das selbst bei kleinen Messfehlern \mathbf{g} keine Lösung mehr zu erwarten ist. Dies wird bedingt durch die Konditionierung der Matrix \mathbf{Y} , die in Abhängigkeit der Konditionenszahl die Messfehler verstärkt. Eine Methode, die Auswirkungen einer schlechten Konditionierung und messfehlerbehafteten Vektors \mathbf{b}^m zu kontrollieren, stellt die Einführung einer Wichtungsmatrix in folgender Form vor.

$$(\mathbf{Y} + \mathbf{W}_e)\mathbf{x}_y = \mathbf{b} \quad (6.18)$$

Im Fall der hier angewendeten Tikhonov-Phillips-Regularisierung wird unter Einführung eines Regularisierungsparameters die Matrix $\mathbf{W}_e = \alpha^2 \mathbf{I}$ definiert. Das Normalgleichungssystem (6.13) besitzt damit die Form

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S} + \alpha^2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{a}_j = \mathbf{S}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{z} \quad (6.19)$$

Eine Schwierigkeit dieses Vorgehens liegt in der Wahl des Regularisierungsparameters α . Wird dieser zu klein gewählt, erfährt das Gleichungssystem eine zu geringe

Regularisierung. Im Fall eines zu großen Regularisierungsparameters wird die Lösung des Problems zu weit verschoben. Die weiteren Ausführungen zur Regularisierung des Gleichungssystems folgen im wesentlichen denen von Engl u. a. (1996). Die Bestimmung von \mathbf{x}_y^n erfolgt über die Bestimmung des Minimums

$$\| \mathbf{b} - \mathbf{Y}\mathbf{x}_y \|^2 + \alpha \| \mathbf{x}_y \|^2 \rightarrow \text{Min} \quad (6.20)$$

mit $\mathbf{Y}^{m \times n}$ und \mathbf{b}^m . Durch Einführung zweier orthogonaler Matrizen $\mathbf{U}^{m \times m}$ und $\mathbf{V}^{n \times n}$ kann die linke Seite von (6.20) geschrieben werden zu

$$\| \mathbf{U}(\mathbf{b} - \mathbf{Y}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{x}_y) \|^2 + \alpha \| \mathbf{V}\mathbf{x}_y \|^2 = \| \mathbf{c} - \mathbf{U}\mathbf{Y}\mathbf{V}^T\mathbf{v} \|^2 + \alpha \| \mathbf{v} \|^2 \quad (6.21)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{U}\mathbf{b} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{V}\mathbf{x}_y \end{aligned} \quad (6.22)$$

Die Matrizen \mathbf{UV} werden dadurch gefunden, dass die Matrix \mathbf{Y} in eine obere bidiagonale Form reduziert wird in der Form

$$\mathbf{U}\mathbf{Y}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

mit $\mathbf{J}^{n \times n}$. Dies geschieht durch die Anwendung der *Householder* Transformation. Der Vektor $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]^T$ (6.22) wird zerlegt, so dass gilt

$$\| \mathbf{c}_1 - \mathbf{J}\mathbf{v} \|^2 + \| \mathbf{c}_2 \|^2 + \alpha \| \mathbf{v} \|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \sqrt{\alpha}\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{v} \right\|^2 \quad (6.24)$$

Damit ist das Minimierungsproblem unabhängig von \mathbf{c}_2 und das Minimalproblem lautet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \sqrt{\alpha}\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Die Matrix auf der linken Seite von (6.25) erfährt eine QR-Zerlegung. Dabei erfolgt eine orthogonale Transformation mit Hilfe der *Givens* Drehungen. Es sei \mathbf{U}_α das Produkt aller *Givens* Drehungen, dann kann eine obere bidiagonale Matrix $\mathbf{J}_\alpha^{n \times n}$

$$\mathbf{U}_\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \sqrt{\alpha}\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

und damit die Lösung der Gl. (6.25) durch

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{J}_\alpha^{-1}\mathbf{d}_1 \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

ermittelt werden.

6.3.2 Wahl des Regularisierungsparameters

Generell werden in der Literatur zwei Ansätze favorisiert: das Kreuzvalidationsprinzip und das Diskrepanzprinzip nach *Morozov*. Detaillierte Ausführungen dazu geben Engl u. a. (1996). Das Diskrepanzprinzip (Abb. 6.1) geht dabei von einem in (6.19) vorhandenen Daten- und Regularisierungsfehler aus. Es existiert ein optimaler Re-

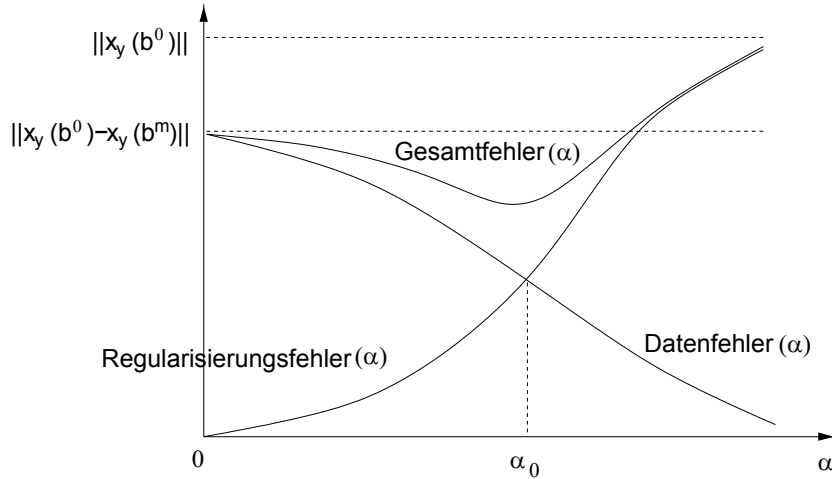


Abbildung 6.1: Diskrepanzprinzip nach Prells (1995)

gularisierungsparameter α_0 , jedoch setzt die Bestimmung dessen die Kenntnis der ungestörten Daten voraus. Diese sind aber nicht bekannt und die Bestimmung des Regularisierungsparameters erfolgt deshalb iterativ. Mit dem a priori Wissen über den Rauschlevel g (g kann z.B. durch eine Bestimmung des Signal/Rauschverhältnisses ermittelt werden) wird in Engl u. a. (1996) die nichtlineare Gleichung

$$\psi(\alpha) := \alpha^q \mathbf{b}^T (\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T + \alpha \mathbf{I})^{-q} \mathbf{b} = \tau g^2 \quad (6.28)$$

mit $q = 2$ oder $q = 3$ und $\tau > 1$ vorgeschlagen.

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k \psi'_q(\alpha_k)}{\alpha_k \psi'_q(\alpha_k) + \psi_q(\alpha_k) - \tau g^2} \alpha_k \quad . \quad (6.29)$$

Die Initialschätzung sollte $\alpha_0 > \tau \delta^2$ betragen; in vielen Fällen ist der zweitgrößte Singulärwert der Matrix \mathbf{Y} ein geeigneter Startwert

$$\psi'_q(\alpha) = q \alpha^{q-1} (\mathbf{Y}^T \mathbf{b})^T (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \alpha \mathbf{I})^{-q-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{b} \quad . \quad (6.30)$$

Der Abbruch der Iteration erfolgt durch ein nutzerbestimmtes Kriterium. Kann g nicht bestimmt werden, wird der Regularisierungsparameter nach dem Prinzip der

Kreuzvalidierung berechnet. Dieses Prinzip beinhaltet die Idee, eine Schätzung unabhängig von einer Messung zu gestalten (Prells und Ben-Haim (1993)). Die Bestimmung des Regularisierungsparameters wird dabei über die Minimierung der Funktion

$$\chi(\alpha) = \frac{\psi_2(\alpha)}{\left(\frac{\alpha}{m} \text{Spur}[(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T + \alpha\mathbf{I})^{-1}]\right)^2} \quad (6.31)$$

mit

$$\psi_2 = \|\mathbf{c}_1 - \mathbf{J}\mathbf{v}_\alpha\|^2 + \|\mathbf{c}_2\|^2 \quad (6.32)$$

durchgeführt. Der Spurterm kann über die Kenntnis der Matrix \mathbf{J}_α ermittelt werden

$$\mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{J}_\alpha = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \alpha \mathbf{I} = \mathbf{V}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{V}^T \quad (6.33)$$

Die rechte Seite stellt eine Ähnlichkeitstransformation von $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \alpha \mathbf{I}$ dar, welche die Spur nicht verändert

$$\text{Spur}[(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \alpha \mathbf{I})^{-1}] = \text{Spur}[(\mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{J}_\alpha)^{-1}] \quad (6.34)$$

Die Spur einer Matrix besitzt denselben Wert wie die Summe ihrer Eigenwerte und die Matrizen $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \alpha \mathbf{I}^{n \times n}$ und $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T + \alpha \mathbf{I}^{m \times m}$ haben die selben Eigenwerte außer den zusätzlichen $m - n$ von $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T + \alpha \mathbf{I}$. Damit lautet Gl. (6.31) jetzt

$$\chi(\alpha) = m^2 \frac{\psi_2(\alpha)}{m - n + \alpha \text{Spur}[(\mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{J}_\alpha)^{-1}]} \quad (6.35)$$

6.4 Parameteridentifikation am Beispiel des Stahlbalkens

6.4.1 Numerische Untersuchungen

Am Beispiel der Schädigungsphase 5 (Tab. 3.10) des in den vorigen Abschnitten dargestellten Stahlbalkens sollen die Möglichkeiten und Grenzen der Vorgehensweise nach (6.19) untersucht werden. Dafür werden als zur Verfügung stehende identifizierte 6 Eigenfrequenzen und 6 Eigenformen angenommen. Im Szenario 1 wird der freie Parametersatz mit dem E-Modul des Elementes 12, im Szenario 2 mit den E-Moduli der Elemente 12, 13 und im Szenario 3 mit den E-Moduli der Elemente 12 - 14 belegt. In den ersten beiden Szenarien existieren kaum Unterschiede in der Konvergenz von (6.9) bei der Verwendung von 6 Eigenfrequenzen oder 6 Eigenfrequenzen und Eigenformen. Die Ursache liegt in den geringen Beträgen der Ableitung

Szenario	Startwert E-Modul [N/m^2]	Endwert E-Modul [N/m^2]	Sollwert	Parameter Element	$\ dz\ _2$
1	2.0e+9	4.0285e+10	4.0285e+10	12	0
2	2.0e+9	4.0285e+10	4.0285e+10	12	0
	210.0e+9	210e+9	210e+9	13	
3	210.0e+9	4.0285e+10	4.0285e+10	12	0.0202
	210.0e+9	210.05e+9	210e+9	13	
	210.0e+9	210.12e+9	210e+9	14	
	210.0e+9	209.98e+9	210e+9	15	
	210.0e+9	209.99e+9	210e+9	16	
	210.0e+9	209.89e+9	210e+9	17	
	210.0e+9	210.08e+9	210e+9	18	
	210.0e+9	210.01e+9	210e+9	19	
	210.0e+9	209.99e+9	210e+9	20	
	210.0e+9	210.04e+9	210e+9	21	

Tabelle 6.1: Identifikation des Parametersatzes

der Eigenformen in (6.5), diese sind im Verhältnis zu den Eigenwerten sehr klein und besitzen deshalb nur einen geringen Einfluss in der Identifikation (Tab. 6.1). Für das Szenario 3 liefert das Normalgleichungssystem (6.13) ohne Regularisierung keine Lösung. Eine Regularisierung nach dem Kreuzvalidationsprinzip liefert ebenfalls keine brauchbaren Resultate. Ursache ist eine zu geringe Gewichtung des $\alpha^2 \mathbf{I}$ Terms im Normalgleichungssystem.

Eine Regularisierung nach dem Diskrepanzprinzip benötigt die Angabe des Rauschlevels δ . Modale Parameter stellen aber bereits aus den Messungen extrahierte und vom Messrauschen befreite Parameter dar. Eine Bestimmung von δ kann aber durch die Standardabweichungen σ_λ der modalen Parameter erfolgen. Die Schätzung von δ mit

$$\delta = \sum_{i=1}^m \sqrt[3]{\sigma_\lambda} \quad (6.36)$$

bewirkt eine höhere Bewertung des Regularisierungsterms und die Lösung des, im Falle von 6 verwendeten Eigenfrequenzen, unterbestimmten Normalgleichungssystems liefert eine gute Schätzung des Parametersatzes.

6.4.2 Experimentelle Untersuchungen

Aus Abschn. 4 ist die Systemveränderung der Phase 6 am Element 12 des Stahlbalkens bekannt. Eine Regularisierung des Gleichungssystems ist in diesem Fall nicht erforderlich. Die Identifikation gelingt mit (6.13). Den Tabellen 3.14 - 3.15 werden die Varianzen für die 6 zur Identifikation verwendeten Eigenfrequenzen zu $\sigma_\lambda^2 = 5.055 \cdot 10^{-5}, 3.4457 \cdot 10^{-4}, 1.769 \cdot 10^{-3}, 1.4 \cdot 10^{-2}, 3.44 \cdot 10^{-2}, 0.1139$ zur Bestimmung der Gewichtsmatrix \mathbf{W} entnommen.

Eigenfrequenz	FE-Modell	Stahlbalken	Differenz [%]
1	4.068	4.084	0.44
2	16.251	15.999	1.55
3	36.473	37.558	2.89
4	64.618	63.774	1.31
5	100.126	100.11	0.15
6	141.26	146.06	3.29

Tabelle 6.2: Differenzen der Eigenfrequenzen im Nullzustand zwischen FE-Modell und Laborversuch

Eigenfrequenz	FE-Modell	Stahlbalken	Differenz [%]
1	3.537	3.705	4.53
2	13.337	13.73	2.86
3	33.939	34.333	1.15
4	64.389	63.041	2.14
5	96.645	94.88	1.82
6	130.442	130.5	$4.44 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 6.3: Differenzen der Eigenfrequenzen in der Phase 6 zwischen FE-Modell und Laborversuch

In einem ersten Schritt der Identifikation wird das ungeschädigte Modell dem Nullzustand des Experimentes angepaßt. Beide unterscheiden sich vorrangig durch die unterschiedliche Massenbelegung, denn Magnet und Stahlblech zur Befestigung der Massenzylinder wurden aus dem Grund einer verringerten Knotenanzahl im FE-Modell nicht berücksichtigt. Nach der Korrektur durch Veränderung der Dichte aller Massenzylinder wurden die in Tab. 6.2 gelisteten Differenzen zwischen dem

FE-Modell und dem realen Stahlbalken hinsichtlich der Eigenfrequenzen ermittelt. Im nächsten Schritt wird das Maß der Systemveränderung in der Schädigungsphase 6 ermittelt (Tab. 6.3). Der E-Modul nach erfolgter Identifikation am Element 12 besitzt die Größe von $E = 1.4908 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ und demzufolge liegt eine Biegesteifigkeit am Element 12 von $EI = 1.4908 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot 7.25e - 8 \text{ m}^4 = 1080.25 \text{ Nm}^2$ vor.

Kapitel 7

Parameteridentifikation mit dem Projektiven Eingangsrößenverfahren (PEGV)

Die Verwendung von Ein- und Ausgangsrößen zur Parameteridentifikation besitzt gegenüber den modalen Parametern den Vorteil, dass diese direkt gemessen werden und keiner Extraktion aus den Messdaten bedürfen. Das in diesem Abschnitt verwendete PEGV (Oeljeklaus (1998)) stellt ein Korrekturverfahren für elastomechanische Systeme im Frequenzbereich auf der Basis von gemessenen Ein- und Ausgangsrößen dar. Charakteristisch für das Verfahren ist, dass die Antwortkomponenten unvollständig vorliegen dürfen, also die Korrektur der Submatrizen auch dann noch erfolgreich verläuft, wenn die Anzahl der Messpunkte m wesentlich geringer als die Anzahl der Freiheitsgrade n des zu korrigierenden mechanischen Modells ist und damit $m \ll n$ gilt. Kernpunkt des PEGV stellt die Projektion der Antwortkomponenten auf einen gemessenen Unterraum dar, in dessen Folge die Mehrdeutigkeit (s.a. Huth u. a. (1999)) des inversen Problems eliminiert wird. Dies bedeutet, dass mit einer Minimierung des Zielfunktional J auch eine physikalische Interpretation der korrigierten Submatrizen ermöglicht wird. Das PEGV löst dabei ein inverses Problem 2. Art, das die Form besitzt

$$\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{x}_y = \mathbf{b} \quad (7.1)$$

mit $\tilde{\mathbf{Y}}$ als dem gesuchten Operator.

7.1 Theorie der Projektion des PEGV

Die Anwendung der Fouriertransformation auf die Bewegungsgleichung (3.2, S. 18) bewirkt deren Transformation in den Frequenzbereich für eine Erregerkreisfrequenz ω

$$(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{D} + \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad , \quad (7.2)$$

in der die dynamische Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_\omega = -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{D} + \mathbf{K} \quad (7.3)$$

enthalten ist. Durch Invertierung der dynamischen Steifigkeitsmatrix wird die Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}_\omega(a) := \mathbf{S}_\omega^{-1}(a)$ erhalten. Das PEGV baut auf den Spezialfall des Eingangsgrößenverfahrens (EGV) (Cottin (1990)) auf, das auf der Basis vollständig gemessener Ausgangsgrößen arbeitet. In den Residuenvektor des EGV

$$\mathbf{v}(a) = (\mathbf{f}^m - \mathbf{S}_\omega(a)\mathbf{x}^m) \quad (7.4)$$

gehen der Vektor der Erregerkonfiguration \mathbf{f}^m , der Vektor der vollständig gemessenen Antwortkomponenten \mathbf{x}^m sowie die dynamische Steifigkeitsmatrix ein. Das Ziel, die Korrektur dieser, wird verfolgt durch die Anpassung von Summanden-Matrizen aus (6.2)

$$\mathbf{S}_\omega(a) = -\omega^2 \sum_{i=1}^I a_{Mi} \mathbf{M}_i + j\omega \sum_{j=1}^J a_{Dj} \mathbf{D}_j + \sum_{k=1}^K a_{Kk} \mathbf{K}_k \quad . \quad (7.5)$$

Im Regelfall liegt aber eine unvollständige Ein- und Ausgangsbeziehung vor und dieser Tatsache wird durch Einführung einer Messmatrix $\mathbf{C} \in \{0, 1\}^{m \times n}$ Rechnung getragen. In der Messmatrix $\mathbf{C} \in \{0, 1\}^{m \times n}$ stehen als Zeilenvektoren die Einheitsvektoren $e_i, i \in \mathcal{M} = (i_1, \dots, i_m)$, deren Linksmultiplikation an eine andere Matrix \mathbf{Z} die Streichung der Zeilen von \mathbf{Z} bewirkt, für die nicht $i \in \mathcal{M}$ gilt. Die Besetzung der komplementären Messmatrix $\bar{\mathbf{C}}$ geschieht analog, die Zuweisung von 1 erfolgt an den gerade nicht gemessenen Freiheitsgraden. $\mathbf{C}\mathbf{x}^m$ bezeichnet also die unvollständig gemessenen Ausgangsgrößen. Damit lautet jetzt die unvollständige Ein-Ausgangsbeziehung im Frequenzbereich, die aus der Linksmultiplikation von (7.4) mit $\mathbf{C}\mathbf{H}_\omega(a)$ entsteht

$$\mathbf{C}\mathbf{H}_\omega(a)\mathbf{v}(a) = \mathbf{C}\mathbf{H}_\omega(a)\mathbf{f}^m - \mathbf{C}\mathbf{x}^m \quad . \quad (7.6)$$

Das PEGV wird durch Projektion der unbekanntem vollständigen Eingangsresiduen des EGV auf einen definierten (gemessenen) Unterraum $\mathcal{R}(\mathbf{V}_a)$ hergeleitet. Analog

(3.48, 3.49, S. 26) kann die Matrix $\mathbf{CH}_\omega(a)$, die den Rang m besitzt, mit der SVD in einen $n - m$ dimensionalen Kern $N(\mathbf{CH}_\omega(a))$ und ein zugehöriges m -dimensionales orthogonales Komplement des Kerns $\bar{N}(\mathbf{CH}_\omega(a))$ zerlegt werden.

$$\mathbf{CH}_\omega(a) = \mathbf{U}_a \boldsymbol{\Sigma}_a \mathbf{V}_a^H \quad (7.7)$$

Die Linksmultiplikation von (7.6) mit $[\mathbf{CH}_\omega(a)]^\dagger$ liefert die Beziehung

$$[\mathbf{CH}_\omega(a)]^\dagger \mathbf{CH}_\omega(a) \mathbf{v}(a) = [\mathbf{CH}_\omega(a)]^\dagger \mathbf{CH}_\omega(a) \mathbf{f}^m - [\mathbf{CH}_\omega(a)]^\dagger(a) \mathbf{C} \mathbf{x}^m \quad (7.8)$$

in der der Projektor

$$\mathbf{P}(a) = [\mathbf{CH}_\omega(a)]^\dagger [\mathbf{CH}_\omega(a)] \quad (7.9)$$

auf $N_a^\perp = \bar{N}(\mathbf{CH}_\omega(a))$ enthalten ist. Wegen

$$[\mathbf{CH}_\omega(a)]^\dagger = \mathbf{V}_a \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{U}_a^H \quad (7.10)$$

und (7.7) gilt für (7.8) auch

$$\mathbf{V}_a \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{U}_a^H \mathbf{U}_a \boldsymbol{\Sigma}_a \mathbf{V}_a^H \mathbf{v}(a) = \mathbf{V}_a \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{U}_a^H \mathbf{U}_a \boldsymbol{\Sigma}_a \mathbf{V}_a^H \mathbf{f}^m - \mathbf{V}_a \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{U}_a^H \mathbf{C} \mathbf{x}^m \quad (7.11)$$

Nun bilden $\mathbf{U}_a^H \mathbf{U}_a = \mathbf{I}^m$ und $\boldsymbol{\Sigma}_a \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1}$ Einheitsmatrizen und damit wird (7.11) vereinfacht zu

$$\mathbf{V}_a \mathbf{V}_a^H \mathbf{v}(a) = \mathbf{V}_a \mathbf{V}_a^H \mathbf{f}^m - \mathbf{V}_a \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{U}_a^H \mathbf{C} \mathbf{x}^m \quad (7.12)$$

Für die beschriebene Projektion wird also die Matrix $\mathbf{V}_a \mathbf{V}_a^H$ genutzt.

Nun gilt für eine beliebige unitäre Basis $\tilde{\mathbf{V}}_a$ von $\bar{N}(\mathbf{CH}_\omega(a))$:

$$\mathbf{V}_a \mathbf{V}_a^H \mathbf{f}^m - \mathbf{V}_a \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{U}_a^H \mathbf{C} \mathbf{x}^m = (\tilde{\mathbf{V}}_a \tilde{\mathbf{V}}_a^H) (\mathbf{f}^m - \mathbf{S}_\omega(a) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}^m) \quad (7.13)$$

Eine Basis des Kerns $\bar{N}(\mathbf{CH}_\omega(a))$ bilden die Spalten der Matrix $(\mathbf{S}_\omega(a) \mathbf{C}^T)$ und damit ist

$$\bar{\mathbf{P}}(a) = [\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}^T] [\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}^T]^\dagger \quad (7.14)$$

der Projektor auf $N(\mathbf{CH}_\omega(a))$ und der Projektor auf $\bar{N}(\mathbf{CH}_\omega(a))$ folgt aus

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{I}_n - \bar{\mathbf{P}}(a) = \mathbf{I}_n - [\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}^T] [\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}^T]^\dagger = \bar{\mathbf{V}}_a \bar{\mathbf{V}}_a^H \quad (7.15)$$

(7.15) wird in die rechte Seite von (7.13) eingesetzt und liefert damit den Residuenvektor des PEGV

$$\mathbf{v}_{\text{PEGV}}(a) = \mathbf{P}(a) (\mathbf{f}^m - \mathbf{S}_\omega(a) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}^m) \quad (7.16)$$

Ein wesentlicher Vorteil des PEGV besteht darin, dass das Zielfunktional

$$J(a) = \mathbf{v}(a)^H \mathbf{v}(a) \rightarrow \text{Min} \quad (7.17)$$

für geeignete Versuchsauslegungen nahezu konvex ist und sich zu seiner Minimierung lokale Optimierungsverfahren eignen, wie z.B. das SQP-Verfahren (sequential quadratic programming) (Schittkowski (1985)).

Mit dem Residuenvektor

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{V}}_a \tilde{\mathbf{V}}_a^H (\mathbf{f}^m - \mathbf{S}_\omega(a) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}^m) \quad (7.18)$$

gilt für den Gradientenvektor

$$\frac{1}{2} \nabla J(a) = \Re(D\mathbf{v}^H(a) \mathbf{v}(a)) \quad (7.19)$$

und für die Hessematrix

$$\frac{1}{2} \nabla^2 J(a) = \Re \left(D\mathbf{v}^H(a) D\mathbf{v}(a) + \sum_{i=1}^n (v_i(a) \nabla^2 v_i(a)) \right) \quad (7.20)$$

die mit der Vernachlässigung von Termen 2. Ordnung approximiert wird zu

$$\frac{1}{2} \nabla^2 J(a) = \Re(D\mathbf{v}^H(a) D\mathbf{v}(a)) \quad . \quad (7.21)$$

Notwendig ist also eine Bestimmung der Größen

$$\frac{\partial v(a)}{\partial a_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v(a)}{\partial a_\nu \partial a_\mu} \quad \forall 1 \leq \nu, \mu \leq n_p \quad . \quad (7.22)$$

Die Kondition der Hessematrix des Parameters a^* stellt einen Indikator für eventuell vorhandene Parameterinsensitivitäten dar. Die Kehrwerte der Eigenwerte geben die Längen der Hauptachsen des zugeordneten Einheitsellipsoides um a^* an. Der Quotient zwischen der größten und der kleinsten Hauptachse entspricht der Konditionszahl, und ist diese groß, so bedeutet dies, dass das Einzugsgebiet der Zielfunktion $J(a)$ sehr flach ist. Im Abschn. 7.5 wird dieser Sachverhalt unter dem Gesichtspunkt einer a priori Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV untersucht.

Für eine erfolgreiche Anwendung des PEGV hat *Oeljeklaus* drei α -Kriterien definiert:

- Das Sensitivitätskriterium α_1 , das von der gewählten Modellstruktur und der Messmatrix \mathbf{C} abhängt

$$\angle[\mathcal{R}(\mathbf{S}_\omega(1)\mathbf{C}^T), \mathcal{R}(\mathbf{S}_\omega(1)\bar{\mathbf{C}}^T)] \ll \frac{\pi}{2} \quad . \quad (7.23)$$

- Ein a priori Maß für die Konvexität des PEGV-Zielfunktional α_2 , das von der Wahl von $\alpha_2(\mathbf{C}, \mathbf{f}^m, \omega)$ abhängt

$$\alpha_2(\mathbf{C}, \mathbf{f}^m, \omega) = \angle[\bar{N}(\mathbf{C}\mathbf{H}_\omega(a^0)), \mathcal{R}(\mathbf{f}^m)] = \angle\mathcal{R}(\mathbf{V}_a^0), \mathcal{R}(\mathbf{f}^m) \ll \frac{\pi}{2} \quad . \quad (7.24)$$

- Eine entsprechende Dimensionierung der Versuchsauslegung α_3 für die Anzahl der Erregungsvektoren N , für die Anzahl der Messpunkte m und für die Anzahl der Erregungsfrequenzen l , für deren Beziehung gilt

$$l \cdot (mN) \geq \frac{n_p}{2} \quad . \quad (7.25)$$

7.2 Betrachtung des Einflusses von Störungen

Die Anwendung des PEGV ist auf Messungen mit hohem Signal/Stör- Verhältnis begrenzt. Die Ursache der Fehlerempfindlichkeit des Verfahrens liegt in der Fehlerverstärkung durch die kleinen Singulärwerte des Terms $\mathbf{V}_a \Sigma_a^{-1} \mathbf{U}_a^H \mathbf{C} \mathbf{x}^m$ in (7.11). Die Trennung der fehlerbehafteten Ausgangsgrößen $\mathbf{C} \mathbf{x}^m$ von dem verstärkenden Term $\mathbf{V}_a \Sigma_a^{-1} \mathbf{U}_a^H$ führte zu den Überlegungen des Regularisierten Ausgangsgrößenverfahrens (RAGV) (Oeljeklaus (1998)) Anhang (D.2, S. 128).

Bei ungestörten Daten kann eine beliebige Genauigkeit des identifizierten Parametersatzes \mathbf{a} erreicht werden. Diese Eigenschaft des PEGV gilt nicht für verrauschte Messdaten. Eine Filterung der Zeitreihen nach (2.11, S. 9) oder (3.47, S. 26) führt nur im Zeitbereich zu einer Reduktion von Störanteilen, die nicht innerhalb des gefilterten Frequenzbandes liegen. Im Frequenzbereich können diese Störanteile nicht eliminiert werden.

Generell genügen die oben genannten α Kriterien für eine Identifikation mit dem PEGV. Es soll aber im Abschn. 7.5 untersucht werden, ob der ermittelte Parametersatz \mathbf{a} durch ein zusätzliches Maß an Information, das über die Anforderungen des Kriteriums α_3 hinausgeht, weiter dem wahren Parametersatz \mathbf{a}^0 angenähert werden kann. Entscheidendes Maß dazu soll die Versagenswahrscheinlichkeit des Verfahrens sein. Die Untersuchungen finden in Abhängigkeit eines unterschiedlichen Rauschniveaus δ statt.

7.3 Formulierung der Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV

Die Grenze zwischen Versagen oder Nichtversagen einer Struktur, eines Prozesses etc. wird durch die Gleichung des Grenzzustandes definiert (Spaethe (1987))

$$g(\mathbf{z}) = g(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \quad . \quad (7.26)$$

Ein Versagen tritt ein, wenn $g(\mathbf{z}) \leq 0$ erfüllt ist. $g(\mathbf{z}) > 0$ bedeutet hingegen Nichtversagen. Dabei werden die bisher deterministischen Größen des Parametersatzes \mathbf{a} als stochastische Größen (auch als Basisvariablen bezeichnet) definiert

$$\mathbf{z} := \mathbf{a} \quad . \quad (7.27)$$

Die Gesamtheit der zu identifizierenden (zufälligen) Variablen ist in einem Zufallsvektor $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n_p})^T$ zusammengefaßt, dessen Basisvariablen einen n_p -dimensionalen Raum aufspannen. In diesem Raum entspricht jeder Punkt \mathbf{z} mit den Koordinaten $(z_1, z_2, \dots, z_{n_p})^T$ einer Realisierung des Zufallsvektors. Die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors ist charakterisiert durch

$$F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n_p}) = \mathbf{P}((\mathbf{Z}_1 \leq \mathbf{z}_1) \cap (\mathbf{Z}_2 \leq \mathbf{z}_2) \cap \dots \cap (\mathbf{Z}_{n_p} \leq \mathbf{z}_{n_p})) \quad (7.28)$$

Unter der Bedingung, dass die Basisvariablen stetig sind, führt die Differentiation der Gl. (7.28) zur Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Form

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n_p}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_1, \partial \mathbf{z}_2, \dots, \partial \mathbf{z}_{n_p}} \mathbf{F}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n_p}) \quad . \quad (7.29)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit eines Prozesses (Systems) wird durch das Integral der gemeinsamen Dichtefunktion bezüglich der Basisvariablen bestimmt

$$P(F) = P[g(\mathbf{z}) \leq 0] = \int_{g(\mathbf{z}) \leq 0} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad . \quad (7.30)$$

Die Lösung der Gl. (7.30) durch Simulation wird als Monte-Carlo-Integration bezeichnet. Die Anwendung dieser geschieht durch die Einführung einer Indikatorfunktion (Shinozuka (1983))

$$I(g(\mathbf{z})) = \begin{cases} 0 & \text{für : } g(\mathbf{z}) > 0 \\ 1 & \text{für : } g(\mathbf{z}) \leq 0 \end{cases} \quad . \quad (7.31)$$

Mit deren Anwendung lässt sich der Integrationsbereich der Gl. (7.30) ermitteln zu

$$P(F) = \int_{-\infty}^{\infty} I(g(\mathbf{z})) f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad . \quad (7.32)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist damit als der Erwartungswert der Indikatorfunktion formuliert. Dessen erwartungswerttreuer Schätzer mit N Stichproben der i -ten Realisation der Basisvariablen (\mathbf{z})

$$\bar{P}(F) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{z}_i)) \quad (7.33)$$

liefert mit der Varianz

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{P}(F)}^2 &= E[(\bar{P}(F) - E[\bar{P}(F)])^2] \\ &= E[(\bar{P}(F))^2] - (E[\bar{P}(F)])^2 \end{aligned} \quad (7.34)$$

eine Beziehung zur Abschätzung notwendiger Realisationen

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{P}(F)}^2 &= E \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{z}_i)) \right)^2 \right] - \left(E \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{z}_i)) \right] \right)^2 \\ &= \frac{P(F) - (P(F))^2}{N} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Für $N \rightarrow \infty$ verringert sich die Varianz des Schätzers $\bar{P}(F)$ gegen 0. Ist dieser normalverteilt, lässt sich durch die Bestimmung seiner Varianz ein Vertrauensintervall angeben. Im Fall a priori gegebener (gewünschter) Varianz bestimmt sich die Anzahl notwendiger Simulationen, die einer erwarteten Versagenswahrscheinlichkeit entsprechen, nach Gl. (7.35) zu $N \geq (P(F) - \bar{P}(F))^2 / \sigma_{\bar{P}(F)}^2$, z.B. für einen Variationskoeffizienten $\sigma_{\bar{P}(F)} / E[\bar{P}(F)]$ von 10 % und ein Wahrscheinlichkeitsniveau von $P(F) = 10^{-2}$ werden $N \geq 10^3$ Simulationen benötigt.

Für die Bewertung der Genauigkeit des identifizierten Parametersatzes \mathbf{a} wird mit \mathbf{k}_s (s: sample) der Vektor der simulierten Material- oder Geometrie Größen und \mathbf{k}_d (d: design) der durch die Optimierung bestimmt. Als Versagenskriterium zur Definition der Grenzzustandsfunktion unter Einführung eines Versagensfaktors P_{fac} wird der relative Fehler zwischen den Normen beider Vektoren angenommen.

$$g(\mathbf{z}) = P_{fac} \cdot \frac{\|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_d\|_2}{\|\mathbf{k}_s\|_2} \quad (7.36)$$

7.4 Formulierung der Zufallsfelder

In einem zu identifizierenden System können Material- und Geometriegrößen statistisch nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Ihre Verteilung wird vielmehr um einen Erwartungswert E mit einer Varianz σ_Z^2 schwanken und sie sind über die räumliche Ausdehnung des Systems zueinander korreliert. Die Korreliertheit der Basisvariablen zueinander lässt sich durch die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_{\mathbf{ZZ}} = \mathbf{E}[(\mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}})(\mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}})^T] \quad (7.37)$$

mit $\bar{\mathbf{Z}}$ als dem Mittelwert der Basisvariablen und E als dem Erwartungswert beschreiben. Die Hauptdiagonalelemente stellen die Varianzen σ_Z^2 der Basisvariablen dar, auf den Nebendiagonalen zeigen die Korrelationskoeffizienten $\rho_{Z_1, Z_2}, \dots, \rho_{Z_l, Z_{n_p}}$ die lineare Abhängigkeit zweier zueinander korrelierten Basisvariablen an.

$$\rho_{Z_l, Z_{n_p}} = \frac{E[(Z_l - \bar{Z}_l)(Z_{n_p} - \bar{Z}_{n_p})^T]}{\sigma_{Z_l} \sigma_{Z_{n_p}}} \quad (7.38)$$

$\sigma_{Z_l}, \sigma_{Z_{n_p}}$ bezeichnen die Standardabweichungen. Die Korrelationskoeffizienten heißen unkorreliert, wenn $\rho_{Z_l, Z_{n_p}} = 0$ gilt. Eine Zufallsvariable (\mathbf{Z}) gilt als normal verteilt, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion lautet

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(z - \bar{Z})^2}{2\sigma_Z^2}\right] \quad (7.39)$$

Die Verallgemeinerung für mehrere Zufallsvariablen führt zu der in dieser Studie n_p -dimensionalen verwendeten Normalverteilung (Bucher (1999))

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_p}{2}} \sqrt{\det \mathbf{C}_{\mathbf{ZZ}}}} \exp\left[-0.5(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{Z}})^T \mathbf{C}_{\mathbf{ZZ}} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{Z}})\right] \quad (7.40)$$

Die Darstellung oben genannter Beziehung bezog sich auf einen Ort. Für die Modellierung räumlich streuender Struktureigenschaften bedarf es noch der Information des Verlaufs der Eigenschaften der Zufallsvariablen als Funktion über den Ort. Zufallsfelder repräsentieren diese Eigenschaften und werden durch eine Mittelwert- und Korrelationsfunktion, sowie durch einen Verteilungstyp charakterisiert und zeichnen sich durch einen definierten Homogenitäts- und Isotropiegrad aus.

- Mittelwertfunktion

$$\bar{F}(\mathbf{z}) = E[F(\mathbf{z})] \quad (7.41)$$

- Korrelationsfunktion mit den Eigenschaften der Symmetrie und positiven Definitheit

$$R_{FF}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = E[F(\mathbf{z})F(\mathbf{y})] = R_{FF}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (7.42)$$

$$\int_{G_z} \int_{G_z} w(\mathbf{z}) R_{FF}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{y}) dz dy \leq 0 \quad (7.43)$$

- Kovarianzfunktion

$$C_{FF}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = E[\{F(\mathbf{z}) - \bar{F}(\mathbf{z})\}\{F(\mathbf{y}) - \bar{F}(\mathbf{y})\}] \quad (7.44)$$

Die Korrelationsfunktion steuert über ihren Verlauf, in welcher Abhängigkeit zwei Zufallsvariablen zueinander stehen. Dieses wird durch eine Korrelationslänge L_c ausgedrückt, die als Schwerpunkt des Betrages des Korrelationsfunktion interpretiert werden kann. Das Zufallsfeld $F(\mathbf{z})$ wird mit den Eigenschaften einer schwachen Homogenität, d.h. Mittelwert und Kovarianzfunktion sind unabhängig vom Ort, angenommen.

$$\bar{F}(\mathbf{z}) = \text{const} \quad (7.45)$$

$$R_{FF}(\mathbf{z}, \mathbf{z} + \xi) = R_{FF}(\xi) \quad (7.46)$$

Die Korrelationslänge L_c ist bei einem isotropen Feld unabhängig von der Richtung

$$R_{FF}(\mathbf{z}, \mathbf{z} + \xi) = R_{FF}(\|\xi\|) \quad (7.47)$$

7.5 Ein Beispiel zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV

7.5.1 Beschreibung des Plattenmodells

Das Plattenmodell in Abb. 7.1 wird mit der Methode der Finiten Elemente durch 9-knotige Schalenelemente diskretisiert. Jeder Knoten besitzt fünf Freiheitsgrade. Dies betrifft die Verschiebungen in x,y,z - Richtung und die Verdrehungen um die x,y-Achse. Am Auflagerrand sind alle Verschiebungsfreiheitsgrade gesperrt. Das Modell entspricht damit einer an allen vier Seiten gelenkig gelagerten Platte. Das gesamte Modell besitzt $n = 191$ Freiheitsgrade. Der durch das PEGV zu ermittelnde Parametersatz \mathbf{a} wird durch die Anzahl der Zufallsfelder, in der als stochastische Größe der

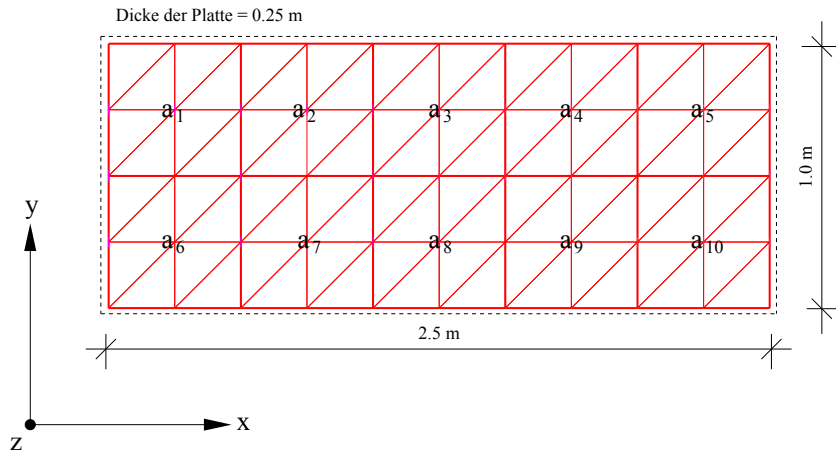


Abbildung 7.1: FE-Netz der gelenkig gelagerten Platte mit Verteilung des Parametersatzes

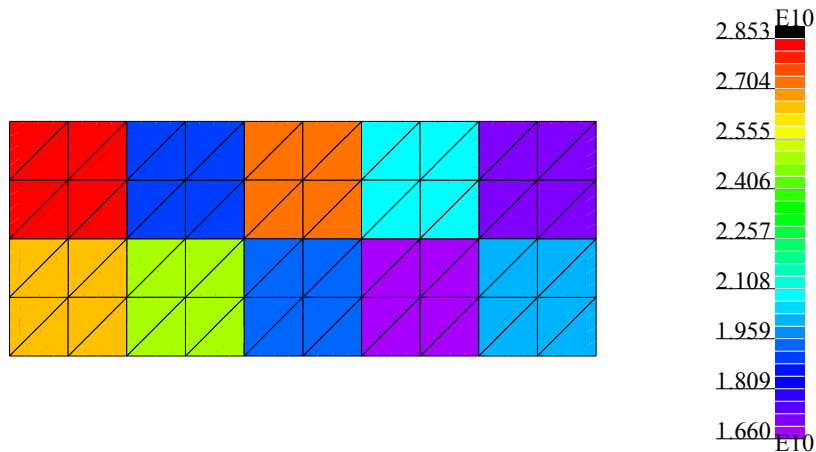


Abbildung 7.2: Realisation des wahren Parametersatzes \mathbf{a}^0 durch Zufallfelder

E-Modul angenommen wird, bestimmt. Die Massenmatrix \mathbf{M} und die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} bleiben für die Dauer des Versuches konstant. Das Dämpfungsmaß beträgt $D = 0.04$. Jedem Zufallfeld sind vier Elemente zugeordnet (Abb. 7.1), die über eine Korrelationslänge $L_c = 1.0$ m miteinander korreliert sind. Der Mittelwert eines Zufallfeldes, repräsentiert als der Mittelwert des E-Moduls beträgt $\bar{\mathbf{Z}} = 3.0e+10$ N/m² und die zugehörige Varianz des Zufallfeldes wird mit $\sigma_{\bar{\mathbf{Z}}}^2 = 0.2$ angenommen. Eine Visualisierung der Realisation eines Zufallfeldes zeigt Abb. 7.2.

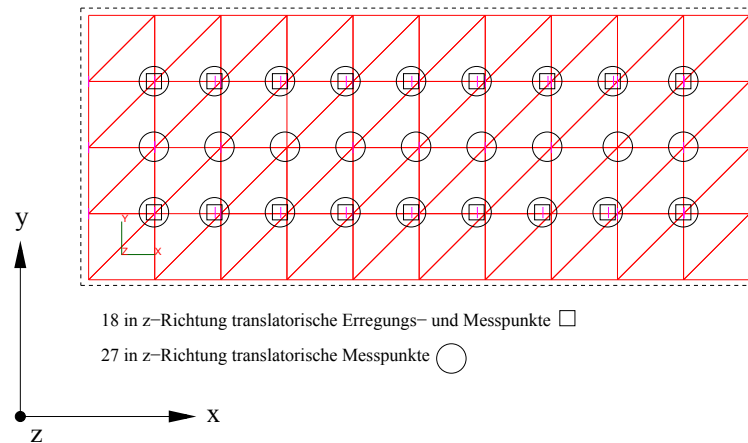


Abbildung 7.3: Erregungspunkte und 18 bzw. 27 Messpunkte für zwei verschiedene Konfigurationen

7.5.2 Versuchskonfiguration

Für die gemessenen Eingangsgrößen wird ein Erregungsvektor \mathbf{f}^m , der an 18 Punkten gemäß Abb. 7.3 belegt ist, verwendet. Die Erregung f ist abhängig von der Zeit und folgt der Funktion

$$f(t) = f_0 \sin \omega t \quad (7.48)$$

mit $f_0 = 10$ N. Insgesamt werden 500 Zeitschritte der Signale berücksichtigt. Die gemessenen Ausgangsgrößen $\mathbf{C}\mathbf{x}^m$ entsprechen zwei verschiedenen Szenarien der Anzahl der Messpunkte $m = 18$ bzw. 27 und damit ist die Anzahl der gemessenen Freiheitsgrade m wesentlich kleiner als die des gesamten Modells n . Die ersten fünf Eigenfrequenzen (in Hz) des ungedämpften Modells lauten 453.582 633.305 928.352 1331.8 1382.95. Die Erregungsfrequenz besitzt den Wert 5 Hz.

7.5.3 Simulationen und Auswertung

Zur Untersuchung des Einflusses von Störungen werden die gemessenen Ausgangsgrößen mit 0.1 %, 1.0 % und 5.0 % der im Zeitbereich gemessenen Maximalamplitude des Verschiebungsvektors $\mathbf{C}\mathbf{x}^m$ über den Frequenzen gleichverteiltem Rauschen belegt.

Insgesamt werden nach der Aussage von (7.35) 1000 Simulationen des PEGV für ein Niveau der Versagenswahrscheinlichkeit $P_f = 10^{-2}$ durchgeführt. Die Vorgehensweise einer Simulation wird anhand eines Parametersatzes \mathbf{a} eines Sample illustriert. Die gemessenen Ausgangskomponenten sind mit 0.1 % Rauschen belegt. In der Tabelle

\mathbf{a}^0 [N/m ²]	\mathbf{a} [N/m ²]
2.78012e+10	2.78011e+10
1.81361e+10	1.81361e+10
2.64646e+10	2.64646e+10
2.01398e+10	2.01398e+10
1.63451e+10	1.63451e+10
2.57884e+10	2.57885e+10
2.42046e+10	2.42045e+10
1.85687e+10	1.85687e+10
1.61785e+10	1.61786e+10
1.92179e+10	1.92179e+10

Tabelle 7.1: wahrer Parametersatz \mathbf{a}^0 und mit dem PEGV identifizierten \mathbf{a} des ersten Sample

7.1 entspricht der simulierte Parametersatz in der ersten Spalte dem wahren Parametersatz \mathbf{a}^0 . Dieser ist in der Abb. 7.2 durch Zufallsfelder realisiert. Die Verteilung des E-Moduls und die Korrelationen der Zufallsfelder untereinander sind unbekannt und deshalb wird als Startwert für das PEGV ein Parametersatz mit $1.0 \cdot \bar{\mathbf{Z}}$ angenommen. Die Festlegung der unteren Grenze $0.5 \cdot \bar{\mathbf{Z}}$ bzw. der oberen Grenze $2.0 \cdot \bar{\mathbf{Z}}$ für das Optimierungsverfahren resultiert aus einem a priori Wissen, welches in der realen Messpraxis z.B. aus zusätzlichen, von der Identifikation unabhängigen, Experimenten gewonnen werden kann. Die Spalte zwei der Tabelle 7.1 zeigt das Ergebnis nach erfolgter Identifikation mit dem PEGV. Weiter wird die Kondition der Hessematrix (7.21) als ein Indikator zur Beschreibung des Einzugsgebietes der Zielfunktion untersucht. Die Tabellen 7.2 bis 7.4 zeigen die Konditionszahlen der Hessematrix und die Versagenswahrscheinlichkeiten des PEGV-Verfahrens für das oben illustrierte Modell in Abhängigkeit der Anzahl der Messpunkte, des Rauschlevels δ und des Fehlerfaktors (gewünschte Genauigkeit der Prozedur) P_{fac} an. Es bezeichnet $\min a^*$ den Wertebereich jener Konditionszahlen der Hessematrix aus dem Parametersatz \mathbf{a} , bei dem Versagen und $\max a^*$, bei dem kein Versagen eintritt.

Deutlich wird, dass mit sinkendem Signal/Störverhältnis in den Ausgangsmessungen sich die Versagenswahrscheinlichkeit des Verfahrens vergrößert. Die durch eine erhöhte Anzahl von Messaufnehmern zusätzlich eingebrachte Information wird mit sinkendem Signal/Störverhältnis nivelliert oder bewirkt sogar (bei einem hohem

18 Messpunkte			
P_{fac}	$P_f \cdot 10^{-2}$	min a^*	max a^*
10^{-3}	1	258.77-7.4107e+11	-
10^{-2}	0.009	3.8275e+07-7.4107e+11	258.77-1739.6
10^{-1}	0.009	3.8275e+07-7.4107e+11	258.77-1739.6
10^0	0.008	3.8275e+07-7.4107e+11	258.77-13.4586e+10
10^1	0	-	258.77-7.4107e+11
27 Messpunkte			
10^{-9}	1	63.552 - 2193.1	-
10^{-8}	0.999	63.552 - 2193.1	444.61
10^{-7}	0.946	63.552 - 2193.1	403.34 - 981.16
10^{-6}	0.558	80.936 - 2193.1	63.552 - 1721.2
10^{-5}	0.002	481.6 - 544.35	63.552 - 2193.1
10^{-4}	0.002	481.6 - 544.35	63.552 - 2193.1
10^{-3}	0.002	481.6 - 544.35	63.552 - 2193.1
10^{-2}	0.002	481.6 - 544.35	63.552 - 2193.1
10^{-1}	0	-	63.552 - 2193.1

Tabelle 7.2: Versagenswahrscheinlichkeit $P_f \cdot 10^{-2}$; 1000 Simulationen; 0.1% max \mathbf{x}^m Rauschen

18 Messpunkte			
P_{fac}	$P_f \cdot 10^{-2}$	min a^*	max a^*
10^{-2}	1	281.46-2.2564e+09	-
10^{-1}	0.004	6.9256e+07-2.2564e+09	281.46-1586.3
10^0	0.003	6.9256e+07-1.7072e+09	281.46-2.2564e+09
10^1	0	-	281.46-2.2564e+09
27 Messpunkte			
10^{-2}	1	58.737 - 1.0929e+12	-
10^{-1}	0.002	884.34 - 1.0929e+12	58.737 - 2036.6
10^0	0.001	1.0929e+12	58.737 - 2036.6

Tabelle 7.3: Versagenswahrscheinlichkeit $P_f \cdot 10^{-2}$; 1000 Simulationen; 1% max \mathbf{x}^m Rauschen

18 Messpunkte			
P_{fac}	$P_f \cdot 10^{-2}$	min a^*	max a^*
10^{-2}	1	326.71-7.2627e+19	-
10^{-1}	0.967	326.71-7.2627e+19	361.22-1221.1
10^0	0.019	5.9546e+07-1.2602e+15	326.71-7.2627e+19
10^1	0	-	326.71-7.2627e+19
27 Messpunkte			
10^{-2}	1	25.662 - 6.2841e+17	-
10^{-1}	1	25.662 - 6.2841e+17	-
10^0	0.013	9.0466e+07-4.4958e+13	25.662 - 6.2841e+17
10^1	0	-	25.662 - 6.2841e+17

Tabelle 7.4: Versagenswahrscheinlichkeit $P_f \cdot 10^{-2}$; 1000 Simulationen; 5% max \mathbf{x}^m Rauschen

Rauschniveau δ) eine steigende Versagenswahrscheinlichkeit P_f .

Mit sinkendem Signal/Störverhältnis und verringerter Anzahl von Messaufnehmern besitzt die Konditionszahl der Hessmatrix steigende Tendenz, d.h. der Einzugsbereich der Zielfunktion $J(a)$ wird größer. Die Wertebereiche der Konditionszahlen der Samples, bei denen Versagen bzw. kein Versagen eintritt, besitzen jedoch keine eindeutige Grenze, so dass sich das Einzugsgebiet der Zielfunktion zu einer a priori Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit schwer eingrenzen lässt.

Auch die Möglichkeit, eine a priori Betrachtung über die Versagenswahrscheinlichkeit durch die Wahl einer optimalen Versuchsauslegung einzuschränken ist ebenfalls eng begrenzt, da die dazu notwendige Sensitivitätsbetrachtung des PEGV im Sinne einer Eingrenzung der Versuchsauslegung nicht erfolgreich ist. Dies wird im Anhang (C.1, S. 118) ausführlicher beschrieben.

Kapitel 8

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Adaption des Polyreferenz-Verfahrens (PRZ), das auf der Basis einer Impulserregung arbeitet, vorgestellt. Dadurch wird eine Genauigkeitssteigerung und eine Erweiterung der Anwendbarkeit des klassischen Polyreferenz-Verfahrens auf eng benachbarte und verrauschte Signalanteile oder für den Fall, dass nur wenige Mess- und Anregungspunkte vorliegen, erzielt.

Erreicht wird dies durch eine veränderte Bestimmung der Fundamentalmatrix $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}\Delta t}$. Statt (3.32)

$$\mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{R}\mathbf{T}^T$$

wird die QSVD (3.53, S. 29) zweier Hankelmatrizen $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ verwendet, in der die Fundamentalmatrix $e^{\mathbf{A}\Delta t}$ aus (3.56)

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{P}_1^\dagger \mathbf{P}_2 = (\mathbf{U}\Sigma_{H_1})^\dagger \mathbf{V}$$

gewonnen wird. Die Vorfilterung mit (2.11, S. 9)

$$x(k) = \sum_{\mu=0}^m b_\mu f(k - \mu) - \sum_{\nu=1}^n c_\nu x(k - \nu)$$

ist dabei unbedingte Voraussetzung. Mit ihr gelingt nicht nur die Eliminierung des bei der Bestimmung der Impulsreaktionsfunktion $h(t) = \mathcal{F}^{-1}H(\omega)$ entstehenden Gibbsschen Phänomens. Eine Filterung auf ein enges Frequenzband bewirkt auch eine Verringerung der Varianzen der Störeinflüsse. Entsprechend der angegebenen Charakteristik des Filters werden jene Störeinflüsse herausgefiltert, die nicht innerhalb des Frequenzbandes liegen. Für die Anwendung der QSVD wirkt (2.11) doppelt. Bei einem sehr breiten Frequenzband ist die Wahrscheinlichkeit, die interessierenden Frequenzanteile bestimmen zu können, geringer. Dies resultiert aus der dafür notwendigen großen Anzahl zu identifizierender Frequenzen und Dämpfungen, die mit

steigender Anzahl größere Dimensionen der Hankelmatrizen erfordern. Die Folge ist ein nichtlinear anwachsender Rechenaufwand bei der Durchführung der QSVD und ein mit der Bestimmung einer großen Menge zu bestimmender Frequenzanteile einhergehender Genauigkeitsverlust.

Die Vorschaltung der SVD vor der QSVD (3.47) bewirkt eine signifikante Reduktion der Störeinflüsse innerhalb des gefilterten Frequenzbandes. Dabei kann durch die Vorfilterung a priori eine Trennung zwischen Signal- und Rauschraum durch die SVD erfolgen. Bestimmendes Kriterium ist hier der maximale Abstand zweier Singulär-Wertepaare $\Delta\sigma$. Dabei ist dieser um so größer, je enger das Frequenzband gefiltert wird. Die Anzahl der Singulär-Wertepaare oberhalb dieses Kriteriums liefert den Rang r der Hankelmatrix \mathbf{H} , dessen Kenntnis für die Durchführung der QSVD eine Voraussetzung darstellt. (2.11) und (3.47) können so günstig miteinander wirken, dass die Berechnung der Fundamentalmatrix mit Hilfe der QSVD entfallen kann wenn durch den Anwender sichergestellt werden kann, dass nur die Frequenzanteile oberhalb von $\Delta\sigma$ interessant für die Identifikation sind.

Die Dimensionsprobleme aus (2.11) können umgangen werden, wenn das Signal analog gefiltert werden kann.

Laboruntersuchungen an einem Stahlbetonbalken und einem Stahlbalken belegen die Möglichkeit, zwischen dem klassischen und dem adaptierten Polyreferenz-Verfahren entsprechend den Anforderungen an eine Identifikation zu wählen. Gleichzeitig wird damit der Bearbeitungsaufwand eines Signalgemisches bestimmt.

Zur Anwendung der beschriebenen Vorgehensweise zur Bestimmung modaler Parameter auch an realen Bauwerken ist ein Impulshammer konstruiert worden. Eine primäre Anforderung ist dabei die Gestaltung des Erregerkraftspektrums, das durch einen möglichen Austausch des Deformationsmoduls variiert werden kann. Bei in-situ Versuchen hat sich gezeigt, dass modale Parameter gegenüber Änderungen des Tragwerks, die auf Temperatureinwirkungen zurückzuführen sind, sensibel reagieren.

Mehrere Algorithmen zur Lokalisierung von Systemveränderungen basierend auf Eigenformen, darunter erstmalig die Untersuchung von Verdrehungsfreiheitsgraden der Eigenformen zur Schadensdiagnose, wurden untersucht. Generell eignen sich Eigenformen, die auf der Basis einer Impulserregung bestimmt wurden, allein nicht zur Schadensdiagnose. Vorausgesetzt wird eine stetige Funktion der Eigenformen, die aber im Experiment nur schwer einzuhalten ist: die Streuungen zwischen den Mes-

spunkten bei der Ermittlung von Amplitude und Phasenbeziehung sind größer als die durch die eingetragenen Schädigungen verursachten Unstetigkeiten. Diese führt erst in einem Stadium der Schädigung zu Resultaten, wenn auch rein visuelle Betrachtungsmethoden der Anforderung der Lokalisierung genügen. Ein Nachteil der Impulserregung ist die nicht gleichmäßige Energieverteilung des eingebrachten Impulses auf die Systemeigenfunktionen mit der Folge, dass die weniger gut angeregten Eigenfunktionen hinsichtlich Amplitude und Phasenbeziehung größere Streuungen aufweisen. Eine Verbesserung der Energieverteilung kann nur durch eine Anpassung des Anregungsspektrums auf das zu untersuchende System erfolgen.

Die Anzahl der zur Parameteridentifikation mit der Methode der gewichteten Fehlerquadrate (6.11) stehenden modalen Parameter ist, wenn diese auf der Basis einer Impulserregung bestimmt wurden, eng begrenzt und dies bedeutet auch eine Einschränkung in der Menge frei zu wählender Parameter. Ein großer zu bestimmender Parametersatz \mathbf{a} bewirkt ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem (6.19)

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{G} \mathbf{S} + \alpha^2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{a}_j = \mathbf{S}^T \mathbf{G} \delta \mathbf{z}$$

das eine starke Regularisierung durch den Term $\alpha^2 \mathbf{I}$ erfordert. Der ermittelte Parametersatz bleibt aber fehlerbehaftet. Mit einer erfolgreichen Schadensdiagnose kann ein großes Maß an Information zusätzlich in die Parameteridentifikation eingebracht werden. Dadurch kann die Dimension des Parametersatzes wesentlich verringert werden, indem die Parameter nur am Schadensort selbst bzw. in seiner Umgebung in der Identifikation frei gewählt werden.

Die Verwendung von Ein- und Ausgangsgrößen zur Parameteridentifikation bewirkt eine Verkürzung des Bearbeitungsaufwandes. Als ein Nachteil anzusehen ist, dass diese nicht, wie die modalen Parameter, eine gewisse Anschaulichkeit des zu bearbeitenden Systems liefern. Das Projektive Eingangsgrößenverfahren arbeitet auf der Basis unvollständig gemessener Ein- und Ausgangsgrößen und stellt ein nichtlineares Korrekturverfahren im Frequenzbereich dar. Dadurch entfällt die im Zeitbereich notwendige Filterung. Mit sinkendem Signal/Störverhältnis in den Ausgangsmessungen vergrößert sich die Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV. Bei einem sehr hohen Rauschniveau δ wird die durch eine erhöhte Anzahl von Messaufnehmern zusätzlich eingebrachte Information nivelliert und kann eine steigende Versagenswahrscheinlichkeit P_f des Verfahrens bedeuten.

Mit sinkendem Signal/Störverhältnis und verringerter Anzahl von Messaufnehmern

besitzt die Konditionszahl der Hessmatrix steigende Tendenz, d.h. der Einzugsbereich der Zielfunktion $J(a)$ wird größer. Die Wertebereiche der Konditionszahlen der Samples, bei denen Versagen bzw. kein Versagen eintritt, besitzen jedoch keine eindeutige Grenze, so dass sich das Einzugsgebiet der Zielfunktion zu einer a priori Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit schwer eingrenzen lässt.

Eine Weiterentwicklung und Anwendung der beschriebenen Vorgehensweisen ist in folgenden Richtungen denkbar:

- In Abschn. 5 ist die Sensitivität der modalen Parameter gegenüber Temperatureinflüssen deutlich geworden. Damit ist auch die Schadensdiagnose und die Parameteridentifikation diesen Einflüssen unterworfen. Dies gilt auch für die Identifikation auf der Basis von gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen. Daraus leitet sich die Forderung ab, eine Veränderung des Systems auch dann anzuzeigen, wenn die Einflüsse aus Temperatur die Einflüsse, die zu einer bleibenden Veränderung des Systems führen, nivellieren. Notwendig wird also eine Erfassung und Trennung genannter Einwirkungen auf das System.
- Zu einer wirklichkeitsnahen Modellierung eines Tragwerks ist die exakte Bestimmung der Randbedingungen notwendig. Die Auswertung von Messungen dynamischer Kenngrößen wird aber durch geringere Schwingungsamplituden am Auflager, die zu einer Verminderung des Signal/Störverhältnisses führen, erschwert.
- Wenn Nichtlinearitäten des Systems, die an lokalen Stellen auftreten, nicht erkannt werden, führt dies zu einer Fehlinterpretation der Ergebnisse aus der Identifikation. Eine Detektion von Nichtlinearitäten ist durch die Anwendung der Wavelet-Transformation auf die gemessenen Signale oder durch Messung der Antworten des Systems, auf das vom Betrag her unterschiedliche Kraftamplituden einwirken, möglich. Die anschließende Modellierung der Nichtlinearitäten bildet die Voraussetzung für eine Erweiterung von Korrekturverfahren im nichtlinearen Bereich.

Literaturverzeichnis

- BARUCH, M.: Parametric Methods of Reference Basis to the Identification of Linear Dynamic Structures. In: *Proceedings of the 35th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, Tel-Aviv and Haifa* (1995), S. 95–105
- BARUCH, M.: Damage Detection based on reduced Measurements. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* (1998), Nr. 12, S. 23–46
- BEN-HAIM, Y. ; PRELLS, U.: Selective Sensitivity in the Frequency Domain-I. Theory. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 7 (1993), Nr. 6, S. 461–475
- BERESIN, I.S. ; SHIDKOW, N.P.: *Numerische Methoden Band 2*. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1971
- BUCHER, C.: *Structural Mechanics Stochastics Lecture Notes*. Weimar : Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University Weimar, 1999
- BUCHER, C. ; BAYER, V. ; EBERT, M. ; FINN, R. ; HERZ, E. ; HUTH, O. ; MACKE, M. ; MORITZEN, K. ; MOST, T. ; PFEFFERKORN, G. ; PURKERT, G. ; RIEDEL, J. ; ROOS, D. ; SCHORLING, Y. ; WINKEL, B. ; ZABEL, V.: *Slang - the Structural Language*. 5. Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar, 2002
- BUCHER, C. ; HUTH, O.: Ilmbrücke Darnstedt, Teil II: Dynamische Untersuchungen. In: STEFFENS, K. (Hrsg.): *Experimentelle Tragsicherheitsbewertung von Brücken in situ zur Substanzerhaltung und zur Verminderung der Umweltbelastung - EXTRA II Abschlussbericht*. Labor für experimentelle Statik, Hochschule Bremen, 1999, S. 125 – 130
- COTTIN, N.: On the Use of Reduced Models in Linear System Identification. In: KRÄTZIG (Hrsg.): *Structural Dynamics*. Proceedings of the EURO DYN 93 : Balkema Rotterdam, 1990, S. 819–826

- DAILEY, R.L.: Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues. In: *AIAA Journal* 27 (1989), Nr. 4, S. 486–491
- DEBLAUWE, F. ; BROWN, D.L. ; ALLEMANG, R.I.: The Polyreference Time Domain Technique. In: *International Modal Analysis Conference*. Proceedings of the IMAC, 1987, S. 832–845
- DEROECK, G. ; KIRKEGAARD, P.H. ; KRÄMER, C. ; BRUGHAMS, M. ; ROBERTS, G.P. ; GAROZZO, M. ; FLESCH, R.: SIMCES - System Identification to Monitor Civil Engineering Structures. Brite/EuRam BE96-3157, 2000
- EBERT, M.: *Experimentelle und numerische Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung stochastischer Eigenschaften*. Dissertation, Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar, 2001
- ENGL, H.W. ; HANKE, M. ; NEUBAUER, A.: *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht Boston London : Kluwer Academic Publishers, 1996
- FOX, R.L. ; KAPOOR, M.P.: Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. In: *AIAA Journal* 6 (1968), Nr. 12, S. 2426–2429
- FRISWELL, M.I. ; MOTTERSHEAD, J.E.: *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Dordrecht Boston London : Kluwer Academic Publishers, 1995
- HUTH, O. ; RIEDEL, J. ; BUCHER, C.: Finite Element Modell Optimierung einer Stahlbetonbrücke auf der Grundlage von in-situ Experimenten. In: SAVIDIS, S.A. (Hrsg.): *Vortragsband der Dreiländertagung D-A-CH 1999 der Deutschen Gesellschaft für Erdbeningenieurwesen und Baudynamik. e.V. (DGEB)*. Berlin : Papyrus-Druck GmbH, 1999, S. 363–373
- HUTH, O. ; WINGE, T.: Digitale Filterung von Signalen im Zeitbereich. In: BUCHER, C. (Hrsg.) ; BURKHARDT, G. (Hrsg.) ; VORMWALD, M. (Hrsg.): *6. Institutskolloquium*. Weimar : Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität, 2000, S. 127–138
- KAMARYS, D.: *Detektion von Strukturveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse*. Ruhr-Universität Bochum : Dissertation, Institut für Mechanik, Mitteilung Nr. 119, 1999

- KAMMEYER, K.D. ; KROSCHER, K.: *Digitale Signalverarbeitung*. 4. Auflage. Stuttgart : B. G. Teubner Verlag, 1998
- LALLEMENT, G. ; PIRANDA, G.: Localisation Methods for Parameter Updating of Finite Element Models in Elastodynamics. In: *8th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida* (1990), S. 579–585
- LENZEN, A.: *Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen*. Ruhr-Universität Bochum : Dissertation, Institut für Mechanik, Mitteilung Nr. 94, 1994
- LINK, M.: Updating of Analytical Models - Review of Numerical Procedures & Application Aspects. In: EWINS, D.J. (Hrsg.) ; INMAN, D.J. (Hrsg.): *Structural Dynamics @ 2000: current status and future directions*. Baldock, Hertfordshire, England : Research Studies Press ltd, 2001, S. 193–224
- LINK, M. ; MESKOURIS, K.: Baudynamik und Systemidentifikation. In: MEHLHORN, G. (Hrsg.): *Der Ingenieurbau Baustatik Baudynamik*. Ernst & Sohn Verlag Berlin, 1996, S. 365–518
- LOUIS, A.K.: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. New York Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 1989
- MAECK, J. ; ROECK, G. D.: Dynamic Bending and Torsion Stiffness Derivation from Modal Curvatures and Torsion Rates. In: *Journal of Sound and Vibration* 225 (1999), Nr. 1, S. 153–170
- MAECK, J. ; WAHAB, M.A. ; PEETERS, B. ; ROECK, G. D. ; VISSCHER, J. D. ; WILDE, W.P. D. ; NDAMI, J.M. ; VANTOMME, J.: Damage Identification in Reinforced Concrete Structures by Dynamic Stiffness Determination. In: *Engineering Structures* 22 (2000), Nr. 10, S. 1339–1349
- MAIA, N.M.M. ; SILVA, J.M.M. ; HE, J. ; LIEVEN, N.A.J. ; LIN, R.M. ; SKINGLE, G.W. ; TO, W.-M. ; URGUEIRA, A.P.V.: The Polyreference Complex Exponential Method (PRCE). In: MAIA, N.M.M. (Hrsg.) ; SILVA, J.M.M. (Hrsg.): *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. New York Chicester Toronto Brisbane Singapore : Research Studies Press ltd, John Wiley & Sons inc., 1997
- MEINHOLD, W.: *Vorlesungen Angewandte Baudynamik*. Bauhaus Universität Weimar : Institut für Strukturmechanik, 1999

- MEINHOLD, W. ; HUTH, O.: Ein Stoßerreger für mechanische Strukturen. In: *Der Bauingenieur* 74 (1999), Nr. 3, S. 124–128
- NATKE, H.G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. 3. Braunschweig/Wiesbaden : Friedr.Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1992
- NATKE, H.G. ; CEMPEL, C.: *Model-Aided Diagnosis of Mechanical Systems*. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 1997
- NATKE, H.G. ; COTTIN, N. ; OELJEKLAUS, M.: Some Recent Advances in Model Updating. In: *ASME Conference California: Proceedings of the 1997 Design Engineering Technical Conferences DETC97/VIB-4142* (1997), S. 1201–1205
- NELSON, R.B.: Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives. In: *AIAA Journal* 14 (1976), Nr. 9, S. 1201–1205
- OELJEKLAUS, M.: *Das lineare Ausgangsgrößenverfahren mit rechnerisch adaptiver Erregung im Frequenzbereich*. Dissertation, Curt-Risch-Institut, Universität Hannover, 1995
- OELJEKLAUS, M.: *Ein Beitrag zur Systemidentifikation: Das Projektive Eingangsgrößenverfahren und das Regularisierte Ausgangsgrößenverfahren im Frequenzbereich für unvollständige Messungen*. Habilitation, Curt-Risch-Institut, Universität Hannover, 1998
- OELJEKLAUS, M. ; NATKE, H.G.: Parallel Intervall Algorithm for Parameter Identification in the Frequency Domain. In: *Inverse Problems in Engineering* 3 (1996), S. 305–325
- OPPENHEIM, A.V. ; SCHAFFER, R.W.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. München : Oldenbourg Verlag, 1992
- PAIGE, C.C. ; SAUNDERS, M.A.: Computing the Generalized Singular Value Decomposition. In: *SIAM Journal Numerical Analysis* 18 (1981), Nr. 3, S. 398–405
- PANDEY, A.K. ; BISWAS, M.: Damage Detection in Structures Using Changes in Flexibility. In: *Journal of Sound and Vibration* 169 (1994), Nr. 1, S. 3–17
- PANDEY, A.K. ; BISWAS, M. ; SAMMAN, M.M.: Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes. In: *Journal of Sound and Vibration* 145 (1991), Nr. 2, S. 321–332

- PETERSEN, S.T. ; MCLEAN, D.L. ; SYMANS, M.D. ; POLLACK, D.G. ; COFER, W.F. ; EMERSON, R.N. ; FRIDLEY, K.J.: Application of Dynamic System Identification to Timber Beams. In: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 127 (2001), Nr. 4, S. 418–432
- PRELLS, U.: *Eine Regularisierungsmethode für die lineare Fehlerlokalisierung von Modellen elastomechanischer Systeme*. Dissertation, Curt-Risch-Institut, Universität Hannover, 1995
- PRELLS, U. ; BEN-HAIM, Y.: Selective Sensitivity in the Frequency Domain-II. Applications. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 7 (1993), Nr. 6, S. 551–574
- SCHITTKOWSKI, K.: NLPQL: A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems. In: *Annals of Operations Research* 5 (1985), Nr. 6, S. 485–500
- SHI, Z.Y. ; LAW, S.S. ; ZHANG, L.M.: Damage Localization by Directly Using Incomplete Mode Shapes. In: *Journal of Engineering Mechanics* (2000), Nr. 6, S. 656–660
- SHINOZUKA, M.: Basic Analysis of Structural Safety. In: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 109 (1983), Nr. 3, S. 721–740
- SILVA, J.M.M. ; MAIA, N.M.M. ; HAMMOND, J.K. ; VAROTO, P.S. ; MCCONNELL, K.G. ; INMAN, D.J. ; IBRAHIM, S.R. ; LALLEMENT, G. ; COGAN, S. ; LINK, M. ; HANKE, G. ; HE, J. ; FARRAR, C.R. ; DOEBLING, S.W. ; PARK, C.H. ; GAUL, L. ; STÖEBENER, U. ; LIEVEN, N.A. ; EWINS, D.J. ; TOMLINSON, G.R.: In: SILVA, J.M.M. (Hrsg.) ; MAIA, N.M.M. (Hrsg.): *Modal Analysis and Testing*. Dordrecht Boston London : Kluwer Academic Publishers, 1997
- SPAETHE, G.: *Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen*. Berlin : VEB Verlag für das Bauwesen, 1987
- STEFFENS, K. ; BUCHER, C. ; OPITZ, H. ; QUADE, J. ; ; SCHWESINGER, P. ; SLOWIK, V.: EXTRA II Zwischenbericht. In: STEFFENS, K. (Hrsg.): *Experimentelle Tragsicherheitsbewertung von Brücken in situ zur Substanzerhaltung und zur Verminderung der Umweltbelastung*. Labor für experimentelle Statik, Hochschule Bremen, 1997

- UNBEHAUEN, R.: *Systemtheorie 1. 7.* München Wien : R. Oldenburg Verlag, 1997
- VANLOAN, C.F.: Generalized the Singular Value Decomposition. In: *SIAM Journal Numerical Analysis* 13 (1976), Nr. 1, S. 76–83
- VOLD, H. ; KUNDRAT, J. ; ROCKLIN, G.T. ; RUSSEL, R.: A Multi-Input Modal Estimation Algorithm For Mini-Computers. In: *SAE Technical Paper Series* (1982), Nr. 820194
- WINGE, T.: *Identifikation von Systemparametern durch FE-Angleichung basierend auf Schwingungsmessungen.* Bauhaus-Universität Weimar : Diplomarbeit, Institut für Strukturmechanik, 2000
- ZIMMERMANN, D.C. ; KAOUK, M.: Structural Damage Detection Using a Minimum Rank Updating Theory. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 116 (1994), Nr. 4, S. 222–231

Anhang A

A.1 Programmtechnische Umsetzung

Alle in dieser Arbeit verwendeten Verfahren wurden in die Software `Slang` implementiert. `Slang` (Bucher u. a. (2002)) basiert auf mehreren Kommandogruppen, denen Funktionen aus den Gebieten der *Methode der Finiten Elemente*, der *Linearen Algebra*, der *Systemidentifikation und Datenanalyse*, *Optimierungsverfahren* und der *Stochastik* zugeordnet sind. Die Struktur einer Funktion gliedert sich in ein *Kommando*, einem zugehörigen *Attribut*, das das Kommando näher spezifiziert, und dem *Input*, das durch das *Kommando* bearbeitet wird und zur Übergabe in das nächste *Kommando* in ein *Output* geschrieben wird. Durch diese beschriebene Datenstruktur wird die Realisierung komplexer Programmabläufe ermöglicht. Die Benutzeroberfläche stellt ein Kommandointerpreter dar.

Die Beschreibung der Eingabedateien folgt chronologisch der Vorgehensweise dieser Arbeit. Auf die Beschreibung von Details der Ein- und Ausgabe wird verzichtet und es werden jene Kommandos beschrieben, die für die Umsetzung der Verfahren als essentiell erscheinen.

A.1.1 Filterung und Resampling der Zeitreihen

Für die programmtechnische Umsetzung der Filterung, des klassischen und des adaptierten Polyreferenz- Verfahrens existiert eine gemeinsame Hauptroutine *MainIdent.s*. Als erstes werden einige globale Variablen definiert.

```
object read, , delta_t 6.10352E-05, /
    Generierung des durch den Datenanalyser definierten
    Zeitintervalls  $\Delta t$ 
object read, , nUsedTS 89723, /
```

```

        Verwendete Anzahl der Samples
object read, , sampleStep 20, /
        Definition eines neuen Sampleschrittes
object read, , num_trans 45, /
        Anzahl der verwendeten Aufnehmerpositionen
object read, , nfreq 6, /
        Anzahl der Frequenzbänder.
object create, replace integer vector, nfreq, frequpp_vector /
object read, , frequpp_vector 6 17 39 65 102 142, /
        Obere Grenzen der Frequenzbänder.
object create, replace integer vector, nfreq, freqlow_vector /
object read, , freqlow_vector 3 14 36 62 98 139, /
        Untere Grenzen der Frequenzbänder.
#label FREQ
        Markierung für alle Frequenzbänder
control gosub, , RESAMPLE, /
        Unteroutine für die Filterung.
#label NEXTTRANSDUCER
        Markierung für alle Aufnehmer
#label NEXTSERIE
        Markierung für alle Zeitserien einer Messkonfiguration
input file, , outFile, Channel_8 /
        Einlesen der Messdaten
timeseries fourier, replace,force_tmp delta.t, tForceFile_real tForceFile_imag
delta.omega /
         $\mathcal{F}$  von  $f(t)$ 
timeseries fourier, replace, tmp delta.t, tmp_real tmp_imag delta.omega
/
         $\mathcal{F}$  von  $\ddot{x}(t)$ 
complex_division tmp_real tmp_imag tForceFile_real tForceFile_imag real_part
imag_part
        Aufruf des Makros complex_division zur Durchführung
        der komplexen Division
timeseries fourinv, replace, real_part imag_part delta.omega, tmp delta.t/
        Inverse Fouriertransformation  $\mathcal{F}^{-1}$  zur Generierung des neuen
        Zeitsignals. Bestimmung der Impulsreaktionsfunktion (3.10).

```



```
timeseries filtercoeff, replace bandpass filtfft, 16383.99 frequpp_vector
(freq_count) freqlow_vector (freq_count) 1.0.0003, filtercoeff
funct /
```

Bestimmung der Filterkoeffizienten nach (2.23) mit einem Übergangsbereich des Filters $\Delta\Omega = 1$ und der Höhe des Überschwingers $\zeta = 0.0003$.

```
linalg convolution, replace noncausal, tmp filtercoeff, Channel /
```

Durchführung der Filterung nach (2.11).

```
#label RESAMPLING
```

Neuaufzeichnen des Zeitsignals entsprechend der Abtastung mit `sampleStep`.

A.1.2 Das klassische Polyreferenz- Verfahren

Nach dem Aufruf der Hauptroutine *MainIdent.s* wird durch das Kommando `control gosub, , ident_POLY_1, /`

in der Unteroutine `ident_POLY_1.s` die Prozedur des PRZ-Verfahrens eingeleitet.

```
#label ident_POLY_1
```

Markierung für das PRZ-Verfahren.

```
object create, replace integer vector, nfreq, rank_vector /
```

```
object read, , rank_vector 2 2 4 4 4 4, /
```

```
object read, , dim_sing_ma rank_vector freq_count , /
```

Bestimmung von $2N$ aus (3.25, S. 22).

```
object read, , q 1, /
```

Anzahl der Erregerorte oder Referenzpunkte.

```
object read, , L \int \div dim_sing_ma q, /
```

Bestimmung von L durch $L = 2N/q$.

```
object read, , k 200, /
```

Anzahl der berücksichtigten Zeitintervalle k .

```
object create, replace real matrix, \int \mul q L int \mul k num_trans,
T /
```

```
object create, replace real matrix, q \int \mul k num_trans, R /
```

Generierung von \mathbf{T} und \mathbf{R} für (3.30, S. 23).

```
control gosub, , T_MATRIX, /
```

```
linalg matrixsort, replace polyref, Tp X L, Tpsort /
```

Aufbau der Matrix \mathbf{T}_{kp} von (3.31, S. 23).

```
linalg multiply, replace, T T_t, TT_t /
```

```
linalg invert, replace, TT_t, TT_t_inv /
```

```
linalg multiply, trans_first, T TT_t_inv, T_tTT_t_inv /
```

```
linalg multiply, , R T_tTT_t_inv, B /
```

Lösung von (3.33).

```
#label COMPANION_MATRIX
```

Markierung für den Aufbau der Matrix aus (3.40, S. 25).

```
linalg eigennosy, left replace, comp_mat, eigen_real eigen_imag
```

```
left_vect /
```

Die Lösung dieses Eigenwertproblems $(\bar{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{I})\phi_x = 0$ liefert die Lq komplexen Eigenwerte Z_r (3.22, S. 21) und die zu jeder Spalte \mathbf{W}_r der modalen Wichtungsmatrix \mathbf{W} korrespondierenden Eigenvektoren (3.18, S. 21).

Im Anschluss werden die komplexen Residuen nach (3.43, S. 25) in der Routine `ident.POLY_2.s` berechnet. Die in dieser Routine eingesetzten Markierungen `#label mode` `#label time serie`, `#label transducer` besitzen die Bedeutung der Zuordnung der i -ten Eigenform, der verwendeten Zeitserie und der entsprechenden Aufnehmerposition. In der Bearbeitung des Programms bedeuten die Markierungen `#label Z_compl`, `#label Z_co_compl` bzw. `#label W_compl`, `#label W_co_compl` die Abarbeitungen der Schleifen für den Aufbau der komplexen bzw. konjugiert komplexen Matrix der Eigenwerte Z_r bzw. der modalen Wichtungsmatrix \mathbf{W} .

```
#label WZ_matrix
```

Bestimmung der Matrix \mathbf{WZ} (3.38, S. 24)

```
#label H_compl
```

(3.42, S. 25)

```
linalg transpose, replace, WZ_co_compl, B /
```

```
linalg multiply, replace, B WZ_compl, C /
```

```
linalg multiply, replace, B H_compl, BH /
```

```
linalg invert, replace, Cmat, Cinv /
```

```
linalg multiply, replace, Cinv BH, A /
```

Bestimmung der komplexen Residuen \mathbf{WZ} (3.43, S. 25)

A.1.3 Das adaptierte Polyreferenz-Verfahren

Nach dem Aufruf der Hauptroutine *MainIdent.s* wird durch das Kommando `control gosub,,ident_ADAPPOLY_1,/`

in der Unteroutine `ident_ADAPPOLY_1.s` die Prozedur des adaptierten PRZ-Verfahrens eingeleitet.

`#label ident_ADAPPOLY_1`

Markierung für das adaptierte PRZ-Verfahren.

`#label TIME_SERIE_ADAPPOLY`

Schleife über die einzelnen Zeitserien.

`#label READ_IN`

Schleife für das Einlesen der Messdaten

`linalg matrixsort,hankel replace, matrix, hankel_matrixtmp/`

`object append, add_rows, hankel_matrix hankel_matrixtmp, /`

Aufbau der Hankelmatrix (3.46, S. 26).

`linalg singst, replace vectors, hankel_matrix ,sing_ma u v/`

SVD der Hankelmatrix (3.47, S. 26).

`object read, , dim_sing_ma rank_vector freq_count ,/`

Rang r der Hankelmatrix

`object extract, replace part, u 1 1 k dim_sing_ma, u_part/`

`object extract, replace part, v 1 1 dim_sing_ma k, v_part/`

`object create, replace real matrix, dim_sing_ma dim_sing_ma, sing_mat/`

`object extract, replace part, sing_ma 1 dim_sing_ma, sing_ma_part/`

`object assemble, diagonal, sing_ma_part sing_mat,/`

`linalg multiply, replace, u_part sing_mat, tmp/`

`linalg multiply, replace, tmp v_part, hankel_sig/`

Neuzusammenbau der Hankelmatrix (3.51, S. 29)

`object create, replace real vector, nfreq, prec_vector /`

`object read, , prec_vector 10e-8 10e-8 10e-8 10e-8 10e-8 10e-8 ,/`

`object read,,para_prec prec_vector freq_count ,/`

Die Einstellung der Rechengenauigkeit für die Operation der QSVD (3.53, S. 29) ist vom jeweiligen Problem abhängig und muß vom Nutzer interaktiv bestimmt werden.

`linalg singge, replace vectors userprecision, hankel_1sig hankel_2sig`

`para_prec, alpha beta u v x/`

QSVD der Hankelmatrizen (3.53, S. 29)

```

linalg multiply,replace trans_first,u_strich u_strich,matrix_c/
linalg invert,replace,matrix_c,c_invert/
linalg multiply,replace trans_second,c_invert u_strich,u_pseudo/
linalg multiply,replace,u_pseudo v_strich,fund_a/
        Berechnung der Fundamentalmatrix (3.56, S. 29)
linalg matrixsort, replace frobenius, fund_a, frob_a/
        Ähnlichkeitstransformation der Fundamentalmatrix (3.58, S. 31)
        in eine Frobeniussche Normalform.
linalg eigennosy,left replace, frob_a,eigen_real eigen_imag left_vect/

```

Die Bestimmung der komplexen Residuen erfolgt wie bereits beschrieben durch die Routine `ident_POLY_2.s`.

A.1.4 Verfahren der Lokalisierung

Die Routinen zur Berechnung des COMAC-Wertes `loc_comac.s`, der Änderung der Krümmung der Eigenformen `loc_curvcomp1.s` und der Änderung der Flexibilitätsmatrix `loc_flexcomp1.s` werden nicht weiter erläutert, da diese lediglich die Gleichungen (4.1, S. 49), (4.5, S. 50), (4.6, S. 51) umsetzen.

Die Berechnung des MDLAC-Wertes (4.2, S. 49) setzt die Bestimmung der Sensitivitätsmatrix (4.3) voraus, in der die Ableitung der Eigenformen nach den Parametern **a** enthalten ist. Mit `loc_md1ac.s` wird die Routine aufgerufen.

```

#include boxdam10mass.s
        Einlesen der Struktur, durch die Methode der Finiten Elemente
        diskretisiert.
object modify,set, N_par 44,/
        Anzahl der Paramter, nach der die Eigenformen beim Aufbau der
        Sensitivitätsmatrix abgeleitet werden.
#label T_c
control gosub,, SENSITIVITY,/
        Unteroutine für den Aufbau der Sensitivitätsmatrix.
#label CALC_ANA_CHANGE_VECTORS
        Schleife für Berechnung von (4.2, S. 49).
#label SEPERATE_MODE_SHAPE
        Schleife für Berechnung von (??, S. ??).

```

Der Aufbau der Sensitivitätsmatrix wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Die

verwendeten Sensitivitätsmatrizen zur Berechnung des MDLAC-Wertes bzw. zur Parameteridentifikation unterscheiden sich nur durch die Verwendung der Ableitung der Eigenwerte (B.17, S. 115), die bei der Berechnung des MDLAC-Wertes nicht benötigt werden.

A.1.5 Parameteridentifikation mit der Methode der modalen Sensitivität

Der Start des Programms erfolgt mit `UpSen.s`.

```
#label T_c
    Schleife für die Messmatrix, die nur die gemessenen
    Freiheitsgrade der Eigenvektoren berücksichtigt.
object read, , da 210 210 210 210 210 210 210 210 210 210, /
object copy, replace, da, E-modul /
object operate, \mul, E-modul 1e+9, /
    Eingabe des Startparametersatzes.
control gosub,, SENSITIVITY,/
    Unterroutine für den Aufbau der Sensitivitätsmatrix S.
#label PAR_INPUT
    Schleife für den Parametersatz a.
#label EIG_INPUT_K
    Schleife für die Ableitung des Parametersatzes nach dem
    i-ten Eigenwert und Eigenvektor.
compact multiply, yt_c.y replace, diff_K.a.i corresp_mode, diff_lambda /
    Berechnung der Sensitivität des Parameters nach dem
    i-ten Eigenwert.
linalg multiply, replace trans_first, W_t U_t_F, v /
    Berechnung von  $\mathbf{h}_j$  aus (B.20, S. 116)
linalg multiply, trans_first, corresp_mode c_help, c /
    Berechnung von  $c_j$  aus (B.22, S. 116)
linalg lincomb, replace, 2 v 1 corresp_mode \chs c, sens_vector /
    Sensitivität des Parameters nach dem i-ten Eigenvektor.

linalg multiply, replace, ST W, STW /
linalg multiply, replace, STW S, STWSsc /
object convert, replace matrix, STWSsc, STWS /
```

Bestimmung des linken Terms $\mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S}$ von (6.13, S. 71).

```
linalg multiply, replace, STW dz, STWdz /
```

Bestimmung des rechten Terms $\mathbf{S}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{z}$ von (6.13, S. 71).

```
linalg singst, replace novectors, STWS, sing_ma /
```

SVD der Matrix $\mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S}$.

```
object extract, replace row, sing_ma 3, maxsingS /
```

Startwert der Suche des Regularisierungsparameters α nach (6.30, S. 74).

```
object read , ,noise_level 2000, /
```

Eingabe des Rauschniveaus δ .

```
linalg bidiagonal, replace , STWS, B U V /
```

```
object extract, replace part, B 1 1 6 6, J /
```

Zerlegung der Matrix $\mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S}$ nach (6.23, S. 73).

```
linalg regsolve, replace with_noise, STWS J U V STWdz noise_level maxsingS,
x alpha/
```

Hier erfolgt die regularisierte Lösung des Normalgleichungssystems nach (6.19, S. 72).

```
object combine, replace \add, da x, da new /
```

Neuer Parametersatz nach (6.23, S. 73).

A.1.6 Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit des PEGV

Die dazu notwendige Prozedur wird mit dem Aufruf `MontePegv.s` gestartet. Alle Unterrountinen sind in `MontePegvSub.s` enthalten.

```
object read, , correlation_length 1.0, /
```

Definition der Korrelationslänge.

```
object read, , coefficient_of_variation 0.2, /
```

Definition des Variationskoeffizienten.

```
object read, , num_sim 1000,/
```

Anzahl der Simulationen.

```
control if, integer equal gosub, 0 0 RANDOMVARIABLES,/
```

Unterroutine für den Aufbau des Zufallsfeldes.

```
ranfield create, replace normal exponential_corr_iso midpt_method,
1 coefficient_of_variation correlation_length shell9n, /
```

Das isotrope Zufallsfeld (7.4, S. 86) des Typs Normalverteilung

wird ausgehend vom Mittelpunkt des finiten Elementes generiert.

```

ranfield build, replace, 1 num_elem, eigenvalues.RF var_frac
correlation_matrix /
#label RV
group create, ranvars, 21 num_elem 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
correlation_matrix, /
ranset simulate, replace, num_sim 1, samples /
    Generierung der einzelnen Samples.
output file, , samples, samples.dat /
    Abspeichern der Samples.
control if, integer equal gosub, 0 0 MODIFYSTRUCTURE,/
    Unterroutine für die Zuweisung der Eigenschaften des Zufallsfeldes
    auf die FE-Struktur.
control if, integer equal gosub, 0 0 MEASUREMENTINFORMATION,/
    Unterroutine für den Aufbau der Messmatrix  $\mathbf{C}$  und des
    Erregervektors  $\mathbf{f}^m$ .
object read, , omega_vec 3141.5, /
    Generierung der Erregerkreisfrequenz.
#label sim
    Lösung des Optimierungsproblems für alle Simulationen.
object read, , init_low_bou 0, /
    Untere Grenze des Parametersatzes.
object read, , init_upp_bou 3, /
    Obere Grenze des Parametersatzes.
object read, , init_design 1, /
    Initialisierung der Startwerte des Parametersatzes.
control if, integer equal gosub, 0 0 DefineOpt,/
    Unterroutine für den Aufbau des Optimierungsproblems.
linalg lincomb, replace, 3 M omega2 B omega K 1., Svc /
    Bestimmung der dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}_\omega$  (7.3, S. 80).
linalg invert, replace, Svc, Fvc /
    Bestimmung der Frequenzgangmatrix  $\mathbf{H}_\omega$ .
linalg multiply, replace , Fvc Pm, Umvc /
    Bestimmung des Vektors der Verschiebungen  $\mathbf{x}^m$ .
#label DISTURB
    Unterroutine für die Addition von weißem Rauschen auf den

```

Verschiebungsvektor \mathbf{x}^m .

#label FOURIER

Unterroutine für die Fouriertransformation des Verschiebungsvektors.

#label FOURIERPM

Unterroutine für die Fouriertransformation des Erregervektors \mathbf{f}^m .

control gosub , , FUNCTION,/

Unterroutine für die Bestimmung der Zielfunktion.

linalg multiply, replace trans_second, Snew Cst, SnewCstT /

object combine, replace \sub, Pmvec SnewCTCUM, PmSnewCTCUM /

Berechnung des rechten Terms von (7.16, S. 81).

object initialize, diagonal, I 1, /

linalg multiply, replace trans_first, SnewCstT SnewCstT , Z /

linalg invert, replace , Z, Zinv /

linalg multiply, replace trans_second, Zinv SnewCstT , SnewCstTpseudo /

linalg multiply, replace, SnewCstT SnewCstTpseudo, SSTT /

linalg lincomb, replace, 2 I 1. SSTT -1. , Pa /

Berechnung des Projektors (7.14, S. 81).

linalg multiply, replace, Pa PmSnewCTCUM, vtmp /

object append, add_rows, v vtmp, /

linalg multiply, replace trans_first, v v , J /

Berechnung der Zielfunktion.

control gosub , , GRADIENTS,/

Unterroutine für die Bestimmung des Gradientenvektors und der Hessematrix (7.20, S. 82).

control if, integer equal gosub, 0 0 SOLVEOPT, /

Unterroutine für die Lösung des Optimierungsproblems.

output file, , design_mat, design_mat1.dat /

Speichern der identifizierten Parametersätze.

Die Auswertung der Versagenswahrscheinlichkeit des Verfahrens erfolgt durch die Routine Prob.s.

Anhang B

B.1 Normierung des Antwortspektrums eines dynamischen Systems auf einen Halbsinusstoss

Die Herleitung von (5.3) folgt Meinhold (1999) und Unbehauen (1997). Jede Erregungsfunktion kann als Superposition von einzelnen Rechteckstößen einer endlichen Zeitlänge $\Delta\tau$ dargestellt werden (Abb. B.1). Der Rechteckstoß $f(\tau)\delta(t - \tau)\Delta\tau$ mit

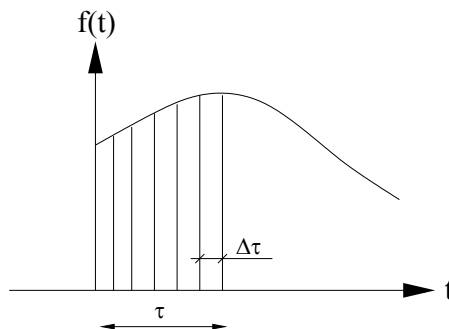


Abbildung B.1: Erregungsfunktion als Impulsfolge

der Impulsgröße $f(\tau)\Delta\tau$ führt zu der Antwort des dynamischen Systems

$$\Delta x = h(t - \tau)f(\tau)\Delta\tau \quad . \quad (\text{B.1})$$

Die Geschwindigkeit wird berechnet zu $\dot{x} = \ddot{x}(\tau)\Delta\tau$. Sie wird gewichtet durch Einführung einer Funktion, die aus der Impulsantwort des Systems auf eine Dirac-Stoß Erregung bestimmt wird (Abb. B.2).

$$\Delta \dot{x}_r = h(t - \tau)a\tau\Delta\tau \quad (\text{B.2})$$

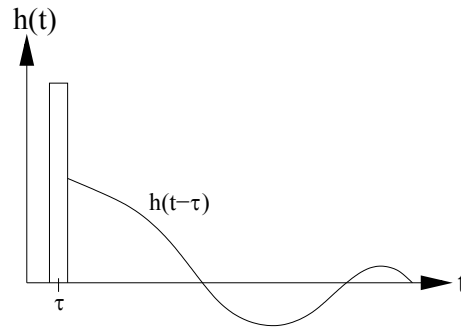


Abbildung B.2: Impulsantwort des dynamischen Systems

Für die Dauer des gesamten Impulses gilt im zeitdiskreten Fall

$$\dot{x}_r = \sum h(t - \tau) a \tau \Delta \tau \quad , \quad (\text{B.3})$$

oder im zeitkontinuierlichen Fall

$$\dot{x}_r = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) a \tau \Delta \tau \quad . \quad (\text{B.4})$$

Eine Lösung von (B.4) stellt (B.5) dar.

$$h(t - \tau) = \cos \omega(t - \tau) \quad (\text{B.5})$$

Mit $t \rightarrow \infty$ wird (B.4)

$$\dot{x}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x} \tau \cos \omega(t - \tau) d\tau \quad . \quad (\text{B.6})$$

Dies entspricht aber der Fouriertransformierten des Erregerimpulses $\mathcal{F}_a(j\omega)$ und damit gilt

$$\dot{x}_{r-max} = |\mathcal{F}_a(j\omega)| \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\pi f \dot{x}_r \\ &= 2\pi f \dot{x}_r |\mathcal{F}_a(j\omega)| \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\ddot{x}_{r-max} = 2\pi f_e |\mathcal{F}_a(j\omega)|$$

Die Antwort des dynamischen Systems ist also von seiner Eigenfrequenz und der Fouriertransformierten des Erregerimpulses abhängig. Für einen Halbsinusstoß im Anregungszeitbereich $0 \leq t \leq \tau$ gilt

$$f(t) = a_0 m \sin \frac{\pi}{\tau} t \quad (\text{B.9})$$

mit a_0 als der Beschleunigung der Fallmasse. Die Fourier-Transformierte von (B.9) (Natke (1992)) ist definiert durch

$$\mathcal{F}(j\omega) = a_0 m \frac{2\pi\tau}{\pi^2 - (\tau\omega)^2} \cos \frac{\omega\tau}{2} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \quad . \quad (\text{B.10})$$

Mit der Definition von

$$A_0 = a_0 m \frac{2\pi\tau}{\pi^2 - \tau^2 \omega_0^2} \quad (\text{B.11})$$

und unter Berücksichtigung der Eulerschen Formel $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$ wird (B.10) umgeformt zu

$$\mathcal{F}(j\omega) = A_0 \cos^2 \frac{\omega\tau}{2} - j A_0 \cos \frac{\omega\tau}{2} \sin \frac{\omega\tau}{2} \quad . \quad (\text{B.12})$$

Der Betrag von (B.12) (bei Einführung des Additionstheorems $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$) lautet

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(j\omega)| &= [A_0^2 (\cos^2 \frac{\omega\tau}{2})^2 + (-j A_0 \cos \frac{\omega\tau}{2} \sin \frac{\omega\tau}{2})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [A_0^2 (\cos^2 \frac{\omega\tau}{2})^2 + A_0^2 \cos^2 \frac{\omega\tau}{2} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}]^{\frac{1}{2}} \\ &= [A_0^2 (\cos^2 \frac{\omega\tau}{2})^2 + A_0^2 \cos^2 \frac{\omega\tau}{2} (1 - \cos^2 \frac{\omega\tau}{2})]^{\frac{1}{2}} \\ &= A_0 (\cos^4 \frac{\omega\tau}{2} + \cos^2 \frac{\omega\tau}{2} - \frac{\omega\tau}{2})^{\frac{1}{2}} \\ &= A_0 \cos \frac{\omega\tau}{2} \\ &= a_0 m \frac{2\pi\tau}{\pi^2 - \tau^2 \omega_0^2} \cos \frac{\omega\tau}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Damit gilt

$$\ddot{x}_{r-max} m = \omega_e |\mathcal{F}(j\omega)| = \omega_e a_0 m \frac{2\pi\tau}{\pi^2 - \tau^2 \omega_0^2} \cos \frac{\omega\tau}{2} \quad (\text{B.14})$$

und führt damit auf die Erregung normierte Antwort des dynamischen Systems

$$H_{r_0} = \left| \frac{\ddot{x}_r}{a_0} \right| = \left| 2\pi f_0 \frac{2\pi\tau}{\pi^2 - \tau^2 \omega_0^2} \right| \cos \pi f_0 \tau \quad . \quad (\text{B.15})$$

B.2 Berechnung der Eigenwert- und Eigenvektorableitung

Die Ableitung der Eigenwerte nach dem Parametersatz \mathbf{a} basiert auf Fox und Kapoor (1968) und die der Eigenvektoren auf Nelson (1976). Die Ausführungen in diesem Abschnitt gehen auf Friswell und Mottershead (1995) zurück.

(7.2) wird nach dem Parameter a differenziert

$$(\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}) \frac{\partial \phi_j}{\partial a} = \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial a} \mathbf{M} \right) \phi_j \quad . \quad (\text{B.16})$$

Durch Linksmultiplikation mit dem massenormierten Eigenvektor ϕ_j^T und unter der Berücksichtigung, dass die Matrizen \mathbf{M}, \mathbf{K} symmetrisch sind, liefert

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial a} = \phi_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a} \right) \phi_j \quad (\text{B.17})$$

die Beziehung für die Sensitivität des Eigenwertes entsprechend des Parameters a .
Gleichung (B.18)

$$(\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}) \frac{\partial \phi_j}{\partial a} = \mathbf{g}_j \quad (\text{B.18})$$

wird durch Kombination von (B.16) und (B.17) erhalten mit der Beziehung für \mathbf{g}_j

$$\mathbf{g}_j = - \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a} - \phi_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a} \right) \phi_j \mathbf{M} \right] \phi_j \quad . \quad (\text{B.19})$$

Die j -te Eigenvektorableitung wird in zwei Schritten durchgeführt:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial a} = \mathbf{h}_j + c_j \phi_j \quad (\text{B.20})$$

Die Gleichung (B.20) in (B.18) eingesetzt, liefert den Vektor \mathbf{g}_j

$$\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j = 1 \quad . \quad (\text{B.21})$$

Wenn (B.21) nach dem Parameter a differenziert wird und die resultierende Gleichung mit (B.20) kombiniert und der Ausdruck $\frac{\partial \phi_j}{\partial a}$ eliminiert wird, kann damit der Faktor c_j berechnet werden

$$c_j = -\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{h}_j - 0.5 \phi_j^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a} \phi_j \quad . \quad (\text{B.22})$$

Die Bestimmung von \mathbf{h}_j in (B.18) für den j -ten Eigenwert ist problematisch, da die Matrix $\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}$ um 1 Rangdefizienz besitzt. *Nelson* schlägt vor, den k -ten Term in \mathbf{h}_j null zu setzen.

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M})_{11} & 0 & (\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M})_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ (\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M})_{31} & 0 & (\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M})_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ h_k \\ \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ 0 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Das Pivot Element k wird am Maximum des j -ten Eigenvektors gewählt und $(h_j)_k = 0$ gesetzt. Die Lösung für $\frac{\partial \phi_j}{\partial a}$ wird dann aus (B.20) bestimmt.

Anhang C

C.1 Eine Sensitivitätsbetrachtung des PEGV

An ein optimales Kriterium zur Versuchsauslegung besteht die Forderung der allgemeinen Anwendbarkeit auf ein beliebiges System. In diesem Kriterium müssen Informationen über die Versuchsauslegung ebenso Eingang finden wie die Parametrisierung der Struktur. Bei der stets durch die Messpraxis eingeführten Randbedingung $m \ll n$ und dadurch großen Anzahl möglicher Messkonfigurationen, sollte jene gefunden werden, die eine maximale Informationsgewinnung im Sinne eines erfolgreichen Identifikationsprozeß ermöglicht. Eine Sensitivitätsbetrachtung des Residuenvektors kann zu einem solchen führen, sie eignet sich jedoch, wie gezeigt wird, nicht für das PEGV. Die Ableitung des Residuenvektors des PEGV (7.16) führt auf

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_k} = \frac{\partial \mathbf{P}(a)}{\partial a_k} (\mathbf{f}^m - \mathbf{S}_\omega(a) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}^m) - \mathbf{P}(a) \left(\frac{\partial \mathbf{S}_\omega(a)}{\partial a_k} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}^m \right) \quad . \quad (\text{C.1})$$

Für die Ableitung des Projektors $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ gelten folgende Überlegungen: die pseudoinverse Matrix $(\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}})^\dagger$ (7.9, S. 81) aufgelöst, bewirkt eine ausführlichere Beschreibung des Projektors.

$$\mathbf{P}(a) = I_n - (\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}} [(\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}^T)^H (\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}^T)]^{-1} (\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}^T)^H \quad (\text{C.2})$$

Durch Differentiation¹ von (zur besseren Übersicht wird $\mathbf{Q} = \mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}^T$ geschrieben)

$$\frac{\partial (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1}}{\partial a_k} = -(\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \left(\frac{\partial (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})}{\partial a_k} \right) (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \quad (\text{C.3})$$

¹Die Differentiation einer inversen Matrix \mathbf{R}^{-1} gelingt wie folgt: Mit der ersten Ableitung der Gleichung $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I}$ wird $\frac{\partial}{\partial a_k} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}) = 0$ geschrieben, damit gilt auch $(\frac{\partial}{\partial a_k} \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{R} + \mathbf{R}^{-1} (\frac{\partial}{\partial a_k} \mathbf{R}) = 0$ bzw. $(\frac{\partial}{\partial a_k} \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{R} = -\mathbf{R}^{-1} (\frac{\partial}{\partial a_k} \mathbf{R})$. Diese Gleichung führt zu $\frac{\partial}{\partial a_k} \mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R}^{-1} (\frac{\partial}{\partial a_k} \mathbf{R}) \mathbf{R}^{-1}$.

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}(a)}{\partial a_k} &= -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial a_k} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \\
&+ \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial a_k} \right)^H \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \\
&+ \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial a_k} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \\
&- \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial a_k} \right)^H \\
&= (\mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H - \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial a_k} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \\
&+ \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial a_k} \right)^H (\mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H - \mathbf{I}) \quad .
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Durch Einführung der Matrizen $\mathbf{A} = (\mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H - \mathbf{I})$ und $\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial a_k} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H$ vereinfacht sich (C.4) zu

$$\frac{\partial \mathbf{P}(a)}{\partial a_k} = \mathbf{A} \mathbf{R} + \mathbf{R}^H \mathbf{A} \quad . \tag{C.5}$$

Unter der Anwendung von (C.5) läßt sich jetzt der Residuenvektor \mathbf{v} ableiten

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial a_k} = \frac{\partial \mathbf{P}(a)}{\partial a_k} (\mathbf{f}^m - \mathbf{S}_\omega(a) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}^m) - \mathbf{P}(a) \left(\frac{\partial \mathbf{S}_\omega(a)}{\partial a_k} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}^m \right) \quad . \tag{C.6}$$

In die Gleichung (C.5) findet jedoch nur die komplementäre Messmatrix $\bar{\mathbf{C}}$ durch $\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}$ Eingang und die Bedeutung der Ableitung des Projektors ergibt sich durch mehrfache Matrix-Multiplikation mit $\mathbf{S}_\omega(a) \bar{\mathbf{C}}$. Es existiert keine Möglichkeit, die Einflüsse der Messpunkte und der Erregerkonfiguration zu separieren (durch das Fehlen der Matrix $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$). Anders formuliert: Je weniger Messpunkte erfaßt werden, um so voller ist die Matrix $\bar{\mathbf{C}}$ besetzt und die Sensitivität des Residuenvektors steigt!

Anhang D

D.1 Lokalisierungsverfahren

In diesem Abschnitt werden weitere Lokalisierungs- bzw. Parameteridentifikationsverfahren mit dem Ziel einer Ergänzung bzw. Einordnung der in den Abschnitten 4 und 6, 7 verwendeten Verfahren erläutert.

Schadensidentifikation durch Bestimmung der dynamischen Steifigkeit

Die Methode der dynamischen Steifigkeit (Maeck und Roeck (1999), Maeck u. a. (2000)) geht auf das Prinzip der Biegelinie oder Verdrehung (unter Torsionseinwirkung) eines Systems zurück. In jedem Abschnitt des Systems x entspricht die dynamische Biegesteifigkeit dem Quotienten aus dem Biegemoment M_b (Torsionsmoment M_t) und der zugehörigen Krümmung, die auf den Ableitungen des Eigenvektors ϕ basiert

$$EI = \frac{M_b}{d^2\phi/dx^2} \quad . \quad (\text{D.1})$$

Für die dynamische Torsionssteifigkeit gilt

$$GJ = \frac{M_t}{d\phi/dx} \quad . \quad (\text{D.2})$$

Das Eigenwertproblem des ungedämpften Systems

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2\mathbf{M}\phi \quad (\text{D.3})$$

wird als quasi-statisches System verstanden: Für jeden Eigenvektor ϕ (analog den Verschiebungen im statischen Fall) stehen die inneren Kräfte mit den Trägheitskräften im Gleichgewicht. Dabei wird die Verteilung der Massenmatrix als bekannt vorausgesetzt. Weist das Messpunktenetz eine große Dichte auf, kann die Massenmatrix als Diagonalmatrix angenommen werden. Auf der Basis der ermittelten Eigenformen werden für jeden Abschnitt, der durch das Messpunktenetz bestimmt wird,

die modalen Querkräfte und die modalen Biegemomente bestimmt. Die Beziehung (4.5)

$$\phi'' = (\nu_{i+1} - 2\nu_i + \nu_{i-1})/L_e^2$$

liefert die Krümmung der Eigenformen und durch Umstellen von (4.4)

$$\phi'' = \frac{M_b}{EI}$$

kann die dynamische Steifigkeit bestimmt werden. Deren Differenzen zwischen zwei unterschiedlichen Systemzuständen bilden die Indikatoren für eine eingetretene Schädigung.

Eine direkte Bestimmung der Krümmung der gemessenen Eigenformen z.B. durch eine Zentrale-Differenzen-Approximation kann zu oszillierenden und falschen Werten führen, wenn die Eigenformen durch Messungen fehlerbehaftet sind. Die *Mindlin*-Methode, die eine Strafterm-Gewichtung der Residuen vorsieht, gleicht die gemessenen Eigenformen an die durch das FE-Modell berechneten an. Dazu wird der Balken in m (gemessene Freiheitsgrade) finite Elemente unterteilt. Jeder Knoten besitzt 3 Freiheitsgrade und jeder dieser wird durch eine lineare Ansatzfunktion N approximiert: die modale Amplitude $\nu_a = \nu_{a1}N_1 + \nu_{a2}N_2$, die Verdrehung $\psi = \psi_1N_1 + \psi_2N_2$ und die Krümmung $\kappa = \kappa_1N_1 + \kappa_2N_2$. Die Gleichungen gelten für benachbarte Knoten. In das zu minimierende Zielfunktional, das die Differenz zwischen den gemessenen ϕ_m und durch Fe-Rechnung genäherten Eigenformen ϕ_c beinhaltet, werden zwei Strafterme für die Verdrehungen und Krümmungen addiert

$$J = \int \frac{(\nu_a - \phi_m)^2}{2} dx + \frac{\alpha L_e^2}{2} \int \left(\psi - \frac{d\nu_a}{dx} \right)^2 dx + \frac{\beta L_e^4}{2} \int \left(\kappa - \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx \rightarrow Min \quad .$$

Nachteilig für den Nutzer ist, das die Straffaktoren α und β intuitiv gewählt werden müssen.

Schadenslokalisierung mit der minimalen Rang Update Theorie

Zimmermann und Kaouk (1994) schlagen einen zweistufigen Algorithmus zur Ermittlung der Veränderung der \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} Matrizen vor. In einem ersten Schritt wird der Ort der Veränderung lokalisiert, in einem zweiten die Veränderung quantifiziert. Die charakteristische Gleichung des veränderten dynamischen Systems lautet

$$[\lambda_{di}^2(\mathbf{M} - \Delta\mathbf{M}_d) + \lambda_{di}(\mathbf{D} - \Delta\mathbf{D}_d) + (\mathbf{K} - \Delta\mathbf{K}_d)]\phi_{di} = 0 \quad (\text{D.4})$$

mit $\mathbf{M}_d, \mathbf{D}_d, \mathbf{K}_d$ als den Matrizen, die die Differenz zwischen dem Nullzustand des Systems und des veränderten Zustands repräsentieren. ϕ_{di} bezeichnet den i -ten veränderten Eigenvektor. Mit der Koeffizientenmatrix des geschädigten Systems

$$\mathbf{Z}_{di} = (\lambda_{di}^2 \mathbf{M}_d + \lambda_{di} \mathbf{C}_d + \mathbf{K}_d) \quad (\text{D.5})$$

wird der Schadensvektor $\mathbf{d}_i = \mathbf{Z}_{di} \phi_{di}$ definiert. Dieser kann alternativ beschrieben werden als

$$\mathbf{d}_i^j = \mathbf{z}_{di}^j \mathbf{v}_{di} = \|\mathbf{z}_{di}^j\| \|\mathbf{v}_{di}\| \cos(\Theta)_i^j \quad . \quad (\text{D.6})$$

Es bezeichnet der Index j die j -te Komponente des Schadensvektors bzw. die j -te Zeile der Koeffizientenmatrix. Stehen die j -te Zeile der Koeffizientenmatrix und der i -te Eigenvektor nicht orthogonal aufeinander, so ist der Winkel $\Theta \neq 90$ und die Abweichung von Θ indiziert die Schädigung am j -ten Freiheitsgrad. Die Schädigung kann auch als die Abweichung des Winkels α von 90° ausgedrückt werden

$$\alpha_i^j = \Theta_i^j \left(\frac{180}{\pi} \right) - 90^\circ \quad . \quad (\text{D.7})$$

mit Θ_i^j aus (D.6). Für die Annahme eines ungedämpften geschädigten Systems und für den Fall, das die Masseverteilung unverändert bleibt, liefert das Eigenwertproblem die Matrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \Phi_d \Omega_d + \mathbf{K} \Phi_d \quad (\text{D.8})$$

und damit kann die Abweichung der Steifigkeitsmatrix bestimmt werden

$$\Delta \mathbf{K}_d = \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \Phi_d)^{-1} \mathbf{B}^T \quad . \quad (\text{D.9})$$

Unter der Bedingung, das eine Veränderung des Systems zu einer Veränderung des Rangs der Größe p der Elementsteifigkeitsmatrix des FE-Modells führt, und p Eigenwerte und Eigenvektoren exakt gemessen werden, kann das Ausmaß der Veränderung bestimmt werden. Die p Eigenvektoren müssen jedoch an allen n Freiheitsgraden des Modells gemessen werden.

Die modale Dehnungsenergie

Petersen u. a. (2001) verwenden die Differenzen der Modalen Dehnungsenergie zwischen einem ungeschädigten und geschädigten System als Schädigungsindikatoren

$$W_j = \frac{1}{2} \int_0^L E(x) I d^2 \phi / dx^2 \quad (\text{D.10})$$

mit $d^2\phi/dx^2$ als der Krümmung des i -Eigenvektors (4.5) und $E(x)I$ als einer über die Länge des Balkens x veränderlichen Biegesteifigkeit. Eine FE-Modellierung generiert das System in n_j Elemente und die modale Dehnungsenergie des j -ten Elementes wird bestimmt durch

$$W_{ij} = \frac{(EI)_j}{2} \int_j E(x)I\phi_i''(x)^2 dx \quad (\text{D.11})$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$F_{ij} = \frac{W_{ij}}{W_i} \quad (\text{D.12})$$

wird der Schädigungsindikator der i -ten Eigenform und des j -ten Elementes definiert

$$\beta_{ij} = \frac{1 + F_{ij}^d}{1 + F_{ij}} \quad (\text{D.13})$$

Als eine Bedingung des Verfahrens gilt die gleiche Massenbelegung für unterschiedliche Systemzustände.

Weiter existieren Algorithmen, die auf einer Variation des Erregerortes basieren, wie z.B. die dynamischen Einflusszahlen (Lenzen (1994)). Alternativ sind in (Silva u. a. (1997)) Algorithmen erläutert, die nicht auf einer Bestimmung der Eigenformen beruhen.

D.2 Parameteridentifikationsverfahren

Minimierung der Spur einer Matrix

Baruch (1998) führt einen iterativen Prozess zur Minimierung der Spur E einer allgemeinen Matrix $\mathbf{H}^{n \times n}$ mit den Elementen h_{ij} ein

$$E = \frac{1}{2}h_{ij}^2 = \frac{1}{2}\text{Spur}(\mathbf{H}^T\mathbf{H}) \quad (\text{D.14})$$

In (D.14) wird die Einsteinsche Summenkonvention für sich wiederholende Indices angewendet. Die Taylor-Reihe wird nach den Änderungen des Parametersatzes $\Delta\mathbf{a}$ entwickelt und nach dem linearen Glied abgebrochen.

$$\mathbf{H}(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) \approx \mathbf{H}(\mathbf{a}) + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{a}_s}\Delta\mathbf{a}_s = \mathbf{H}(\mathbf{a}) + \mathbf{H}_s(\Delta\mathbf{a}_s) \quad (\text{D.15})$$

mit \mathbf{H}_s als der Sensitivitätsmatrix von \mathbf{H} nach dem Parametersatz \mathbf{a} . (D.15) in (D.14) eingesetzt, liefert

$$E = \frac{1}{2}\text{Spur}[(\mathbf{H}(\mathbf{a}) + \mathbf{H}_x\Delta\mathbf{a}_x)^T(\mathbf{H}(\mathbf{a}) + \mathbf{H}_\beta\Delta\mathbf{a}_\beta)] \quad (\text{D.16})$$

Das Minimum wird durch die Ableitung der Spur nach der Änderung des Parametersatzes \mathbf{a} bestimmt.

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta \mathbf{a}_s} = \text{Spur}[\mathbf{H}_s^T (\mathbf{H} + \mathbf{H}_\beta(\Delta \mathbf{a}_\beta))] = 0 \quad (\text{D.17})$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\mathbf{Y} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (\text{D.18})$$

in der die Elemente der Matrix $\mathbf{Y}^{n_p \times n_p}$ definiert sind durch

$$y_{st} = \text{Spur} \mathbf{H}_s^T \mathbf{H}_\beta \quad (\text{D.19})$$

und

$$\mathbf{r} = -\text{Spur} \mathbf{H}_s^T \mathbf{H} \quad (\text{D.20})$$

Der neue Parametersatz $\delta \mathbf{a}_{j+1}$ wird nach (6.14, Seite 71) bestimmt.

Die Matrix \mathbf{H} kann u.a. auf verschiedenen Wegen gebildet werden: Eine Möglichkeit bietet die Differenz zwischen einer korrigierten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\mathbf{k}_o}$ und Initialmatrix \mathbf{K} zu $\mathbf{H} = \mathbf{K}_{\mathbf{k}_o} - \mathbf{K}$ durch die Frequenzgleichung

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} \Phi - \mathbf{M} \Phi \Lambda \quad . \quad (\text{D.21})$$

Andere Varianten sowie ausführlichere Herleitungen und eine Einteilung in parametrische und nichtparametrische Methoden finden sich in Baruch (1995). *Baruch* gibt weiter einen Weg an, um unvollständige (nicht gemessene) Koordinaten der Eigenformen für $m \ll n$ berücksichtigen zu können. Die Eigenwertgleichung wird in gemessene bzw. ungemessene Koordinaten der i -ten Eigenform unterteilt.

$$(\mathbf{K}_m - \omega_i^2 \mathbf{M}_m) \phi_i^m = 0; (\mathbf{K}_{n-m} - \omega_i^2 \mathbf{M}_{n-m}) \phi_i^{n-m} = 0; \quad (\text{D.22})$$

Nach Definition der Matrizen

$$\mathbf{G}_m^n = \mathbf{K}_m - \omega_i^2 \mathbf{M}_m; \mathbf{G}_{n-m}^n = \mathbf{K}_{n-m} - \omega_i^2 \mathbf{M}_{n-m} \quad (\text{D.23})$$

und der folgenden Bedingung

$$\mathbf{G}_m \phi_i^m + \mathbf{G}_{n-m} \phi_i^{n-m} = 0 \quad (\text{D.24})$$

führen diese zur Berechnung der nicht gemessenen Koordinaten der i -ten Eigenform

$$\phi_i^{n-m} = -\mathbf{G}_{n-m}^\dagger \mathbf{G}_m \phi_i^m \quad . \quad (\text{D.25})$$

Die Methode der Selektiven Sensitivität im Frequenzbereich

Diese Vorgehensweise (Ben-Haim und Prells (1993), Prells und Ben-Haim (1993)) gliedert sich in die Verfahren der Regularisierungsmethoden ein. Sie basiert auf der Reduktion der zu lösenden Gleichungen. Grundgedanke des Verfahrens ist die Berechnung einer Erregung, deren Antworten nur für wenige Parameterkomponenten sensitiv sind (selektiv sensitiv). Die Bewegungsgleichung (3.2, Seite 18) wird durch Einführung einer rechteckigen Matrix $\mathbf{P}^{n \times r}$ adaptiert.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{f}(t) \quad (\text{D.26})$$

Wird Gl. (D.26) durch eine Fouriertransformation in den Frequenzbereich überführt, entspricht die Beziehung

$$\xi_\omega = \mathbf{H}_\omega \mathbf{P} \varphi_\omega \quad (\text{D.27})$$

der Fouriertransformierten des Verschiebungsvektors, in der die Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}_\omega = \mathbf{S}_\omega^{-1}$, die der inversen dynamischen Steifigkeitsmatrix aus (7.3, S. 80) entspricht und φ_ω als der Fouriertransformierten des Erregervektors, eingehen. Die Fouriertransformierte des Ausgangsvektors \mathbf{x} wird bestimmt durch

$$\psi_\omega = \mathbf{C} \mathbf{H}_\omega \mathbf{P} \varphi_\omega \quad (\text{D.28})$$

mit \mathbf{C} als der bekannten Messmatrix. Die Selektive Sensitivität bedarf zu ihrer Definition das Maß der im Frequenzbereich berechneten Sensitivitäten. Mit

$$\mathbf{A}_\omega(a_k) := \frac{\partial \mathbf{H}_\omega}{\partial a_k} \quad (\text{D.29})$$

wird die Änderung des Ausgangsvektors im Frequenzbereich

$$\frac{\partial \psi_\omega}{\partial a_k} = -\mathbf{C} \mathbf{H}_\omega \mathbf{A}_\omega(a) \mathbf{H}_\omega \mathbf{P} \varphi_\omega \quad (\text{D.30})$$

und mit

$$\mathbf{S}_\varphi(a) := \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} \right)^H \left(\frac{\partial \psi}{\partial a_k} \right) = \varphi_\omega^H \mathbf{D}_\omega(a) \varphi_\omega \quad (\text{D.31})$$

die Sensitivität des Parameters a_k bestimmt. Die Sensitivitätsmatrix ist definiert zu

$$\mathbf{D}_\omega(a) = \mathbf{P}^T [\mathbf{H} \mathbf{A}_\omega(a) \mathbf{H}]^H \mathbf{C}^T \mathbf{C} [\mathbf{H} \mathbf{A}_\omega(a) \mathbf{H}] \mathbf{P} \quad . \quad (\text{D.32})$$

Ein System gilt als selektiv sensitiv zu einer Menge ι (Untermenge des Parametersatzes) bei einer Frequenz ω , wenn eine Fouriertransformierte des Eingangsvektors φ_ω gefunden wird, mit der gilt

$$\mathbf{S}_{\varphi_\omega}(a) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \mathbf{a} \in \bar{\iota} \\ \neq 0 & \text{wenn } \mathbf{a} \in \iota \end{cases} \quad (\text{D.33})$$

Dieser Erregervektor impliziert eine Sensitivität ungleich Null für alle Modifikationen der Parameter der Menge ι und für alle anderen Parameter eine Sensitivität $= 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Fouriertransformierte des Ausgangsvektors die Beziehung sichert

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(a)\psi &= 0 \quad \text{wenn } \mathbf{a} \in \bar{\iota} \\ &\neq 0 \quad \text{wenn } \mathbf{a} \in \iota \quad . \end{aligned} \tag{D.34}$$

Die praktische Vorgehensweise (Prells und Ben-Haim (1993)) ist wie folgt anzugehen. Eine Struktur wird in N kleine Substrukturen unterteilt. Dabei entstehen Klassen von Indexmengen ι mit zwei und mehr unbekanntem Parametern a_k . Eine Klasse ist dadurch gekennzeichnet, dass deren Glieder die gleiche Anzahl von Parametern besitzen. Zuerst werden die Klassen von Indexmengen mit zwei unbekanntem Parametern der Identifikation zugeführt. Für jede Erregung entsprechend (D.34) wird die Antwort der Substruktur gemessen und mit der berechneten ein Zielfunktional J bestimmt, deren Minimierung die gesuchten Parameter a_k der Substruktur liefern. Die jetzt bekannten Parameter gehen als a-priori Wissen in die Identifikation der nächsten Substruktur ein, deren unbekanntem Parameter bestimmt werden, usw. Ein Problem dieses Verfahrens stellt die aufwendige und komplizierte Realisierung der berechneten Erregung dar.

Das lineare Ausgangsgrößenverfahren mit rechnerisch adaptiver Erregung im Frequenzbereich (LAGV)

Das LAGV Oeljeklaus (1995) ist für beliebige Erregungen und den zugeordneten unvollständigen Antwortmessungen anwendbar. Die Idee der Selektiven Sensitivität aufgreifend, liefert es für den Spezialfall einer adaptiven Erregung eine fehlerfreie Schätzung des linearen LAGV-Zielfunctionals. Grundgedanke des Verfahrens ist die spaltenweise Anordnung der Eingangs- \mathbf{f}^m und Ausgangsvektoren \mathbf{x}^m in den Matrizen \mathbf{F}^m bzw. \mathbf{X}^m für alle Erregungsfrequenzen $(\omega_k)_{1 \leq k \leq l}$. Diese bilden lineare Operatoren, die den korrespondierenden Systemoperatoren in einem bestimmten Unterraum entsprechen. Mit diesen Operatoren wird die Frequenzgangmatrix approximiert

$$\mathbf{H}_\omega \approx \hat{\mathbf{H}}_\omega := \mathbf{C}\mathbf{X}^m\mathbf{F}^{m\dagger} \quad . \tag{D.35}$$

Die ermittelten approximierten Systemantworten werden berechnet für einen Erregervektor \mathbf{f}

$$\hat{\mathbf{y}} := \hat{\mathbf{H}}_\omega \mathbf{f} = \mathbf{C}\mathbf{X}^m\mathbf{F}^{m\dagger} \approx \mathbf{C}\mathbf{H}_\omega \mathbf{f} = \mathbf{C}\mathbf{y} \quad . \tag{D.36}$$

Der Erregervektor $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ wird so berechnet, dass er folgender Beziehung entspricht

$$\mathbf{f}^y(\mathbf{a}) = [\mathbf{S}_{\omega, \mathbf{y}}(\mathbf{a})]\mathbf{y} \quad (\text{D.37})$$

mit \mathbf{y} als einem gewählten Ausgangsvektor. Die Ausgangsvektoren $\mathbf{y}_{1 \leq k \leq n}$ werden in der Matrix \mathbf{Y} zusammengefasst. Das zu minimierende Zielfunktional, das den Parametervektor \mathbf{a} bestimmt, lautet

$$J^y(\mathbf{a}) = \mathbf{C}\mathbf{Y} - \mathbf{C}\mathbf{X}^m\mathbf{F}^{m\dagger}\mathbf{S}_\omega(\mathbf{a})\mathbf{Y} \quad . \quad (\text{D.38})$$

Im Gegensatz zum Verfahren der Selektiven Sensitivität, das eine bestimmte Belegung des Erregervektors zwingend fordert, ist es beim LAGV durch die Einführung des Operators $\mathbf{F}^{m\dagger}$ möglich, eine bestimmte Erregerkonfiguration durch Linearkombinationen realisierbarer Erregervektoren zu erzeugen. Die Qualität der erhaltenen Lösungen ist abhängig von der Schätzung der Operatoren und diese von dem Grad der Vollständigkeit der Messungen.

Das Intervall-Eingangsgrößenverfahren

Die Grundidee des Verfahrens besteht im Einschluss des unbekanntem wahren Parametersatzes \mathbf{a}^0 in einer Startbox mit reellen und komplexen Intervallen. Basierend auf den Prinzipien der Intervallrechnung wird eine Gauss-Seidel Iteration durchgeführt, in deren Verlauf der Definitionsbereich der Intervalle sukzessive eingeschränkt und zu einer Minimierung des Zielfunktional geführt wird (Oeljeklaus und Natke (1996)). Dabei wird, gemessene Eingangsgrößen und unvollständige Ausgangsgrößen vorausgesetzt, ein überbestimmtes Gleichungssystem mit linearen Intervallgleichungen gelöst. Die Parametertopologie ist analog (6.1, 6.2, S. 67) und die dynamische Steifigkeitsmatrix stellt eine komplexe Intervallmatrix in Abhängigkeit der Intervallparameter dar

$$\mathbf{S}_\omega^I(\mathbf{a}^I) = -\omega^2 \sum_{\sigma \in \mathbf{M}} \mathbf{a}^I \mathbf{M}_\sigma + j\omega \sum_{\rho \in \mathbf{D}} \mathbf{a}^I \mathbf{D}_\rho + \sum_{i \in \mathbf{K}} \mathbf{a}^I \mathbf{K}_i \quad (\text{D.39})$$

$$[\mathbf{S}_{\omega, r}^I(\mathbf{a}^I)]\mathbf{x}_r^I = \mathbf{f}_r^I \quad r = 1, \dots, N \quad (\text{D.40})$$

mit $\mathbf{x}^I = \mathbf{x}_1^I, \dots, \mathbf{x}_N^I$ als komplexen Intervallvektoren, in deren Intervallbereich die fehlerbehafteten Ausgangsgrößen und die Antworten des wahren Modells enthalten sind. In dem Eingangsresiduenvektor

$$\mathbf{v}_{in}(\mathbf{a}^I) = (\varepsilon_1(\mathbf{a}^I), \dots, \varepsilon_N(\mathbf{a}^I)) \quad (\text{D.41})$$

sind die Eingangsresiduen enthalten

$$\varepsilon_r(\mathbf{a}^I) = (\varepsilon_1(-\omega^2 \mathbf{M}_{\mathbf{a}^I} + j\omega \mathbf{D}_{\mathbf{a}^I} + \mathbf{K}_{\mathbf{a}^I}) \mathbf{x}_r^I - \mathbf{f}_r^I \quad r = 1, \dots, N \quad . \quad (\text{D.42})$$

Deren partiellen Ableitungen werden beschrieben zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial a_{M\sigma}} &= -\omega^2 \mathbf{M}_\sigma \mathbf{x}_r^I \\ \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial a_{C\sigma}} &= j\omega \mathbf{D}_\sigma \mathbf{x}_r^I \\ \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial a_{K\sigma}} &= \mathbf{K}_\sigma \mathbf{x}_r^I \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

Die dynamische Steifigkeitsmatrix wird in einen Parametersatz \mathbf{a}^I und in eine Funktionalmatrix

$$\mathbf{Q}_v^I = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_1^I, \dots, -\omega_1^2 \mathbf{M}_s \mathbf{x}_1^I \\ \vdots \\ -\omega_N^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_N^I, \dots, -\omega_N^2 \mathbf{M}_s \mathbf{x}_N^I \\ j\omega_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{x}_1^I, \dots, j\omega_1 \mathbf{D}_s \mathbf{x}_1^I \\ \vdots \\ j\omega_N \mathbf{D}_1 \mathbf{x}_N^I, \dots, j\omega_N \mathbf{D}_s \mathbf{x}_N^I \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1^I, \dots, \mathbf{K}_s \mathbf{x}_1^I \\ \vdots \\ \mathbf{K}_K \mathbf{x}_N^I, \dots, \mathbf{K}_s \mathbf{x}_N^I \end{bmatrix} \quad (\text{D.44})$$

zerlegt, die unabhängig von dem Parametersatz ist (Natke (1992)).

Für eine Erregung \mathbf{f}_r^I, ω_r gilt

$$\mathbf{f}_r^I = (\mathbf{a}^I \mathbf{Q}_v^I) = [\mathbf{S}_{\omega,r}^I(\mathbf{a}^I)] \mathbf{x}_r^I = \sum_{\mu} a_{\mu}^I z_{\mu}^I \quad (\text{D.45})$$

und mit $\mathbf{z}_{\mu}^I = [\mathbf{S}_{\omega,r}^I(\mathbf{a}^I)]$ gilt

$$f_{r,i}^I = \sum_{\mu} a_{\mu}^I (\mathbf{z}_{\mu}^I)_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad . \quad (\text{D.46})$$

a^I entspricht einem reellen und \mathbf{z}^I einem komplexen Intervallvektor, beide besitzen die Dimension n_p . Damit gilt äquivalent (D.46) für den Real- bzw. Imaginärteil

$$\Re f_{r,i}^I = \sum_{\mu} a_{\mu}^I \Re z_{r,i}^I \quad (\text{D.47})$$

$$\Im f_{r,i}^I = \sum_{\mu} a_{\mu}^I \Im z_{r,i}^I \quad . \quad (\text{D.48})$$

Der Ablauf der Intervallberechnung wird in einem Schritt der Gauss-Seidel-Iteration für eine Verschiebungskomponente i , eine Erregung r und eine Parameterkomponente μ berechnet

$$a_{\nu, \Re}^I = \left(\Re f_{r,i}^I - \sum_{\mu \neq \nu} a_{\mu}^I \Re z_{r,i}^I \right) \frac{1}{\Re z_{r,i}^I} \quad (\text{D.49})$$

$$a_{\nu, \Im}^I = \left(\Im f_{r,i}^I - \sum_{\mu \neq \nu} a_{\mu}^I \Im z_{r,i}^I \right) \frac{1}{\Im z_{r,i}^I} \quad . \quad (\text{D.50})$$

Die resultierende Parameterbox schließt das globale Minimum des Zielfunktionals mit ein.

Das Verfahren bietet sich für Systeme mit einer moderaten Zahl von Freiheitsgraden an: Große Strukturen werden in Subsysteme mit $n \geq 100$ Freiheitsgraden zerlegt und parallel optimiert.

Das Regularisierte Ausgangsgrößenverfahren (RAGV)

In dem PEGV werden die fehlerbehafteten Ausgangsgrößen $\mathbf{C}\mathbf{x}^m$ durch den Term $\mathbf{V}_a \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{U}_a^H$ verstärkt (7.11, S. 81). Die Trennung dieser beiden Terme voneinander führte zu den Überlegungen des Regularisierten Ausgangsgrößenverfahrens (RAGV) (Oeljeklaus (1998)). Im RAGV erfolgt der Abgleich des Rechenmodells über eine Minimierung zwischen gemessenen (fehlerbehafteten) und berechneten Ausgangsgrößen. Das RAGV Oeljeklaus (1998) besitzt seine Basis in den Residuen des Ausgangsgrößenverfahrens (AGV)

$$\mathbf{v}_{\text{AGV}} = \mathbf{H}_{\omega}(a) \mathbf{f}^m - \mathbf{x}^m \quad . \quad (\text{D.51})$$

Durch Einführung der Messmatrix \mathbf{C} wird berücksichtigt, dass nur m Komponenten gemessen werden

$$\mathbf{v}_{\text{AGV}} = \mathbf{C} \mathbf{H}_{\omega}(a) \mathbf{f}^m - \mathbf{C} \mathbf{x}^m \quad . \quad (\text{D.52})$$

Das Verfahren des RAGV ist zweistufig. In einem ersten Schritt wird die große Anzahl lokaler Minima des AGV, die das Zielfunktional häufig aufweist, verringert. Die Eliminierung lokaler Optima und damit die Ausweitung des Einzugsbereiches des globalen Minima, dass das Zielfunktional am stärksten minimiert, geschieht durch eine Regularisierung mit Hilfe der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung (Louis (1989)). Es wird mit

$$\mathbf{C} \mathbf{H}_{\omega}(a) = \mathbf{U}_a \boldsymbol{\Sigma}_a \mathbf{V}_a^H \quad (\text{D.53})$$

die Singulärwertzerlegung von $\mathbf{CH}_\omega(a)$ mit $\boldsymbol{\Sigma}_a = \text{diag}(\sigma_1(a), \dots, \sigma_m(a))$ als den ihrer Größe nach geordneten Singulärwerten angewendet. Die Matrizen $\mathbf{U}_a, \mathbf{V}_a^H$ besitzen die Eigenschaft der Unitarität, so dass $\mathbf{U}_a \mathbf{U}_a^H = \mathbf{I}_m$ und $\mathbf{V}_a \mathbf{V}_a^H = \mathbf{I}_n$ gilt. Nach der Operation der Singulärwertzerlegung werden die Residuen des AGV formuliert. Wegen $\mathbf{C}\mathbf{x}^m = \mathbf{U}_a \mathbf{U}_a^H \mathbf{C}\mathbf{x}^m$ gilt unter Berücksichtigung von Gl. (D.52)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{AGV}} &= \sum_{i=1}^m (\sigma_i(a) \mathbf{U}_{a,i} \mathbf{V}_{a,i}^H \mathbf{f}^m) - \mathbf{U}_a \mathbf{U}_a^H \mathbf{C}\mathbf{x}^m \\ &= \sum_{i=1}^m (\mathbf{U}_{a,i} [\sigma_i(a) \mathbf{V}_{a,i}^H \mathbf{f}^m - \mathbf{U}_{a,i}^H \mathbf{D}\mathbf{x}^m]) \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

Werden nur $1 \neq r(m) \ll m$ Singulärwerte berücksichtigt,

$$\mathbf{v}_{\text{RAGV}}(a) := \sum_{i=1}^{r(m)} (\mathbf{U}_{a,i} [\sigma_i(a) \mathbf{V}_{a,i}^H \mathbf{f}^m - \mathbf{U}_{a,i}^H \mathbf{C}\mathbf{x}^m]) \quad (\text{D.55})$$

bewirkt dies die Glättung des Zielfunktionals und damit eine Verringerung des Einflusses von Messfehlern. Das nichtlineare Zielfunktional des RAGV ist definiert durch

$$J_{\text{RAGV}}(a) := \|\mathbf{v}_{\text{RAGV}}(a)\|_2^2 \quad . \quad (\text{D.56})$$

Dabei ist die Wahl von $r(m)$ abhängig von der Konditionszahl ρ der Matrix $\mathbf{CH}_\omega(a)$. Gute Ergebnisse werden z.B. erhalten mit

$$\frac{\sigma_{r(m)}(a)}{\sigma_1(a)} \approx c \cdot \text{cond}(\mathbf{DH}_\omega(a)) = c \cdot \frac{\sigma_m(a)}{\sigma_1(a)} \quad (\text{D.57})$$

für $c = 0.01$. Der erhaltene Schätzparametervektor $\hat{\mathbf{a}}$ reproduziert jedoch nicht die Messungen und das AGV-Zielfunktional der Residuen Gl. (D.54) wird nicht minimal. Die Stufe zwei des RAGV versucht, die Eigenschaft der Systemdynamik wieder zu erhalten, dabei wird $\hat{\mathbf{a}}$ als Startvektor des $J_{\text{RAGV}}(a)$ Zielfunktionals verwendet und eine lokale Optimierung mit $r(m) := m$ Singulärwerten durchgeführt.