

Politechnika Łódzka

ZESZYTY NAUKOWE Nr 1059

RADOS-AW J. MANIA

WYBOCZENIE DYNAMICZNE
CIENKOŚCIENNYCH SŁUPÓW
Z MATERIAŁÓW LEPKOPLASTYCZNYCH

ŁÓDŹ 2010

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

ZESZYTY NAUKOWE Nr 1059

ROZPRAWY NAUKOWE, Z. 387

RADOSŁAW J. MANIA

WYBOCZENIE DYNAMICZNE
CIENKOŚCIENNYCH SŁUPÓW
Z MATERIAŁÓW LEPKOPLASTYCZNYCH

ŁÓDŹ 2010

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
SCIENTIFIC BULLETIN OF THE TECHNICAL UNIVERSITY OF LODZ
BULLETIN SCIENTIFIQUE
DE L'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE DE LODZ
НАУЧНЫЕ ЗАПИСКИ
ЛОДЗИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
WISSENSCHAFTLICHE HEFTE
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT IN LODZ

Redaktor Działu: **prof. dr hab. inż. Piotr Wodziński**

Recenzenci: **prof. dr hab. inż. Zbigniew Kołakowski**
prof. dr hab. inż. Jerzy Zielnica

©Copyright by Politechnika Łódzka 2010

Adres Redakcji – Адрес Редакции – Editor's Office
Adresse de Redaction – Schriftleitungsadresse:

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel./fax 0-42-684-07-93
e-mail: a-row-1@adm.p.lodz.pl
www.wydawnictwa@p.lodz.pl

ISSN 0137-4834

Nakład 140 egz. Ark. druk. 9,0. Papier offset. 80 g, 70 x 100
Druk ukończono w styczniu 2010 r.
Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11

SPIS TREŚCI

Oznaczenia.....	5
Streszczenie.....	9
1. Wstęp.....	11
2. Przegląd literatury.....	16
2.1. Literatura.....	28
3. Cel pracy.....	34
4. Rodzaje obciążeń dynamicznych.....	37
4.1. Literatura.....	41
5. Równania ruchu-podstawowe równania stateczności dynamicznej.....	42
5.1. Zależności FSDT.....	42
5.2. Stan przemieszczeń i odkształceń.....	43
5.3. Związki konstytutywne płyt warstwowych.....	46
5.4. Równania dynamicznej stateczności płyt FSDT.....	50
5.5. Literatura.....	57
6. Kryteria stateczności dynamicznej.....	58
6.1. Kryterium Volmira.....	59
6.2. Kryteria Budiansky'ego.....	60
6.3. Kryteria Ari Gura i Simonetty.....	61
6.4. Kryterium Petry-Fahlbuscha.....	63
6.5. Kryterium Kubiaka.....	63
6.6. Kryteria zniszczenia.....	64
6.6.1. Ogólne kryterium zniszczenia materiałów kompozytowych...	65
6.6.2. Kryterium Hilla dla materiałów ortotropowych.....	66
6.6.3. Kryterium Tsai-Wu.....	68
6.6.4. Kryterium maksymalnych naprężeń.....	70
6.6.5. Kryterium maksymalnych odkształceń.....	70
6.7. Literatura.....	71
7. Wpływ prędkości odkształcenia na własności mechaniczne materiałów..	73
7.1. Zależności konstytutywne lepkoplastyczności.....	77
7.2. Literatura.....	84
8. Metoda rozwiązania zagadnienia stateczności dynamicznej z efektem prędkości odkształcenia.....	86
8.1. Metoda elementów skończonych.....	86
8.2. Generacja modelu dyskretnego kolumny.....	88
8.3. Warunki początkowe i brzegowe.....	91

8.4. Literatura.....	92
9. Wyniki analizy stateczności dynamicznej konstrukcji z efektem prędkości odkształcenia.....	93
9.1. Kolumny z materiałów izotropowych.....	93
9.2. Kolumny z materiałów ortotropowych.....	107
9.3. Kolumny z materiałów kompozytowych.....	123
9.4. Porównanie wyników obliczeń.....	127
9.5. Literatura.....	130
10. Wnioski końcowe.....	133
Summary.....	138
Charakterystyka zawodowa autora.....	139

OZNACZENIA

$[A]$	macierz sztywności rozciągania
$[B]$	macierz sprzężenia
b_i	szerokość i -tej ściany słupa
h_i	grubość i -tej ściany słupa
l	długość słupa
$[D]$	macierz sztywności zginania
DLF	współczynnik obciążenia dynamicznego
EPO	efekt prędkości odkształcenia
E	moduł Younga materiału izotropowego
E_{1i}, E_{2i}	moduły Younga i -tej ściany w głównych kierunkach ortotropii
G	moduł Kirchhoffa materiału izotropowego
$G_{12i}, G_{23i},$ G_{31i}	moduły Kirchhoffa i -tej ściany materiału ortotropowego
f	funkcja warunku początku plastyczności
\mathbf{f}	macierz granic plastyczności
F	funkcja plastyczności
$\{F\}$	wektor sił węzłowych
F, G, H, L, M, N	współczynniki w kryterium Hilla
I_i	masowe momenty bezwładności $i = 0, 1, 2$
k_R	współczynnik korekcji odkształceń
$[K]$	macierz sztywności konstrukcji
K	energia kinetyczna układu
$[M]$	macierz masowa konstrukcji

M_{ij}	momenty przekrojowe $i, j = x, y$
N_{ij}	siły przekrojowe $i, j = x, y$
N_i	funkcje kształtu $i = 1, \dots, 4$
Q_i	przekrojowe siły poprzeczne $i = x, y$
$Q_{ij}^{(k)}$	sztywności k -tej warstwy w lokalnym układzie odniesienia $i, j = 1, 2$
$\overline{Q}_{ij}^{(k)}$	zredukowane sztywności k -tej warstwy
s	współczynnik smukłości ściany
S_{ij}	dewiator tensora naprężenia $i, j = x, y$
x, y, z	osie prostokątnego kartezjańskiego układu współrzędnych
t	czas
T	okres podstawowych drgań własnych giętych
T_p	czas trwania impulsu
$\{\mathbf{u}\}$	wektor uogólnionych przemieszczeń
u_o, v_o, w_o	składowe przemieszczeń powierzchni środkowej
U	energia odkształcenia sprężystego układu
V	objętość i -tej ściany
W	praca sił wewnętrznych układu
$\delta \dots$	wariacja ...
ε	tensor odkształcenia
η	współczynnik ortotropii
θ_i	obroty wokół osi lokalnego układu współrzędnych elementu $i = r, s, t$
Φ	funkcja Perzyny
Γ	długość krawędzi nieodkształconej i -tej ściany
γ_{ij}	kąt odkształcenia postaciowego $i, j = x, y, z$
γ	parametr lepkości materiału
κ	parametr wzmocnienia materiału
λ	współczynnik kształtu ściany

Λ	funkcja Lagrange'a
ν_{ij}	współczynnik Poissona materiału ortotropowego $i, j = 1, 2$
σ	tensor naprężenia
ρ	gęstość
φ_x, φ_y	obroty normalnej do powierzchni środkowej względem osi y oraz x
Ω	pole powierzchni nieodkształconej i -tej ściany

Stosowano następujący skrócony zapis pochodnych:

$$\begin{aligned}
 (..)_{,x} &= \frac{\partial(..)}{\partial x}, & (..)_{,y} &= \frac{\partial(..)}{\partial y}, & (..)_{,xy} &= \frac{\partial^2(..)}{\partial x \partial y} \\
 (\dot{..}) &= \frac{d(..)}{dt}, & (\ddot{..}) &= \frac{d^2(..)}{dt^2}
 \end{aligned}$$

STRESZCZENIE

Niniejsza praca jest poświęcona wyboczeniu dynamicznemu lub jak w literaturze synonimicznie nazywane jest to zjawisko: stateczności dynamicznej, czy też odpowiedzi dynamicznej cienkościennych konstrukcji płytowych obciążonych impulsem o skończonym czasie trwania. Analizowane są krótkie słupy o zamkniętych przekrojach poprzecznych w kształcie prostokąta. Słupy te są poddane ścisaniu w płaszczyznach ścian składowych impulsem dynamicznym, który może mieć różne kształty. Rozpatrywane są materiały izotropowe i ortotropowe opisane równaniami konstytutywnymi uwzględniającymi wrażliwość materiału na efekt prędkości odkształcenia (EPO). Materiały takie są nazywane materiałami lepkoplastycznymi. Dotychczas zaledwie w kilku pracach rozważano stateczność dynamiczną płyt i powłoki walcowej z materiału lepkoplastycznego. Nie było natomiast analizy konstrukcji złożonej, jaką jest słup o ścianach płaskich, nie dokonano także porównania rozwiązań uzyskanych dla różnych modeli materiału – sprężystoplastycznego ze sprężysto-lepkoplastycznym.

W przyjętym modelu płytowym ścian słupa uwzględniono wpływ ścinania poprzez opis zgodny z teorią ścinania pierwszego rzędu, a wyprowadzenie równań Lagrange'a oparto na zasadzie Hamiltona. Stan lepkoplastyczny materiału opisano równaniem Perzyny. Obliczenia numeryczne przeprowadzono metodą elementów skończonych przy zastosowaniu pakietu ANSYS. Dynamiczne obciążenia krytyczne wyznaczano na podstawie omówionych w pracy kryteriów (najczęściej stosowano kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona). Stwierdzono wyraźny związek wielkości dynamicznego obciążenia krytycznego z faktem uwzględnienia w opisie własności materiału – wrażliwości jego na efekt prędkości odkształcenia, tzn. z przyjęciem modelu materiału lepkoplastycznego.

Po wprowadzeniu i przeglądzie literatury dotyczącej dynamicznego zachowania konstrukcji płytowych oraz sformułowaniu celu pracy, w rozdziale czwartym podano przegląd impulsowych obciążeń dynamicznych występujących w przyrodzie i stosowanych w opisie obciążeń dynamicznych w rozwiązaniach analitycznych. W rozdziale piątym zamieszczono podstawowe zależności wykorzystywane w analizie stateczności dynamicznej ortotropowych konstrukcji zbudowanych z cienkich płyt prostokątnych. Rozdział ten zawiera także wyprowadzenie równań stateczności dynamicznej dla teorii ścinania pierwszego rzędu z uwzględnieniem wszystkich sił bezwładności. W rozdziale szóstym omówiono stosowane

do wyznaczania dynamicznych obciążeń krytycznych kryteria stateczności dynamicznej. Rozdział siódmy zawiera podstawowe równania teorii plastyczności stowarzyszonego płynięcia oraz teorii lepkoplastyczności w zakresie wykorzystanym w uzyskanym rozwiązaniu. Rozdział ósmy to omówienie zastosowanej metody rozwiązania oraz problemów, które wiązały się z jej realizacją, zaś rozdział dziewiąty to prezentacja uzyskanych wyników badań i obliczeń numerycznych. Pracę zamykają uwagi końcowe.

1. WSTĘP

Rezultaty badań eksperymentalnych oraz analiz teoretycznych potwierdzają, że zachowanie wielu materiałów jest zupełnie inne pod wpływem impulsowego obciążenia dynamicznego i statycznego. Proces poznawczy różnic widocznych w tym zachowaniu jest procesem nadal kontynuowanym przy aktywnie rozwijanych metodach badawczych. Wyniki badań doświadczalnych jednoznacznie wskazują, że podstawą tych różnic w zachowaniu jest wrażliwość materiału na prędkość odkształcenia. Z kolei szereg prac teoretycznych dowodzi, że opis materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia może być uzyskany w ramach teorii lepkoplastyczności. Najogólniej rzecz ujmując, teoria ta przyjmuje, że odkształcenia plastyczne polegające na wzajemnych poślizgach pomiędzy mikrocząsteczkami spowodowanych ścinaniem zostają zablokowane przy wysokich prędkościach odkształcenia przez wzrost oporu spowodowanego lepkością pomiędzy tymi mikrocząsteczkami. Wówczas przed uplastycznieniem materiał ma cechy sprężyste, a po uplastycznieniu ma jednocześnie cechy lepkie i plastyczne. Oczywiście jest to pewna idealizacja rzeczywistości, która jednak w znaczącym stopniu zgadza się z eksperymentem, upraszczając przy tym opis analityczny. Materiał o takich cechach jest nazywany materiałem sprężysto-lepkoplastycznym i będzie przedmiotem rozważań w niniejszej pracy, w odniesieniu do problematyki stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych.

Konstrukcje cienkościennie to klasa konstrukcji nośnych, przestrzennych, w literaturze nazywanych też dźwigarami powierzchniowymi, szeroko stosowanych w różnych obszarach zastosowań inżynierskich: pojazdy, awiacja i aeronautyka, budownictwo lądowe i drogowe, dźwigi, statki etc. Konstrukcje cienkościennie w zależności od globalnego kształtu, kształtu powierzchni lub obciążenia są dzielone na tarcze, płyty, dźwigary i powłoki. Mogą występować samodzielnie bądź tworzyć konstrukcje wieloelementowe połączone wzdłuż wspólnej krawędzi (wielu krawędzi). Najczęstszym kryterium definiującym „cienkościenność” konstrukcji jest proporcja pomiędzy grubością ściany elementu a jego najmniejszym wymiarem gabarytowym przekroju poprzecznego. Iloraz ten musi być mniejszy lub co najwyżej równy 0,1. W pracy analizowano konstrukcje, dla których wymiary spełniały ten warunek. W odniesieniu do kształtu powierzchni elementu rozróżnia się powłoki o zakrzywionej powierzchni i płaskie konstrukcje płytowe. Słupy zbudowane z płyt mogą mieć przekrój poprzeczny otwarty albo zamknięty.

Lekkość konstrukcji cienkościennych, względnie łatwa technologia montażu i co za tym łącznie idzie niższy koszt wobec konstrukcji o przekrojach zwartych, zdecydowały o ich obecnej popularności. Trudno obecnie znaleźć obszar zastosowań inżynierskich, gdzie te konstrukcje nie byłyby stosowane. Tendencje te wspiera inżynieria materiałowa oferując nowe technologie i materiały, zwłaszcza kompozytowe, dające się łatwo kształtować i formować pod kątem potrzebnych własności wytrzymałościowych. Obok klasycznych materiałów izotropowych (zazwyczaj metali) stosowane są materiały ortotropowe lub anizotropowe o modelowanych strukturalnie własnościach pod kątem celu zastosowania. Jednocześnie potrzeby projektowe stymulują rozwój badań eksperymentalnych i teorii dających modele oraz narzędzia obliczeniowe. W przypadku konstrukcji cienkościennych dotyczy to zwłaszcza ich stateczności, stanów pokrytycznych oraz nośności granicznej i fazy zniszczenia – podstawowych faz pracy konstrukcji cienkościennej. Odnosi się to zarówno do obciążeń statycznych, jak i ostatnio w coraz większym stopniu do obciążeń dynamicznych.

Stateczność konstrukcji odkształcalnej jest pewną cechą charakteryzującą wrażliwość konstrukcji na zaburzenia jej równowagi. W statyce położenie równowagi wiąże się zazwyczaj ze stanem obciążenia. Wzrost obciążenia może spowodować zakłócenie tej równowagi i doprowadzić do utraty stateczności. Pod pojęciem utraty stateczności rozumie się: przejście z jednego stanu równowagi do drugiego z pojawieniem się punktu bifurkacji; albo przeskok z pojawieniem się punktu granicznego; bądź zniszczenie przy maksymalnej wartości parametru obciążenia – czemu odpowiada punkt graniczny na ścieżce równowagi. Obciążenie, któremu towarzyszy jedno z dwóch pierwszych zjawisk, nazywa się obciążeniem krytycznym. Pokrytyczne stany równowagi konstrukcji mogą być stateczne lub niestateczne w zależności od tego, czy obciążenie narasta z przemieszczeniem, czy maleje. Mówi się o statecznej albo niestatecznej pokrytycznej ścieżce równowagi. W przypadku wyboczenia sprzężonego pokrytyczna ścieżka równowagi może mieć bardziej skomplikowany charakter.

Charakter utraty stateczności wiąże się z rodzajem konstrukcji, i tak na przykład powłoki ulegają wyboczeniu w sposób gwałtowny poprzez niestateczny punkt bifurkacji lub punkt graniczny. Punkt bifurkacji jest rozumiany jako przecięcie ścieżki równowagi podstawowej i wtórnej, zaś punkt graniczny jako lokalne maksimum parametru obciążenia. Długie słupy i pręty w nagły sposób ulegają wyboczeniu globalnemu z punktem bifurkacji i niestateczną pokrytyczną ścieżką równowagi. Cienkie płyty charakteryzują się stateczną pokrytyczną ścieżką równowagi, co odnosi się do przypadków idealnych oraz konstrukcji posiadających imperfekcje. Konstrukcje płytowe – słupy, dźwigary, mogą ulec wyboczeniu lokalnemu, globalnemu lub sprzężonemu. Lokalna utrata stateczności nie wyczerpuje nośności konstrukcji, ponieważ przyrost przemieszczeń wymaga dalszego przyrostu obciążenia. Dalsze narastanie obciążenia może prowadzić do

uplastycznienia konstrukcji bądź osiągnięcia kolejnego, wtórnego punktu bifurkacji. Wyboczenie sprzężone ma miejsce wtedy, kiedy obciążenia krytyczne odpowiadające różnym postaciom wartości obciążeń krytycznych są zbliżone. Powoduje to „przejście” konstrukcji na niestateczną ścieżkę równowagi, skutkującą zniszczeniem konstrukcji przy obciążeniu niższym aniżeli obciążenia dla każdej wchodzącej w interakcje postaci oddzielnie. Analiza przebiegu i charakteru wyżej wymienionych zjawisk sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych będących ich matematycznym opisem. Wszystkie wymienione tutaj postacie wyboczenia zaliczane są do statycznej utraty stateczności.

Obok statycznych obciążeń konstrukcje doznają obciążeń nagłych (udarowych) lub zmiennych w czasie (okresowych, nieokresowych, stochastycznych). Analiza zachowania konstrukcji cienkościennych pod działaniem obciążeń dynamicznych obejmuje jednakże wiele zjawisk fizycznych i zdaniem niektórych autorów termin stateczności dynamicznej może być przypisany jedynie do wyboczenia konstrukcji charakteryzujących w statyce niestateczną pokrytyczną ścieżką równowagi. Natomiast w odniesieniu do płyt, których pokrytyczne zachowanie odpowiada równowadze statecznej, sugerowane jest pojęcie dynamicznej odpowiedzi konstrukcji na zadane wymuszenie. Wymuszenie to może mieć różny charakter zależny od czasu, w szczególności może to być impuls obciążenia o określonym przebiegu i czasie trwania. Ich opis podano w rozdziale 4. W niniejszej pracy rozważano obciążenia impulsowe o skończonym czasie trwania. Tu również można dokonać rozróżnienia w zależności od czasu trwania obciążenia i jego amplitudy, na zjawisko uderzenia – kiedy należy uwzględnić procesy falowe i mechanizm przekazywania obciążenia, obciążenia dynamiczne, czy wreszcie quasi-statyczne. Zgodnie z literaturą przedmiotu przyjmuje się, że obciążenia o czasie trwania bliskim okresowi drgań własnych konstrukcji i umiarkowanie dużych amplitudach powodują wyboczenie dynamiczne konstrukcji cienkościennej.

Powyższy podział terminologiczny w zakresie wyboczenia dynamicznego łączy się ze sposobem wyznaczania dynamicznych obciążeń krytycznych. W przypadku powłok możliwe jest obliczenie liczbowej wartości obciążenia krytycznego z rozwiązania analitycznego, natomiast dla konstrukcji płytowych konieczne jest przyjęcie pewnej konwencji – kryterium. W oparciu o warunki zdefiniowane w tym kryterium jako stan dynamicznej utraty stateczności ustala się dla konstrukcji płytowych dynamiczne obciążenie krytyczne. Omówienie kryteriów stosowanych w analizie wyboczenia dynamicznego konstrukcji płytowych jest podane w dalszej części pracy (rozdział 6).

Od lat w laboratoriach wytrzymałości materiałów prowadzi się odrębnie próby statyczne i udarowe. Daje to jedynie podstawową wiedzę konstruktorom na temat własności dynamicznych materiału. Potrzeba bardziej szczegółowych danych o dynamicznych cechach materiałów wobec nowych zastosowań lub „starych” zastosowań, ale o których konstruktor chce więcej wiedzieć, sprawia,

że prace na temat zachowania się materiału pod działaniem obciążeń dynamicznych są nadal intensywnie prowadzone i rozwijane. Dotyczy to nie tylko badań nad nowymi materiałami, wśród nich różnego rodzaju kompozytami, ale wprowadzane są nowe teorie dotyczące materiałów klasycznych (stal i inne metale). Do badań dużych prędkości odkształcenia stosowane są specjalistyczne urządzenia obciążające (np. młoty opadowe, pręt Hopkinsona) w połączeniu z urządzeniami pomiarowymi z możliwością szybkiej akwizycji danych. Wreszcie prowadzone są eksperymenty modelowe typu *crash test* pozwalające na ocenę materiału w zastosowaniu do konkretnej konstrukcji w warunkach dynamicznych.

Co ciekawe, badania nad własnościami dynamicznymi materiału i nad statecznością dynamiczną, czy też nad dynamiczną odpowiedzią konstrukcji na impulsowe wymuszenie nie były dość długo łączone. W literaturze można napotkać dwie prace Batry i Wei'a (z lat 2005 i 2006) oraz trzecią napisaną przez nich i Yu (2005) poświęcone dynamicznemu wyboczeniu cienkościennej płyty i powłoki z materiałów termo-lepkoplastycznych, omówione w rozdziale 2. Niniejsza praca jest odpowiedzią na pytanie – na ile uwzględnienie własności dynamicznych materiału w analizie wyboczenia dynamicznego wpływa na wielkość dynamicznego obciążenia krytycznego. Oczywiście wprowadzenie do opisu materiału charakterystyki dynamicznej określonej funkcją zależną między innymi od prędkości odkształcenia komplikuje matematyczną stronę zagadnienia, ale wobec aktualnego poziomu metod numerycznych zagadnienia takie mogą być rozwiązane. Szczególną i nieprzecenioną rolę pełni tu metoda elementów skończonych, która jest intensywnie stosowana w analizie ciał odkształcalnych i mechanice konstrukcji, w analizie przepływów ciepła i płynów. Jej rosnące zastosowanie jest pochodną dynamicznego rozwoju komputerów oraz ich dostępnością. Jest metodą zalecaną przez normy krajowe i europejskie w praktyce konstrukcyjnej do analizy stanów pokrytycznych i granicznych konstrukcji cienkościennych. Należy jednak podkreślić, że rozwiązanie problemu – fizycznego, konstrukcyjnego, metodą elementów skończonych jest wykorzystaniem użytecznego narzędzia, które nie daje jednak więcej informacji niż te, które wynikają z przyjętego matematycznego modelu zjawiska czy modelu konstrukcji. Uzyskany wynik jest efektem przyjętych założeń w idealizacji rzeczywistości w celu uzyskania modelu matematycznego i to on – model, jest decydującym w uzyskaniu pozytywnego wyniku prowadzonej analizy. MES rozwiązuje ten matematyczny model, dając materiał do interpretacji analizowanego zjawiska, będąc jednym z ogniw całego łańcucha poznawczego. Zastosowanie metody elementów skończonych w analizie konstrukcji ma generalnie dwa podejścia. W zależności od stopnia złożoności – np. liczby stopni swobody rozwiązywanego problemu, opracowuje się własne kody programowe (zazwyczaj w języku Fortran) albo wykorzystuje komercyjne programy, czy środowiska programowe, zwłaszcza przy rozwiązywaniu zagadnień nieliniowych, sprzężonych czy modelowaniu procesów technologicznych. Wymaga to dodatkowo wykorzystania dostatecznie szybkiego sprzętu komputerowego, aby czasy obliczeń nie były „nadmiernie”

długie. Innym odniesieniem programowym może być zastosowanie algorytmu całkowania typu *implicite* bądź *explicite*. Wykorzystywany w realizacji obliczeń w niniejszej pracy program ANSYS należy do programów z grupy *implicite*, w odróżnieniu od równie popularnego programu LS-DYNA, który w rozwiązywaniu zagadnień dynamicznych bazuje na całkowaniu bezpośrednim (*explicite*).

Bazą dla metody elementów skończonych są metody wariacyjne, jako alternatywa do bezpośredniego sformułowania równań różniczkowych. Z kolei podstawą metod wariacyjnych jest zasada prac przygotowanych, która traktowana jest przez wielu za twierdzenie mechaniczne bardziej fundamentalne niż tradycyjne warunki równowagi newtonowskich praw ruchu. Można wykazać, że jest to słaba forma równań równowagi [5.13]. Ważnym dla użytkownika metody elementów skończonych jest fakt, że wśród twórców i popularyzatorów metody widnieje szereg nazwisk polskich uczonych.

2. PRZEGLĄD LITERATURY

Tematyka wyboczenia konstrukcji pod obciążeniem dynamicznym jest obecna w literaturze światowej od ponad 70 lat – omówienia pierwszych publikacji można znaleźć między innymi w pracach [2.42], [2.34]. Jednakże odniesienia do konstrukcji cienkościennych pojawiają się dopiero na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych minionego (już) wieku. Należy tu przykładowo przywołać prace Volmira [2.93], [2.94] czy Budiansky’ego i Hutchinsona [2.13], [2.25], które wraz z bogatą listą i innych autorów zostały omówione w pracy [2.34]. Opracowania te dotyczą dynamicznego wyboczenia, czy jak definiują niektórzy autorzy [2.81] dynamicznej odpowiedzi konstrukcji cienkościennych – płytowych i powłokowych, bazując jednak na statycznych własnościach materiału. Względnie niewiele jest prac – do tego datowanych w ostatnich kilku latach, które w analizie dynamicznego wyboczenia konstrukcji uwzględniają zmianę fizycznych własności materiału spowodowaną prędkością odkształcenia. Wiadomo bowiem, że dla obciążeń w zakresie sprężystym własności materiału praktycznie nie zależą od prędkości odkształcenia, czyli od czasu, w którym to odkształcenie zachodzi. Natomiast obciążenia, którym towarzyszy przekroczenie granicy plastyczności i zachodzące z prędkościami większymi (i dużo większymi) od 1 [1/s], powodują dodatkowo zmiany własności fizycznych materiału [2.6], [2.7], [2.49], [2.70]. Zjawisko to nazywane jest efektem *strain rate sensitive* – efektem czułości na prędkość odkształcenia.

Wspomniane wyżej ujęcie własności materiałów w analizie wyboczenia dynamicznego konstrukcji cienkościennych jest powodem przedstawienia przeglądu literatury w trzech obszarach tematycznych – wyboczenie dynamiczne konstrukcji cienkościennych ze statycznymi własnościami materiału, prace formułujące modele konstytutywne opisujące efekt prędkości odkształcenia oraz prace poświęcone wyboczeniu statycznemu i wyboczeniu dynamicznemu, w których uwzględniona jest czułość materiału na prędkość odkształcenia.

W swoich pracach poświęconych stateczności dynamicznej [2.42], [2.34] Volmir analizował pojedyncze płyty i powłoki obciążane dynamicznie impulsem o narastającej wartości obciążenia ściskającego, impulsem prostokątnym czy też impulsami o wymienionych kształtach, ale powodującymi ścinanie. Na potrzeby analizy dynamicznej sformułował kryterium wyznaczania dynamicznego obciążenia krytycznego, omówione w podrozdziale 6.1. Mającą ogromną liczbę cytowań jest praca Hutchinsona i Budiansky’ego [2.25], w której analizują oni stateczność dynamiczną powłoki walcowej obciążanej ściskającym impulsem prostokątnym

i trójkątnym o skończonym czasie trwania. Oceniają wpływ imperfekcji wstępnych i definiują warunek wyznaczania dynamicznego obciążenia krytycznego dla powłok. Jest to w zasadzie powtórzenie podejścia zaproponowanego w pracy [2.13] do oceny dynamicznego obciążenia krytycznego czaszy kulistej poddanej działaniu impulsu ciśnienia zewnętrznego. Kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona jest omówione w niniejszej pracy w podrozdziale 6.2, w jego zmodyfikowanej wersji do zastosowania dla konstrukcji płytowych.

W pracy [2.103] autorzy w eksperymencie weryfikują założenia o osiowo-symetrycznej postaci deformacji wyobczonej powłoki sferycznej o utwierdzonych krawędziach. Zadawane nagle obciążenie w postaci przyłożonego ciśnienia wywołanego wybuchem oraz obciążenie skupione od pocisku wywoływało deformacje powłoki, których charakter i wielkość były porównywane z wartościami obliczonymi analitycznie. Obraz deformacji wskazywał, że przyjęty osiowo-symetryczny opis wyobczenia powłoki nie jest dostateczny i daje zawyżone wartości obciążeń krytycznych. Autorzy konkludują, że należy zastosować bardziej złożony opis postaci wyobczenia i połączyć go z nieliniowym modelem materiału.

Tematyką stateczności dynamicznej powłok – w wielu pracach, zajmował się Simites. W jednej z pierwszych [2.80] prezentuje przegląd zagadnień z obszaru stateczności dynamicznej konstrukcji i przytacza listę ponad stu publikacji związanych z omawianą problematyką. Między innymi podkreśla łatwość adaptacji kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona w aplikacjach komputerowych, co jego zdaniem sprzyja popularności tego kryterium. Autor zwraca uwagę na różnice w definiowaniu warunków dla obciążeń krytycznych powłok i płyt. W przypadku tych ostatnich, wobec statecznej pokrytycznej ścieżki równowagi, nie ma możliwości bezpośredniego obliczenia wartości obciążenia krytycznego. Konieczne jest zastosowanie w tym celu określonego kryterium. W pracy [2.26] Huyan i Simites omawiają dynamiczne wyobczenie powłoki cylindrycznej wykonanej z aluminium oraz z kompozytu wzmacnianego włóknami boru z matrycą epoksydową, poddanej osiowemu ścisnieniu oraz zginaniu. Zadawane obciążenie ma charakter impulsu prostokątnego o skończonym czasie trwania oraz impulsu skokowego o nieskończonym czasie działania. Obliczenia są prowadzone metodą elementów skończonych z wykorzystaniem programu ANSYS. Dynamiczne obciążenia krytyczne wyznaczają na podstawie kryterium Budiansky'ego-Rotha, stwierdzając dużą zależność tych obciążeń od amplitudy imperfekcji wstępnych, czasu trwania impulsu oraz częstotliwości drgań własnych. Dla wyższych wartości częstotliwości obserwowali szybszą zbieżność obciążeń dynamicznych w porównaniu do tych uzyskiwanych dla impulsu o nieskończonym czasie trwania. Praca [2.82] jest kolejnym przeglądem publikacji dokonanych przez Simitesa, poświęconych stateczności dynamicznej powłok walcowych, z akcentem na porównanie rozwiązań stosujących różne teorie ścinania w opisie przemieszczeń powłoki.

Autorzy pracy [2.79] rozważają dynamiczne wyboczenie powłoki walcowej, dla trzech wariantów materiału ścianki: izotropowego i kompozytu wielowarstwowego typu [90/0]_s oraz [45/-45]_s. Obciążenie dynamiczne ma charakter skokowego impulsu ciśnienia zewnętrznego o nieskończonym czasie trwania. Rozwiązanie uzyskano przy zastosowaniu metody elementów skończonych z elementami wyższego rzędu (funkcja kształtu opisana wielomianem wyższego stopnia – *p-method*). Uzyskane wyniki obliczeń zgadzają się z wynikami z prac referencyjnych. Wynika z nich wrażliwość powłoki na imperfekcje, których obecność redukuje dynamiczne obciążenie krytyczne do wartości niższej od krytycznego obciążenia statycznego. W przypadku obciążeń impulsowych niższych od dynamicznego obciążenia krytycznego ścianki powłoki drgają z amplitudą proporcjonalną do amplitudy ciśnienia wymuszającego, a dla amplitudy impulsu ciśnienia równej wartości krytycznej przemieszczenia rosną nieograniczenie.

Li i Molyneaux [2.47], badając dynamiczne zachowanie powłoki walcowej pod działaniem obciążenia skokowego, porównują skuteczność dostępnych kryteriów i stwierdzają ich efektywność w odniesieniu do konstrukcji o jednym stopniu swobody. Proponują swoje kryterium dla układów o wielu stopniach swobody, polegające na wykorzystaniu elementów macierzy masowej analizowanego układu konstrukcyjnego. Geometrycznie interpretują stan krytyczny jako punkt przegięcia na wykresie dynamicznego ugięcia – dynamicznej odpowiedzi konstrukcji.

Z kolei prace Chamisa i Abumeri’ego [2.2], [2.16] są poświęcone wyboczeniu dynamicznemu konstrukcji powłokowych przy zastosowaniu podejścia probabilistycznego. Przedmiotem analizy są walcowe powłoki z kompozytów wielowarstwowych ściskane osiowo. Parametrami podawanymi w analizie z pewnym prawdopodobieństwem – co wynika z technologii wykonywania laminatów – są grubość warstwy, współczynnik objętości włókien wzmacniających, własności wytrzymałościowe włókien (wzdłużny moduł sprężystości E_l) oraz dane związane z impulsem obciążenia dynamicznego. Obliczenia numeryczne na bazie metody elementów skończonych są połączeniem mechaniki kompozytów z mechaniką probabilistyczną. Metoda jest oceniana przez autorów jako metoda podstawowa, bez ograniczeń co do klasy powłok i warunków obciążenia. Daje wyniki pozwalające na wyznaczenie dynamicznego obciążenia krytycznego oraz postaci wyboczenia z oceną prawdopodobieństwa ich wystąpienia i czułości na zmiany parametrów definiowanych w analizie. Dodatkowo jest łatwa w implementacji komputerowej.

Tylikowski w pracach [2.90] i [2.91], stosując nieliniowe geometrycznie równania ruchu oraz funkcjonal Lapunova, analizuje stateczność dynamiczną konstrukcji, w tym płyt z kompozytów funkcjonalnych w aspekcie drgań parametrycznych. Zaletą zastosowanej metody jest to, że nie jest konieczne rozwiązanie skomplikowanych równań ruchu (różniczkowych czy całkowo-różniczkowych) do oceny stateczności rozważanej konstrukcji.

Praca Bisagni [2.12] jest pierwszą z trzech (pozostałe dwie nie są cytowane w pracy) publikacji tej autorki, poświęconych dynamicznemu zachowaniu warstwowych konstrukcji kompozytowych. Jej badania są prowadzone w oparciu o metodę elementów skończonych. W cytowanej pracy porównane są wyniki obliczeń numerycznych z wynikami przeprowadzonego eksperymentu w postaci dynamicznego ściskania powłoki cylindrycznej. Ścianki walca były wykonane z kompozytu wzmacnianego włóknem węglowym o orientacji [0/45/-45/0] lub [45/-45]_s, gdzie ta ostatnia okazuje się mniej wrażliwa na imperfekcje wstępne. W rozwiązaniu numerycznym oceniano wpływ gęstości siatki oraz poziom imperfekcji na dynamiczne obciążenie krytyczne. Wyniki analityczne, doświadczalne i numeryczne wykazują dużą zgodność, co zdaniem autorki potwierdza użyteczność metody elementów skończonych do badań nad zastosowaniem powłok kompozytowych w stanach zakrytycznych statycznych i dynamicznych.

Patel i współautorzy [2.67] zajmują się niestatecznością statyczną i dynamiczną powłok i płyt wzmocnionych żebrami. Autorzy ci modelują konstrukcje cienkościennie elementami skończonymi typu powłokowego (zdegenerowanymi z elementu bryłowego) i trójwęzłowymi elementami belkowymi. Analizują wyboczenie statyczne i dynamiczne oraz drgania własne. Poddają ocenie wpływ ułożenia żeber oraz ich ilości na poziom obciążeń krytycznych oraz obszarów dynamicznej niestateczności analizowanych konstrukcji.

Tematyka stateczności dynamicznej powłok jest także obecna w monografii Grybosia [2.22], pierwszym polskojęzycznym opracowaniu zagadnienia stateczności i obciążeń dynamicznych konstrukcji cienkościennych. Na tle teorii stateczności dynamicznej konstrukcji omówiona jest stateczność powłok walcowej i stożkowej poddanych dynamicznemu ściskaniu i ciśnieniu zewnętrznemu. W opracowaniu tym podane są także wyniki dla uderzeniowo ściskanej płyty prostokątnej izotropowej i ortotropowej oraz dynamicznie ściskanego pasma płytowego.

W pracach Abramovicha i współautorów z Uniwersytetu w Haifie [2.1], [2.101] porównane są wyniki rozwiązań stateczności dynamicznej belek i płyt osiowo ściskanych uzyskane metodą różnic skończonych, metodą elementów skończonych oraz z przeprowadzonych doświadczeń. We wcześniejszej publikacji są to konstrukcje metalowe, zaś w drugiej z wymienionych autorzy badali wielowarstwowe płyty kompozytowe wzmacniane włóknami. Zdefiniowany współczynnik obciążenia dynamicznego DLF (*Dynamic Load Factor*) jest wykorzystywany do prezentacji dynamicznego zachowania analizowanych konstrukcji. Krytyczna wartość tego współczynnika jest funkcją szeregu parametrów, w tym poziomu imperfekcji wstępnych, amplitudy i czasu trwania impulsu obciążenia oraz charakteru impulsu. Autorzy podkreślają, że wyboczenie dynamiczne badanych konstrukcji cienkościennych zachodzi dla impulsów o czasie trwania bliskim podstawowemu okresowi drgań własnych konstrukcji.

Z przeprowadzonych doświadczeń oraz obliczeń uzyskiwali w większości przypadków krytyczne wartości DLF większe od jedności. Jednakże dla pewnych badanych przypadków konstrukcji, krytyczne wartości DLF były mniejsze od jedności (uzyskane numerycznie i doświadczalnie), co pokazuje, że przyjęcie statycznych obciążeń krytycznych jako bezpiecznych dla obciążeń dynamicznych nie zawsze jest prawidłowe.

Wywodzący się także ze środowiska naukowego Uniwersytetu w Haifie J. Ari-Gur w swoich pracach z końca lat dziewięćdziesiątych także zajmował się problematyką stateczności dynamicznej. W [2.4] wraz z Ellishakoffem podali rozwiązanie dla impulsowo ściskanej kolumny z materiału poprzecznie izotropowego, wykazując, że dla względnie podatnych na poprzeczne ścinanie kolumn ($G \approx 3E/8$) klasyczna teoria belek prowadzi do zawyżonych wartości krytycznych obciążeń dynamicznych. Z kolei z Simonettą w [2.5] podali wyniki analizy prostokątnych płyt kompozytowych, formułując cztery kryteria wyznaczania wartości krytycznej dla wyboczenia dynamicznego. Są one wynikiem wielu badań autorów nad problematyką stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych. Podane przez Ari-Gura i Simonettę kryteria są omówione w niniejszej pracy w podrozdziale 6.3.

Birman [2.11] rozpatruje prostokątną kompozytową płytę wielowarstwową o antysymetrycznej sekwencji warstw poddanej osiowemu ściskaniu. Zadawane obciążenie jest dwójakiego rodzaju: jest to obciążenie skokowe o nieskończonym czasie trwania albo obciążenie narastające proporcjonalnie do czasu, poprzedzone wstępnym obciążeniem statycznym. W tym ostatnim przypadku oceniany jest wpływ prędkości narastania obciążenia na wielkość obciążenia krytycznego. Autor zauważa, że po początkowej fazie dużego wzrostu ugięć, wywołanych obciążeniem dynamicznym, w dalszej fazie nakładają się na nie oscylacje i dalsza analiza wymaga włączenia nieliniowego opisu materiału.

Papazoglou i Tsouvalis [2.66] w uzyskanym rozwiązaniu dla wielowarstwowej płyty kompozytowej prezentują podobny do podanego przez Birmana efekt w odpowiedzi płyty na impuls liniowy. Podają także wyniki dla obciążenia impulsem skokowym o nieskończonym czasie trwania oraz impulsem prostokątnym. Zadawane obciążenia mają charakter dwukierunkowego osiowego ściskania oraz obciążenia tnącego w płaszczyźnie płyty. Rozwiązanie uzyskane jest na gruncie klasycznej teorii płyt warstwowych metodą Galerkina, z całkowaniem równań metodą Rungego-Kutty. W odpowiedzi dynamicznej płyty wyróżniają trzy fragmenty. Pierwszy z brakiem ugięć lub bardzo małą ich wielkością, drugi w czasie którego ugięcie gwałtownie narasta i w trzeciej fazie na ugięcie to nakładają się oscylacje. Większe amplitudy tych oscylacji są wynikiem szybszego narastania obciążenia liniowego. Podkreślają, że czas potrzebny na osiągnięcie przez liniowy impuls wartości krytycznej jest dłuższy od czasu przejścia fali sprężystej przez długość obciążonej dynamicznie płyty. Można zatem pominąć

efekty bezwładności w płaszczyźnie płyty uwzględniając jedynie ruch prostopadły do powierzchni środkowej. Obliczenia wykonane są w programie ADINA.

Przykładem zastosowania metody elementów skończonych do modelowania dynamicznego zachowania materiałów są prace Barbero i współpracowników [2.9], [2.78]. Badają oni zachowanie laminatów warstwowych za pomocą opracowanego przez nich urządzenia badawczego i weryfikują te wyniki numerycznie w obliczeniach metodą elementów skończonych. Oceniana była wytrzymałość na ściskanie i wielkość pochłanianej energii. Obciążenie realizowano na młocie opadowym. Najwyższą wytrzymałość wykazywały laminaty włókniste wobec najniższych wartości w przypadku laminatów quasi-izotropowych. Z kolei w pracy [2.18] oceniano stateczność kompozytów warstwowych poddanych periodycznemu osiowemu ścisłaniu. Zastosowano metodę elementów skończonych, modelując laminat ośmiowzłowymi elementami powłokowymi uwzględniającymi wpływ ścinania na przemieszczenia poprzeczne. W uzyskanym rozwiązaniu określono obszary dynamicznej stateczności i ich zależność od częstotliwości wymuszenia. Wyniki obliczeń potwierdziły wpływ sekwencji warstw i kąta laminacji na dynamiczną stateczność analizowanych płyt kompozytowych.

Petry i Fahlbush zakwestionowali wyznaczanie dynamicznego obciążenia krytycznego na podstawie kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona, uznając je za zbyt konserwatywne. Zaproponowali swoje kryterium – omówione w niniejszej pracy w rozdziale 6.4, odnoszące dynamiczne obciążenie krytyczne do naprężeń granicznych.

Kořakowski w [2.30] analizuje dynamiczne wyboczenie długiej kompozytowej kolumny o przekroju otwartym, stosując opis płytowy. Rozwiązanie oparte na teorii Koitera uwzględnia interakcje różnych postaci wyboczenia w odpowiedzi dynamicznej kolumny na prostokątny impuls ścisłający o skończonym czasie działania. Zmodyfikowane kryterium Kleibera-Kotuli-Sarana [2.29] daje niższe wartości dynamicznych obciążeń krytycznych aniżeli wartości uzyskane na podstawie kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona. Kolejne prace [2.32] Kořakowskiego i Kubiaka oraz Kubiaka [2.41], [2.43] dotyczą także interakcji postaci wyboczenia w obciążanych impulsem dynamicznym kompozytowych konstrukcjach cienkościennych. W ostatniej z tych prac rozpatrywany jest wpływ na poziom dynamicznego obciążenia krytycznego zmieniających się wzdłuż ścian słupa własności materiału. Obszerna analiza dynamicznego wyboczenia cienkościennych słupów o przekrojach otwartych zawarta jest w pracy [2.42]. Obok wielu przykładów liczbowych uzyskanych analitycznie na podstawie teorii Koitera oraz metodą elementów skończonych podane jest kryterium stateczności dynamicznej sformułowane przez autora w wyniku modyfikacji wspomnianego wcześniej kryterium [2.29].

Kompleksowe opracowanie wraz z przeglądem literatury, dotyczące stateczności kompozytowych konstrukcji płytowych zawiera monografia [2.34] pod redakcją Kowal-Michalskiej. Publikacja ta podaje równania dynamicznej

stateczności cienkościennych konstrukcji o ścianach płaskich – płyt, dźwigarów i słupów o przekrojach otwartych i zamkniętych, omawia stosowane metody rozwiązywania tych zagadnień oraz przytacza rozwiązania wielu przypadków szczegółowych uzyskanych przez autorów. Rozwiązania te pozwalają na ocenę współpracy ścian składowych, interakcji postaci wybożenia, czynników geometrycznych i materiałowych oraz wpływu tych wszystkich parametrów na poziom dynamicznego obciążenia krytycznego badanych konstrukcji.

Publikacje [2.35], [2.36], [2.37], [2.38], [2.50], [2.51], [2.56], [2.57], [2.58] zawierają prezentacje kolejnych badań prowadzonych przez autora niniejszej pracy, samodzielnie i we współpracy, nad statecznością dynamiczną konstrukcji cienkościennych. Wyniki tych badań dotyczą płyt i cienkościennych słupów o przekroju zamkniętym o różnej geometrii przekroju poprzecznego słupa, z materiałów o różnych własnościach i poddanych impulsom dynamicznym o kilku charakterystykach (ich omówienie podano w rozdziale 4). I tak chronologicznie, w pracy [2.36] przeprowadzona jest ocena wpływu wyboru kryterium stateczności dynamicznej na uzyskiwane wartości dynamicznego obciążenia krytycznego płyt izotropowych. W [2.35] podobnymi rozważaniami objęte są płyty ortotropowe, a wyniki uzyskane są metodą analityczną i metodą elementów skończonych. Praca [2.38] jest podsumowaniem wniosków wypracowanych odnośnie dynamicznej stateczności płyt. W [2.37] analizowane jest dynamiczne zachowanie kolumn o przekroju zamkniętym z materiałów ortotropowych. Ocenie wpływu na poziom obciążenia krytycznego poddano wielkość imperfekcji wstępnych, charakter impulsu oraz czas jego trwania, a także geometrię przekroju poprzecznego (kształt i różne grubości ścian składowych słupa). W pracy [2.50] przyjęto, że ściany słupa są wykonane z materiałów kompozytowych i oprócz wcześniej wyszczególnionego zakresu analizy dodatkowo uwzględniono wpływ kąta laminacji na zachowanie się ściskanych impulsowo słupów kompozytowych, a w [2.57] także zmienny stopień ortotropii materiału ścian. Analiza ta została rozszerzona o ocenę wpływu sekwencji warstw oraz efektu sprzężenia występującego w kompozytach warstwowych wzmocnianych włóknami na wartość dynamicznego obciążenia krytycznego słupów, których ściany wykonane są z tego typu materiałów [2.51]. W artykule [2.56] oraz w rozdziale monografii [2.58] przeanalizowano problemy towarzyszące prowadzeniu obliczeń numerycznych dynamicznego zachowania się płyt i słupów cienkościennych metodą elementów skończonych. Omówiono sposób doboru elementu skończonego, charakteru podziału i gęstości siatki, a także dobór parametrów sterujących przebiegiem analizy dynamicznej (numerycznego całkowania dynamicznych równań ruchu). Rozważania powyższe zilustrowano wykresami z wynikami obliczeń numerycznych. W trakcie wyżej przytoczonych prac własnych przewijało się pytanie: „na ile własności dynamiczne materiału wpłyną na uzyskiwane wyniki wartości krytycznych” analizowanych konstrukcji, stając się powodem dalszych badań, których podsumowaniem jest niniejsza praca.

Badaniami zależności własności materiału od czasu zajmuje się reologia i lepkoplastyczność, przy czym teoria lepkoplastyczności wyłoniła się z teorii plastyczności do opisu zjawisk zachodzących w materiale poddanemu obciążeniom dynamicznym. W gronie twórców teorii lepkoplastyczności i pierwszych badaczy jest kilku Polaków: Perzyna, Klepaczko i Wierzbicki [2.71], [2.102]. W obszernej monografii [2.70] Perzyna przedstawia szereg zagadnień reologicznych i wprowadza do teorii lepkoplastyczności, formułując stosowane do dziś równania konstytutywne dla materiałów lepkoplastycznych. Model Perzyny jest omówiony w rozdziale 7 niniejszej pracy. W [2.68] Pogodin-Aleksiejew omawia podstawowe metody badań dynamicznych nad metalami prowadzącymi do uzyskania charakterystyk dynamicznych materiału i oceny jego wrażliwości na prędkość odkształcenia. Naturalnym odniesieniem do tych publikacji są monografie z mechaniki materiałów i teorii plastyczności [2.15], [2.24], [2.49], [2.64]. Naturalnym, gdyż różnicując zachowanie materiału pod wpływem statycznego i dynamicznego obciążenia, starano się opisać wpływ prędkości odkształcenia na zmianę granicy plastyczności materiału.

Wybrane do omówienia prace z zakresu lepkoplastyczności można podzielić na dwie – w pewnym sensie historyczne – grupy. Pierwsza z nich dotyczy prac nad metalami, a druga materiałami kompozytowymi, choć metody badawcze wypracowane dla metali są nadal stosowane w odniesieniu do materiałów kompozytowych. Prace [2.6], [2.7], [2.108] zawierają wyniki badań eksperymentalnych nad dynamicznymi własnościami stali i aluminium, z omówieniem zastosowanej metodologii pomiarów oraz próbą porównania wyników doświadczeń z teoretycznymi formułami opisującymi wrażliwość materiału na prędkość odkształcenia i oceną zakresów ich wzajemnej zgodności. Gilat i Wu [2.19], badając stal walcowaną w zakresie temperatur 25°-600°C i prędkości odkształcenia od 5×10^{-4} do 1000 [1/s], stwierdzają bardzo istotny wpływ prędkości odkształcenia na efekt starzenia stali oraz podkreślają trudność zastosowania opisu wpływu prędkości odkształcenia za pomocą jednego równania konstytutywnego w całym analizowanym zakresie prędkości. W pracy [2.92] na podstawie badań doświadczalnych, rozważań teoretycznych wspartych modelem MES, omówiony jest proces dochodzenia do opisu zachowania wysokostopowej stali niskowęglowej pod działaniem obciążeń dynamicznych. Proponowany model dyslokacyjny związany ze wzmocnieniem między ziarnami daje dobry opis mechanicznego zachowania się materiału podczas technologicznego procesu zgniatania. Procesy lepkoplastyczne towarzyszące spawaniu tarciovemu (*friction stir welding*) są omówione w [2.107]. Ta nowoczesna technika łączenia bez przetopu elementów metalowych o różnych grubościach bądź złożonych kształtach jest modelowana przez autorów metodą elementów skończonych. Uzyskane efekty numeryczne zastosowanego modelu lepkoplastycznego Perzyny z modyfikacją dla zależności naprężenie-temperatura dają obraz odkształceń i naprężeń zgodny z obserwowanym w rzeczywistych procesach technologicznych oraz pozwalają na analizę parametrów tego procesu w zakresie zmian prędkości

obrotowej lub liniowej narzędzia łączącego. Jest to metoda analizy znacznie bardziej oszczędna od praktycznych eksperymentów.

Z kolei model Johnsona-Cooka stosuje Wang [2.96] w parametrycznej analizie wpływu poszczególnych elementów równania konstytutywnego na wyznaczenie plastycznych odkształceń tnących w metalach, w procesie termomechanicznej niestateczności. Szczegółowo oceniony wpływ parametrów równania konstytutywnego (statycznej wytrzymałości na ścinanie, modułu stycznego, współczynnika wrażliwości na prędkość odkształcenia, gęstości, punktu topnienia i innych parametrów termicznych) poszerza wiedzę na temat ich wzajemnych, złożonych relacji oraz poziom naprężeń tnących w procesie płynięcia.

Na potrzeby rozwijających się programów metody elementów skończonych Rusinek i współautorzy [2.77] proponują konstytutywne równanie termolepkoplastyczne w wersji trójwymiarowej dla stali konstrukcyjnej, do opisu zachowania się materiału w procesach tłoczenia, cięcia, szybkiej obróbki narzędziowej, procesach balistycznych i *crash* testach. Równanie, w którym autorzy stosują osiem podstawowych stałych materiałowych, ma zastosowanie w szerokim zakresie prędkości odkształcenia oraz temperatur. Nowością w stosunku do wcześniejszych propozycji autorów jest uzależnienie wykładnika w członie odpowiadającym za wzmocnienie od prędkości odkształcenia i temperatury. Wykonane symulacje numeryczne potwierdziły przydatność zaproponowanego rozwiązania.

Z kolei w [2.69] różne modele konstytutywne są stosowane do znalezienia opisu – najbardziej zgodnego z wynikami badań dwóch stali nierdzewnych, w średnim zakresie prędkości odkształcenia i temperaturze 1100°C. Zdaniem autorów model Nortona-Hoffa (najprostszy matematycznie z porównywanych) bardziej od innych modeli pozwala na symulacje numeryczną procesów lepkoplastycznych. Jednocześnie autorzy zwracają uwagę na złożoność procesów badawczych, na trudności pomiarowe właściwych wielkości oraz uzyskania zgodności warunków brzegowych w doświadczeniu i symulacji (zwłaszcza efektów tarcia).

O zastosowaniu programu metody elementów skończonych ANSYS do przewidywania procesu pełzania w stali wysokiej wytrzymałości traktuje praca [2.73]. Model i obliczenia zostały zrealizowane zgodnie z wymogami ASTM, a praca jest fragmentem projektu nad interakcją procesów zmęczenia i zmęczenia spowodowanego pełzaniem w piecach do wytopu metali.

Przechodząc do omówienia drugiej grupy publikacji dotyczącej lepkoplastycznych własności tym razem kompozytów, należy podkreślić, że metodyka badań tych materiałów czerpie z doświadczeń uzyskanych w dynamicznych badaniach „klasycznych materiałów konstrukcyjnych” – metali. Stosowane są tu te same urządzenia badawcze, jak choćby pręt Hopkinsona czy młoty udarowe różnych konstrukcji. Jednakże duża różnorodność własności kompozytów powoduje, że wyniki badań i znajdywane na ich podstawie stałe materiałowe mają

zastosowanie do ograniczonej grupy materiałów. Do modeli konstytutywnych materiału dochodzi się etapami, stopniowo przyjęty pierwotnie model rozbudowując o nowe własności. Taką drogą postępował Sun i współautorzy [2.76], [2.88], [2.98] badający zachowanie wielowarstwowego kompozytu wzmacnianego włóknami (włókna szklane oraz węglowe). Od modelu jednoparametrowego dochodzą do modelu trójwymiarowego, który jednak w praktyce redukują do płaskiego stanu naprężenia i pomijają wpływ równomiernego ściskania na odkształcenia plastyczne. W pracach tych omawiane są także problemy badawcze wynikające choćby z efektu sprzężenia zginanie-ściskanie obecnego w kompozytach warstwowych, utrudniającego interpretację uzyskanych wyników z badań eksperymentalnych. Badania te prowadzone na klasycznej maszynie wytrzymałościowej z prędkością odkształcenia około 1 1/s, są następnie ekstrapolowane na wyższe (do 1000 1/s) prędkości odkształcenia. Przy czym autorzy podkreślają, że utrzymanie stałej prędkości całkowitego odkształcenia w eksperymencie nie prowadzi do stałej wartości prędkości intensywności odkształceń plastycznych. Oznaczenia prędkości odkształcenia dla poszczególnych badań są wartością średnią z wartości szczytowej i końcowej odnotowanej w teście. Poprawność takiego podejścia jest weryfikowana przez badania dynamiczne na pręcie Hopkinsona oraz w symulacjach numerycznych metodą elementów skończonych (program ABAQUS) z zastosowaniem opracowanego modelu konstytutywnego. Wyniki tych analiz pokazują, że jedynie różnice o rząd wielkości w prędkości odkształcenia kompozytu mogą prowadzić do zmian w przebiegu krzywej naprężenie-odkształcenie. Model konstytutywny zaproponowany w powyższych artykułach jest szczegółowo omówiony w rozdziale 7 niniejszej pracy.

Metoda homogenizacji materiału niejednorodnego na bazie modelu Perzyny jest zaproponowana w pracy [2.84]. Model MES tzw. reprezentatywnego elementu objętościowego (*RVE*) z materiału niejednorodnego i zhomogenizowanego jest badany numerycznie dla różnych gęstości siatek i niejednorodności modelowanych za pomocą otworów. Uzyskane wyniki potwierdzają przydatność zaproponowanej metody.

Drozdov w [2.17] analizuje dynamiczne zachowanie kompozytów z włóknami szklanymi, interpretując ogólne makroodkształcenie materiału jako sumę odkształceń lepkosprężystych i lepkoplastycznych spowodowanych ścinaniem w mikrodomenach. Zbliżoną koncepcję proponuje Lubarda i współautorzy [2.48], których ideą jest stworzenie uogólnionego modelu lepkosprężystego-lepkoplastycznego będącego połączeniem, czy raczej kombinacją modeli szczegółowych. Takie podejście pozwoliłoby na odwzorowanie różnych rodzajów deformacji przez modele składowe z „przełączaniem” pomiędzy nimi w trakcie procesu cyklicznego obciążania. Współczynniki odpowiadające za współpracę modeli składowych byłyby określane w procedurach optymalizacyjnych.

Okoli i Smith [2.63], badając kompozyty typu epoksyd wzmocniany włóknom szklanym, stwierdzają, że niezależnie od objętości włókien wzmocniających ich współczynnik Poissona nie zależy od prędkości odkształcenia.

Goldberg i współautorzy [2.20], [2.86] proponują odmienną od omówionych dotychczas makroskopowych opisów interpretację zachowania kompozytu. Proponują bowiem model mikromechaniczny opisujący indywidualnie własności matrycy polimerowej i materiału włókien wzmocniających oraz sposobu ich wzajemnego połączenia. Celem takiego podejścia jest stworzenie dogodnego modelu dla implementacji w programie metody elementów skończonych. Obliczenia numeryczne rozciągania, uderzenia i *crash* testów pokazują zgodność stworzonego modelu z doświadczeniem dla wybranych kompozytów.

Autorzy pracy [2.105], badając próbki z mieszanek polipropylenu z octanooctylo-kopolimeru (POE – gumy) w testach rozciągania z dużymi prędkościami (uzyskiwana prędkość odkształcenia ≈ 208 1/s), zauważają wpływ udziału POE na efekt wzrostu granicy plastyczności (*brittle-ductile transition*). Podobne zachowanie się badanych mieszanek obserwowali w testach udarowych.

Badania nad zachowaniem kompozytów wzmocnianych włóknami omówione w artykule [2.62] pokazują, że obok podobieństw istnieją różnice w zachowaniu się wobec analogicznych obciążeń dynamicznych, wynikające z cech materiału włókien wzmocniających. Badane na pręcie Hopkinsona próbki wielowarstwowe (48 warstw) kompozytu były obciążane z prędkością odkształcenia 450 1/s. Porównywane włókna węglowe okazały się bardziej wrażliwe na prędkość odkształcenia od włókien szklanych, choć przy statycznym obciążeniu mają zbliżoną wytrzymałość. Autorzy stwierdzają, że w obciążeniach dynamicznych obniża się wpływ matrycy (która „nie nadąża”) na wytrzymałość kompozytu, zależącej w większym stopniu od własności wytrzymałościowych włókien. Proponują liniowe równanie konstytutywne dla omawianych w pracy materiałów. Wrażliwości na prędkość odkształcenia kompozytów wzmocnianymi włóknami szklanymi poświęcona jest także praca [2.106].

Obecność efektu prędkości odkształcenia potwierdzają autorzy [2.104] badający laminaty aluminiowe wzmocniane włóknami węglowymi. Testy dynamicznego rozciągania z prędkościami do 1200 1/s skłaniają ich do zaproponowania równania konstytutywnego łączącego liniowe wzmocnienie i statystyczną interpretację charakteryzowaną dwuparametrową funkcją Weibulla.

Przywołane w przeglądzie literatury prace [2.21], [2.28], [2.31], [2.33], [2.40], [2.109] wprawdzie nie dotyczą bezpośrednio dynamicznej stateczności konstrukcji cienkościennych, ale w sposób obszerny omawiają problematykę stateczności tych konstrukcji w obszarze sprężysto-plastycznym – dla materiałów izo- i ortotropowych (w tym kompozytów), będąc swoistym wprowadzeniem i poprzedzeniem problematyki stateczności dynamicznej z uwzględnieniem efektu prędkości odkształcenia. Podejście metodologiczne i wyniki tych publikacji były praktycznie wykorzystywane w niniejszej pracy.

Bezpośrednio tematyce stateczności dynamicznej z uwzględnieniem efektu prędkości odkształcenia poświęcone są prace zaliczone do trzeciej grupy – według podziału przyjętego na wstępie bieżącego przeglądu literatury.

W pracy [2.65] Paley i Abaudi proponują wyznaczanie naprężeń krytycznych dla swobodnie podpartej płyty z materiału lepkoplastycznego na podstawie jej rozwiązania dla liniowo-sprężystych własności materiału. Efekt lepkoplastyczny modelowany jest przez zastępcze moduły zależne od prędkości odkształcenia (rozpatrywano zakres prędkości odkształcenia od 10^{-7} do 10 1/s). Podejście takie może dotyczyć różnych prędkości obciążenia oraz warunków termicznych – o ile istnieje dla analizowanej płyty rozwiązanie liniowo-sprężyste. Jednakże uzyskane na podstawie tej metody obciążenie krytyczne nie określa stanu naprężenia materiału, to znaczy czy jest to stan sprężysty, czy plastyczny wobec faktu, że nie jest definiowany potencjał plastyczny.

Simitses i Song [2.83] stosują termo-lepkoplastyczne modele konstytutywne Bodnera-Partoma oraz Walkera w metodzie elementów skończonych, do analizy wyboczenia ściskanych osiowo, przegubowo podpartych płyt prostokątnych, które wcześniej były analizowane doświadczalnie przez Songa. Krzywe siła-skrócenie w stanie pokrytycznym dla obydwu modeli są praktycznie jednakowe. Uzyskiwany na krzywych punkt graniczny – zdaniem autorów, wynika ze sprężysto-plastycznego zachowania materiału. Dla grubszych płyt ($h/l > 0,02$) obserwowana jest zmiana postaci wyboczenia. Płyty grubsze są także bardziej wrażliwe od cienkich płyt na imperfekcje wstępne. Dla cienkich płyt punkt graniczny jest powyżej obciążenia krytycznego. Obydwa typy obciążenia krytycznego (punkt graniczny i obciążenie krytyczne) ulegają obniżeniu ze wzrostem temperatury. Czasy zadawanych obciążeń w rozpatrywanych przez autorów przypadkach są bliskie 800 sekundom, co świadczy, że analizowane przypadki dotyczą efektów lepkoplastycznych związanych z pełzaniem oraz temperaturą i nie mają charakteru *stricte* dynamicznego.

Z kolei w pracach [2.10], [2.99] Batry i Wei'a oraz [2.100] wraz z Yu stan dynamicznego wyboczenia płyty i powłoki walcowej analizowany jest metodą nałożenia nieskończenie małych zaburzeń. Płyta jest ściskana w swojej płaszczyźnie w dwóch prostopadłych kierunkach, a powłoka jest ściskana osiowo albo promieniowo. Stan krytyczny tych konstrukcji jest określany na podstawie długości fali zaburzenia. Za niestateczny autorzy przyjmują stan deformacji powierzchni, któremu towarzyszy maksymalna prędkość przyrostu ugięć nałożonych zaburzeń. W obydwu pracach – podobnie jak u Simitsesa i Songa oraz Paley'a i Aboudiego, zastosowany jest model konstytutywny materiału Bodnera-Partoma. Dla analizowanego materiału ortotropowego przyjmowane jest kryterium uplastycznienia Hilla. Stanom krytycznym w obydwu konstrukcjach towarzyszą odkształcenia plastyczne. Porównanie wyników obliczeń numerycznych z wynikami doświadczeń z referencyjnych publikacji wykazuje duże podobieństwo postaci wyboczenia.

Praca [2.52] jest pierwszą publikacją autora, w której zaprezentowane są wyniki analizy stateczności dynamicznej izotropowych kolumn z materiału lepkoplasyicznego. Kolejne [2.53], [2.54], [2.55] rozszerzają tę analizę także na konstrukcje cienkościenne z materiałów ortotropowych.

W formułowaniu równań dynamicznej stateczności zamieszczonych w rozdziale 5 wykorzystano sformułowania teoretyczne podane w pracach Reddy'ego [2.74], Washizu [2.97] oraz Zienkiewicza i Taylora [2.110], a sformułowania równań równowagi dla kompozytów oparto na pracy [2.31].

Zaprezentowany przegląd literatury nie pretenduje z oczywistych względów do omówienia wszystkich opublikowanych prac z obszaru tematycznego niniejszej pracy. Jest jedynie próbą względnie obszernego nakreślenia bieżącego stanu wiedzy ze szczególnym odniesieniem do tematyki bliskiej bądź bezpośrednio związanej lub wykorzystanej w niniejszej pracy.

2.1. Literatura

- [2.1] Abramovich H, Grunwald A., Stability of axially impacted composite plates, *Composite Structures*, 32, 1995, 151-158.
- [2.2] Abumeri G.H., Chamis C.C., Probabilistic dynamic buckling of smart composite shells, NASA/TM-2003-212710, 2003.
- [2.3] Adams M.J., Briscoe B.J., Corfield G.M., Lawrence C.J., Papathanasiou T.D., An Analysis of the plane-strain compression of viscoplastic materials, *J. Appl. Mech.*, 64, 1997, 420-424.
- [2.4] Ari-Gur J., Elishakoff I., Dynamic instability of a transversely isotropic column subjected to a compression pulse, *Computers & Structures*, 62, 5, 1997, 811-815.
- [2.5] Ari-Gur J., Simonetta S.R., Dynamic pulse buckling of rectangular composite plates, *Composites Part B*, 28B, 1997, 301-308.
- [2.6] Astanin V.V., Eksperimentalnoe isledovanie udarnovo szatia metalom v uprugoplasticeskich volnach nagruzenii intensivnostiu do 10000 MPa, *Zavodskaja laboratoria*, 46, 1980, 754-758.
- [2.7] Astanin V.V., Vysokoskorostnoje deformirovanie metalov, *Zavodskaja laboratoria*, 55, 1989, 88-92.
- [2.8] Auricchio F., A Viscoplastic constitutive equation bounded between two generalized plasticity models, *Int. J. Plasticity*, 13, 8-9, 1997, 697-721.
- [2.9] Barbero E.J., Trovillion J., Prediction and measurement of the post-critical behavior of fiber-reinforced composite columns, *Composites Science and Tech.*, 58, 1998, 1335-1341.
- [2.10] Batra R.C., Wei Z., Dynamic buckling of a thin thermoviscoplastic tectangular plate, *Thin-Walled Structures*, 43, 2005, 272-290.
- [2.11] Birman V., Problems of dynamic buckling of antisymmetric rectangular laminates, *Composite Structures*, 12, 1989, 1-15.
- [2.12] Bisagni C., Dynamic buckling of fiber composite shells under impulsive axial compression, *Thin-Walled Structures*, 43, 2005, 499-514.
- [2.13] Budiansky B., Roth R.S., Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shell, *Collected papers on instability of shell structures*, NASA TN D-1510, 1962, 591-600.

- [2.14] Chaboche J.L., A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories, *Int. J. Plasticity*, 24, 2008, 1642-1693.
- [2.15] Chakrabarty J., *Theory of plasticity*, McGraw –Hill Book Comp., NJ, 1987.
- [2.16] Chamis C.C., Abumeri G.H., Probabilistic dynamic buckling of composite shell structures, *Composites Part A*, 36, 2005, 1368-1380.
- [2.17] Drozdov A.D., Viscoelasticity and viscoplasticity of glassy polymers in the vicinity of the yield point, *Mechanics Research Communications*, 28, 3, 2001, 247-254.
- [2.18] Ganapathi M., Boisse P., Solaut D., Non-linear dynamic stability analysis of composite laminates under periodic in-plane compressive loads, *Int. J. Numerical Meth. In Engng.*, 46, 1999, 943-956.
- [2.19] Gilat A., Wu X., Plastic deformation of 1020 steel over wide range of strain rates and temperatures, *Int. J. Plasticity*, 13, 6-7, 1997, 611-632.
- [2.20] Gilat A., Goldberg R.K., Roberts G.D., Experimental study of strain-rate-dependent behavior of carbon/epoxy composite, *Comp. Science and Tech.*, 62, 2002, 1469-1476.
- [2.21] Grądzki R., *Analiza wpływu imperfekcji na zachowanie i nośność cienkościennych słupów*, *Zeszyty Nauk. 797, Rozprawy Nauk. 250*, Politechnika Łódzka, 1998.
- [2.22] Gryboś R., *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*, PWN, Warszawa-Poznań 1980.
- [2.23] Hashiguchi K., Okayasu T., Saitoh K., Rate-dependent inelastic constitutive equation: the extension of elastoplasticity, *Int. J. Plasticity*, 21, 2005, 463-491.
- [2.24] Hill R., *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, Oxford 1960.
- [2.25] Hutchinson J.W., Budiansky B., Dynamic buckling estimates, NASA CR-66030, 1965.
- [2.26] Huyan X., Simites G. J., Dynamic buckling of imperfect cylindrical shells under axial compression and bending moment; *AIAA Journal*, 35, 8, 1997, 1404-1412.
- [2.27] Jansen O., Langseth M., Hopperstand O.S., Experimental investigations on the behaviour of short to long square aluminum tubes subjected to axial loading, *Int. Journal of Impact Engineering*, 30, 2004, 973-1003.
- [2.28] Jones N., *Structural impact*, Cambridge University Press, 2003.
- [2.29] Kleiber M., Kotula W., Saran M., Numerical analysis of dynamic quasi-bifurcation, *Eng. Comput.*, 4, 1987, 48-52.
- [2.30] Kołakowski Z., Some aspects of dynamic interactive buckling of composite columns, *Thin-Walled Structures*, 45, 10-11, 2007, 866-871.
- [2.31] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K. (ed.), *Selected problems of instabilities in composite structures*, Monographs, Technical University of Lodz, 1999.
- [2.32] Kołakowski Z., Kubiak T., Interactive buckling of orthotropic thin-walled channels subjected to in-plane pulse loading, *Composite Structures*, 81, 2, 2007, 222-232.
- [2.33] Kowal-Michalska K., Nośność graniczna i stan zakrytyczny w obszarze sprężysto-plastycznym ściskanych płyt ortotropowych, *Zeszyty Nauk. 721, Rozprawy Nauk. 214*, Politechnika Łódzka, 1995.
- [2.34] Kowal-Michalska K. (red.), *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*, WNT, Warszawa 2007.
- [2.35] Kowal-Michalska K., Kołakowski Z., Mania R., Estimation of dynamic load factor for orthotropic plate subjected to in-plane pulse loading, *Proc. of Fourth Inter. Conf. on Thin-Walled Structures*, Loughborough, 2004, 415-422.
- [2.36] Kowal-Michalska K., Mania R., Wielokryterialna ocena stateczności dynamicznej płyt prostokątnych, VIII Konf. Naukowo-Techniczna Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania, Rynia 2003, nośnik elektroniczny.

- [2.37] Kowal-Michalska K., Mania R., Dynamic buckling load of thin-walled columns of closed cross-section subjected to pulse loading, Proc. of SSTA 2005, AA Balkema Pub., 2005, 353-358.
- [2.38] Kowal-Michalska K., Mania J.R., Some aspects of dynamic buckling of plates under in-plane pulse loading, Mechanics and Mechanical Eng., 12, 2, 2008, 135-146.
- [2.39] Królak M. (red.), Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich, PWN, Warszawa-Łódź 1990.
- [2.40] Królak M. (red.), Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich, Monografie, Politechnika Łódzka, 1995.
- [2.41] Kubiak T., Dynamic buckling of thin-walled composite plates with varying widthwise material properties, Int. J. of Solid and Structures, 45, 2005, 5555-5567.
- [2.42] Kubiak T., Interakcyjne wyboczenie dynamiczne cienkościennych słupów, Zeszyty Naukowe 998, Rozprawy Naukowe 358, Politechnika Łódzka, 2007.
- [2.43] Kubiak T., Criteria of dynamic buckling estimation of thin-walled structures, Thin-Walled Structures, 45, 10-11, 2007, 888-892.
- [2.44] Kubiak T., Mania R., Kotakowski Z., Kowal-Michalska K., Multi-modal analysis of dynamic response of thin-walled plated structures, 35th Solid Mechanics Conference, Kraków 2006.
- [2.45] Kwangsoo Ho, Krempf E., Modeling of positive, negative and zero rate sensitivity by using the viscoplasticity theory based on overstress (VBO), Mechanics of Time-Dependent Materials, 4, 2000, 21-42.
- [2.46] Lee Y., Prakash V., Numerical simulation of dynamic plastic shear instability under conditions of plane strain, Int. J. Solids Structures, 35, 28-29, 1998, 3755-3791.
- [2.47] Li L.-Y., Molyneux T.C.K., Dynamic instability criteria for structures subjected to sudden step loads, Int. J. Pres. Ves.&Piping, 70, 1997, 121-126.
- [2.48] Lubarda V.A., Benson D.J., Meyers M.A., Strain-rate effects in rheological models of inelastic response, Int. J. Plasticity, 19, 2003, 1097-1118.
- [2.49] Malinin N.N., Rżysko J., Mechanika materiałów, PWN, Warszawa 1981.
- [2.50] Mania R., Stateczność dynamiczna słupów ortotropowych pod obciążeniem impulsowym, Materiały XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane, 2006, 275-282.
- [2.51] Mania R.J., Dynamic buckling of laminated columns, stretching-flexural coupling effect, Euromech 498 Colloquium, Book of Abstracts, Warmiński J. (et al. ed.), Kazimierz D., 2008, 224-232.
- [2.52] Mania R.J., Strain-rate effect in dynamic buckling of thin-walled isotropic columns, Mechanics and Mechanical Eng., 12, 3, 2008, 189-200.
- [2.53] Mania R.J., Stateczność dynamiczna cienkościennych konstrukcji płytowych z materiałów lepkoplastycznych, Mat. XII Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane 2009, 271-278.
- [2.54] Mania R.J., Dynamiczne zachowanie słupów cienkościennych z materiałów lepkoplastycznych pod obciążeniem impulsowym, XI Konferencja Naukowo-Techniczna Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania, Pisz 2009.
- [2.55] Mania R.J., Dynamic buckling of orthotropic viscoplastic column, Thin-Walled Structures, (2009 przyjęty do druku).
- [2.56] Mania R., Kowal-Michalska K., Numeryczne aspekty modelu MES wyboczenia dynamicznego, IX Konferencja Naukowo-Techniczna Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania, Giżycko 2005, 363-370.
- [2.57] Mania R., Kowal-Michalska K., Behaviour of composite columns of closed cross-section under in-plane compressive pulse loading, Thin-Walled Structures, 45, 2006, 125-129.

- [2.58] Mania R., Kowal-Michalska K., Parametryczna analiza stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych metodą elementów skończonych, [w:] Niezgodą T. (red.), Numeryczne analizy wybranych zagadnień mechaniki, WAT, 2007.
- [2.59] Mania R.J., Kowal-Michalska K., Elasto-plastic dynamic response of thin-walled columns subjected to pulse compression, Proc. of SSTA 2009, CRC Press, 2010, 183-186.
- [2.60] Muc A., Mechanika kompozytów włóknistych, Ks. Akademicka, Kraków 2003.
- [2.61] Ochelski S., Metody doświadczalne mechaniki kompozytów konstrukcyjnych, WNT, Warszawa 2004.
- [2.62] Ochola R.O., Marcus K., Nurick G.N., Franz T., Mechanical behaviour of glass and carbon fiber reinforced composites at varying strain rates, Composite Structures, 63, 2004, 455-467.
- [2.63] Okoli O.I., Smith G.F., The effect of strain rate and fibre content on the Poisson's ratio of glassy/epoxy composites, Composite Structures, 48, 2000, 157-161.
- [2.64] Olszak W., Perzyna P., Sawczuk A. (red.), Teoria Plastyczności, PWN, Warszawa 1965.
- [2.65] Paley M., Aboudi J., Viscoplastic bifurcation buckling of plates, AIAA Journal, 29,4,1991, 627-631.
- [2.66] Papazoglou V.J., Tsouvalis N.G., Large deflection dynamic response of composite laminated plates under in-plane loads, Composite Structures, 33, 1995, 237-252.
- [2.67] Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H., Buckling and dynamic instability analysis of stiffened Shell panels, Thin-Walled Structures, 44, 2006, 321-333.
- [2.68] Pogodin-Aleksiejew G.I., Wytrzymałość dynamiczna i kruchość metali, WNT, Warszawa 1969.
- [2.69] Poursina M., Ebrahimi H., Paravizian J., Flow stress behavior of two stainless steel: An experimental-numerical investigation, J. Materials Processing Technology, 199, 2008, 287-294.
- [2.70] Perzyna P., Teoria lepkoplastyczności, PWN, Warszawa 1966.
- [2.71] Perzyna P., Klepaczko J., Bejda J., Nowacki W.N., Wierzbicki T., Zastosowania lepkoplastyczności, Wyd. PAN, Warszawa 1971.
- [2.72] Petry D., Fahlbush G., Dynamic buckling of thin isotropic plates subjected to in-plane impact, Thin-Walled Structures, 38, 2000, 267-283.
- [2.73] Rajendran R., Paik J.K., Lee J.M., Chae Y.H., Lee M.S., Creep life prediction of a high strength steel plate, Materials & Design, 29, 2008, 427-435.
- [2.74] Reddy J.N., Energy principles and variational methods in applied mechanics, John Willey&Sons, Inc., NJ, 2002.
- [2.75] Ristinmaa M., Ottosen N.S., Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity, Int. J. Solids and Structures, 37, 2000, 4601-4622.
- [2.76] Rui Y., Sun T.C., A constitutive model for AS4/PEEK thermoplastic composites under cyclic loading, NASA Research Center, CML 90-3, 1990.
- [2.77] Rusinek A., Zaera R., Klepaczko J.R., Constitutive relations in 3-D for a wide range of strain rates and temperatures –Application to mild steels, Int. J. Solids and Structures, 44, 2007, 5611-5634.
- [2.78] Sanchez-Saez S., Barbero E., Zaera R., Navarro C., Compression after impact of thin composite laminates, Composites Science and Technology, 65, 2005, 1911-1919.
- [2.79] Schokker A., Sridharan S., Kasagi A., Dynamic buckling of composite shells, Computers & Structures, 59, 1, 1996, 43-55.
- [2.80] Simitse G.J., Instability of dynamically-loaded structures, Appl. Mech. Rev., 40, 10, 1987, 1403-1408.

- [2.81] Simitse G.J., Dynamic stability of suddenly loaded structures, Springer, NJ, 1990.
- [2.82] Simitse G.J., Buckling of moderately thick laminated cylindrical shells: a review, Composites Part B, 27B, 1996, 581-587.
- [2.83] Simitse G.J., Song Y., Thermo-elstoviscoplastic buckling behavior of plates, J. Appl. Mech., 61, 1994, 169-175.
- [2.84] van der Sluis O., Schreurs P.J.G., Meijer H.E.H., Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenization, Mechanics of Materials, 31, 1999, 743-759.
- [2.85] Soh A.K., Bian L.C., Chakrabart J., Elastic/plastic buckling of a composite flat plate subjected to uniform edge compression, Thin-Walled Structures, 38, 2000, 247-265.
- [2.86] Tabiei A., Yi W., Goldberg R., Non-linear strain rate dependent micro-mechanical composite material model for finite element impact and crashworthiness simulation, Int. J. Of Non-linear Mechanics, 40, 2005, 957-970.
- [2.87] Tay T.E., Ang H.G., Shim V.P., An empirical strain rate-dependent constitutive relationship for glass-fibre reinforced epoxy and pure epoxy, Composite Structures, 38, 1995, 201-210.
- [2.88] Thiruppukuzhi S.V., Sun C.T., Testing and modeling high strain rate behavior of polymeric composites, Composites Part B, 29B, 1998, 535-546.
- [2.89] Thomas T., Mahfuz H., Carlsson L.A., Kanny K., Jeelani S., Dynamic compression of cellular cores: temperature and strain rate effects, Composite Structures, 58, 2002, 505-512.
- [2.90] Tylikowski A., Dynamic stability of functionally graded plate under in-plane compression, Mathematical Problems in Engineering, 2005:4, 411-424.
- [2.91] Tylikowski A., Dynamic stability of weak equations of rectangular plates, J. of Theoretical and App. Mechanics, 3, 46, 2008, 679-692.
- [2.92] Uenishi A., Teodosiu C., Constitutive modeling of the high strain rates behavior of interstitial-free steel, Int. J. Plasticity, 20, 2004, 915-936.
- [2.93] Volmir S.A., Ustoiczivost deformirujemych sistem, Nauka, Moskwa, 1967 (*w j. rosyjskim*).
- [2.94] Volmir A.S., Nieliniejnaja dinamika plastynek i oboloczek, Nauka, Moskwa, 1972 (*w j. rosyjskim*).
- [2.95] Voyiadjis G.Z., Thiagarajan G., An anisotropic yield surface model for directionally reinforced metal-matrix composites, Int. J. Plasticity, 11, 8, 1995, 867-894.
- [2.96] Wang X., Effects of constitutive parameters on adiabatic shear localization for ductile metal based on Johnson-Cook and gradient plasticity models, Trans. Nonferrous Met. Soc. China, 16, 2006, 1362-1369.
- [2.97] Washizu K., Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, Oxford 1974.
- [2.98] Weeks C.A., Sun C.T., Modeling non-linear rate-dependent behavior in fiber-reinforced composites, Composites Science and Technology, 58, 1998, 603-611.
- [2.99] Wei Z.G., Batra R.C., Dynamic buckling of thin thermoviscoplastic shell under radial impulsive loading, Thin-Walled Structures, 44, 2006, 1109-1117.
- [2.100] Wei Z.G., Yu J.L., Batra R.C., Dynamic buckling of thin cylindrical shell under axial impact, Int. J. Impact Eng., 32, 2005, 575-592.
- [2.101] Weller T., Abramovich H., Yaffe R., Dynamic buckling of beams and plates subjected to axial impact, Computers & Structures, 37, 1989, 835-851.
- [2.102] Wierzbicki T., Obliczanie konstrukcji obciążonych dynamicznie, Arkady, Warszawa 1980.
- [2.103] Witmer E.A., Pian T.H., Dynamic deformation and buckling of spherical shells under blast and impact loading, NASA TN D-1510, 1962.

- [2.104] Xia Y., Wang Y., Zhou Y., Jeelani S., Effect of strain rate on tensile behavior of carbon fiber reinforced aluminum laminates, *Materials Letters*, 61, 2007, 213-215.
- [2.105] Yang J., Zhang Y., Zhang Y., Brittle-ductile transition of PP/POE blends in both impact and high speed tensile tests, *Polymer*, 44, 2003, 5047-5082.
- [2.106] Zairi F., Nait-Abdelaziz M., Woznica K., Gloaguen J-M., Elasto-viscoplastic constitutive equations for the description of glassy polymers behavior at constant strain rate, *J. Eng. Materials and Technology*, 129, 2007, 29-35.
- [2.107] Zhang H., Zhang Z., Bie J., Zhou L., Chen J., Effect of viscosity on material behavior in friction stir welding process, *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 16, 2006, 1045-1052.
- [2.108] Zhao H., Gary G., The testing and behavior modeling of sheeey metals at strain rates from 10^{-4} to 10^4 s⁻¹, *Materials Science & Engineering*, A207, 1996, 46-50.
- [2.109] Zielnica J., *Stateczność powłok sprężysto-plastycznych*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 2001.
- [2.110] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The finite element method for solid and structural mechanics*, Elsevier, Oxford 2003.

3. CEL PRACY

W poprzednim rozdziale został zaprezentowany stan wiedzy dotyczący analizy stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych obciążonych impulsowo w płaszczyźnie ścian/y oraz badań nad lepkoplastycznymi własnościami materiałów konstrukcyjnych. Sama tematyka stateczności dynamicznej, czy też odpowiedzi na impulsowe obciążenie dynamiczne konstrukcji o ścianach płaskich nie jest szczególnie obficie obecna w literaturze światowej. Publikacje ostatnich lat dotyczące zachowania materiałów w warunkach wysokich prędkości odkształcenia świadczą o rosnącym zainteresowaniu tą tematyką badawczą. Obydwa obszary naukowe są rozwijane niejako równolegle. Wydaje się, że badania te powinny się wzajemnie uzupełniać. Stąd celem niniejszej pracy było połączenie bieżącej wiedzy z zakresu stateczności konstrukcji cienkościennych oraz teorii lepkoplastyczności dla materiałów konstrukcyjnych i przeprowadzenie analizy zachowania się konstrukcji tego typu pod działaniem dynamicznych obciążeń impulsowych o skończonym czasie działania. Prac łączących obydwie dziedziny – dla obciążeń dynamicznych, jak wynika z poprzedniego rozdziału w literaturze, znaleziono niewiele (pięć artykułów). Przeprowadzenie badań nad efektami takiego połączonego podejścia wydawało się naturalną kolejnością wobec dotychczasowych zainteresowań autora tematyką stateczności konstrukcji cienkościennych. Wcześniej analizowane konstrukcje płytowe, w tym typu sandwich, ortotropowe i kompozytowe, zarówno pod działaniem obciążeń statycznych jak i dynamicznych, były opisywane poprzez statyczne charakterystyki materiałowe. Tym razem do opisu materiału wprowadzono charakterystyki dynamiczne, uwzględniające efekty lepkoplastyczne w jego zachowaniu.

Wobec powyższego podstawowym celem niniejszej pracy było określenie i zbadanie, na ile uwzględnienie własności lepkoplastycznych materiału płytowej konstrukcji cienkościennej wpływa na wartość krytycznego obciążenia dynamicznego. Odpowiedź na to pytanie jest istotna wobec potrzeby coraz bardziej precyzyjnego obliczania konstrukcji obciążanych dynamicznie i to zarówno ze względów bezpieczeństwa, jak i oszczędności materiału. Dodatkowo, analiza sprzężonych zagadnień pogłębia wiedzę na temat czynników mających istotny wpływ na zachowanie się cienkościennych słupów pod działaniem impulsowego ściskania. Wśród czynników tych rozważano między innymi imperfekcje wstępne, różny kształt i czas trwania impulsu oraz stałe materiałowe występujące w konstytutywnym opisie materiału lepkoplastycznego. W stosunku do materiałów kompozytowych liczba tych czynników jest jeszcze większa

i często doświadczenie wyniesione z analizy materiałów „klasycznych” jest złudne przy próbie przewidywania wyników dla kompozytów. Wobec tego celem pracy było także zapoczątkowanie badań nad wyboczeniem dynamicznym konstrukcji z materiałów kompozytowych przy uwzględnieniu ich wrażliwości na prędkość odkształcenia. Implikowało to przyjęcie w niniejszej pracy rozwiązania bazującego na teorii ścinania pierwszego rzędu – uznawanej za teorię opisującą pole przemieszczeń w laminatach bardziej ogólnie od klasycznej teorii cienkich płyt warstwowych, oraz zastosowane równania konstytutywne dla płyt wielowarstwowych. Potwierdzeniem celowości takich badań są rezultaty uzyskane dla materiałów izotropowych i ortotropowych oraz wyniki dla kompozytów wielowarstwowych, które można potraktować jako wstęp do dalszych szczegółowych analiz.

W przedstawionym przeglądzie literatury jest wymienionych kilka publikacji, w których dla analizowanej płyty czy powłoki walcowej zastosowano model uwzględniający własności dynamiczne materiału. Są to jednak rozwiązania jednomodelowe, tzn. otrzymane przy opisie konstytutywnym tylko dla teorii lepkoplastyczności. Nie dokonywano w nich porównania wyników rozwiązań uzyskanych przy odmiennych podejściach odnośnie modelu materiału. W cytowanych pracach Chaboche’a, Lubardy czy Kłosowskiego i Woznicy znajdują się porównania różnych modeli lepkoplastycznych w ogólnym odniesieniu do ciała stałego. Nie ma tam jednak wyników takiego, choćby fragmentarycznego porównania dla konstrukcji cienkościennych w ogóle, czy dla ich stateczności dynamicznej w szczególności. Wydaje się zatem, że niniejsza praca może być zacznem dla takich analiz porównawczych.

Zastosowana w rozwiązaniu metoda elementów skończonych pozwala dość „blisko” zbliżyć się modelowi do konstrukcji rzeczywistej, dając jednocześnie bardzo obfity materiał wyników. Jest on bazą do szerokiej analizy, w pewnym stopniu zbliżonej do analizy eksperymentu, wobec zastosowanej procedury nazywanego eksperymentem numerycznym. Dodatkowo daje możliwość zaimplementowania do kodu podstawowego modułu z opisem własności materiału z indywidualnym równaniem konstytutywnym. Jest to podejście konieczne dla materiałów kompozytowych wzmacnianych włóknami, dla których istnieją odrębne modele konstytutywne dla stanu lepkoplastycznego, zależne od użytego materiału matrycy i włókien wzmacniających.

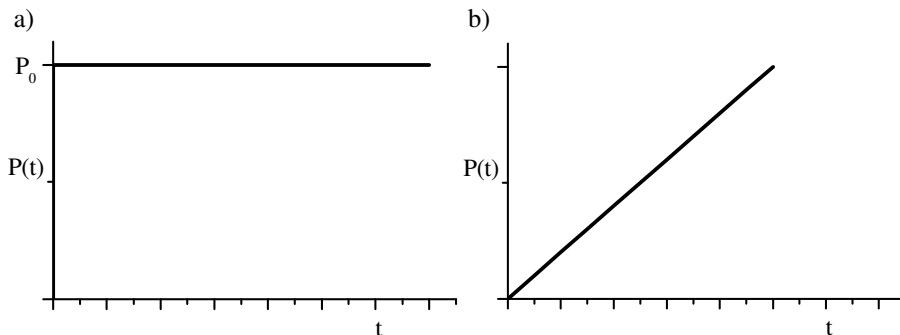
Sprawdzono także przydatność stosowanych dotychczas kryteriów stateczności dynamicznej w analizie stanów lepkoplastycznych oraz określono różnice w wartości obciążenia wynikające ze stosowania różnych kryteriów.

Reasumując, podstawowym celem niniejszej pracy było zbadanie różnic pomiędzy dynamicznym obciążeniem krytycznym wyznaczonym dla konstrukcji z materiału niewrażliwego na prędkość odkształcenia oraz obciążeniem krytycznym, którego wartość uzyskano przy uwzględnieniu własności lepkoplastycznych

materiału płytowej konstrukcji cienkościennej. Jak wspomniano we wstępie i co wynika z przeprowadzonego przeglądu literatury, prac poświęconych temu zagadnieniu w odniesieniu do konstrukcji płytowych (słupów) dotychczas nie prowadzono. Wydaje się, iż rozważenie tego problemu może przyczynić się do bardziej racjonalnego projektowania konstrukcji cienkościennych pracujących w warunkach dynamicznych obciążeń impulsowych.

4. RODZAJE OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH

W analizie stateczności konstrukcji płytowych rozważa się zazwyczaj obciążenia ściskające działające wzdłuż osi konstrukcji lub w jej płaszczyźnie. Rozpatrywane są także przypadki działania momentu gnącego lub skręcającego bądź kombinacje wymienionych obciążeń. W przypadku powłok – dodatkowo analizowane jest działanie ciśnienia zewnętrznego i momentu skręcającego. W przypadku zagadnień dynamicznych obciążenia konstrukcji płytowych mogą mieć dowolny przebieg opisany w funkcji czasu. Obejmuje to obciążenia zadawane konstrukcji nagle i trwające przez skończony przedział czasu. Analizowane są także obciążenia dynamiczne działające nieskończenie długo. Z uwagi na czas trwania można zatem wyróżnić obciążenia impulsowe, quasi-impulsowe oraz quasi-statyczne. Ich przebieg jest opisany funkcją czasu. Oznaczając przez $P(t)$ dowolne obciążenie dynamiczne, przez P_0 jego amplitudę, a przez T_p czas działania tego obciążenia, można zdefiniować kilka najczęściej analizowanych wymuszeń dynamicznych:



Rys. 4.1. Impuls skokowy (a) oraz liniowo-narastający (b)

4.1. nagle zadane obciążenie o stałej amplitudzie i nieskończonym czasie trwania (rys. 4.1a):

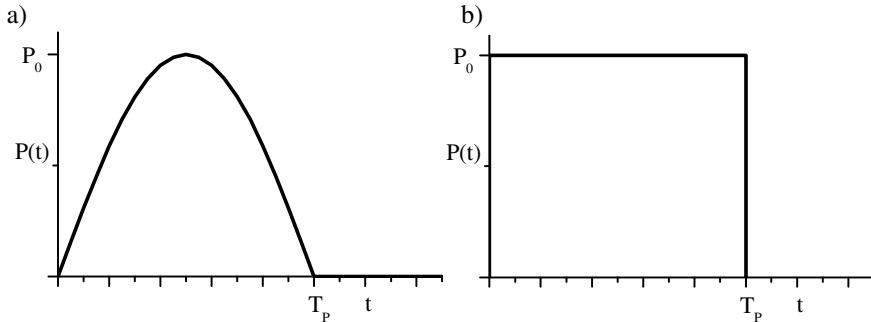
$$P(t) = H(t) \cdot P_0 \quad \text{dla } t \geq 0, \quad (4.1)$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a;

4.2. obciążenie narastające ze stałą prędkością (rys. 4.1b) omawiane między innymi w pracach Volmira [4.4]:

$$P(t) = s \cdot t \quad \text{dla } t \geq 0, \quad (4.2)$$

gdzie s jest stałą szybkością narastania obciążenia;



Rys. 4.2. Impuls sinusoidalny i impuls prostokątny

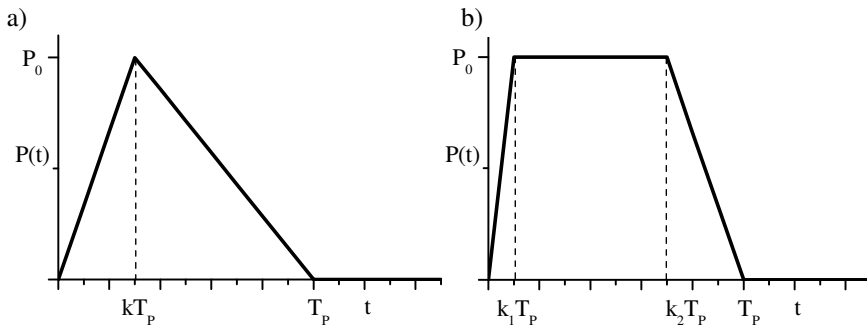
4.3. impuls sinusoidalny (rys. 4.2a):

$$P(t) = P_0 \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{T_p}\right) \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T_p \\ t > T_p \end{array} \quad (4.3)$$

$$P(t) = 0$$

Pole powierzchni pod linią przebiegu impulsu sinusoidalnego – nazywane całkowitą wartością impulsu [4.5], można określić z zależności:

$$A = \int_0^{T_p} P_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T_p}\right) dt = \frac{2T_p}{\pi} P_0 \quad (4.4)$$



Rys. 4.3. Impulsy trójkątny i trapezowy

4.4. impuls prostokątny (rys. 4.2b):

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 & 0 \leq t \leq T_p \\ P(t) &= 0 & t > T_p \end{aligned} \quad (4.5a)$$

odpowiednio pole powierzchni impulsu prostokątnego wynosi:

$$A = T_p P_0 \quad (4.5b)$$

4.5. impuls trójkątny (rosnący w czasie kT_p i malejący w czasie $(1-k)T_p$; $k \in \langle 0,1 \rangle$) (rys. 4.3a):

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 \frac{t}{kT_p} & 0 \leq t \leq kT_p \\ P(t) &= P_0 \left(1 - \frac{t}{kT_p} \right) & kT_p \leq t \leq T_p \\ P(t) &= 0 & t > T_p \end{aligned} \quad (4.6a)$$

a pole impulsu wynosi:

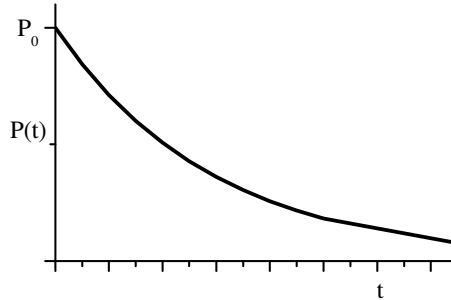
$$A = 1/2 T_p P_0 \quad (4.6b)$$

4.6. impuls trapezowy (rys. 4.3b):

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 \frac{t}{k_1 T_p} & 0 \leq t \leq k_1 T_p - \\ P(t) &= P_0 & k_1 T_p \leq t \leq k_2 T_p \\ P(t) &= P_0 \left(1 - \frac{t}{k_2 T_p} \right) & k_2 T_p \leq t \leq T_p - \\ P(t) &= 0 & t > T_p \end{aligned} \quad (4.7a)$$

gdzie $k_1, k_2 \in \langle 0,1 \rangle$ są procentowymi udziałami w ogólnym czasie działania impulsu czasu narastania obciążenia do wartości amplitudy oraz odpowiednio zanikania obciążenia. Dla tego impulsu pole pod wykresem określa zależność:

$$A = \frac{T_p + (k_2 - k_1)T_p}{2} P_0 \quad (4.7b)$$



Rys. 4.4. Impuls wykładniczy

4.7. impuls wykładniczy malejący (rys. 4.4):

$$P(t) = P_0 e^{-at}; \quad a > 0 \quad t \geq 0 \quad (4.8a)$$

dla którego pole pod krzywą impulsu w przybliżeniu określa zależność:

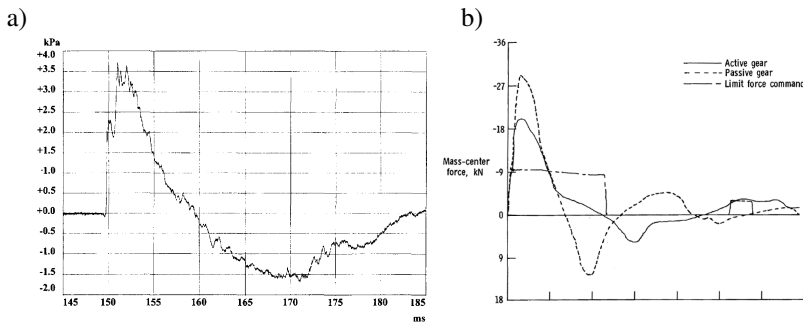
$$A = \frac{P_0}{a} (1 - e^{-t}) \approx (1 - \frac{a}{2}) P_0 \quad (4.8b)$$

W literaturze rozpatrywane są także inne charakterystyki impulsów, np. paraboliczny, sinusoidalny kwadratowy, trójkątny skokowy o różnych nachyleniach charakterystyki czy impuls nieregularny będący kombinacją impulsów sinusoidalnych o zmiennej w czasie amplitudzie [4.2]. Podane przy każdym z opisanych impulsów wyrażenie na pole powierzchni pod krzywą impulsu jest wykorzystywane przy porównywaniu skutków działania impulsów o różnych charakterystykach, ale jednakowym czasie działania. Impulsy, których pola powierzchni pod charakterystyką są liczbowo równe, z mechanicznego punktu widzenia są impulsami sobie równymi. Niekiedy porównuje się skutki działania różnych impulsów, przyjmując jednakowe amplitudy oraz jednakowe czasy obciążenia.

Przedstawione charakterystyki impulsów dynamicznych nie wynikają jedynie z analitycznego czy czysto matematycznego podejścia do opisu zjawisk dynamicznych. Przytoczone kształty impulsów mają bardzo konkretną interpretację fizyczną, a ośrodek przekazujący obciążenie dynamiczne (energię) może być dowolny. Kształt opisany sinusoidą ma krótkotrwałe obciążenie spowodowane uderzeniem fali morskiej o burtę statku i przenoszące się na jego poszycie. Prostokątny przebieg obciążenia w czasie odpowiada uderzeniu masą, która odbija się po uderzeniu. Podobny charakter mają przebiegi obciążenia, jakim podlegają elementy dna szybkich łodzi motorowych czy ślizgaczy. Przebieg trapezowy mają impulsy dynamiczne spowodowane przez nagłe powiewy wiatru na poszycie skrzydeł samolotu. Podobne impulsy powstają także w wyniku nagłych, gwałtownych zwrotów i manewrów wykonywanych przez obiekt latający w trakcie lotu. Z kolei przebieg wykładniczy opisuje obciążenia wywołane wybuchem, przy

czym bywa on aproksymowany kształtem trójkąta. Także charakter trójkąta – trójkąt o skokowo zmiennym nachyleniu, nadaje się impulsowi, który jest opisem wybuchu nuklearnego.

Pokazane schematycznie na rysunkach charakterystyki wymuszeń dynamicznych mają swoje potwierdzenie eksperymentalne. Pewne dynamiczne zjawiska fizyczne czy warunki pracy konstrukcji generowane w warunkach laboratoryjnych pozwalały na rejestrację przebiegu obciążenia oraz odpowiedzi konstrukcji. Poniżej przytoczone są przykładowe zapisy impulsowego obciążenia z badań doświadczalnych opublikowanych w podanych pracach źródłowych.



Rys. 4.5. Zarejestrowany przebieg ciśnienia fali wybuchu (a) [4.1] oraz przebieg zredukowanej siły w podwoziu podczas lądowania (b) [4.3]

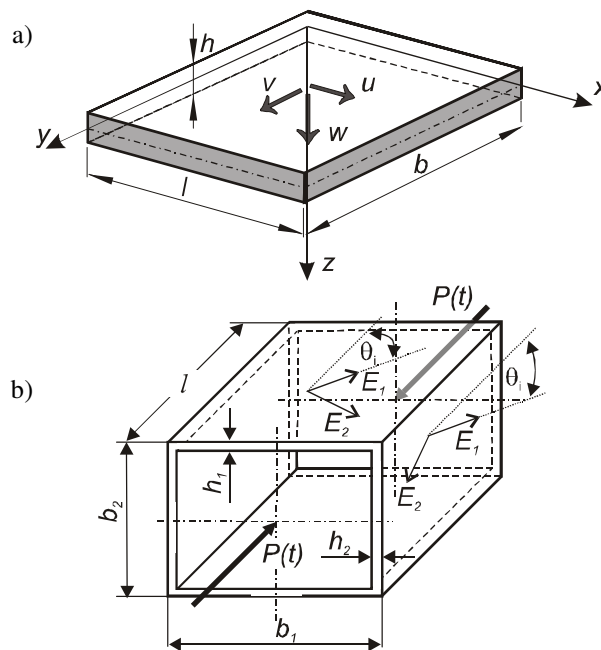
4.1. Literatura

- [4.1] Formby S.A., Wharton R.K., Blast characteristics and TNT equivalence values for some commercial explosives detonated at ground level, *J. of Hazardous Mat.*, 50, 1996, 183-198.
- [4.2] Gryboś R., *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*, PWN, Warszawa-Poznań 1980.
- [4.3] McGehee J.R., Dreher R.C., Experimental investigation of active loads control for aircraft landing gear, *NASA Technical Paper 2042*, 1892.
- [4.4] Volmir A.S., *Nielinielnaja dynamika plastinok i oboloczek*, Wyd. Nauka, Moskwa 1972 (w j. rosyjskim).
- [4.5] Wierzbicki T., *Obliczanie konstrukcji obciążonych dynamicznie*, Arkady, Warszawa 1980.

5. RÓWNANIA RUCHU – PODSTAWOWE RÓWNANIA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ

5.1. Zależności FSĐT

Celem tego rozdziału jest przedstawienie podstawowych zależności i wyrowadzonych na ich podstawie równań dynamicznej stateczności cienkościennych konstrukcji płytowych z materiałów kompozytowych. Analiza zagadnienia została przeprowadzona na bazie dwuwymiarowej (2D) teorii płyt kompozytowych, uwzględniającej efekt odkształcenia postaciowego (ścianania) w zginaniu płyty – *First-Order Shear Deformation Theory (FSĐT)* – teorii ścinania pierwszego rzędu [5.6], [5.12], [5.14] oraz nieliniowej teorii płyt Marguerre’a – von Karmana [5.4]. Przyjęcie powyższego modelu obliczeniowego wiąże się ze spełnieniem następujących założeń podstawowych:



Rys. 5.1. Model: a) płyty; b) słupa wraz z układem odniesienia

- a. grubość płyty jest stała i względnie mała w porównaniu z jej długością i szerokością (wielokrotnie mniejsza),
- b. zakłada się płaski stan naprężenia w płycie, tj. naprężenia w płaszczyźnie płyty (płaszczyzna $x-y$) są dominujące. Wówczas naprężenia normalne σ_{zz} w kierunku prostopadłym do płyty przyjmuje się równe zero, natomiast naprężenia styczne w płaszczyznach prostopadłych do powierzchni płyty σ_{xz} , σ_{yz} przyjmuje się jako małe wielkości w porównaniu ze składowymi naprężeniami σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} działającymi w płaszczyźnie płyty,
- c. przemieszczenia powierzchni środkowej płyty nie zależą od współrzędnej z ,
- d. płyta jest wykonana z materiału ortotropowego o własnościach opisanych krzywą obciążenie-skrócenie w zakresie sprężystym i sprężysto-lepkoplastycznym,
- e. płyta jest homogeniczna, wielowarstwowa,
- f. każda warstwa jest ortotropowa i ma stałą grubość,
- g. warstwy są idealnie połączone ze sobą,
- h. pomija się oddziaływanie pomiędzy warstwami w płycie wielowarstwowej w kierunku normalnym do powierzchni środkowej,
- i. odkształcenia ε_{xx} , ε_{yy} , γ_{xy} są małe w porównaniu z jednością,
- j. przemieszczenia płyty mogą być rozpatrywane w ramach teorii von Karmana i Marguerre'a,
- k. przyjęte pole przemieszczeń płyty jest zgodne z teorią ścinania pierwszego rzędu (*FSDT*), zgodnie z którą prosta normalna do powierzchni środkowej pozostaje prosta, lecz nie jest normalna do odkształconej powierzchni środkowej. Implikuje to stałą wzdłuż grubości płyty wartość odkształceń postaciowych γ_{xz} , γ_{yz} , co wymaga wprowadzenia współczynników korekcyjnych (podrozdział 5.4).

5.2. Stan przemieszczeń i odkształceń

W pracy analizowano cienkie płyty oraz krótkie cienkościenne słupy o przekrojach zamkniętych. Słupy były zbudowane z prostokątnych ścian wzajemnie prostopadłych na wspólnych krawędziach. Dawało to prostokątny przekrój poprzeczny słupa, posiadający dwie osie symetrii (rys. 5.1b). Przyjmowano, że obciążone krawędzie płyty/słupa są przegubowo podparte i w trakcie obciążenia pozostają proste oraz odpowiednio wzajemnie równoległe. Jeśli chodzi o materiał ścian, to analizowano konstrukcje cienkościenne wykonane z materiałów izotropowych oraz materiałów ortotropowych. Dla tych ostatnich główne kierunki ortotropii pozostawały równoległe do krawędzi płyty/słupa bądź mogły tworzyć z tymi krawędziami kąt θ_i , $0^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$, którego wartość mogła być określana indywidualnie dla każdej ściany (patrz rys. 5.1). Kąt ten dla materiałów

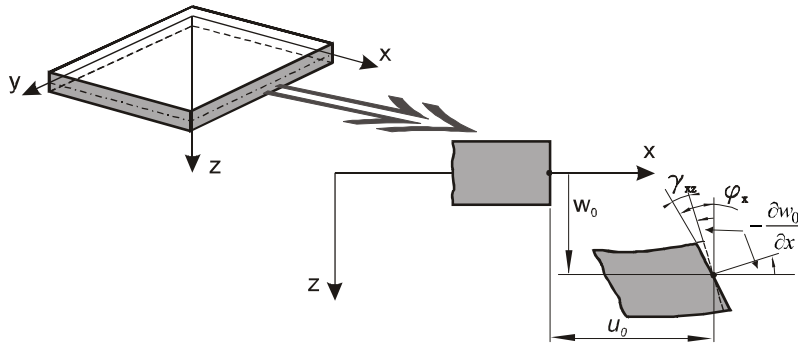
warstwowych określano mianem kąta laminacji. Zgodnie z założeniami podstawowymi przyjęto model płytowy (2D) konstrukcji cienkościennej, a wobec odniesienia do teorii ścinania pierwszego rzędu (*FSDT*) pole przemieszczeń zdefiniowano w następującej formie:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &\equiv w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie u_0, v_0, w_0 są przemieszczeniami punktu w płaszczyźnie środkowej ($z = 0$) równoległymi odpowiednio do osi x, y, z , lokalnego kartezjańskiego układu odniesienia. Układ ten pokrywa się z płaszczyzną środkową płyty przed wyoboczeniem. Natomiast φ_x, φ_y oznaczają obroty normalnej do powierzchni środkowej względem osi y oraz x – odpowiednio (rys. 5.2). Dla płyt o proporcji długości krawędzi do grubości rzędu 50 i więcej, rotacje φ_x, φ_y zdążają do wartości równej nachyleniu odkształconych krawędzi płyty:

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (5.2)$$

Wówczas wyniki analizy *FSDT* są zbieżne z podejściem wynikającym z Klasycznej Teorii Płyt Warstwowych (*Classical Laminate Plate Theory*) [5.7].



Rys. 5.2. Geometria odkształceń zgodnie z założeniami *FSDT*

Dla każdej z płyt samodzielnej lub będącej ścianą słupa do opisu odkształceń powierzchni środkowej przyjęto następujący tensor odkształcenia [5.3], [5.4], [5.11]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
\varepsilon_{zz} &= 0 \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Tensor odkształcenia (5.3) można zapisać w macierzowej postaci jako sumę:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \varepsilon^{(0)} + z\varepsilon^{(1)} \tag{5.4}$$

części membranowej (5.5a) i części związanej ze zginaniem (5.5b), pomnożonej w zależnościach (5.3) przez współrzędną z :

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{5.5a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.5b)$$

Jak wynika z postaci części zgięciowej (5.5b) tensora odkształcenia (5.3-5.4), przyjęte zależności dla krzywizn mają charakter liniowy, co uznawane jest za „największe” ograniczenie teorii cienkich płyt [5.15].

5.3. Związki konstytutywne płyt warstwowych

W płaskim stanie naprężenia zależności naprężenie-odkształcenie dla materiału ortotropowego w układzie odniesienia związanym z kierunkami głównymi ortotropii 1-2 (w lokalnym układzie odniesienia) mają następującą postać [5.3], [5.4], [5.9]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.6a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{Bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad (5.6b)$$

Równania (5.6) odnoszą się do k -tej, pojedynczej warstwy płyty – laminy, zaś $Q_{ij}^{(k)}$ są sztywnościami definiowanymi przez stałe materiałowe (tzw. „stałe inżynierskie”) k -tej warstwy:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & & & & \\ Q_{44} &= G_{13}, & Q_{55} &= G_{23} \end{aligned} \quad (5.7)$$

W zależnościach (5.7) E_1 , E_2 są modułami Younga w głównych kierunkach ortotropii (odpowiednio 1 i 2), G_{12} jest modułem Kirchhoffa w płaszczyźnie 1-2, a G_{13} oraz G_{23} są modułami odkształcenia postaciowego w płaszczyźnie 1-3 i 2-3,

odpowiednio. Współczynniki Poissona ν_{12}, ν_{21} zgodnie z twierdzeniem Betty'ego-Maxwella muszą spełniać następującą zależność:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12} \quad (5.8)$$

Wobec faktu, że płyta wielowarstwowa jest zbudowana z wielu lamin, których główne kierunki ortotropii są zorientowane pod różnym kątem względem krawędzi płyty, należy dokonać transformacji równań (5.6) do globalnego układu odniesienia x, y, z związanego z całą płytą, zazwyczaj powiązanego z jej krawędziami. Wówczas związki naprężenie-odkształcenie w globalnym układzie odniesienia przyjmują postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.9a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{Bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5.9b)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4, \\ \bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4, \\ \bar{Q}_{16} &= \bar{Q}_{61} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})mn^3, \\ \bar{Q}_{26} &= \bar{Q}_{62} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4). \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2, \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn, \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}n^2 + Q_{44}m^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

a m oraz n oznaczają odpowiednio sinus i kosinus zorientowanego kąta laminacji θ (rys. 5.1) [5.4]. Całkując naprężenia (5.9) po grubości płyty, uzyskuje się wyrażenia na wypadkowe siły i momenty przekrojowe w następującej postaci:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^p \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (5.11a)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^p \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} z dz \quad (5.11b)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^p \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (5.12)$$

W finalnej postaci równań (5.11) i (5.12) wykorzystano założenie stałej wartości sztywności (5.10) na grubości k -tej warstwy, co pozwoliło zastąpić całkę sumą całek. Górna granica sumowania p jest równa liczbie warstw płyty.

W płycie wielowarstwowej poprzeczne naprężenia tnące σ_{xz} , σ_{yz} zmieniają się paraboliczne po grubości, stąd wobec założonego zgodnie z *FSDT* polem przemieszczeń – wynika z niego stała wartość poprzecznych naprężeń tnących, konieczne jest wprowadzenie do równań (5.12) współczynnika korekcji odkształceń k_R ([5.8], [5.9]) w równaniach definiujących wypadkowe siły poprzeczne:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_R \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (5.13)$$

Wartość współczynnika korekcji k_R wyznacza się, porównując energię ścinania wynikającą z rozkładu naprężeń zgodnego z *FSDT* obliczanych równaniami (5.13) z energią określoną na podstawie zależności definiowanych przez teorię sprężystości. Dla przykładu, robiąc takie porównanie dla belki o przekroju prostokątnym, wartość tego współczynnika można określić na $k_R = 5/6$. Niekiedy przyjmuje się $k_R = \pi^2/12$ [5.17].

Po uwzględnieniu w związkach fizycznych (5.9) postaci (5.4) tensora odkształceń i wykonaniu całkowania, równania (5.11a) i (5.11b) przedstawiane są w zwartej, macierzowej postaci [5.3]:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

gdzie:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^p (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (5.15)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (5.16)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^p (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (5.17)$$

Natomiast w wyniku obecności sił poprzecznych (5.12), w macierzy $[A]$ po wykonaniu całkowania związanego z naprężeniami σ_{xz} , σ_{yz} otrzymuje się dodatkowe – wobec definiowanych w klasycznej teorii płyt warstwowych (*CLPT*), wyrazy A_{44} , A_{45} i A_{55} wyrażone poprzez całki:

$$\begin{aligned} (A_{44}, A_{45}, A_{55}) &= \int_{-h/2}^{h/2} [(\bar{Q}_{44})_k, (\bar{Q}_{45})_k, (\bar{Q}_{55})_k] dz = \\ &= \sum_{k=1}^p [(\bar{Q}_{44})_k, (\bar{Q}_{45})_k, (\bar{Q}_{55})_k] (z_k - z_{k-1}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ostatecznie dla teorii ścinania pierwszego rzędu (*FSDT*) – zapisując macierz $[K]$ w równaniach (5.14) w pełnej postaci i uwzględniając korekcję (5.13), otrzymuje się następujące związki konstytutywne:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{31} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathcal{E}^{(0)}\} \\ \{\mathcal{E}^{(1)}\} \end{Bmatrix} \quad (5.19a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_{/x} \end{Bmatrix} = k_R \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{yz}^{(0)} \\ \mathcal{E}_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (5.19b)$$

W macierzy $[K]$ w równaniach (5.14) podmacierz $[A]$, określona zależnością (5.15), związana z odpowiedzią w płaszczyźnie laminatu/płyty jest nazywana sztywnością rozciągania (wzdłużną). Podmacierz $[D]$, wyrażona równaniem (5.17), odpowiadająca zginaniu laminatu z płaszczyzny środkowej nosi nazwę sztywności giętej, natomiast podmacierz $[B]$, opisana wzorem (5.16), spowodowana jest istnieniem sprzężenia pomiędzy siłami $\{N\}$ i momentami $\{M\}$ lub pomiędzy

odkształceniami $\{\varepsilon^{(0)}\}$ i $\{\varepsilon^{(1)}\}$, nosi nazwę sztywności sprzężenia (lub interakcji). Wyrazy macierzy sztywności w równaniach (5.19b) są – jak wspomniano, dodatkowymi elementami macierzy sztywności rozciągania. Wyrazy K_{ij} macierzy $[K]$ są równe odpowiednim wyrazom podmacierzy $[A]$, $[B]$ oraz $[D]$, wynikającym z ich lokalizacji w macierzy $[K]$ [5.2], [5.3].

5.4. Równania dynamicznej stateczności płyt FSDT

Równania dynamicznej stateczności płyt kompozytowych zgodnie z teorią ścinania pierwszego rzędu (*FSDT*) zostaną wyprowadzone na podstawie zasady Hamiltona, która jest uogólnieniem zasady przemieszczeń przygotowanych na zagadnienia dynamiczne. Zasada Hamiltona zakłada [5.3], że analizowany idealny układ zachowawczy jest opisany przez dwie funkcje energii kinetycznej K oraz potencjalnej Π i stwierdza, iż spośród wszystkich zgodnych z więzami możliwych przemieszczeń układu w przedziale czasu (t_0, t_1) realizowany jest ruch, dla którego funkcja Lagrange'a Λ osiąga wartość stacjonarną:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Lambda dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0 \quad (5.20)$$

W równaniu (5.20) K jest energią kinetyczną układu, a Π oznacza całkowitą energię potencjalną układu. Przyjmując całkowitą energię potencjalną w postaci sumy energii odkształcenia sprężystego U i pracy sił zewnętrznych W , zasadę Hamiltona można przedstawić następująco:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Lambda dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} [K - (U + W)] dt = 0 \quad (5.21)$$

lub przenosząc wariacje pod znak całki:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U + \delta W - \delta K) dt = 0 \quad (5.22)$$

Dla i -tej płyty/ściany słupa poszczególne składniki funkcji Lagrange'a są zdefiniowane przez następujące całki [5.13]:

$$\delta U = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (5.23)$$

$$- \delta W = \int_{\Omega} q \delta w dx dy + \int_{\Gamma} \left[\frac{h}{2} [\sigma_{nn} \delta \varepsilon_{nn} + \sigma_{ns} \delta \varepsilon_{ns} + \sigma_{nz} \delta w_0] dz ds \right. \quad (5.24)$$

$$\left. \delta K = \int_V \rho [u_{,t} \delta u_{,t} + v_{,t} \delta v_{,t} + w_{0,t} \delta w_{0,t}] dV \quad (5.25)$$

W całkach (5.23) i (5.25) wprowadzono granice całkowania $V = \Omega \cdot h = lbh$ (V – objętość analizowanej płyty, Ω – pole powierzchni nieodkształconej warstwy środkowej, Γ – długość krawędzi płyty). Przez ρ oznaczono gęstość płyty, zaś σ_{nn} , σ_{ns} , σ_{nz} oznaczają dokrytyczne obciążenia zewnętrzne działające na brzegach płyty/ściany w jej płaszczyźnie środkowej [5.9], [5.10]. Powyżej pominięto także indeks i oznaczający i -tą płytę/ścianę słupa. Funkcja Lagrange’a całego układu (słupa) jest równa sumie funkcji Λ_i wszystkich płyt składowych.

Wstawiając następnie do równań (5.23)-(5.25) wyrażenia na siły i momenty przekrojowe (5.11) oraz (5.12) przy uwzględnieniu odkształceń (5.4), po scałkowaniu wzdłuż grubości płyty otrzymuje się wariację funkcji Lagrange’a dla i -tej płyty/ściany:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\{ \int_{\Omega} [N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} + \right. \\ & + Q_x \delta \gamma_{xz}^{(0)} + Q_y \delta \gamma_{yz}^{(0)} - q \delta w_0 - I_0 (u_{0,t} \delta u_{0,t} + v_{0,t} \delta v_{0,t} + w_{0,t} \delta w_{0,t}) + \\ & - I_1 (\varphi_{x,t} \delta u_{0,t} + \varphi_{y,t} \delta v_{0,t} + \delta \varphi_{x,t} u_{0,t} + \delta \varphi_{y,t} v_{0,t}) - I_2 (\varphi_{x,t} \delta \varphi_{x,t} + \varphi_{y,t} \delta \varphi_{y,t}) \left. \right\} dx dy + \\ & - \int_{\Gamma} (N_{nn,t} \delta u_n + N_{ns,t} \delta u_s + M_{nn,t} \delta \varphi_n + M_{ns,t} \delta \varphi_s + Q_n \delta w_0) ds \left. \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Występujące w (5.26) masowe momenty bezwładności uzyskuje się z obliczenia całek (5.27):

$$\left\{ \begin{array}{l} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \right\} \rho dz \quad (5.27)$$

przy czym gęstość ρ może być definiowana indywidualnie dla każdej warstwy.

Całkując przez części wariacje funkcji Lagrange’a (5.26) (stosując twierdzenie Greena dla całki powierzchniowej) [5.13], otrzymuje się następującą sumę całek:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \{ [-N_{xx,x} - N_{xy,y} - (N_{xx}u_{0,x})_{,x} - (N_{yy}u_{0,y})_{,y} - (N_{xy}u_{0,x})_{,y} - (N_{xy}u_{0,y})_{,x} + \\
& \quad + I_0u_{0,tt} + I_1\varphi_{x,tt}] \delta u_0 + \\
& \quad [-N_{xy,x} - N_{yy,y} - (N_{xx}v_{0,x})_{,x} - (N_{yy}v_{0,y})_{,y} - (N_{xy}v_{0,x})_{,y} - (N_{xy}v_{0,y})_{,x} \\
& \quad + I_0v_{0,tt} + I_1\varphi_{y,tt}] \delta v_0 + \\
& \quad [-Q_{x,x} - Q_{y,y} - (N_{xx}w_{0,x})_{,x} - (N_{yy}w_{0,y})_{,y} - (N_{xy}w_{0,x})_{,y} - (N_{xy}w_{0,y})_{,x} + \\
& \quad - q + I_0w_{0,tt}] \delta w_0 + \\
& \quad [-M_{xx,x} - M_{xy,y} + Q_x + I_1u_{0,tt} + I_2\varphi_{x,tt}] \delta \varphi_x + \\
& \quad [-M_{xy,x} - M_{yy,y} + Q_y + I_1v_{0,tt} + I_2\varphi_{y,tt}] \delta \varphi_y \} dx dy \} dt + \\
& \int_0^{t_1} \int_{\Gamma} [(N_{nn} - \hat{N}_{nn}) \delta u_n + (N_{ns} - \hat{N}_{ns}) \delta u_s + (Q_n - \hat{Q}_n) \delta w_0 + (M_{nn} - \hat{M}_{nn}) \delta \varphi_n + \\
& \quad (M_{ns} - \hat{M}_{ns}) \delta \varphi_s] ds \} dt = 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Ostatnia całka w wyrażeniu (5.28) została uzyskana przy przedstawieniu przemieszczeń φ_x, φ_y w postaci:

$$\varphi_x = n_x \varphi_n - n_y \varphi_s, \quad \varphi_y = n_y \varphi_n - n_x \varphi_s, \tag{5.29}$$

w której φ_n i φ_s są obrotami, zdefiniowanymi analogicznie do (5.2), w kierunku normalnym i stycznym do krawędzi Γ , odpowiednio, zaś n_x, n_y oznaczają cosinusy kierunkowe [5.9].

Równanie (5.28) musi być spełnione dla dowolnych wariacji przemieszczeń w przedziale czasu $\langle t_0, t_1 \rangle$ stąd, przyrównując do zera współczynniki przy wariacjach przemieszczeń $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \varphi_x, \delta \varphi_y$, uzyskuje się następujący układ równań [5.5]:

$$\begin{aligned}
& -N_{xx,x} - N_{xy,y} - (N_{xx}u_{0,x})_{,x} - (N_{yy}u_{0,y})_{,y} - (N_{xy}u_{0,x})_{,y} - (N_{xy}u_{0,y})_{,x} + I_0u_{0,tt} + I_1\varphi_{x,tt} = 0 \\
& -N_{xy,x} - N_{yy,y} - (N_{xx}v_{0,x})_{,x} - (N_{yy}v_{0,y})_{,y} - (N_{xy}v_{0,x})_{,y} - (N_{xy}v_{0,y})_{,x} + I_0v_{0,tt} + I_1\varphi_{y,tt} = 0 \\
& -Q_{x,x} - Q_{y,y} - (N_{xx}w_{0,x})_{,x} - (N_{yy}w_{0,y})_{,y} - (N_{xy}w_{0,x})_{,y} - (N_{xy}w_{0,y})_{,x} + q + I_0w_{0,tt} = 0 \\
& -M_{xx,x} - M_{xy,y} + Q_x + I_1u_{0,tt} + I_2\varphi_{x,tt} = 0 \\
& -M_{xy,x} - M_{yy,y} + Q_y + I_1v_{0,tt} + I_2\varphi_{y,tt} = 0
\end{aligned} \tag{5.30}$$

który jest układem równań dynamicznej równowagi bądź układem równań ruchu. Postępując analogicznie dla $\delta u_n, \delta v_s, \delta w_0, \delta \varphi_n, \delta \varphi_s$ w ostatniej całce (5.28) otrzymuje się warunki brzegowe w postaci [5.10]:

$$\begin{aligned}
N_{mn} - \hat{N}_{mn} &= 0 \\
N_{ns} - \hat{N}_{ns} &= 0 \\
Q_n - \hat{Q}_n &= 0 \\
M_{mn} - \hat{M}_{mn} &= 0 \\
M_{ns} - \hat{M}_{ns} &= 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

W celu skrócenia zapisu w warunkach brzegowych (5.31) przez Q_n oznaczono wyrażenie $Q_n = (Q_x + N_{xx}w_{0,x} + N_{xy}w_{0,y})n_x + (Q_y + N_{xy}w_{0,x} + N_{yy}w_{0,y})n_y$, zaś normalne i styczne siły przekrojowe z „daszkiem” oznaczają wartości zadane.

Wobec obecności członów czasowych w (5.30), warunki początkowe dla czasu $t = t_0$ (indeks 0) zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned}
u_n &= \hat{u}_n & u_s &= \hat{u}_s & w_0 &= \hat{w}_0 \\
u_{n,t} &= \hat{u}_{n,t} & u_{s,t} &= \hat{u}_{s,t} & w_{0,t} &= \hat{w}_{0,t}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

W statycznej i dynamicznej analizie stateczności w równaniach (5.30) pomija się obciążenie poprzeczne q . W równaniach (5.30) nie ma także członów związanych z tłumieniem, które w analizie stateczności dynamicznej cienkościennych konstrukcji płytowych mogą być pominięte [5.4].

Do sformułowania słabej (wariacyjnej) postaci równań metody elementów skończonych dynamicznej stateczności cienkich płyt laminowanych zastosowano uogólnioną metodę Galerkina [5.1], [5.10], [5.13]. Za funkcje wagowe przyjęto wariacje przemieszczeń $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \varphi_x, \delta \varphi_y$. Mnożąc równania równowagi (5.30) odpowiednio przez powyższe wariacje, a następnie całkując je po powierzchni V^e pojedynczego elementu, uzyskuje się poniższy układ równań:

$$\begin{aligned}
\int_{V^e} \delta u_0 [&-N_{xx,x} - N_{xy,y} - (N_{xx}u_{0,x})_{,x} - (N_{yy}u_{0,y})_{,y} - (N_{xy}u_{0,x})_{,y} - (N_{xy}u_{0,y})_{,x} + \\
&+ I_0 u_{0,tt} + I_1 \varphi_{x,tt}] dx dy = 0 \\
\int_{V^e} \delta v_0 [&-N_{xy,x} - N_{yy,y} - (N_{xx}v_{0,x})_{,x} - (N_{yy}v_{0,y})_{,y} - (N_{xy}v_{0,x})_{,y} - (N_{xy}v_{0,y})_{,x} + \\
&+ I_0 v_{0,tt} + I_1 \varphi_{y,tt}] dx dy = 0 \\
\int_{V^e} \delta w_0 [&-Q_{x,x} - Q_{y,y} - (N_{xx}w_{0,x})_{,x} - (N_{yy}w_{0,y})_{,y} - (N_{xy}w_{0,x})_{,y} - (N_{xy}w_{0,y})_{,x} + \\
&+ I_0 w_{0,tt}] dx dy = 0 \\
\int_{V^e} \delta \varphi_x [&-M_{xx,x} - M_{xy,y} + Q_x + I_1 u_{0,tt} + I_2 \varphi_{x,tt}] dx dy = 0 \\
\int_{V^e} \delta \varphi_y [&-M_{xy,x} - M_{yy,y} + Q_y + I_1 v_{0,tt} + I_2 \varphi_{y,tt}] dx dy = 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Dokładność tego przybliżonego rozwiązania ulega poprawie poprzez zwiększenie liczby obszarów (elementów skończonych), za pomocą których aproksymuje się analizowaną konstrukcję [5.9].

Układ równań (5.33) po kolejnym scałkowaniu przez części można przekształcić do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \int_V e \left\{ \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} [N_{xx} + N_{xx}u_{0,x} + N_{xy}u_{0,y}] + \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} [N_{xy} + N_{xy}u_{0,x} + N_{yy}u_{0,y}] + \right. \\ \left. + \delta u_0 [I_0 u_{0,tt} + I_1 \varphi_{x,tt}] \right\} dx dy + \\ - \int_{\Gamma} \{ [N_{xx} + N_{xx}u_{0,x} + N_{xy}u_{0,y}] n_x + [N_{xy} + N_{xy}u_{0,y} + N_{yy}u_{0,y}] n_y \} \delta u_0 ds = 0 \end{aligned} \quad (5.34a)$$

$$\begin{aligned} \int_V e \left\{ \frac{\partial v_0}{\partial x} [N_{xy} + N_{xx}v_{0,x} + N_{xy}v_{0,y}] n_x + \frac{\partial v_0}{\partial y} [N_{yy} + N_{xy}v_{0,x} + N_{yy}v_{0,y}] n_y \right. \\ \left. + \delta v_0 [I_0 v_{0,tt} + I_1 \varphi_{y,tt}] \right\} dx dy + \\ - \int_{\Gamma} \{ [N_{xy} + N_{xx}v_{0,x} + N_{xy}v_{0,y}] n_x + [N_{yy} + N_{xy}v_{0,x} + N_{yy}v_{0,y}] n_y \} \delta v_0 ds = 0 \end{aligned} \quad (5.34b)$$

$$\begin{aligned} \int_V e \left\{ \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} [Q_x + N_{xx}w_{0,x} + N_{xy}w_{0,y}] + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} [Q_y + N_{xy}w_{0,x} + N_{yy}w_{0,y}] + \right. \\ \left. + \delta w_0 [q + I_0 w_{0,tt}] \right\} dx dy + \\ - \int_{\Gamma} \{ [Q_x + N_{xx}w_{0,x} + N_{xy}w_{0,y}] n_x + [Q_y + N_{xy}w_{0,x} + N_{yy}w_{0,y}] n_y \} \delta w_0 ds = 0 \end{aligned} \quad (5.34c)$$

$$\begin{aligned} \int_V e \left[\frac{\partial \delta \varphi_x}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \delta \varphi_x}{\partial y} M_{xy} + (Q_x + I_1 u_{0,tt} + I_2 \varphi_{x,tt}) \delta \varphi_x \right] dx dy + \\ - \int_{\Gamma} (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \delta \varphi_x ds = 0 \end{aligned} \quad (5.34d)$$

$$\begin{aligned} \int_V e \left[\frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial \delta \varphi_y}{\partial y} M_{yy} + (Q_y + I_1 v_{0,tt} + I_2 \varphi_{y,tt}) \delta \varphi_y \right] dx dy + \\ - \int_{\Gamma} (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \delta \varphi_y ds = 0 \end{aligned} \quad (5.34e)$$

W zapisie układu równań (5.33) oraz (5.34) pominięto dla uproszczenia zapisu całkowanie po czasie obecne w (5.28). Całkowanie to wymaga zazwyczaj procedury numerycznej. Bardzo popularnym jest wybór metody Newmarka, która przy wyborze określonych stałych metody jest numerycznie stabilna [5.1], [5.10]. Należy jednak nadmienić, że całkowanie numeryczne prowadzone jest w chwilach czasu określonych krokiem całkowania. Prowadzi to do rozwiązania dyskretnego, nie dając zatem rozwiązania w formie funkcji ciągłej.

Wyrażenia na pracę przygotowaną w równaniach (5.34) zawierają współrzędne główne (podstawowe [5.13]) $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ jako uogólnione przemieszczenia oraz warunki brzegowe (naturalne [5.13]) w postaci:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \{ [N_{xx} + N_{xx}u_{0,x} + N_{xy}u_{0,y}] n_x + [N_{xy} + N_{xy}u_{0,x} + N_{yy}u_{0,y}] n_y \} \delta u_0 ds &= 0 \\
\oint_{\Gamma} \{ [N_{xy} + N_{xx}v_{0,x} + N_{xy}v_{0,y}] n_x + [N_{yy} + N_{xy}v_{0,x} + N_{yy}v_{0,y}] n_y \} \delta v_0 ds &= 0 \\
\oint_{\Gamma} \{ [Q_x + N_{xx}w_{0,x} + N_{xy}w_{0,y}] n_x + [Q_y + N_{xy}w_{0,x} + N_{yy}w_{0,y}] n_y \} \delta w_0 ds &= 0 \\
\oint_{\Gamma} (M_{xx}n_x + M_{xy}n_y) \delta \varphi_x ds &= 0 \\
\oint_{\Gamma} (M_{xy}n_x + M_{yy}n_y) \delta \varphi_y ds &= 0
\end{aligned} \tag{5.35}$$

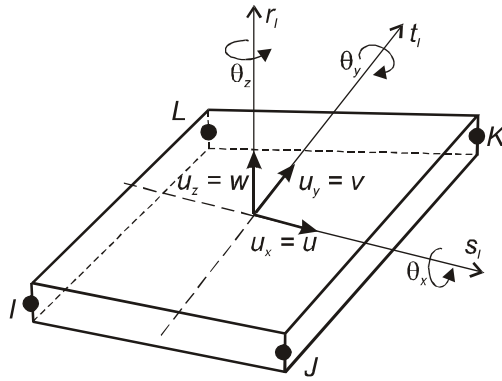
Przybliżone rozwiązanie nieliniowego zagadnienia (duże ugięcia opisane poprzez tensor odkształcenia z członami nieliniowymi) dynamicznej stateczności płyt wielowarstwowych uzyskuje się, zakładając przemieszczenia dla elementów skończonych w postaci funkcji interpolacyjnych Lagrange'a (5.36). Opisane są one w lokalnym układzie odniesienia s_i, t_i, r_i związanym z płaszczyzną środkową elementu n (rys. 5.3)

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^4 N_i \frac{r_i}{2} \begin{bmatrix} a_{1,i} & b_{1,i} \\ a_{2,i} & b_{2,i} \\ a_{3,i} & b_{3,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x,i} \\ \theta_{y,i} \end{Bmatrix} \tag{5.36}$$

W funkcjach (5.36) u_i, v_i, w_i oznaczają przemieszczenia i -tego węzła, t_i – grubość w węźle i -tym, $\{a\}$ – wektor jednostkowy w kierunku osi s_i , $\{b\}$ – wektor jednostkowy w płaszczyźnie elementu normalny do $\{a\}$. $\theta_{x,i}$ oraz $\theta_{y,i}$ oznaczają odpowiednio obroty węzła i wokół wektorów $\{a\}$ i $\{b\}$. Funkcje kształtu N_i dla czterowęzłowego elementu powłokowego (typu *SHELL*) dane są za pomocą równań o postaci:

$$N_i = \frac{1}{4} \{ u_I(1-s)(1-t) + u_J(1+s)(1-t) + u_K(1+s)(1+t) + u_L(1-s)(1+t) \} \tag{5.37}$$

gdzie u_I, u_J, u_K, u_L są przemieszczeniami poszczególnych węzłów elementu n . Obrót θ_z wokół osi normalnej r_i do powierzchni elementu jest zdefiniowany w sensie Almana w celu uniknięcia powstawania pasożytniczych postaci deformacji [5.1], [5.17].



Rys. 5.3. Czworokątny, czterowzłowy element powłokowy

Po wstawieniu funkcji interpolujących (5.36) do równań (5.34) uzyskuje się układ równań modelu MES, który w formie równania macierzowego zapisanego dla pojedynczego elementu ma postać:

$$[K^e]\{\mathbf{u}^e\} + [M^e]\{\ddot{\mathbf{u}}^e\} = \{\mathbf{F}^e\} \quad (5.38)$$

Liczba tych równań dla całej struktury jest równa liczbie elementów, za pomocą których dokonano dyskretyzacji analizowanej konstrukcji (płyty, kolumny). $[K^e]$ jest macierzą sztywności elementu n , $[M^e]$ jest macierzą mas, zaś $\{\mathbf{F}^e\}$ jest wektorem sił węzłowych. Liczbowe wartości elementów każdej z tych trzech macierzy otrzymuje się w wyniku całkowania odpowiednich wyrazów równań (5.34). Oczywiście, wobec nieliniowych zależności pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami (5.3 lub 5.4) oraz wobec analizy przyjmującej nieliniową charakterystykę materiału (stan sprężysto-plastyczny czy sprężysto-lepkoplastyczny), macierz $[K^e]$ jest generalnie macierzą nieliniową, niekiedy zapisywaną jako suma części liniowej oraz części nieliniowej $[K_L^e] + [K_{NL}^e]$.

W ostatecznym zastosowaniu w niniejszej pracy układ równań (5.34) zostanie zmodyfikowany w związku z wprowadzeniem lepkoplastycznego opisu zachowania materiału kolumny. O metodzie rozwiązania tego układu równań będzie mowa w rozdziale 7.

5.5. Literatura

- [5.1] Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W., Statyka i dynamika powłok wielopłatowych, IPPT PAN, Warszawa 2004.
- [5.2] Kołakowski Z., Podstawy wytrzymałości kompozytów i stateczności płytowych konstrukcji kompozytowych, Wyd. Politechniki Łódzkiej, 2008.
- [5.3] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K., Selected problems of instabilities in composite structures, A Series of Monographs, Technical University of Lodz Press, 1999.
- [5.4] Kowal-Michalska K. (red), Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych, WNT, Warszawa 2007.
- [5.5] Mania R.J., Dynamic buckling of laminate columns, strechung-flexural coupling effect, Euromech 498 Colloquium, Nonlinear dynamics of composite and smart structures, Warمیński J. (ed.), Kazimierz D., 2008.
- [5.6] Mindlin R.D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, J. Appl. Mech., 18, 31-38, 1951.
- [5.7] Pagano N.J., Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending, J. Comp. Mater., 07, 398-411, 1969.
- [5.8] Pai P.F., A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates, Int. J. Solids Structures, 32, 16, 1995, 2295-2313.
- [5.9] Reddy J.N., Energy principles and variational methods in applied mechanics, J. Wiley & Sons Inc., New Jersey, 2002.
- [5.10] Reddy J.N., An introduction to nonlinear Finite Element analysis, Oxford University Press, New York 2004.
- [5.11] Reddy J.N., Chandrashekhara K., Nonlinear finite element models of laminated plates and shells, Proc. Int. Conf. FE in Computational Mech., Bombay, Pergamon Press, 189-209, 1985.
- [5.12] Reissner E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., 12, 69-77, 1945.
- [5.13] Washizu K., Variational method in elasticity and plasticity, Pergamon Press, Oxford 1974.
- [5.14] Whitney J.M., Pagano N.J., Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, J. Appl. Mech., 37, 1031-1036, 1970.
- [5.15] Woźniak Cz. (red.), Mechanika sprężystych płyt i powłok, PWN, Warszawa 2001.
- [5.16] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Finite Element Method for solid and structural mechanics, Elsevier, Oxford 2005.
- [5.17] ANSYS 11 HTML online documentation, SAS IP, Inc., 2007.

6. KRYTERIA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ

Problematyka zachowania konstrukcji sprężystych pod wpływem obciążeń dynamicznych może być rozpatrywana w różnych aspektach, gdyż obejmuje szereg zagadnień i zjawisk fizycznych. Wśród nich można rozważać parametryczne drgania wymuszone (rezonans parametryczny, rezonans wewnętrzny), wyboczenie impulsowe czy problemy sprzężone zawierające dynamiczną interakcję mediów (z zakresu aero- i hydrodynamiki) [6.19]. Ogólnie zagadnienia te odnoszą się do analizy dynamicznej stateczności ruchu. Szczególną klasą zagadnień jest tu wyboczenie dynamiczne konstrukcji cienkościennych pod wpływem zmiennego w czasie obciążenia działającego w osi słupa bądź w płaszczyźnie płyty/ściany, ścinania lub w przypadku powłok także ciśnienia zewnętrznego. Rozważa się tu wpływ czasu trwania obciążenia, jego amplitudy i intensywności, bezwładności w płaszczyźnie i związanej z obrotem przekroju, jak i wpływu ścinania. Jednakże wyboczenie dynamiczne w odniesieniu do konstrukcji o ścianach płaskich może mieć miejsce jedynie w przypadku konstrukcji z ugięciem wstępnym. W statycznej analizie stateczności konstrukcji cienkościennych wyodrębnia się konstrukcje z niestateczną pokrytyczną ścieżką równowagi lub posiadające punkt graniczny – są to powłoki, pręty; oraz konstrukcje ze stateczną pokrytyczną ścieżką równowagi – konstrukcje płytowe. Dla pierwszej grupy istnieje możliwość matematycznego wyprowadzenia zależności pozwalających określać wartości krytyczne obciążenia dynamicznego, analogicznie do analizy statycznej. Natomiast dla konstrukcji płytowych nie ma dynamicznego wyboczenia typu bifurkacyjnego – mówi się o dynamicznej odpowiedzi konstrukcji. Stąd w celu sformułowania krytycznych warunków stateczności dynamicznej dla konstrukcji tego typu konieczne są kryteria zazwyczaj sformułowane na podstawie obserwacji zachowania się takich konstrukcji [6.8], [6.9]. W literaturze dla konstrukcji płytowych można odnaleźć wiele kryteriów stateczności dynamicznej [6.7]. Można podzielić je na kryteria geometryczne i energetyczne. Kryterium geometryczne (deformacyjne, przemieszczeniowe), czyli takie, w którym o utracie stateczności dynamicznej decyduje wielkość przemieszczenia, jaką jest najczęściej ugięcie bądź skrócenie. Z kolei kryterium energetyczne to takie, w którym o wartości krytycznej decyduje energia potencjalna i/lub kinetyczna układu. Niekiedy dokonuje się także podziału ze względu na rodzaj impulsu, tj. kryteria dla impulsów o skończonym i nieskończonym czasie trwania.

Dla konstrukcji ze stateczną pokrytyczną ścieżką równowagi spotyka się także kryteria zniszczeniowe. Stosowanie kryteriów zniszczeniowych pozwala teoretycznie w większym stopniu wykorzystać możliwości nośne konstrukcji. W kryteriach zniszczeniowych stateczności dynamicznej potrzebne są odpowiednie hipotezy pozwalające określać zastępczy stan naprężeń, który można porównać z własnościami materiałowymi (granica plastyczności, wytrzymałość na rozciąganie/ściskanie). Należy zwrócić uwagę, że w zdecydowanej większości prac jako referencyjne przyjmuje się własności materiałowe otrzymane z wytrzymałościowych prób statycznych. Przyjmuje się także za słuszne i obowiązujące w warunkach odpowiedzi dynamicznej hipotezy wytrzymałościowe zdefiniowane dla statycznych złożonych stanów obciążenia. W niniejszej pracy dokonano oceny wpływu uwzględnienia zmian własności wytrzymałościowych materiału konstrukcji pod wpływem obciążeń dynamicznych (efektu prędkości odkształcenia na charakterystykę siła – odkształcenie) na wyznaczone wartości krytycznych obciążeń dynamicznych.

Niniejsza praca dotyczy konstrukcji płytowych, dlatego też poniżej przedstawione zostaną najważniejsze kryteria tylko dla tego typu konstrukcji.

6.1. Kryterium Volmira

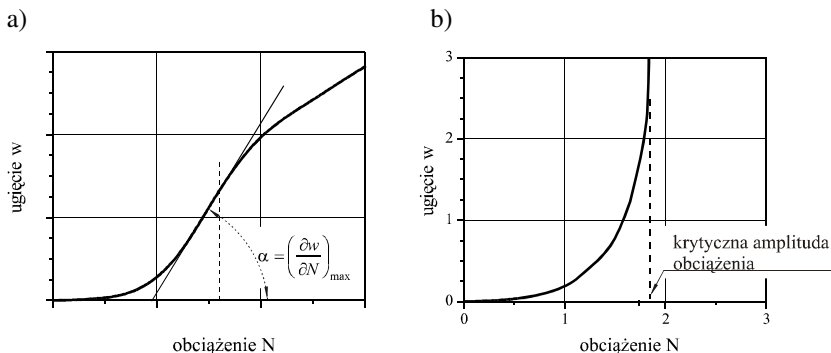
W pracy [6.21] Volmir zajmował się dynamiką konstrukcji cienkościennych, analizując również zachowanie się podpartych przegubowo prostokątnych płyt poddanych różnym impulsom obciążenia. Analizował impuls skokowy o nieskończonym czasie trwania, obciążenie narastające liniowo oraz impulsy o skończonym czasie trwania: impuls prostokątny i impuls wykładniczy malejący. Zagadnienie stateczności dynamicznej Volmir rozwiązał za pomocą metody Bubnova-Galerkina, a otrzymane równania ruchu całkował stosując metodę Rungego-Kutty. Rozpatrywał impulsowe obciążenia dynamiczne powodujące ściskanie oraz ścinanie. Zakładając postać wyboczenia w analizie dynamicznej, poszukiwał tej liczby półfal, dla której odpowiedź dynamiczna o ustalonej wartości amplitudy obciążenia powodowała narastanie ugięć w najkrótszym czasie. Przyjmował ją za krytyczną postać wyboczenia dynamicznego i wyznaczał dla tej postaci „współczynnik dynamiczności K_D ” (w pracach anglojęzycznych zdefiniowany jako *Dynamic Load Factor – DLF*), zdefiniowany jako stosunek amplitudy obciążenia krytycznego do statycznego obciążenia krytycznego. W [6.21] w rozdziale 6 Volmir w oparciu o uzyskane wyniki zaproponował bardzo proste kryterium dynamicznej utraty stateczności lokalnej, zakładające, że *utrata stateczności (lokalnej) płyt obciążonych impulsowo zachodzi wtedy, gdy ich ugięcia maksymalne równe są pewnej stałej wartości*. Najczęściej jako krytyczna przyjmowana jest wartość ugięcia równa grubości płyty lub połowie grubości płyty.

6.2. Kryteria Budiansky'ego

Budiansky wraz ze współautorami jest twórcą pierwszych kryteriów przemieszczeniowych. Analizując z Rothem [6.2] utwierdzoną, mało-wyniosłą powłokę sferyczną obciążoną ciśnieniem w postaci impulsu prostokątnego, zaproponowali kryterium do określenia dynamicznego obciążenia krytycznego. W pracy [6.4] z Hutchinsonem rozszerzyli swoje rozważania na konstrukcje z imperfekcjami o niestatecznej pokrytycznej ścieżce równowagi lub posiadających punkt graniczny. Były to powłoki walcowe i pręty poddane osiowemu ścisłaniu w postaci impulsu o skończonym czasie trwania (impuls prostokątny i trójkątny). Na podstawie wyprowadzonych zależności analitycznych opartych na teorii Koitera, sformułowali kryterium – znane w literaturze jako kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona, brzmiące następująco: *utrata stateczności konstrukcji obciążonych dynamicznie zachodzi wtedy, gdy dla niewielkich przyrostów obciążenia występuje nieograniczony przyrost ugięcia*. Interpretacja graficzna tego kryterium w postaci krzywej dynamicznego obciążenia krytycznego w funkcji ugięcia pokazuje obecność punktu przegięcia, odpowiadającego obciążeniu krytycznemu.

Kryterium to zostało zaadaptowane dla konstrukcji płytowych. Na podstawie historii przebiegów ugięcia konstrukcji w czasie, dla impulsu obciążenia o ustalonym kształcie i czasie trwania, buduje się wykres maksymalnego ugięcia w funkcji amplitudy impulsu obciążenia (rys. 6.1). Zaadaptowane kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona dla konstrukcji płytowych mówi, że *utrata stateczności dla konstrukcji obciążonych impulsowo odpowiada amplitudzie, dla której prędkość narastania ugięć jest największa*.

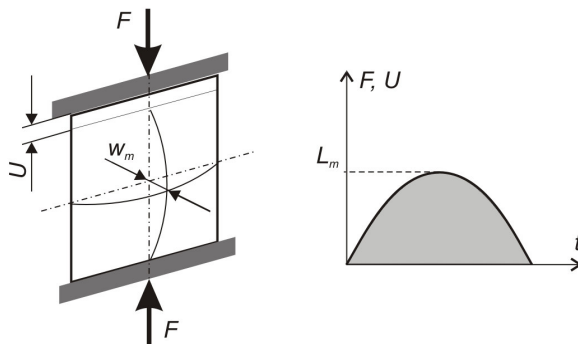
Wykres ugięcia w funkcji amplitudy impulsu wymuszenia dynamicznego pokazany na rys. 6.1a odpowiada przypadkowi lokalnego wyboczenia, typowego dla krótkich słupów lub pojedynczych płyt. Krzywa z rys. 6.1b jest charakterystyczna dla globalnego wyboczenia, jakiemu mogą ulegać długie słupy.



Rys. 6.1. Wykres ugięcia w funkcji amplitudy impulsu obciążenia:
a) dla lokalnej postaci wyboczenia,
b) dla globalnej postaci wyboczenia

6.3. Kryteria Ari-Gura i Simonetty

Kryteria Volmira i Budiansky'ego-Hutchinsona zostały pierwotnie sformułowane dla konstrukcji izotropowych. Jednakże jako kryteria geometryczne mogą być stosowane dla materiałów ortotropowych bądź anizotropowych. Słuszność takiego podejścia potwierdziły prace Ari-Gura i Simonetty [6.1], którzy badali wyboczenie dynamiczne utwierdzonych prostokątnych płyt kompozytowych z imperfekcjami, poddanych obciążeniu w postaci osiowego impulsu. Obciążenie to miało charakter impulsu siły ściskającej (F) lub przemieszczenia (U) o skończonym czasie trwania i kształcie półfali sinusoidy (rys. 6.2). Krytyczną wartość dynamicznego obciążenia płyt kompozytowych, które analizowali, zdefiniowali poprzez cztery parametry: ugięcie w_m mierzone w połowie szerokości i rozpiętości płyty, intensywność obciążenia L_m będącą amplitudą impulsu siły F_m lub impulsu skrócenia obciążonych brzegów U_m . Na podstawie przeprowadzonych badań analityczno-numerycznych Ari-Gur i Simonetta zaproponowali cztery kryteria stateczności dynamicznej:



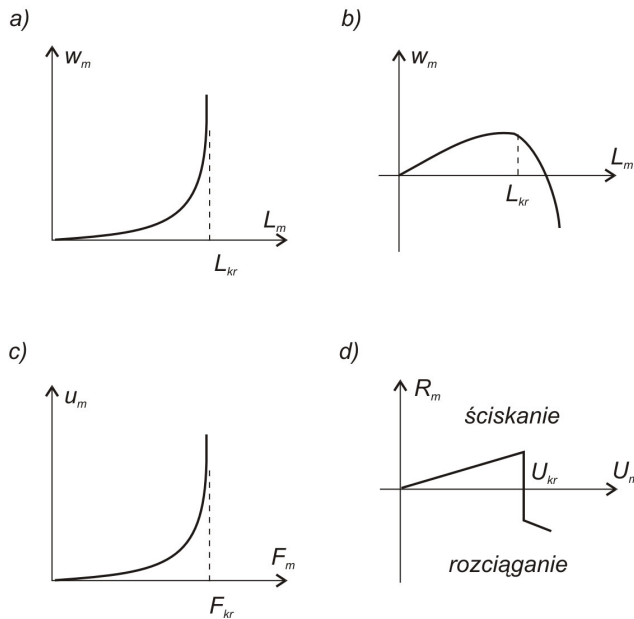
Rys. 6.2. Analizowane parametry impulsu obciążenia

- wyboczenie dynamiczne ma miejsce, gdy niewielki wzrost intensywności impulsu obciążenia L_m powoduje znaczny przyrost wartości ugięcia w_m ,*
- wyboczenie dynamiczne ma miejsce, gdy niewielki wzrost amplitudy impulsu obciążenia L_m powoduje spadek wartości ugięcia w_m ,*
- wyboczenie dynamiczne ma miejsce, gdy niewielki wzrost amplitudy impulsu siły F_m powoduje nagły wzrost wartości skrócenia u_m obciążonego brzegu płyty,*
- wyboczenie dynamiczne ma miejsce, gdy niewielki wzrost intensywności impulsu przemieszczenia obciążonego brzegu U_m powoduje zmianę znaku wartości reakcji R_m na brzegu płyty.*

Pierwsze kryterium jest analogiczne do kryterium sformułowanego przez Budiansky'ego i Hutchinsona. Ari-Gur i Simonetta zauważyli dodatkowo, że kryterium (a) może być stosowane dla obciążeń w postaci siły lub

przemieszczenia oraz dla różnych czasów trwania impulsu obciążenia. Jednakże dla bardzo krótkich czasów trwania impulsu do otrzymania nagłego wzrostu ugięcia potrzebna jest bardzo duża wartość amplitudy impulsu – duże przewyższenie statycznego obciążenia krytycznego. Jak wiadomo, wywołuje to zmiany postaci wyboczenia w trakcie trwania impulsu obciążenia. Ta konstatacja była podstawą do sformułowania drugiego kryterium (b) (rys. 6.3b).

Kryteria (c) i (d) należy zaliczyć do kategorii kryteriów zniszczeniowych. Bazują one na analizie odpowiedzi obciążonego brzegu płyty – skrócenia – dla obciążenia impulsem siły lub reakcji – dla obciążenia impulsem przemieszczenia. W przypadku analizy skrócenia (c) widoczna jest analogia do przypadku analizy narastającego ugięcia. Znaczny wzrost ugięć płyty powoduje zmniejszenie jej sztywności, zatem obciążenie, które powoduje znaczny wzrost skrócenia, definiowane jest jako obciążenie krytyczne (rys. 6.3c). Czwarte kryterium (d) dotyczy przypadku, gdy obciążenie realizowane jest nie poprzez siłę, lecz przez impuls przemieszczenia i definiuje krytyczną intensywność impulsu przemieszczenia U_m . Dla ugiętej płyty w stanie zakrytycznym rozkład sił na obciążonym brzegu jest sinusoidalny [6.11], tak więc w przypadku dużych ugięć w środkowej części obciążonego brzegu pojawiają się siły rozciągające utrzymujące prostoliniowość obciążonego brzegu. Wartość tych sił może być większa od sił ściskających występujących poza częścią środkową obciążonego brzegu.



Rys. 6.3. Kryteria stateczności Ari-Gura i Simonetty

6.4. Kryterium Petry-Fahlbuscha

W pracy [6.16] Petry i Fahlbusch oceniają kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona – sformułowane pierwotnie dla powłok, jako konserwatywne w odniesieniu do analizy dynamicznego zachowania płyt. Uważają, że takie podejście nie pozwala w pełni wykorzystać nośności konstrukcji płytowych i w efekcie prowadzi to do określenia zaniżonego dynamicznego obciążenia krytycznego płyt. Petry i Fahlbusch są zdania, że dla konstrukcji ze stateczną pokrytyczną ścieżką równowagi o dynamicznym obciążeniu krytycznym powinna decydować analiza stanu naprężenia. Na jej podstawie można określić obciążenie, którego przekroczenie prowadzi do zniszczenia konstrukcji. Bazując na powyższym podejściu, sformułowali następujące kryterium stateczności dynamicznej: *odpowiedź dynamiczna konstrukcji na obciążenie impulsowe jest dynamicznie stateczna, jeżeli warunek, że naprężenie zredukowane jest mniejsze lub równe naprężeniu granicznemu, spełniony jest w każdej chwili i każdym punkcie konstrukcji.*

Za naprężenie graniczne w przypadku materiałów odkształcalnych proponują przyjęcie granicy plastyczności. Petry i Fahlbusch redefiniują także współczynnik obciążenia krytycznego do postaci:

$$DLF = \frac{N_F^{dyn}}{N_F^{stat}} \quad (6.1)$$

który jest ilorazem dynamicznego obciążenia niszczącego N_F^{dyn} oraz statycznego obciążenia niszczącego N_F^{stat} , rozumianych w sensie osiągnięcia naprężeń granicznych. W prezentowanych wynikach badań dla konstrukcji z materiałów izotropowych autorzy wyznaczają wyężenie materiału w oparciu o hipotezę Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH). Aby kryterium Petry-Fahlbuscha mogło być stosowane jako kryterium stateczności dynamicznej konstrukcji kompozytowych, modyfikacji wymaga kryterium oceny stanu zniszczenia konstrukcji. Materiały kompozytowe mają własności anizotropowe, interpretowane zazwyczaj jako ortotropowe, stąd poprzez zastosowanie np. kryterium Hilla bądź innego kryterium oceny wyężenia materiału kompozytowego, można wykorzystać kryterium Petry'ego-Fahlbuscha także do oceny konstrukcji kompozytowych.

6.5. Kryterium Kubiaka

Modyfikując quasi-bifurkacyjne kryterium stateczności dynamicznej dla obciążenia skokowego (impuls Heaviside'a) zaproponowane przez Kleibera, Kotulę i Sarana [6.5], Kubiak w [6.10], zaproponował kryterium dla złożonych konstrukcji cienkościennych, w przypadku których utrata stateczności ma często

formę sprzężoną – jedna postać wyboczenia wzmacnia lub przyspiesza powstanie innej. Wynika z tego, że wielomodalne formy utraty stateczności powinny być uwzględniane w analizie konstrukcji cienkościennych obciążonych impulsowo. Czas trwania impulsu najczęściej jest równy okresowi drgań własnych odpowiadających danej postaci utraty stateczności. Sprzężenie różnych postaci wyboczenia wiąże się z różnymi czasami trwania impulsu (okresami drgań własnych odpowiadającymi różnej liczbie półfal). Prowadzi to do sytuacji, w których dla jednej formy wyboczenia czas trwania impulsu odpowiada obciążeniu dynamicznemu, a dla innej w porównaniu z odpowiadającą tej postaci częstością drgań własnych jest tak długi, że należy go traktować jako quasi-statyczny. Analizując wartości własne macierzy Jacoby’ego, w podobny sposób jak ma to miejsce w stateczności rozwiązań okresowych, na podstawie wielu analiz i porównań z innymi kryteriami, Kubiak sformułował następujące kryterium stateczności dynamicznej: *konstrukcja cienkościenna obciążona impulsowo (uderzenie) traci stateczność, jeżeli choćby jedna wartość własna $a + ib$ macierzy Jacoby’ego, wyznaczana dla każdej chwili w przedziale od zera do 1.5 czasu trwania impulsu obciążenia ($0 \div 1,5T_p$), wychodzi poza obszar jednostkowy w płaszczyźnie zespolonej.*

$$|\rho|_{\max} \geq 1 \quad (6.2)$$

gdzie $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

6.6. Kryteria zniszczenia

W teorii cienkościennych konstrukcji kompozytowych zakłada się płaski stan naprężenia. Zgodnie z ogólnie przyjętym w literaturze podejściem przyjmuje się w rozpatrywanych zagadnieniach stateczności dynamicznej za słuszne i obowiązujące, przyjęte w zagadnieniach statycznych dla złożonych stanów obciążenia kryteria zniszczenia (hipotezy wytrzymałościowe).

W analizie konstrukcji z materiałów izotropowych dominują hipoteza Hubera-Misesa-Hencky’ego (HMH) i hipoteza Coulomba-Tresci (maksymalnych naprężeń tnących). Dla materiałów kompozytowych o własnościach anizotropowych, często modelowanych jako ortotropowe, istnieje potrzeba zastosowania innych, odpowiednich dla takich materiałów hipotez wyężeniowych. We wszystkich kryteriach dla materiałów ortotropowych, materiał warstwy indywidualnej traktowany jest makroskopowo jako jednorodny. Materiały kompozytowe charakteryzują się różnymi własnościami wytrzymałościowymi w głównych kierunkach materiałowej ortotropii na rozciąganie i na ściskanie oraz na ścinanie. Kryteria zniszczenia są formułowane dla indywidualnej warstwy w lokalnym układzie odniesienia. Bazując na hipotezie HMH dla materiałów izotropowych,

Hill [6.3] sformułował kryterium wytrzymałościowe dla materiałów ortotropowych. Pierwotnie stosowane dla metali poddanych obróbce mechanicznej (walcowanie, kucie) obecnie jest wykorzystywane w analizie materiałów ortotropowych, w tym kompozytowych. Hipotezą uwzględniającą interakcję składowych stanu naprężenia i odkształcenia w procesie zniszczenia kompozytu jest kryterium Tsai-Wu [6.20]. Ogólne kryterium uplastycznienia dla materiałów ortotropowych zaproponowali Oller, Car i Lubliner [6.15], definiując jednocześnie dla tych materiałów funkcje powierzchni odkształcenia. W szczególnych przypadkach kryterium to upraszcza się do postaci zależności podanych przez HMM, Hilla, Tsai-Wu czy Hoffmana. Obok wymienionych wyżej kryteriów zniszczenia kompozytu w analizie typu *FPF (First Ply Failure, ang.)* – zniszczenia pierwszej warstwy, stosowane są także kryterium maksymalnych naprężeń oraz kryterium maksymalnych odkształceń.

Kryteria “naprężeniowe” z wyżej wymienionych wymagają przetransformowania składowych stanu naprężenia z globalnego do lokalnego układu współrzędnych związanego z głównymi osiami ortotropii materiału danej warstwy. Natomiast w przypadku kryterium maksymalnych odkształceń należy dokonać analogicznej transformacji odkształceń względnych.

6.6.1. Ogólne kryterium zniszczenia materiałów ortotropowych

Oller, Car i Lubliner (OCL), stosując analogiczne podejście jak Hill, Tsai i inni, to znaczy tworząc kryterium dla materiałów ortotropowych, wykorzystali formułę hipotezy Hubera-Misesa-Hencky’ego dla materiałów izotropowych. Kryterium OCL może być wyrażone w dwóch postaciach. Pierwsza podaje explicite funkcje uplastycznienia dla materiałów ortotropowych analogicznie do kryteriów Hilla, Tsai-Wu czy Hoffmana. Druga postać – implicite, definiuje funkcje uplastycznienia dla materiału ortotropowego metodą transformacji tensora, gdzie punktem wyjścia jest hipoteza dla materiału izotropowego. Celem tego ostatniego sformułowania jest dostosowanie dowolnego kryterium izotropowego do opisu zachowania się materiału anizotropowego (w szczególności ortotropowego). Ogólna definicja kryterium zniszczenia rozumianego jako osiągnięcie granicy sprężystości/plastyczności materiału, w którym uwzględnia się różną wytrzymałość materiału na ściskanie i rozciąganie (nie jest to obecne w podstawowej hipotezie Hilla) ma następującą postać:

$$\begin{aligned}
F(\sigma, \mathbf{f}) = & \left[\left(\frac{\sigma_1^2}{f_1^t f_1^c} + \frac{\sigma_2^2}{f_2^t f_2^c} + \frac{\sigma_3^2}{f_3^t f_3^c} \right) - \lambda_1 \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sqrt{f_2^t f_2^c f_3^t f_3^c}} - \lambda_2 \frac{\sigma_3 \sigma_1}{\sqrt{f_3^t f_3^c f_1^t f_1^c}} \right. \\
& - \lambda_3 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{f_1^t f_1^c f_2^t f_2^c}} + \left(\frac{\sigma_{23}^2}{f_{23}^2} + \frac{\sigma_{13}^2}{f_{13}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{f_{12}^2} \right) \\
& \left. + 2 \left(\alpha_1 \frac{\sigma_1}{\sqrt{f_1^t f_1^c}} + \alpha_2 \frac{\sigma_2}{\sqrt{f_2^t f_2^c}} + \alpha_3 \frac{\sigma_3}{\sqrt{f_3^t f_3^c}} \right) \right] - 1 = 0
\end{aligned} \tag{6.3}$$

gdzie f_i^t , f_i^c oraz f_{ij}^c są odpowiednio granicami plastyczności (wytrzymałościami) na rozciąganie i ściskanie – w głównych kierunkach ortotropii (1-3) oraz na ścinanie. Współczynniki α_i występujące w ostatnim członie (6.3) obliczane są z zależności: $\alpha_i = \frac{1}{2} \left[(f_i^c / f_i^t)^m - (f_i^t / f_i^c)^m \right]$, gdzie $i = 1, 2, 3$. Na pozostałe współczynniki w (6.3) – $\lambda_1 \div \lambda_3$ oraz m , są nakładane dodatkowe ograniczenia wynikające z rodzaju materiału, który kryterium opisuje.

W ujęciu macierzowym \mathbf{f} jest macierzą wierszową granic plastyczności (wytrzymałości) – osiowej i ścinania, względem głównych osi ortotropii, σ^T reprezentuje tensor naprężenia w lokalnym układzie odniesienia (związany z warstwą):

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3, f_{12}, f_{23}, f_{13}\} = \{\sqrt{f_1^t f_1^c}, \sqrt{f_2^t f_2^c}, \sqrt{f_3^t f_3^c}, f_{12}, f_{23}, f_{13}\}, \tag{6.4}$$

$$\sigma^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\} \tag{6.5}$$

a równaniu (6.3) – warunkowi początku plastyczności, bądź tak rozumianemu kryterium zniszczenia, można nadać następującą zwartą postać:

$$F(\sigma, \mathbf{f}) = [\sigma^T \cdot \mathbf{P}^{ort}(\sigma) \cdot \sigma] - 1 = 0 \tag{6.6}$$

Przykładowe uproszczenia ogólnego kryterium OCL jako przypadki szczególne prowadzące do kryteriów Hilla oraz kryterium Tsai-Wu prezentują kolejne podrozdziały.

6.6.2. Kryterium Hilla dla materiałów ortotropowych

Przyjmując dla wszystkich kierunków odpowiednio jednakową wartość granicy plastyczności (wytrzymałość) na rozciąganie i ściskanie $f_i^t = f_i^c = f_i \forall i = 1, 2, 3$, co prowadzi do zanikania współczynników $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ oraz nakładając następujące ograniczenie na współczynniki $\lambda_1 \div \lambda_3$ [6.15]:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 4 \quad (6.7)$$

uzyskuje się kryterium Hilla w jego pełnej 3D postaci:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f}) = & [(G+H)\sigma_1^2 + (F+H)\sigma_2^2 + (F+G)\sigma_3^2 \\ & - 2F\sigma_2\sigma_3 - 2G\sigma_3\sigma_1 - 2H\sigma_1\sigma_2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2] - 1 = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Występujące w wyrażeniu (6.8) współczynniki przy naprężeniach są określone przez parametry wytrzymałościowe materiału następująco:

$$\begin{aligned} 2F &= \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} - \frac{1}{f_1^2}, & 2L &= \frac{1}{f_{23}^2} \\ 2G &= \frac{1}{f_3^2} + \frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}, & 2M &= \frac{1}{f_{13}^2} \\ 2H &= \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_3^2}, & 2N &= \frac{1}{f_{12}^2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Stałe (6.9) można wyznaczyć na podstawie próby rozciągania jednoosiowego w kierunkach osi 1, 2, 3 (głównych kierunkach ortotropii) i obrotów między tymi osiami. Macierz $\mathbf{P}^{ort}(\boldsymbol{\sigma})$ z równania (6.6) dla kryterium Hilla ma postać:

$$\mathbf{P}^{Hill} = \begin{bmatrix} H+G & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Kryterium Hilla (6.8) nie różnicuje własności materiału przy rozciąganiu i ściskaniu. Zmodyfikowane przez Shih i Lee [6.18] uogólnione kryterium Hilla pozwala na analizę materiałów o różnych granicach plastyczności (wytrzymałości) przy ściskaniu i rozciąganiu, co jest własnością typową dla większości kompozytów. Kryterium to ma postać:

$$3F = \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [M] \{\boldsymbol{\sigma}\} - \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{L\} - K = 0 \quad (6.11)$$

W (6.11) macierz $\{L\}$ 'odpowiada' za zróżnicowane co do kierunku obciążenia wartości granic wytrzymałościowych materiału (np. granice plastyczności), K jest parametrem materiałowym, zaś macierz $[M]$, której wyrazy obliczane są z zależności $M_{ii} = K / (f_i^t f_i^c)$ dla $i = 1, 2, 3, 12, 23, 13$, określona jest w formie:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 & 0 \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Zakładając $M_{11} = 1$, uzyskujemy definicję parametru $K = f_1^t f_1^c$.

Przyjmując warunek plastycznej nieściśliwości materiału, wyrazy macierzy $[M]$ oraz $\{L\}$ muszą spełniać następujące związki:

$$\begin{aligned} M_{11} + M_{12} + M_{13} &= 0 \\ M_{12} + M_{22} + M_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$M_{13} + M_{23} + M_{33} = 0$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0 \quad (6.14)$$

Wobec zależności $L_j = M_{jj}(f_j^t + f_j^c)$, $j = 1 \div 3$, warunek (6.14) jest równaniem zgodności naprężeń dopuszczalnych (wytrzymałości). Dodatkowo, powierzchnia graniczna (plastyczności) musi być zamknięta i wypukła (o eliptycznym kształcie przekroju poprzecznego), skąd parametry materiałowe M_{ij} nie są niezależne. Muszą one spełniać następujące ograniczenie:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{K}{f_1^t f_1^c}\right)^2 + \left(\frac{K}{f_2^t f_2^c}\right)^2 + \left(\frac{K}{f_3^t f_3^c}\right)^2 + \\ &-2 \left[\left(\frac{K}{f_1^t f_1^c}\right) \left(\frac{K}{f_2^t f_2^c}\right) + \left(\frac{K}{f_2^t f_2^c}\right) \left(\frac{K}{f_3^t f_3^c}\right) + \left(\frac{K}{f_1^t f_1^c}\right) \left(\frac{K}{f_3^t f_3^c}\right) \right] < 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

w którego zapisie wykorzystano wyżej zdefiniowaną relację na wyrazy macierzy $[M]$.

6.6.3. Kryterium Tsai-Wu

Kryterium Tsai-Wu jest kolejną hipotezą wytrzymałościową dla materiałów ortotropowych o różnych własnościach na rozciąganie i ściskanie. Wyrażone jest funkcją w postaci wielomianu drugiego stopnia z wyrazami stopnia drugiego, pierwszego oraz stałymi. Dzięki takiej postaci uwzględnia oddziaływania pomiędzy formami zniszczenia, interakcję pomiędzy składowymi tensora naprężenia oraz składowymi tensora odkształcenia w procesie zniszczenia warstwy laminatu. Jest ono bardzo popularne i bardzo często stosowane. Można je również matematycznie wyrazić jako szczególny przypadek kryterium (6.3). Przyjmując w definicji

współczynników α_i wykładnik $m = 1/2$ dla $i=1,2,3$ oraz zakładając $\lambda_i = 1 \forall i=1,2,3$, – spełniając tym jednocześnie warunek (6.7), uzyskuje się kryterium Tsai-Wu w następującej formie:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f}) = [\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{P}^{TW}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\sigma}] - 1 = 0 \quad (6.16)$$

w której współczynniki macierzy kwadratowej \mathbf{P}^{TW} określone są następująco:

$$\mathbf{P}^{TW} = \begin{bmatrix} H + G + \frac{I}{\sigma_x} & -\tilde{H} & -\tilde{G} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{H} & F + H + \frac{J}{\sigma_y} & -\tilde{F} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{G} & -\tilde{F} & F + G + \frac{K}{\sigma_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Występujące w wyrazach macierzy (6.17) stałe $F, G, H, L, M, N, \tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}$ oraz współczynniki wielomianu Tsai-Wu – I, J, K , w relacji do granic plastyczności materiału ortotropowego wiąże zależności (6.18):

$$\begin{aligned} G + H &= \frac{1}{f_1^t f_1^c}, & 2L &= \frac{1}{f_{23}^2}, & I &= \frac{1}{f_1^t} - \frac{1}{f_1^c}, \\ F + H &= \frac{1}{f_2^t f_2^c}, & 2M &= \frac{1}{f_{13}^2}, & J &= \frac{1}{f_2^t} - \frac{1}{f_2^c}, \\ F + G &= \frac{1}{f_3^t f_3^c}, & 2N &= \frac{1}{f_{12}^2}, & K &= \frac{1}{f_3^t} - \frac{1}{f_3^c}. \end{aligned} \quad (6.18a)$$

$$2\tilde{F} = \frac{1}{\sqrt{f_2^t f_2^c f_3^t f_3^c}}, \quad 2\tilde{G} = \frac{1}{\sqrt{f_3^t f_3^c f_1^t f_1^c}}, \quad 2\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{f_1^t f_1^c f_2^t f_2^c}} \quad (6.18b)$$

Dla płaskiego stanu naprężenia kryterium to ma następującą postać:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f}) &= \frac{1}{f_1^t f_1^c} \sigma_1^2 + \frac{1}{f_2^t f_2^c} \sigma_2^2 - \frac{1}{\sqrt{f_1^t f_1^c f_2^t f_2^c}} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{f_{12}^2} \tau_{12}^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{f_1^t} - \frac{1}{f_1^c} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{f_2^t} - \frac{1}{f_2^c} \right) \sigma_2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

W literaturze spotyka się także inne propozycje na określenie w równaniu (6.19) współczynnika przy iloczynie $\sigma_1 \sigma_2$. I tak zgodnie z kryterium Hoffmana [6.6], [6.13] współczynnik ten ma postać:

$$\frac{1}{f_1^t f_1^c} \quad (6.20)$$

bądź według propozycji Wilczyńskiego [6.22]:

$$\frac{2}{f_1^t f_2^t + f_1^c f_2^c} \quad (6.21)$$

6.6.4. Kryterium maksymalnych naprężeń

W hipotezie maksymalnych naprężeń dla płaskiego stanu naprężenia, maksymalne naprężenia w głównych kierunkach materiału ($I-2$) każdej k -tej warstwy muszą być mniejsze od odpowiednich wytrzymałości:

$$-f_1^c < \sigma_1 < f_1^t, \quad -f_2^c < \sigma_2 < f_2^t, \quad -f_{12} < \tau_{12} < f_{12} \quad (6.22)$$

Jeśli spełnione są wszystkie z sześciu nierówności (6.22), to zakładamy, że materiał warstwy nie ulegnie zniszczeniu. Jeśli natomiast choć jedna z tych nierówności nie jest spełniona, to materiał warstwy ulega zniszczeniu przez mechanizm zniszczenia związany odpowiednio z $f_1^c, f_1^t, f_2^c, f_2^t, f_{12}$. Powyższe kryterium musi być spełnione dla wszystkich warstw kompozytu.

6.6.5. Kryterium maksymalnych odkształceń

W hipotezie maksymalnych odkształceń dla płaskiego stanu naprężenia maksymalne odkształcenia względne w głównych kierunkach materiału ($I-2$) każdej k -tej warstwy muszą być mniejsze od dopuszczalnych odkształceń względnych:

$$-C_{\varepsilon 1} < \varepsilon_1 < T_{\varepsilon 1}, \quad -C_{\varepsilon 2} < \varepsilon_2 < T_{\varepsilon 2}, \quad -S_{\varepsilon} < \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} < S_{\varepsilon} \quad (6.23)$$

gdzie: $C_{\varepsilon 1}, T_{\varepsilon 1}$ – dopuszczalne odkształcenia względne warstwy, odpowiednio, na ściskanie i rozciąganie w kierunku 1 (równoległym do włókien); $C_{\varepsilon 2}, T_{\varepsilon 2}$ – dopuszczalne odkształcenia względne warstwy, odpowiednio, na ściskanie i rozciąganie w kierunku 2 (prostopadłym do włókien); S_{ε} – dopuszczalny kąt odkształcenia postaciowego warstwy na ścinanie w płaszczyźnie ($I-2$).

W nierównościach (6.23) przyjęto następujące relacje na odkształcenia:

$$\begin{aligned}C_{\varepsilon 1} &= f_1^c / E_1, & T_{\varepsilon 1} &= f_1^t / E_1, \\C_{\varepsilon 2} &= f_2^c / E_2, & T_{\varepsilon 2} &= f_2^t / E_2, \\S_{\varepsilon} &= f_{12} / G\end{aligned}\tag{6.24}$$

Jeśli spełnione są wszystkie nierówności (6.23), to materiał warstwy nie ulegnie zniszczeniu. W przeciwnym przypadku materiał warstwy ulega zniszczeniu. Także w tym kryterium musi być ono spełnione dla wszystkich warstw kompozytu.

Dwa ostatnie kryteria określają różne wartości obciążeń niszczących konstrukcję z uwagi na występujące we wzorach współczynniki Poissona.

Jak wspomniano na wstępie, omówione kryteria zaliczane są do grupy *FPF* kryterium zniszczenia pierwszej warstwy (*First Ply Failure*, ang.). Przyjmuje się bowiem, że gdy choćby jedna z warstw laminatu ulegnie zniszczeniu, to cały kompozyt ulega zniszczeniu. W omawianych kryteriach nie uwzględnia się delaminacji kompozytu.

6.7. Literatura

- [6.1] Ari-Gur J., Simonetta S.R., Dynamic pulse buckling of rectangular composite plates, *Composites Part B*, 28B, 301-308, 1979.
- [6.2] Budiansky, B., Roth, R.S., Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells, *Collected Papers on Instability of Shell Structures*, NASA, TN-D-1510, 597-606, 1962.
- [6.3] Hill R., *The mathematical theory of plasticity*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1950.
- [6.4] Hutchinson J.W., Budiansky B., Dynamic buckling estimates, Report SM-3, NASA CR-66030, 1965.
- [6.5] Kleiber M., Kotula W., Saran M., Numerical analysis of dynamic quasi-bifurcation, *Eng. Comput.*, 4, 48-52, 1987.
- [6.6] Kołakowski Z., *Podstawy wytrzymałości i stateczności płytowych konstrukcji kompozytowych*, Wyd. Politechnika Łódzka, 2007.
- [6.7] Kowal-Michalska K., Czynniki determinujące stateczność dynamiczną konstrukcji płytowych przy obciążeniach impulsowych, *Materiały XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji*, Zakopane, 195-202, 2006.
- [6.8] Kowal-Michalska K. (red), *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*, WNT, Warszawa 2007.
- [6.9] Kowal-Michalska K., Mania R., Wielokryterialna ocena stateczności dynamicznej płyt prostokątnych, VIII Konf. Naukowo-Techniczna Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania, Rynia 2003.
- [6.10] Kubiak T., Interakcyjne wyoboczenie dynamiczne cienkościennych słupów, Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź 2007.
- [6.11] Królak M., Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich, PWN, Warszawa-Łódź 1990.

- [6.12] Long-Yuan Li, Molyneaux T.C.K., Dynamic instability criteria for structures subjected to sudden step loads, *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, 70, 121-126, 1997.
- [6.13] Muc A., *Mechanika kompozytów włóknistych*, Księgarnia Akademicka, Kraków 2003.
- [6.14] Muc A., *Optymalizacja struktur kompozytowych i procesów technologicznych ich wytwarzania*, Księgarnia Akademicka, Kraków 2005.
- [6.15] Oller S., Car E., Lubliner J., Definition of a general implicit orthotropic yield criterion, *Comp. Meth. In App. Mech. And Eng.*, 192, 895-912, 2003.
- [6.16] Petry D., Fahlbusch G., Dynamic buckling of thin isotropic plates subjected to in-plane impact, *Thin-Walled Structures*, 38, 267-283, 2000.
- [6.17] Raftoyiannis I.G., Kounadis A.N., Dynamic buckling of 2-DOF systems with mode interaction under step loading, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35, 531-542, 2000.
- [6.18] Shih C.F., Lee D., Further developments in anisotropic plasticity, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 100, 294-302, 1978.
- [6.19] Simitzes G.J., *Dynamic stability of suddenly loaded structures*, Springer Verlag, New York 1990.
- [6.20] Tsai S.W., Hahn H.T., *Introduction to composite materials*, Technomic Pub. Comp., Westport 1980.
- [6.21] Volmir S.A., *Nieliniowa dynamika płyt i powłok*, Nauka, Moskwa 1972 /w j. *rosyjskim/*.
- [6.22] Wilczyński A.P., *Polimerowe kompozyty włókniste – własności, struktura, projektowanie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.

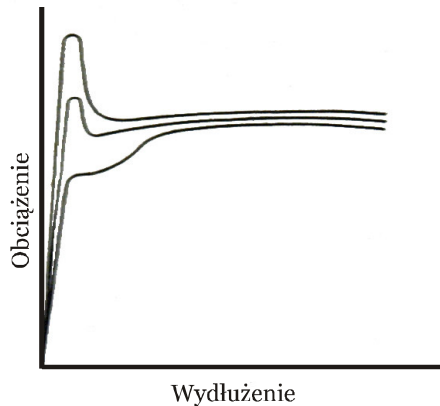
7. WPŁYW PRĘDKOŚCI ODKSZTAŁCENIA NA WŁASNOŚCI MECHANICZNE MATERIAŁÓW

W przeważającej liczbie prac poświęconych dynamicznej stateczności konstrukcji przyjmowane są statyczne własności materiału, tj. moduł Younga, granica plastyczności, współczynnik Poissona, określone w statycznej próbie rozciągania bądź ściskania. Jednakże wiele materiałów, zwłaszcza mających wyraźną granicę plastyczności, w tym stal niskowęglowa, niektóre metale (np. magnez, cynk, beryl, tytan), stopy metali, drewno, polimery, kompozyty wzmocnione włóknami (*FRP*) – szczególnie przy orientacji *off-axis*, wykazują silną wrażliwość na prędkość odkształcenia [7.15], [7.24]. Zjawisko to ma wpływ na wytrzymałość konstrukcji poddanej obciążeniom dynamicznym. Efekt ten występuje w temperaturze pokojowej (≈ 300 K), ale jest też dość czuły na wzrost temperatury. W niniejszej pracy uwzględniany będzie wpływ samej prędkości odkształcenia na własności mechaniczne materiału, przy założeniu, że analiza stateczności dynamicznej odnosi się do procesu izotermicznego. Badania podstawowe związane z prędkością odkształcenia są nakierowane na określenie dynamicznej charakterystyki materiału, czyli krzywej naprężenie-odkształcenie uzyskanej dla szerokiego zakresu zmian prędkości odkształcenia [7.1], [7.15], [7.20], [7.21], [7.22].

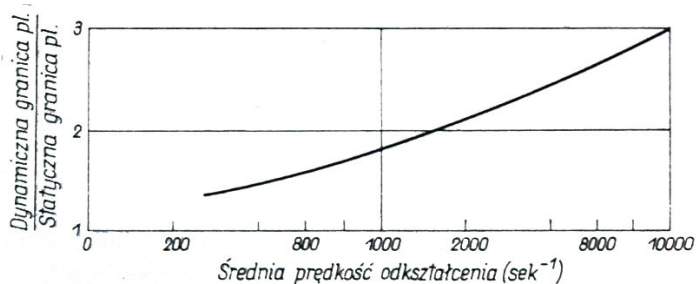
Stosownie do klasyfikacji Lindholm'a [7.1], [7.20] badanie mechanicznych własności różnych materiałów w kontekście prędkości odkształcenia dzieli się na pięć podstawowych zakresów, nazywanych widmem odkształcenia:

- pełzanie – dla prędkości mniejszych od 10^{-5} 1/s,
- badania quasi-statyczne – dla prędkości od 10^{-5} do 10^{-1} 1/s (standardowe próby wytrzymałościowe na zrywarkach),
- zakres średnich prędkości odkształcenia, tj. 10^{-1} do 5×10^1 1/s (np. młot Charpy'ego),
- udar, gdy górna granica prędkości odkształcenia sięga 10^4 1/s (np. pręt Hopkinsona, prędkości okołołdźwiękowe),
- udar z wysokimi prędkościami odkształcenia – dla prędkości przewyższających górną granicę obciążeń udarowych ($>10^4$ 1/s) (np. fala uderzeniowa $\approx 10^6$ 1/s).

Podział powyższy wynika z różnych mechanizmów fizycznych, jakie towarzyszą odkształceniu materiału w podanych przedziałach. Badania z prędkościami deformacji przekraczającymi 10^3 1/s, uznawane w praktyce za wysokie, należy prowadzić z uwzględnieniem efektów falowych. W praktyce laboratoryjnej prędkości do 10 1/s uzyskuje się na klasycznych maszynach wytrzymałościowych. Próby z wyższych zakresów prowadzi się na młotach uderowych o różnym stopniu podniesienia, młotach opadowych, dynamicznych wyrzutniach ciśnieniowych (pręt Hopkinsona, tj. *Split Hopkinson Pressure Bar*) oraz urządzeniach specjalistycznych konstruowanych przez badaczy dla określonych potrzeb pomiarowych [7.1], [7.15], [7.20], [7.21], [7.27]. Rozwój badań w ostatnich kilku dekadach, nad własnościami materiałów pod obciążeniami dynamicznymi wiąże się niewątpliwie z rozwojem elektroniki i urządzeń pozwalających na rejestrację szybkozmiennych procesów. Na rysunku 7.1 zestawione są charakterystyki statyczna i dynamiczne, obrazujące efekt „uskoku” granicy plastyczności dla stali niskowęglowej (0,2% węgla), zaczerpnięte z pracy [7.21], a na rysunku 7.2 zjawisko powyższe jest pokazane w szerokim zakresie prędkości odkształcenia (wykres pochodzi z pracy [7.18]).



Rys. 7.1. Zmiana granicy plastyczności przy obciążeniu dynamicznym porównana z charakterystyką statyczną stali niskowęglowej [7.21]



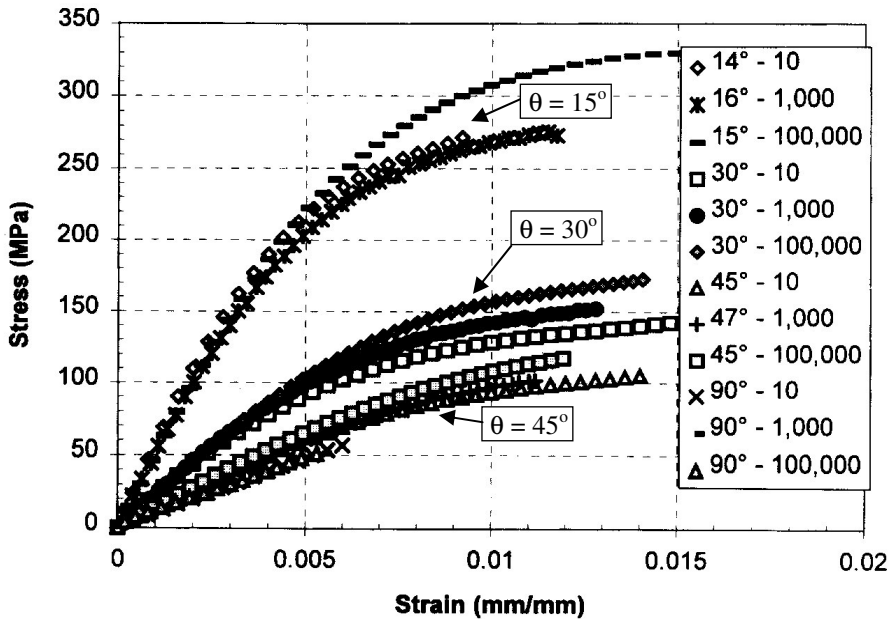
Rys. 7.2. Wpływ prędkości odkształcenia na dynamiczną granicę plastyczności stali [7.18]

W przypadku metali przy obciążeniach dynamicznych zachodzi wyraźna zmiana granicy plastyczności i zmiana fragmentu krzywej naprężenie-odkształcenie w obszarze umocnienia. Efekt ten jest bardziej widoczny dla metali typu BCC (*body-centered cubic* – sieć regularna przestrzennie centrowana) aniżeli dla FCC (*face-centered cubic* – sieć regularna płasko centrowana) [7.22]. W przypadku stali dominuje w gatunkach o niższej wytrzymałości i jest znacznie słabszy dla stali o wyższej wytrzymałości. Dla miękkiej stali dynamiczna granica plastyczności może być 2,5-3 razy wyższa niż podczas próby statycznej. Widoczne jest obniżenie efektu wzmocnienia w procesie dynamicznym w stosunku do charakterystyki statycznej. Przy czym dla dużych prędkości odkształcenia obserwuje się nawet ujemny gradient charakterystyki materiału ($d\sigma/de < 0$) w obszarze statycznego umocnienia. Wzrost wytrzymałości ma miejsce dla prędkości odkształcenia – dla stali S235 (poprzednie oznaczenie St3) do 5×10^5 1/s, dla stopu aluminium do $1,5 \times 10^5$ 1/s [7.2]. Dalszy wzrost prędkości odkształcenia nie powoduje wzrostu wytrzymałości. W zakresie sprężystym nie ma zmiany modułu Younga. Wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia zachodzi stopniowe przejście od deformacji izotermicznej do procesu deformacji adiabatycznej, podczas którego cała praca deformacji plastycznej zamienia się na ciepło, podnoszące temperaturę próbki/materiału.

Analogiczna analiza kompozytów włóknistych nie daje tak jednoznacznych wniosków. Wiadomo bowiem, że niektóre włókna są wrażliwe na prędkość odkształcenia, inne zaś nie [7.16]. Z kolei prawie wszystkie materiały, z których wykonywane są matryce kompozytów wzmacnianych włóknami, są wrażliwe na prędkość odkształcenia. Stąd większość obecnych w literaturze trójwymiarowych modeli materiałów kompozytowych, ze względu na ich wrażliwość na prędkość odkształcenia, ma charakter empiryczny i dotyczy kompletnej laminy/warstwy. Podejmowane są także próby interpretowania wrażliwości kompozytu na prędkość odkształcenia poprzez równania mikromechaniki, gdzie wypadkowe zachowanie się kompozytu obliczane jest w oparciu o własności i odpowiedź dynamiczną jego składników [7.23]. Takie podejście jest szczególnie przydatne w nieliniowych obliczeniach konstrukcji kompozytowych metodą elementów skończonych.

Przy poczynionym wyżej założeniu odnośnie oceny własności dynamicznych całej warstwy, badania kompozytów wzmocnionych włóknami – zarówno włóknem szklanym (*GFRP*) jak i węglowym (*CFRP*), potwierdzają wrażliwość tych materiałów na prędkość odkształcenia. Dodatkowym utrudnieniem w badaniach dynamicznych kompozytów wielowarstwowych jest efekt sprężenia membranowo – giętnego, który utrudnia bezpośrednie powiązanie danych eksperymentalnych naprężenie – odkształcenie, gdyż odkształcenie nie jest jednorodne. Sprawia to, że zazwyczaj dobiera się próbki o zbalansowanej sekwencji warstw. W zjawisku wrażliwości laminatów na prędkość odkształcenia dochodzi także zależność od orientacji warstw – kąta laminacji, co widoczne jest przy odmiennym przebiegu

charakterystyk materiałowych dla jednakowych prędkości odkształcenia, ale różnych kątów (rys. 7.3) [7.26].



Rys. 7.3. Charakterystyki naprężenie/odkształcenie dla próbek wielowarstwowych o jednakowej orientacji warstw przy kilku prędkościach odkształcenia [7.26]

Większość dynamicznych charakterystyk kompozytów wzmacnianych włóknami ma liniowy (bądź prawie liniowy) przebieg do granicy plastyczności, (który jest dobrze zdefiniowany, zwłaszcza w kompozytach termoplastycznych) i nieliniowy kształt powyżej tej granicy. Rosnącej prędkości odkształcenia towarzyszy wzrost granicy plastyczności. Niektórzy autorzy interpretują ten punkt jako początek separacji włókien i matrycy [7.16]. Przy definiowaniu równań konstytutywnych dla FRP uśrednia się charakterystyki z prób ściskania i rozciągania, przyjmując, że zachowanie materiału jest podobne dla obydwu kierunków obciążenia. Nowym efektem w badaniach dynamicznych kompozytów wielowarstwowych – w porównaniu do metali, jest zmiana modułu Younga. Rośnie on wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia [7.7], [7.23], [7.25]. Badanie zmian współczynnika Poissona w GFRP pod wpływem różnych prędkości obciążenia nie wykazały jego czułości na prędkość odkształcenia [7.17]. Kolejnym istotnym czynnikiem w badaniach kompozytów warstwowych wzmacnianych włóknami jest współczynnik zawartości włókien. Wobec wspomnianego wcześniej faktu różnych lepkoplastycznych własności włókien i matrycy ma on istotny wpływ na dynamiczne zachowanie laminatu.

Na podkreślenie zasługuje fakt, iż nawet dla prób jednoosiowego obciążenia dynamicznego nie zaobserwowano stałej prędkości odkształcenia w trakcie próby. Zgodnie z założeniami teorii uwzględniającej wpływ prędkość odkształcenia, czoło fali plastycznej rozchodzi się z taką samą prędkością jak czoło fali sprężystej i nie ma obszaru stałego odkształcenia w pobliżu dynamicznie wprowadzonego obciążenia [7.18]. Odkształcenie plastyczne jest niejednorodne. Wartości podawane jako referencyjne w omawianych badaniach są określane jako wielkości średnie, przy czym istnieje kilka różnych sposobów uśredniania. Jednym jest określenie średniej arytmetycznej maksymalnej i minimalnej prędkości odkształcenia zarejestrowanych w trakcie badania. Kolejnym jest średnia wartość odkształcenia odniesiona do czasu, w którym to odkształcenie zaistniało. Podobnym sposobem jest określenie prędkości odkształcenia z nachylenia charakterystyki odkształcenie-czas. Z kolei przy próbach realizowanych z zastosowaniem pręta Hopkinsona (*SHPB*) prędkość odkształcenia uzyskana w badaniu dynamicznym jest obliczana na podstawie różnicy prędkości na końcach pręta inicjującego i transmitującego. Autorzy pracy [7.24] twierdzą nawet, że materiał jest czuły jedynie na rząd prędkości odkształcenia i wystarczy podanie maksymalnej wartości prędkości odkształcenia zrealizowanej podczas próby, jako wartości referencyjnej.

7.1. Zależności konstytutywne lepkoplastyczności

Odniesieniem dla sformułowania równań konstytutywnych w ciałach stałych jest charakterystyka materiału w jednoosiowym stanie naprężenia. Jak wynika z przytoczonych wykresów (rys. 7.1, rys 7.3), charakterystyki statyczne materiałów – uzyskiwane przy prędkościach odkształcenia poniżej 10^4 1/s, różnią się od charakterystyk dynamicznych, uzyskiwanych dla wyższych prędkości odkształcenia. Obserwowany na dynamicznych charakterystykach wzrost granicy plastyczności jest związany z lepkością materiału. Uwzględnienie efektów reologicznych w połączeniu z efektami plastycznymi prowadzi do opisu materiału za pomocą modelu lepkoplastycznego. Nie dokonując rozróżnienia pomiędzy odkształceniem lepkiem i plastycznym do opisu materiału lepkoplastycznego, można zastosować równania teorii plastyczności. Wobec braku jednoznaczności w relacjach naprężenie-odkształcenie w obszarach uplastycznionych, w równaniach konstytutywnych stosuje się zależności przyrostowe. Podejście takie jest przedmiotem teorii plastycznego płynięcia, a uwzględniając postulat Pragera, uzyskuje się zależności teorii stowarzyszonego plastycznego płynięcia [7.6], [7.27]. W odniesieniu do problemów lepkoplastycznych podstawowe równania wyrażone są w formie zależności prędkości odkształcenia od naprężeń. W dalszych zależnościach pominięte zostaną człony związane z wpływem temperatury na dynamiczne zachowanie materiałów. Wiąże się to z założeniem, że temperatura jest stała (równomierna) w analizowanym materiale, czyli proces deformacji jest izotermiczny.

Rozpatrując izotropowy lub ortotropowy materiał ze wzmocnieniem izotropowym w stanie sprężysto-plastycznym w ramach stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego, wprowadza się pojęcie funkcji uplastycznienia. Funkcja ta jest potencjałem plastycznym, której postać zwykle jest zgodna z warunkiem początku plastyczności i może być zdefiniowana w postaci:

$$f(J_2, J_3) = const \quad (7.1)$$

gdzie J_2 oraz J_3 są niezmiennikami dewiatora tensora naprężenia. W warunku (7.1) nie ma pierwszego niezmiennika tensora naprężenia, gdyż dowodzi się, że odkształcenie plastyczne jest izochoryczne ($d\varepsilon_{ii}^p = 0$). Skomplikowany charakter uplastycznienia w materiale lepkoplastycznym lepiej oddaje zdefiniowanie potencjału plastycznego bardziej jawnie, jako funkcji zależnej od czterech parametrów:

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa, \gamma) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7.1a)$$

Explicite widoczna jest zależność funkcji f od stanu naprężenia σ_{ij} , stanu odkształcenia plastycznego ε_{ij}^p , parametru wzmocnienia materiału κ (zdefiniowany w dalszej części rozdziału) oraz parametru $\gamma = \gamma(\varepsilon_{ij}^p)$ reprezentującego efekty lepkości.

W dziewięciowymiarowej (bądź sześćo- uwzględniając symetrię tensora naprężenia) przestrzeni naprężeń funkcja (7.1) lub (7.1a) opisuje powierzchnię płynięcia. Przyrost odkształcenia plastycznego może być wyrażony przez stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego następująco:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7.2)$$

W prawie płynięcia (7.2) $d\lambda$ jest dodatnio określonym skalarom, zależnym od przyrostu naprężenia i ogólnie historii odkształcenia (tj. ε_{ij}^p oraz κ). Zakładając, że potencjał plastyczny f jest jednorodną funkcją stopnia n i stosując prawo Eulera [7.6] dla przyrostu pracy odkształcenia plastycznego na jednostkę objętości, uzyskuje się relację:

$$dW_p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} d\lambda = n f d\lambda \quad (7.3)$$

Przy definicji intensywności naprężeń w postaci $\sigma_i^2 = 3f = 3/2 S_{ij} S_{ij}$, gdzie S_{ij} są składowymi dewiatora naprężenia, potencjał plastyczności jest funkcją drugiego rzędu, dochodzi się do zależności na parametr $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_i} \quad (7.4)$$

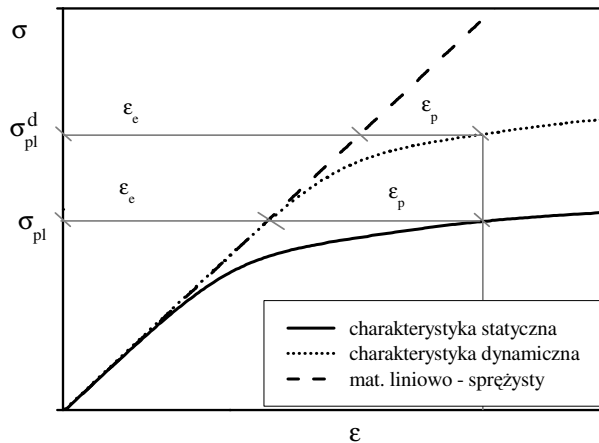
Skąd ostatecznie dla przyrostu odkształcenia plastycznego otrzymuje się równanie:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_i} S_{ij} \quad (7.5)$$

z którego wynika, że składowe tensora przyrostów odkształcenia plastycznego są proporcjonalne do składowych dewiatora naprężeń S_{ij} . W wyrażeniach powyższych $d\varepsilon_i^p$ jest intensywnością przyrostów odkształceń plastycznych.

Występujący w (7.1a) definicji funkcji płynięcia parametr wzmocnienia κ jest zdefiniowany za pomocą wyrażenia [7.9], [7.18]:

$$\kappa = \kappa(W_p) = \kappa \left(\begin{array}{c} \varepsilon_{ij}^p \\ \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{kl} d\varepsilon_{kl}^p \\ 0 \end{array} \right) \quad (7.6)$$



Rys. 7.4. Odkształcenia sprężyste i plastyczne (lepkoplastyczne)

Wobec addytywnej dekompozycji składowych przyrostów odkształcenia na część plastyczną i część sprężystą (rys. 7.4):

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (7.7)$$

gdzie część plastyczna wyrażona jest równaniem (7.5), część sprężysta może być wyrażona za pomocą uogólnionego prawa Hooke'a [7.14]:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_0 \delta_{ij} \quad (7.8)$$

δ_{ij} jest deltą Kroneckera, a σ_0 jest naprężeniem średnim. Pomiędzy obydwooma częściami odkształcenia nie ma sprzężenia, a wzmocnienie dotyczy jedynie części plastycznej. Dodając do siebie składowe odkształceń plastycznych i sprężystych, otrzymuje się składowe przyrostów odkształceń całkowitych:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_0 \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0) \quad (7.9)$$

Zależności (7.9) są podstawowymi równaniami teorii płynięcia i zwyczajowo nazywane są równaniami Pradtla-Reussa od nazwisk badaczy, którzy je wprowadzili w latach 1924-1930 [7.6].

Zależności powyższe zgodnie z hipotezą Ludwika [7.13] "jednej krzywej" nie zależą od rodzaju stanu naprężenia. Zależność naprężenie – odkształcenie określona dla danego materiału w statycznej próbie rozciągania/ściskania, dla materiałów nieściśliwych w zakresie plastycznym może być uogólniona na zależność intensywność naprężeń – intensywność odkształceń [7.14].

Odniesienie przyrostów odkształceń – definiowanych jednakże dla zagadnień quasi-statycznych – do czasu rzeczywistego jest przeniesieniem rozważań z obszaru teorii plastyczności na obszar teorii lepkoplastyczności. Prowadzi to zatem do dodatkowego uzależnienia stanu naprężenia i odkształcenia od czasu, obok istniejącej już zależności od ścieżki obciążenia (wynikającej tylko z teorii plastyczności). Wówczas kinetyczna postać przyrostowego równania (7.7) jest następująca [7.18]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (7.10)$$

gdzie zapis z kropką oznacza pochodną po czasie. Addytywność prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon}$ jest tym razem rezultatem cech sprężystych i lepkoplastycznych materiału, a równania (7.9) przyjmą postać [7.18]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_0 \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i} (\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \dot{\sigma}_0) \quad (7.11)$$

W celu uwzględnienia efektów reologicznych Perzyna [7.18] proponuje zmodyfikowaną funkcję uplastycznienia, nazywaną także potencjałem lepkoplastycznym, w formie:

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \frac{f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)}{\kappa} - 1 \quad (7.12)$$

Wówczas trzeci składnik po prawej stronie równań (7.11), związany z prędkością odkształcenia lepkoplastycznego, zostanie zmodyfikowany do postaci:

$$\gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7.13)$$

W wyrażeniu tym γ oznacza stałą materiału – współczynnik lepkości materiału, zaś zapis $\langle \Phi(F) \rangle$ oznacza tzw. nawias Macauley'a i zdefiniowany jest następująco:

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \rightarrow F \leq 0; \\ \Phi(F) & \rightarrow F > 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

Postać wyrażenia (7.13) oznacza zależność prędkości odkształcenia niesprężystego od stanu naprężenia będącego różnicą pomiędzy stanem aktualnym a stanem naprężenia odpowiadającym statycznemu warunkowi uplastycznienia. Stąd model Perzyny nazywany bywa w literaturze modelem „przeciążeniowym” (*overstress*). Funkcję $\Phi(F)$ należy dobrać na podstawie wyników badań doświadczalnych, dotyczących własności dynamicznych materiału, w taki sposób, aby pozwalała na opis wpływu prędkości odkształcenia na granicę plastyczności. Dla metali, dynamiczny związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem został określony równością:

$$\sigma = \sigma_{pl} \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\gamma^*} \right) \right] \quad (7.15)$$

gdzie $\gamma^* = 2\gamma/\sqrt{3}$, a σ_{pl} jest bieżącą granicą plastyczności ze statycznego wykresu naprężenie-odkształcenie materiału ze wzmocnieniem izotropowym. Pewna szczególna postać funkcji $\langle \Phi(F) \rangle$ opisana jest równaniem [7.19], [7.27]:

$$\sigma = \sigma_{pl} \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\gamma^*} \right)^m \right] \quad (7.16)$$

Wykładnik potęgi m jest kolejną stałą materiałową określaną empirycznie. Analogiczną do (7.16) funkcję podali Cowper i Symonds [7.11]:

$$\dot{\varepsilon}^p = D \left(\frac{\sigma}{\sigma_{pl}} - 1 \right)^q \quad (7.17)$$

gdzie q i D są stałymi charakterystycznymi dla danego materiału. Stała D może być interpretowana jako wartość prędkości odkształcenia, przy której dynamiczna granica plastyczności materiału jest dwukrotnie większa od jej statycznego odpowiednika. Zależności funkcyjne (7.16) i (7.17) stają się tożsame przy przyjęciu $\dot{\gamma}^* = D$ oraz $m = 1/q$. Bardzo dobrą zgodność z rezultatami doświadczeń daje dla stali niskowęglowej przyjęcie $D = 40,4$ [1/s] oraz $q = 5$ [7.18]. Wykładniki m lub q występujące w równaniach (7.16) i (7.17) są nazywane czułością na prędkość odkształcenia. Należy dodać, że parametry te są stałe i nie zależą od prędkości odkształcenia. W literaturze można znaleźć stałe materiałowe występujące w równaniach (7.16) i (7.17) wyznaczone doświadczalnie dla różnych metali [7.11], [7.18].

Oczywiście równanie lepkoplastyczne Perzyny nie jest jedynym możliwym opisem reologicznym materiału, ale z pewnością jest jednym z pierwszych zaproponowanych modeli materiału lepkoplastycznego. W literaturze znane są równania konstytutywne zaproponowane przez innych badaczy, omówione między innymi w pracach [7.4], [7.5]. Obszerne omówienie kilkunastu modeli lepkoplastycznych zawiera książka Kłosowskiego i Woznicy [7.12]. Autorzy obok przedstawienia modeli konstytutywnych podają w tablicach stałe materiałowe występujące w tych modelach oraz omawiają metody identyfikacji tych stałych w eksperymentach. Należy tu jednak podkreślić, że wraz z przeznaczaniem zastosowania praw konstytutywnych do wąskiej grupy zagadnień, prawa te ulegały matematycznej komplikacji połączonej ze znaczną liczbą trudnych do interpretacji i identyfikacji parametrów.

Szczególnie popularnym w zastosowaniu jest model konstytutywny Johnsona-Cooka [7.10], najczęściej wykorzystywany w analizie wysokich prędkości odkształcenia (uderzenie, dynamiczna plastyczność, cięcie). Sformułowana przez nich zależność definiuje dynamiczny początek płynięcia w następujący sposób:

$$\sigma_{pl} = [A + B(\bar{\epsilon}^p)^n] (1 + C \ln \dot{\epsilon}^p) \left(1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^m \right) \quad (7.18)$$

W równaniu powyższym A , B , C , n oraz m są stałymi materiałowymi, T_0 jest temperaturą początkową, a T_m temperaturą topnienia materiału. Zatem w modelu Johnsona-Cooka występuje wzajemny związek pomiędzy naprężeniami, odkształceniami, prędkością odkształcenia oraz temperaturą. Iloraz temperatur w równaniu konstytutywnym (7.18) nazywany jest temperaturą homologiczną. Stałe materiałowe występujące w tym równaniu można znaleźć w literaturze bądź wyznaczyć na drodze stosunkowo żmudnych eksperymentów [7.20]. W odróżnieniu od modelu Perzyny równanie Johnsona-Cooka (7.18) nie modeluje efektu uskoku granicy plastyczności („nosa”) na dynamicznej charakterystyce rozciągania (rys. 7.1), tj. zmiękczenia bezpośrednio po osiągnięciu granicy

plastyczności z następującym po nim obszarem wzmocnienia. W przypadku deformacji izotermicznej znika człon temperaturowy.

Formułowanie równań konstytutywnych uwzględniających efekt prędkości odkształcenia w przypadku kompozytów wzmocnianych włóknami przebiega w zasadzie w oparciu o dwie koncepcje. Pierwsza z nich bazuje na doświadczeniach dotyczących metali i opiera się na analogicznej procedurze analitycznej [7.15], [7.24], [7.25], [7.28]. W efekcie sformułowane są równania dla całej laminy (warstwy z matrycą i włóknami) wiążące przyrosty odkształceń z naprężeniami, w których występują współczynniki wyznaczone w badaniach laboratoryjnych. Związane z tym problemy badawcze zostały wcześniej omówione w przeglądzie literatury. Odmienne podejście prezentują prace (np. [7.7], [7.8], [7.23]) wykorzystujące analizę mikromechaniczną, w których indywidualnie określone są zależności konstytutywne dla włókien i oddzielnie dla matrycy. Na ich bazie budowane są w metodzie elementów skończonych modele numeryczne kompozytów, a uzyskane wyniki porównywane są z rezultatami badań dynamicznych „całych” struktur wielowarstwowych.

W pracy [7.24] zaproponowano trójwymiarowy model lepkoplastyczny dla kompozytu wzmocnionego włóknem szklanym (*GFRP*). Bazując na hipotezie Hilla dla materiału ortotropowego, zastosowano funkcję plastyczności, w której uwzględniono brak deformacji w kierunku włókien. Dodatkowo założono, że materiał spełnia cechy poprzecznej izotropii, co dodatkowo uprościło potencjał plastyczny (wzór (10) w [7.24]) do postaci:

$$2f(\sigma_{ij}) = (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2 + 2a_{66}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \quad (7.19)$$

Współczynnik a_{66} w funkcji (7.19), nazwany parametrem ortotropii, jest wyznaczany poprzez próbę rozciągania w płaskim stanie naprężenia. Stosując dekompozycję prędkości odkształceń w formie równania (7.10b), prędkość odkształcenia lepkoplastycznego uzależniono od potencjału plastycznego, analogicznie do prawa płynięcia (7.2). Pozwoliło to na analityczne opisanie prędkości odkształcenia lepkoplastycznego i ostatecznie doprowadziło do sformułowania równania konstytutywnego w formie prawa potęgowego [7.24]:

$$\varepsilon_i^p = \chi(\dot{\varepsilon}^p)^m (\sigma_i)^n \quad (7.20)$$

Występujące w opisie modelu (7.20) współczynniki χ , m oraz n należy określić w oparciu o badania eksperymentalne. Przy czym wyznaczenie tych trzech współczynników może odbyć się w zakresie niskich prędkości odkształcenia do 1 1/s na klasycznej maszynie wytrzymałościowej, z zachowaniem płaskiego stanu naprężenia. Nie ogranicza to wszakże ogólności i zakresu stosowania równania (7.20) w całym zakresie prędkości odkształcenia. Można jedynie stwierdzić, że model tego typu wymaga indywidualnych badań eksperymentalnych

dla wyznaczenia stałych materiałowych występujących w równaniach konstytutywnych danego typu kompozytu wielowarstwowego.

Zmiany gęstości podczas odkształceń plastycznych są wielkością nieskończenie małą pierwszego rzędu, co potwierdzają doświadczenia z wielokrotnym poddawaniem materiału deformacjom plastycznym, prowadzone przy różnych prędkościach odkształcenia. Potwierdza to przyjmowane zazwyczaj założenie o nieściśliwości materiału w stanie plastycznym (model izochoryczny).

Wobec różnorodności interpretacji w różnych publikacjach wydaje się niedefiniowanym pojęciem prędkość odkształcenia. Jones [7.11] – na przykład, definiuje ją przez iloraz prędkości przemieszczenia krawędzi v do długości początkowej l : $\dot{\epsilon} = v/l$, analizując odkształcenie długiego pręta wywołane nagle przyłożonym obciążeniem przemieszczającym się z prędkością v . W pracy [7.16], dotyczącej badań dynamicznych z prętem Hopkinsona, mówi się praktycznie o średniej prędkości odkształcenia z całego procesu deformacji próbki. Oczywiście wynika to z problemów pomiarowych w zjawiskach szybkościennych. Niemniej jednak można mówić o różnie rozumianych prędkościach odkształcenia. W niniejszej pracy miarą prędkości odkształcenia był przyrost intensywności odkształceń plastycznych w krótkim przedziale czasu odniesiony do długości tego przedziału czasowego. W pewnym stopniu miało to wpływ na wielkość prędkości odkształcenia przy przyjmowaniu względnie krótkich przedziałów czasowych, jednakże zaobserwowane różnice nie zmieniały rzędu wielkości, co jak wynika z rezultatów badań [7.24], jest dostatecznym unormowaniem dla rozpatrywanego zakresu prędkości odkształcenia.

7.2. Literatura

- [7.1] Astanin V.V., Eksperimentalnoe isledovanie udarnovo szatia metalom v uprugoplasticeskich volnach nagruzenii intensivnostiu do 10000 MPa, Zavodskaja laboratoria, 46, 1980, 754-758.
- [7.2] Astanin V.V., Vysokoskorostnoje deformirovanie metalov, Zavodskaja laboratoria, 55, 1989, 88-92.
- [7.3] Bathe K.J., Finite elements procedures, Prentice Hall Int., Inc, 1996.
- [7.4] Barlat F., Yoon J.W., Cazacu O., On linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy, Int. J. of Plasticity, 23, 2007, 876-896.
- [7.5] Chaboche J.L., A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories, Int. J. of Plasticity, 24, 2008, 1642-1693.
- [7.6] Chakrabarty J., Theory of plasticity, McGraw-Hill Book Comp., 1987.
- [7.7] Gilat A., Goldberg R.K., Roberts G.D., Experimental study of strain-rate-dependent behavior of carbon/epoxy composite, Comp. Science and Tech., 62, 2002, 1469-1476.
- [7.8] Goldberg R., Implementation of laminate theory into strain rate dependent micromechanics analysis of polymer matrix composites, NASA/TM-2000-210351.
- [7.9] Hill R., The mathematical theory of plasticity, Oxford Univ. Press, 1950.

- [7.10] Johnson, G.R., Cook, W.H., A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates, and high temperatures, In: Proc. of the 7th Intern. Symp. on Ballistics, The Hague, The Netherlands, 1983, 1–7.
- [7.11] Jones N., Structural impact, Cambridge University Press, 2003.
- [7.12] Kłosowski P., Woznica K., Nieliniowe lepkoplastyczne prawa konstytutywne w wybranych zastosowaniach analizy konstrukcji, Wyd. Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2007.
- [7.13] Ludwik P., Elemente der technischen Mechanik, Springer, Berlin 1909.
- [7.14] Malinin N.N., Rżysko J., Mechanika materiałów, PWN, Warszawa 1981.
- [7.15] Ochelski S., Metody doświadczalne mechaniki kompozytów konstrukcyjnych, WNT, Warszawa 2004.
- [7.16] Ochola R.O., Marcus K., Nurick G.N., Franz T., Mechanical behaviour of glass and carbon fiber reinforced composites at varying strain rates, Composite Structures, 63, 2004, 455-467.
- [7.17] Okoli O.I., Smith G.F., The effect of strain rate and fibre content on the Poisson's ratio of glass/epoxy composites, Composite Structures, 48, 2000, 157-161.
- [7.18] Perzyna P., Teoria lepkoplastyczności, PWN, Warszawa 1966.
- [7.19] Perzyna, P. Fundamental problems in viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, Academic Press, New York 1968, 313-377.
- [7.20] Perzyna P., Klepaczko J., Bejda J., Nowacki W.K., Wierzbicki T., Zastosowania lepkoplastyczności, Ossolineum, PAN, Wrocław 1971.
- [7.21] Pogodin-Aleksiejew G.I., Wytrzymałość dynamiczna i kruchość metali, WNT, Warszawa 1969.
- [7.22] Rusinek A., Zaera R., Klepaczko J.R., Constitutive relations in 3d for a wide range of strain rates and temperatures –Application to mild steel, Int. Jo. of Solids and Structures, 44, 2007, 5611-5634.
- [7.23] Tabiei A., Yi W., Goldberg R., Non-linear strain rate dependent micro-mechanical composite material model for finite element impact and crashworthiness simulation, Int. Jo. Of Non-linear Mechanics, 40, 2005, 957-970.
- [7.24] Thiruppukuzhi S.V., Sun C.T., Testing and modeling high strain rate behavior of polymeric composites, Composites Part B, 29B, 1998, 535-546.
- [7.25] Tsai J., Sun C.T., Constitutive model for high strain rate response of polymeric composites, Composites Science and Technology, 62, 2002, 1289-1297.
- [7.26] Weeks C.A., Sun C.T., Modeling non-linear rate-dependent behavior in fiber-reinforced composites, Composites Science and Technology, 58, 1998, 603-611.
- [7.27] Wierzbicki T., Obliczanie konstrukcji obciążonych dynamicznie, Arkady, Warszawa 1980.
- [7.28] Yuanming Xia, Ying Wang, Yuanxin Zhou, Shaik Jeelani, Effect of strain rate on tensile behavior of carbon fiber reinforced aluminum laminates, Materials Letters, 61, 2007, 213-215.

8. METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ Z EFEKTEM PRĘDKOŚCI ODKSZTAŁCENIA

Postawione zagadnienie wpływu prędkości odkształcenia na stateczność dynamiczną cienkościennych słupów rozwiązano metodą elementów skończonych z uwzględnieniem teorii plastycznego płynięcia oraz wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia.

Zastosowanie metody elementów skończonych wynikało z powodów skomentowanych uprzednio – głównie braku ścisłego rozwiązania układu równań (5.29). Pozwoliło na analizę struktury o dużej liczbie stopni swobody. W efekcie dało to możliwość uwzględnienia w dynamicznej odpowiedzi konstrukcji złożonych form deformacji ścian, co w metodzie analitycznej uzyskuje się na przykład poprzez włączenie wielu wyrazów szeregu np. trygonometrycznego do opisu ugięć. Metoda elementów skończonych umożliwiła ponadto względnie „łatwy” ogląd przebiegu zachowania się konstrukcji w czasie – zarówno w trakcie działającego impulsu dynamicznego, jak i po jego ustaniu. Istotne jest również i to, że z jednego przebiegu obliczeń uzyskiwano dużą liczbę różnorodnych wyników pozwalających na kompleksową analizę i ocenę zjawiska wyboczenia dynamicznego z efektem wrażliwości na prędkość odkształcenia.

8.1. Metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych ma ugruntowaną pozycję i jest szeroko stosowana w analizie konstrukcji, ciała stałego, zagadnieniach przepływu ciepła i płynów. W odniesieniu do „prostych” problemów pozwala na generację własnych kodów numerycznych. Istnieje także szereg rozbudowanych pakietów programowych z przyjaznym interfejsem graficznym i możliwością aplikacji do analizy różnych zagadnień mechaniki strukturalnej. Pakiety takie – jak zastosowany do przeprowadzenia obliczeń w niniejszej pracy program ANSYS [8.12], mają zaimplementowane wysoko rozwinięte procedury numeryczne i dzięki temu umożliwiają uzyskanie wyników obliczeń w akceptowalnym czasie. Oczywiście czas ten jest także pochodną możliwości sprzętu komputerowego, na którym prowadzone są obliczenia. Jednakże użycie takiego pakietu zwalnia użytkownika z trudu żmudnego programowania procedur całkujących równania

różniczkowe typu (5.33) z warunkami brzegowymi (5.34) i warunkami początkowymi dla zagadnień dynamicznych (podrozdział 8.3). Dodatkowo istnieją możliwości zaimplementowania własnych procedur użytkownika, definiujących własny element bądź niedostępne w pakiecie szczególne własności materiału.

Uzyskanie wyniku finalnego obliczeń w stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennej przy zastosowaniu MES, jako metody wszakże przybliżonej, do rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego odbywa się w pewien usystematyzowany sposób. W pierwszym kroku należy ciągiły model fizyczny słupa aproksymować modelem dyskretnym. Wiąże się to z doбором elementu skończonego o cechach dokładnie odwzorowujących rzeczywiste wielkości fizyczne modelowanej konstrukcji. Odnosi się to zarówno do funkcji kształtu, definicji materiału czy liczby węzłów i stopni swobody. Kolejny etap to statyczna analiza stateczności konstrukcji, prowadząca do wyznaczenia statycznych obciążeń krytycznych (wartości własnych macierzy sztywności) oraz postaci wybočenja (postaci własnych). Statyczne obciążenia krytyczne są wykorzystywane w dalszej analizie przy określaniu amplitudy impulsu dynamicznego wmuszenia, zaś postacie własne służą do zaburzenia siatki elementów w formie imperfekcji wstępnych. W trzecim etapie wykonuje się analizę modalną, pozwalającą na wyznaczenie częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań. To także jest poszukiwanie wartości własnych, tym razem macierzy mas. Na podstawie częstości drgań własnych oblicza się okres drgań własnych, który jest czasem referencyjnym w analizie dynamicznej czasu trwania impulsu dynamicznego. Znając statyczne postaci wybočenja, generuje się nową siatkę elementów w modelu dyskretnym, zaburzając ją postacią własną odpowiadającą zazwyczaj najniższej statycznej sile krytycznej, z niewielkim ugięciem wstępnym odniesionym do grubości ściany kolumny (w niniejszej pracy $w_0 \in \{0,01; 0,05; 0,10\} \times h_i$). W następnym kroku prowadzi się nieliniową analizę dynamiczną zachowania się konstrukcji w czasie. Odnosi się to do skończonego czasu, w którym na konstrukcję działa impuls obciążenia oraz czasu po ustaniu działania impulsu (zazwyczaj $0,5 \div 1$ czasu trwania impulsu dynamicznego). Etapem końcowym jest obróbka uzyskanych wyników obliczeń oraz ich analiza.

Wobec pominięcia w prowadzonej analizie efektów tłumienia, o czym była mowa w rozdziale 2 [8.3], oraz przyjęcia aktualizowanego sformułowania Lagrange'a (UL) w opisie dynamicznego zachowania konstrukcji w czasie, macierzowe równanie ruchu (5.37) (dynamiczne równanie równowagi) ma postać [8.1]:

$$\{M\}^{t+\Delta t} \{\ddot{u}\} + {}^t\{K_L\} + {}^t\{K_{NL}\} \{u\} = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^t\{F\} \quad (8.1)$$

W równaniu tym człon $\{M\}\{\ddot{u}\}$ odpowiada działaniu sił bezwładności, przy czym macierz masowa $\{M\}$ jest niezależna od czasu wobec przyjęcia warunku, że materiał jest izochoryczny. $\{K_L\}$ i $\{K_{NL}\}$ są odpowiednio liniową i nieliniową

częścią macierzy sztywności aktualizowaną w kolejnym kroku czasowym, zaś $\{R\}$ oraz $\{F\}$ oznaczają odpowiednio wektory sił zewnętrznych oraz węzłowych. Indeksy górne i dolne identyfikują względny czas określenia danej wielkości równania (8.1). Zastąpienie pochodnych po czasie $\{\dot{u}\}$ skończonymi różnicami wektora przemieszczenia $\{u\}$ w kolejnych dyskretnych chwilach czasu t , prowadzi do rozwiązania statycznego równania równowagi w kolejnych krokach czasu $t_i + \Delta t$. Program ANSYS do całkowania po czasie równań (8.1) wykorzystuje metodę Newmarka, a do ich całkowania w kolejnych krokach czasowych stosowany jest algorytm Newtona-Raphsona [8.1], [8.9].

W przypadku analizy materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia możliwe są dwa warianty obliczeń. Pierwszy wynika z zastosowania w pakiecie ANSYS programowej opcji dla materiału lepkoplastycznego zgodnego z modelem Perzyny [8.7] albo modelem Pierce'a [8.5]. Druga możliwość polega na zdefiniowaniu własnego modelu materiału (procedura *Usermat*) zawierającego równanie konstytutywne ze stałymi stanu materiału lepkoplastycznego [8.12]. W obydwu przypadkach rozwiązanie uzyskuje się w chwili, kiedy intensywność naprężeń w konstrukcji osiągnie wartość równą naprężeniom obliczonym z równania (7.16) – w przypadku modelu Perzyny lub innego równoważnego mu równania przy przyjęciu innego modelu materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia.

8.2. Generacja modelu dyskretnego kolumny

Będący przedmiotem rozważań słup o przekroju zamkniętym jest klasyczną konstrukcją cienkościenną, stąd do jego dyskretyzacji wybrano elementy powłokowe typu SHELL. Modelowanie trójwymiarowej (3D) konstrukcji elementami powłokowymi jest już samo w sobie rodzajem aproksymacji, jednakże zastosowanie elementu bryłowego (typu SOLID) byłoby tutaj podejściem mniej racjonalnym. Za wyborem elementu powłokowego przemawia także i to, że w rozwiązaniu analitycznym stosowane są nieliniowe równania teorii cienkich płyt w opisie Lagrange'a. W programie ANSYS dostępnych jest kilka elementów typu powłokowego o różnym przeznaczeniu. Wobec analizy dynamicznego zachowania się konstrukcji w czasie, z założenia w przypadkach kiedy znajduje się ona w stanie zakrytycznym sprężysto-plastycznym, a dla oceny jej wrażliwości na prędkość odkształcenia w stanie sprężystym i/lub lepkoplastycznym, wybrano element skończony SHELL181. Jest to czterowęzłowy element o sześciu stopniach swobody w każdym z węzłów, tzn. mający zdefiniowane odpowiednio przemieszczenia wzdłuż osi x , y , z lokalnego układu współrzędnych oraz obroty wokół tych osi. Dla związania obrotu wokół osi prostopadłej do powierzchni elementu z przemieszczeniami w płaszczyźnie elementu zastosowano funkcje kary [8.11]. Wpływ poprzecznego ścinania jest w tym elemencie uwzględniony

zgodnie z teorią ścinania pierwszego rzędu (*FSDT*). Dodatkowo jest to element wielowarstwowy, gdzie właściwości poszczególnych warstw odnośnie ich grubości, materiału oraz orientacji kierunków głównych ortotropii mogą być indywidualnie definiowane za pomocą opcji *section*. W opisie własności materiału – zarówno izotropowych jak i ortotropowych – jaki może być modelowany tym elementem, istnieje kilka możliwości. Wśród nich w prowadzonej analizie wykorzystywano biliniowy i nieliniowy opis charakterystyki materiału oraz wrażliwość materiału na prędkość odkształcenia. Wobec prowadzenia obliczeń w przypadku dużych odkształceń w programie ANSYS wprowadza się charakterystykę rzeczywiste naprężenie – rzeczywiste odkształcenie, gdzie rzeczywiste odkształcenie (miara wprowadzona przez Ludwika) $\varepsilon_{rz} = \ln(1 + \varepsilon)$ wylicza się na podstawie odkształcenia względnego ε (w sensie Cauchy’ego), a rzeczywiste naprężenie $\sigma_{rz} = \sigma(1 + \varepsilon)$ [8.2], [8.12]. Naprężenie σ oraz odkształcenie ε , uzyskiwane zazwyczaj w jednokierunkowej próbie rozciągania, nazywane bywają wielkościami inżynierskimi. Taki sposób przeliczenia naprężeń jest słuszny dla materiału nieściśliwego w stanie plastycznym (odpowiednio lepkoplastycznym).

Odnośnie warunku plastyczności można stosować różne kryteria uplastycznienia, w tym Hubera-Misesa-Hencky’ego oraz Hilla, w odniesieniu do równań stowarzyszonego prawa płynięcia Pradtla-Reussa z izotropowym wzmocnieniem. Dla wszystkich analizowanych rodzajów materiałów modelowano cztery warstwy na grubości ściany kolumny. Dla materiałów izotropowego i ortotropowego w zastosowanym elemencie powłokowym definiowano trzy punkty całkowania na grubości każdej warstwy, natomiast dla materiałów kompozytowych było to pięć punktów całkowania. Na powierzchni elementów całkowanie było realizowane w czterech punktach Gaussa.

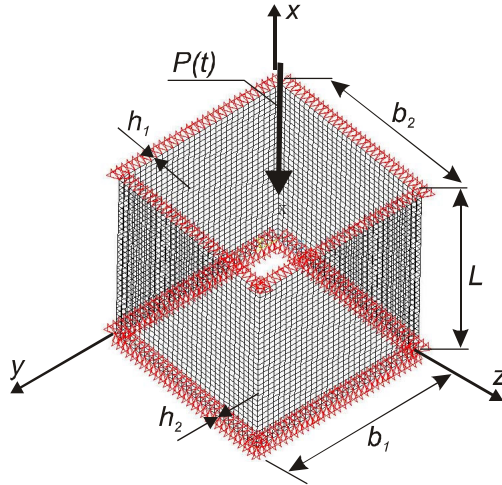
Model numeryczny dotyczył całej, tj. kompletnej, kolumny. Pomimo istniejących cech symetrii konstrukcji w modelu nie ograniczono się do fragmentu będącego symetryczną połową czy inną jej częścią. Chodziło tu o uzyskanie możliwości analizy różnych postaci deformacji ścian kolumny wywołanych impulsem dynamicznym, które przy analizie fragmentu konstrukcji mogłyby być wyeliminowane [8.8].

Analiza podziału i gęstości siatki elementów skończonych została przeprowadzona na etapie wcześniejszych rozważań dotyczących stateczności dynamicznej płyty [8.3]. Z tego tytułu przyjęto równomierny podział wszystkich ścian słupa jednolitą siatką o stałej gęstości. Prowadząc obliczenia przy regularnie zagęszczanej siatce elementów, określono najkorzystniejszą dla potrzeb prowadzonej analizy długość krawędzi elementu skończonego. Przy rozważanych gabarytach ścian kwadratowych optymalny podział powierzchni ściany wynosił $40 \div 50 \times 40 \div 50$ elementów (do 10000 elementów w modelu słupa). Podział tego typu nie „ogranicza” odkształceń konstrukcji, pozwalając na

wychwycenie lokalnych ugięć ścian słupa przy kilku półfalach, zapewniając jednocześnie akceptowalny czas prowadzenia obliczeń. Występujące w ścianach analizowanego słupa gradienty naprężeń bądź odkształceń nie wymagają wydzielenia podobszarów ścian o zagęszczonej siatce elementów. Ponadto taki podział ścian spełnia kryterium współczynnika kształtu elementu, rutynowo sprawdzany w stosowanym programie. Istotnym parametrem w prowadzonych obliczeniach był krok czasowy, czyli określenie przyrostu czasu pomiędzy kolejnymi punktami całkowania. Przy niedostatecznej liczbie kroków przyrosty odkształceń plastycznych były zbyt duże, by uzyskać zbieżność całkowania równań (8.1). Z kolei nadmiernie gęsty podział wydłużał czas obliczeń.

Analizę dynamicznego zachowania się konstrukcji, nazwaną w programie ANSYS procedurą *Transient Dynamic*, realizowano w kilku etapach. Ich liczba zależała od aktualnie realizowanej funkcji obciążenia, tj. charakteru impulsu. Stosownie do analizowanych impulsów dynamicznych obciążenie wprowadzono skokowo, liniowo zmiennie lub w formie funkcji (dla impulsu sinusoidalnego), której argumentem był czas. W ostatnim kroku rejestrowano odpowiedź słupa po zaniku obciążenia. Czas trwania impulsu dynamicznego był powiązany bezpośrednio z podstawową częstotliwością drgań własnych analizowanej konstrukcji i był on bliski bądź równy okresowi drgań własnych. Obliczenia prowadzono dla czasu trwania impulsu $T_p \in \{0,5; 0,75; 1,0\} \times T$, gdzie T jest okresem odpowiadającym pierwszej częstości giętych drgań własnych. Częstości te wyznaczano w programie ANSYS w analizie modalnej, przy czym nie uwzględniano wpływu imperfekcji początkowych na wartość tych częstości. Uwzględnienie imperfekcji w analizie modalnej może prowadzić do kilkunastoprocentowego (15÷18%) obniżenia częstości podstawowej. Przy wyższych częstościach efekt ten jest bardziej istotny. Wartość siły krytycznej dla słupa przy osiowym równomiernym ściskaniu wyznaczano, wykorzystując liniową teorię stateczności (procedurę *EigenBuckling*), w której zastosowano algorytm *Block Lanczos* [8.1], [8.12]. Jednocześnie, odpowiadająca najniższej bądź wybranej sile krytycznej postać wyboczenia była wykorzystywana do nadania konstrukcji słupa imperfekcji wstępnej. Wielokrotności siły krytycznej były w dalszej analizie traktowane jako amplitudy impulsu wymuszenia dynamicznego. Zdefiniowano tu współczynnik obciążenia dynamicznego – wielkość *Dynamic Load Factor*, jako iloraz dynamicznego obciążenia N_{dyn} i statycznego obciążenia krytycznego N_{kr}^{stat} :

$$DLF = \frac{N_{dyn}}{N_{kr}^{stat}} \quad (8.2)$$



Rys. 8.1. Model dyskretny słupa z pokazanymi warunkami brzegowymi

8.3. Warunki początkowe i brzegowe

W analizie dynamicznej warunki początkowe odnoszą się zarówno do przemieszczeń, jak i prędkości wobec istnienia w równaniach (5.29) pochodnych drugiego rzędu względem czasu. Przyjmowano zerowe wartości początkowe dla prędkości węzłów oraz powierzchnię ścian słupa zgodną z pierwszą postacią wybočenja o założonej amplitudzie. Odpowiadało to założeniu, że słup był nieruchomy w chwili pojawienia się obciążenia dynamicznego. Warunki brzegowe odnosiły się jedynie do podparcia obciążonych krawędzi słupa i odpowiadały przegubowemu podparciu. Realizowano je, odbierając węzłom leżącym na swobodnych krawędziach ścian przemieszczenia u_i prostopadłe do powierzchni każdej ściany – odpowiednio $i = y, z$ oraz węzłom na dolnych krawędziach, przemieszczenia w kierunku działania obciążenia dynamicznego u_x . Analitycznie, uwzględniając oznaczenia z rys. 8.1, warunki te można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 x=0 \wedge y=0, b_1 &\Rightarrow u_y=0; u_x=0, \\
 x=L \wedge y=0, b_1 &\Rightarrow u_y=0, \\
 x=0 \wedge z=0, b_2 &\Rightarrow u_z=0; u_x=0, \\
 x=L \wedge z=0, b_2 &\Rightarrow u_z=0.
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

Realizacja warunków brzegowych opisanych równaniami (8.3) odpowiadała warunkom brzegowym, w jakich znalazłyby się krawędzie słupa poddanego badaniom w maszynie wytrzymałościowej – np. młocie opadowym.

Przyjęto prostoliniowość krawędzi obciążonych – węzły leżące na tych krawędziach miały sprzężone przemieszczenia (*CouPle degrees of freedom*) wzdłuż osi słupa:

$$x = L \Rightarrow CP(u_x) = const. \quad (8.4)$$

8.4. Literatura

- [8.1] Bathe K.J., Finite elements procedures, Prentice Hall Int., Inc, 1996.
- [8.2] Brüning M., Large strain elastic-plastic theory and nonlinear finite element analysis based on metric transformation tensors, Computational Mech., 24, 1999, 187-196.
- [8.3] Mania R., Kowal-Michalska K., Parametryczna analiza stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych metodą elementów skończonych, rozdz. 12 [w:] Analizy numeryczne wybranych zagadnień mechaniki, Niezgoda T. (ed.), Wydawnictwa WAT, 2007.
- [8.4] Owen D.R.J., Hinton E., Finite elements in Plasticity: Theory and practice, Pineridge Press Lmt., Swansea, 1980.
- [8.5] Peirce, D., Shih, C.F., and Needleman, A., A tangent modulus method for rate dependent solids, Computers & Structures, 18, 1984, 975-888.
- [8.6] Perzyna P., Teoria lepkoplastyczności, PWN, Warszawa 1966.
- [8.7] Perzyna, P. Fundamental problems in viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, Academic Press, New York 1968, 313-377.
- [8.8] Rao S.S., The Finite element method in engineering, Pergamon Press, Oxford 1999.
- [8.9] Reddy J.N., An Introduction to nonlinear finite element analysis, Oxford University Press, 2004.
- [8.10] Tabiei A., Yi W., Goldberg R., Non-linear strain rate dependent micro-mechanical composite material model for finite element impact and crashworthiness simulation, Int. J. of Non-linear Mechanics, 40, 2005, 957-970.
- [8.11] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., The Finite element method for solid and structural mechanics, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [8.12] ANSYS 11.0, HTML online documentation, SAS IP, Inc., 2007.

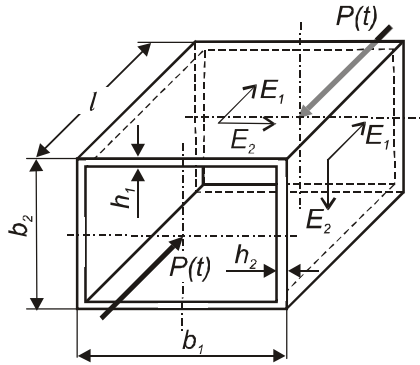
9. WYNIKI ANALIZY STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ KONSTRUKCJI Z EFEKTEM PRĘDKOŚCI ODKSZTAŁCENIA

W niniejszym rozdziale zostaną zaprezentowane wyniki obliczeń numerycznych stateczności dynamicznej cienkościennych słupów/kolumn o ścianach płaskich z uwzględnieniem wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia. Przedmiotem analizy są słupy krótkie o przekroju zamkniętym poddane obciążeniu impulsowemu o skończonym czasie działania. Szczególna uwaga jest tu poświęcona wpływowi efektu prędkości odkształcenia na poziom dynamicznego obciążenia krytycznego analizowanych konstrukcji. Rozważany jest także wpływ innych wielkości charakteryzujących samą konstrukcję oraz impuls zadanego obciążenia. Zdecydowana większość obliczeń została wykonana metodą elementów skończonych.

W prowadzonej analizie obowiązywały wszystkie wymienione w poprzednich rozdziałach założenia teoretyczne odnośnie geometrii konstrukcji i cech materiału przyjęte w obliczeniach numerycznych. Stosowano także omówione uprzednio procedury obliczeniowe oraz kolejność rozważań.

9.1. Kolumny z materiałów izotropowych

Pierwszą analizę stateczności dynamicznej poświęcono słupom wykonanym z materiałów izotropowych. Wynikało to z faktu, iż dynamiczne własności materiałów izotropowych są badane od ponad stu lat. Istnieje bardzo wiele publikacji omawiających fizyczność zjawiska w oparciu o różne teorie i koncepcje naukowe, prezentujących równania konstytutywne uzyskane na podstawie tych teorii dla złożonych stanów naprężenia oraz zawierających liczne wyniki z prowadzonych badań eksperymentalnych. Cechą wspólną tych teorii jest to, że mają one swoje źródło w odpowiedniej koncepcji opisu stanu jednoosiowego naprężenia. Dostępność publikacji poświęconych tej tematyce była tu istotną zaletą, między innymi dla zastosowania opisu dynamicznej charakterystyki materiału.



Rys. 9.1. Analizowana kolumna

W prowadzonej analizie rozpatrywano krótką kolumnę o płaskich ścianach, mającą zamknięty przekrój poprzeczny (rys. 9.1) (krótką rurę o przekroju prostokątnym). Dla izotropii $E_1 = E_2 = E$. W celu wyeliminowania wpływu geometrii ścian – proporcji ich wymiarów, do rozważań przyjęto cienkościnną kolumnę o kształcie sześcianu. Zatem istotny w analizie stateczności współczynnik kształtu ściany λ miał wartość $\lambda = b_1/L = b_2/L = 1$. Skutkowało to w statycznej analizie stateczności jedną półfalą wyboczenia odpowiadającą najniższej statycznej sile krytycznej (dla materiału izotropowego). Przy czym należy podkreślić, że warunki brzegowe na nieobciążonych krawędziach ścian składowych wynikały z ich współpracy, co odróżnia te warunki od przegubowego podparcia pojedynczej płyty. Wpływa to oczywiście na odmienne zachowanie kwadratowej ściany słupa i pojedynczej płyty kwadratowej. Kolejnym istotnym współczynnikiem odnoszącym się do geometrii kolumny był – nazywany niekiedy współczynnikiem smukłości, iloraz wymiaru ściany w jej płaszczyźnie i grubości ściany, tj. $s = b_1/h_1 = b_2/h_2$ (wobec $b_1 = b_2$ i $h_1 = h_2$) (przyjmowano, że grubości wszystkich ścian kolumny są jednakowe). W analizowanych przypadkach wartość smukłości ścian słupa mieściła się w przedziale $60 \div 70$. Istota doboru geometrii kolumny podlegającej analizie wynikała z faktu, iż zgodnie z omówieniem podanym w rozdziale 7 wrażliwość na prędkość odkształcenia przejawia się głównie w zmianie granicy plastyczności materiału. Krytyczne obciążenie dynamiczne dla konstrukcji płytowych wyznacza się, prowadząc analizę kolejnych odpowiedzi tej konstrukcji na wymuszenie impulsem. Amplituda impulsu jest stała dla danego wymuszenia, ale sukcesywnie zwiększana w kolejnych przypadkach. W niniejszej pracy był to zakres amplitud wymuszenia dynamicznego – DLF według definicji (8.2), $DLF \in \langle 0,4; 2,0 \rangle$. Z prac dotyczących analizy stateczności dynamicznej płytowych konstrukcji cienkościennych, np. [9.12], [9.13], [9.19], wynika, że krytyczne wartości obciążeń dynamicznych takich konstrukcji z małymi imperfekcjami lokują się zazwyczaj w przedziale $\langle 1; 1,5 \div 2 \rangle$. Oznacza to, że w przypadku materiału liniowosprężystego dynamiczne naprężenia krytyczne są

taką jak wyżej ($\langle 1; 1,5 \div 2 \rangle$) wielokrotnością statycznych naprężeń krytycznych. Możliwe są zatem trzy scenariusze prowadzonych analiz:

- a) analizowana konstrukcja kolumny/słupa ma wartość statycznego naprężenia krytycznego dużo niższą od granicy plastyczności materiału, z którego jest wykonana. Stąd przy obciążeniach dynamicznych granica plastyczności w badanej konstrukcji nie zostanie osiągnięta.
- b) analizowana konstrukcja kolumny/słupa ma wartość statycznego naprężenia krytycznego bliską granicy plastyczności materiału, z którego jest wykonana, ale jej osiągnięcie oraz przekroczenie nastąpi dopiero w przypadku wysokich amplitud impulsu dynamicznego. Obszar obciążeń, dla których na podstawie różnych kryteriów definiuje się dynamiczne obciążenia krytyczne, będzie miał miejsce, gdy konstrukcja kolumny będzie w stanie sprężystym.
- c) analizowana konstrukcja kolumny/słupa ma wartość statycznego naprężenia krytycznego bliską granicy plastyczności materiału, z którego jest wykonana, lub równą tej granicy. Wówczas prawie cały zakres (bez pierwszych najniższych wartości współczynnika *DLF*) analizowanych obciążeń dynamicznych konstrukcji będzie dotyczył stanów naprężeń w obszarze sprężysto-lepkoplastycznym.

Wobec postawionego na wstępie celu pracy (rozdział 3) – oceny wpływu na wartość dynamicznych obciążeń krytycznych płytowej konstrukcji cienkościennej wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia, jedynie trzeci przypadek pozwala na analizę tego efektu. Dlatego też dobierano geometrie analizowanych struktur w taki sposób, aby przy przyjętych stałych materiałowych warunkach trzeci (c) był spełniony. Innymi słowy, aby o zdolności słupa do przenoszenia obciążeń dynamicznych decydowała granica plastyczności. Statyczne naprężenia krytyczne analizowanych kolumn – wobec powyższego warunku, mieściły się w zakresie $0,85 \div 0,95 \sigma_{pl}$. Zakładano przy tym imperfekcje wstępne nieprzekraczające $1/10$ grubości ścian kolumny. Podejście powyższe jest zgodne z tym, co dowodzą Simitses i Song [9.32] – a mianowicie, że naprężenia efektywne przy wyboczeniu są większe od granicy plastyczności materiału, gdy iloraz grubości przegubowo podpartej kwadratowej płyty izotropowej i odległości pomiędzy brzegami obciążonymi przekracza wartość $[3(1-\nu^2) \sigma_{pl}/E]^{1/2}/\pi$.

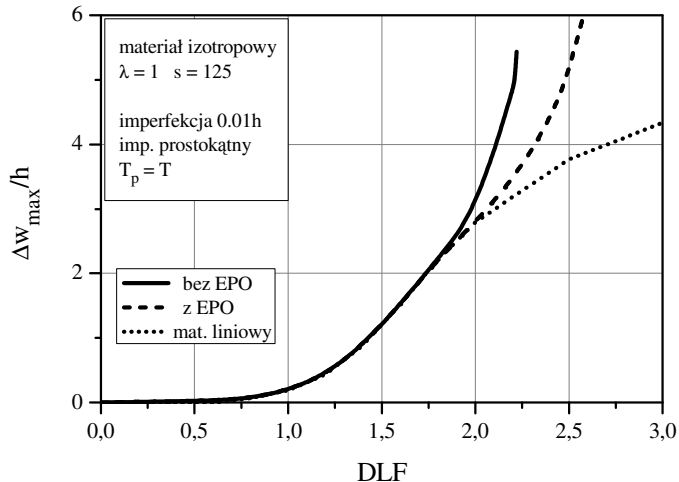
W obliczeniach przyjęto własności materiału odpowiadające stali niskowęglowej (z obniżoną granicą plastyczności $\sigma_{pl} = 100$ MPa), gdyż jest ona materiałem wrażliwym na prędkość odkształcenia oraz dla tego materiału dysponowano stałymi materiałowymi występującymi w lepkoplastycznym opisie Perzyny [9.9]. Własności materiału izotropowego alternatywnie stosowane w obliczeniach numerycznych zestawiono w tablicy 9.1.

Tablica 9.1 Stałe materiałowe materiału izotropowego

Stała materiałowa	Oznaczenie	Jednostka	Wartość
Granica plastyczności	$\sigma_{pl} = Y$	MPa	100 \vee 200
Moduł Younga	E	MPa	2000 $\times Y \vee$ 1000 $\times Y$
Moduł odkształcenia postaciowego	G	GPa	77
Współczynnik Poissona	ν	–	0,30
Gęstość	ρ	kg/m ³	7850

Prawidłowość sformułowanych powyżej uwarunkowań doboru geometrii konstrukcji zweryfikowano w przeprowadzonych obliczeniach. Dla przykładu na wykresie (rys. 9.2) pokazano wyniki analizy kolumny o geometrii określonej współczynnikiem $\lambda = 1$ oraz $s = b/h = 125$, z materiału o własnościach zdefiniowanych w tablicy 9.1, którego granica plastyczności $\sigma_{pl} = 200$ MPa. Wyznaczona w analizie statycznej wartość naprężeń krytycznych była równa $\sigma_{kr}^{stat} = 0,23 \times \sigma_{pl}$. Do wyznaczenia dynamicznych obciążeń krytycznych posłużono się kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona. Kolumnę ściskano dynamicznie impulsem prostokątnym trwającym przez czas równy okresowi podstawowych drgań własnych, czyli $T_p = T$. Przyjęty przedział obliczeń dla amplitud impulsu prostokątnego rozszerzono, przyjmując jego górną granicę $DLF = 3$. W przyjętym bowiem pierwotnie przedziale $DLF \in \langle 0,4; 2,0 \rangle$, uzyskane dla materiału niewrażliwego na prędkość odkształcenia oraz dla przypadku, gdy lepkoplastyczne własności materiału opisane były równaniem (7.16), przebiegi ugięć nie różniły się. Różnice w przebiegu tych krzywych widoczne są dopiero powyżej $DLF = 1,8$. Dla materiału sprężysto-plastycznego – opisanego linią ciągłą jako materiał „bez EPO” (bez *Efektu Prędkości Odkształcenia*), obliczenia prowadzono do wartości $DLF = 2,22$. Powyżej tej amplitudy impulsu dynamicznego nie uzyskiwano zbieżności rozwiązania z powodu dużych deformacji konstrukcji. Materiał sprężysto/lepkoplastyczny, któremu odpowiada linia opisana na wykresie „z EPO”, pozwolił na prowadzenie obliczeń w całym przedziale rozpatrywanych amplitud. Dodatkowo na wykresie na rysunku 9.2 zamieszczono dla porównania – oznaczone linią kropkowaną, wyniki obliczeń dla kolumny wykonanej z materiału liniowo-sprężystego. Z porównania tych trzech linii widoczny jest wpływ sztywności konstrukcji nie zmniejszonej – w przypadku

trzeciego materiału – przez uplastycznienie fragmentów ścian kolumny, na wielkość ugięć. Jest to zgodne z wynikami obliczeń dla płyt i słupów uzyskanymi w pracach [9.12], [9.13], [9.14], [9.19].

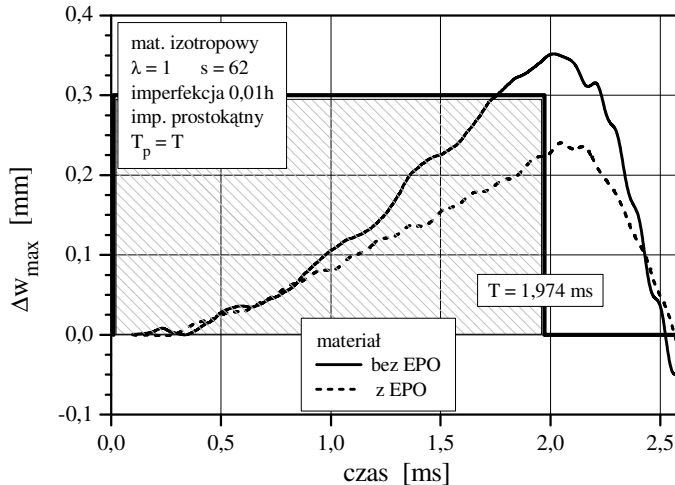


Rys. 9.2. Maksymalne ugięcia ścian kolumny w funkcji DLF
dla kolumny z $\sigma_{kr}^{stat} = 0,23 \times \sigma_{pl}$

Efektom początkowej fazy prowadzonych obliczeń była konieczność modyfikacji warunków brzegowych określonych równaniami (8.3). Dla obciążeń dynamicznych mających kształt impulsu prostokątnego dochodziło do dużych koncentracji naprężeń w narożach kolumny znajdujących się przy obciążonych krawędziach. Dotyczyło to niewielkiego obszaru ścian – zaledwie kilka elementów skończonych sąsiadujących z narożem kolumny. Zjawisko to wynikało z nałożenia się efektu Poissona w sąsiadujących ze sobą ścianach kolumny, zablokowanego przez odebranie przemieszczeń krawędzi ściany w kierunku prostopadłym do jej powierzchni. Uzyskiwane w obliczeniach wysokie wartości naprężeń prowadziły do trudności obliczeniowych (skutkowało to brakiem zbieżności w obliczeniach) oraz dawały mylny obraz analizowanego procesu. W celu wyeliminowania tego efektu sprawdzono kilka wariantów rozwiązań polegających na odmiennym od podanego w równaniach (8.3) zdefiniowaniu warunków brzegowych. Między innymi było to wprowadzenie lokalnie materiału o dwukrotnie wyższej od materiału podstawowego granicy plastyczności czy zastosowanie sprzężenia dla wszystkich węzłów leżących na obciążonej krawędzi ściany kolumny, ich przemieszczenia w kierunku prostopadłym do powierzchni ściany.

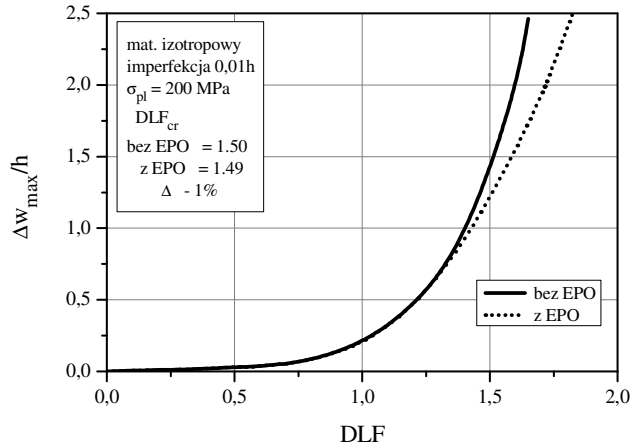
Modyfikacja warunków brzegowych polegająca na ograniczeniu jedynie do węzłów wewnętrznych (bez wspólnych dla sąsiednich ścian węzłów narożnych), warunku braku przemieszczeń prostopadłych do krawędzi ściany, dała zadowalające

wyniki. Była jednocześnie najmniejszym odejściem od warunków brzegowych stosowanych w dotychczasowej analizie płyt i słupów, a wobec stosunkowo gęstej siatki elementów w pomijalnym stopniu wpływała na kinematykę krawędzi ścian kolumny. Z tego powodu tak zmodyfikowane warunki brzegowe (8.3) stosowano we wszystkich analizowanych w dalszej kolejności konstrukcjach cienkościennych kolumn.



Rys. 9.3. Zarejestrowany przebieg ugięcia w czasie, $DLF = 2$

W prowadzonej analizie stateczności dynamicznej obliczano i rejestrowano wiele danych dotyczących stanu naprężenia, przemieszczeń, reakcji podporowych i inne. Jedną z istotnych wielkości obserwowanych w odpowiedzi dynamicznej badanych kolumn było maksymalne ugięcie punktu leżącego na ścianie kolumny. Zazwyczaj był to punkt leżący w miejscu największego ugięcia wstępnego. Jeżeli występowała zmiana postaci wyboczenia, znajdowano punkt, którego ugięcie było największe. Rejestrowano przebieg ugięcia tego punktu w trakcie trwania impulsu oraz po ustaniu działania impulsu – zazwyczaj przez dodatkowe $0,5T$. Przykładowy przebieg ugięcia w czasie punktu leżącego w środku geometrycznym jednej ze ścian kolumny, której bezwymiarowe współczynniki kształtu zamieszczone są w legendzie wykresu, przedstawiono na rys. 9.3. Wartość maksymalnego ugięcia, moment jego wystąpienia oraz stan naprężeń występujący w konstrukcji dla tego momentu odnotowywano na potrzeby dalszej analizy. Moment wystąpienia maksymalnego ugięcia ścian kolumny zależał od intensywności impulsu – jego amplitudy i czasu trwania [9.12]. Maksymalne ugięcie jednej ze ścian następowało zazwyczaj w trakcie trwania impulsu obciążenia dynamicznego lub bezpośrednio po jego ustaniu. Przebieg w czasie impulsu ściskającego na rysunku 9.3 zilustrowano grubą linią z zakreskowanym polem poniżej tej linii, z podaniem odciętej czasowej końca trwania impulsu.



Rys. 9.4. Przebieg maksymalnego ugięcia w funkcji DLF ,

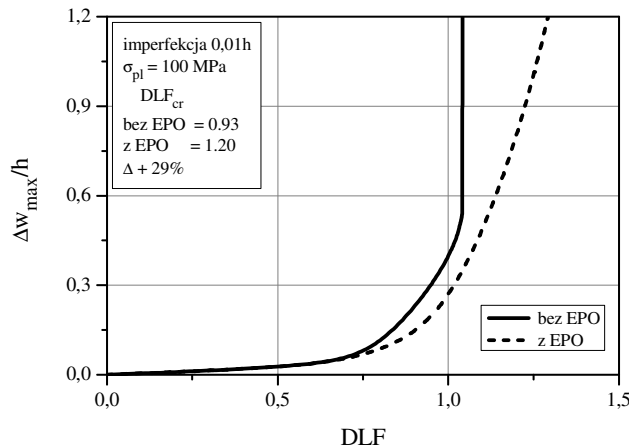
$$\sigma_{kr}^{stat} = 0,5 \times \sigma_{pl}, \lambda = 1, s = 62$$

Rysunek 9.4 odnosi się do obliczeń kolumny o kształcie sześcianu o ścianach jednakowej grubości. Należy tu podkreślić, że ten kształt kolumny – sześcian, będzie dominującym w opisywanych dalej przypadkach obliczeń. Podyktowane to było faktem, że płyty kwadratowe mają szczególnie bogatą literaturę dotyczącą ich stateczności. Statyczne naprężenie krytyczne dla tej kolumny było równe połowie założonej granicy plastyczności $\sigma_{pl} = 200$ MPa, a smukłość jej ścian równa była $s = 62$. Kolumna była poddana dynamicznemu ścisnaniu impulsem prostokątnym, którego czas działania był równy okresowi drgań własnych kolumny ($T_p = T$). Statyczna charakterystyka materiału była biliniowa, z izotropowym wzmocnieniem i modułem stycznym $E_t = 2000$ MPa. Dla materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia w modelu Perzyny przyjęto stałe materiałowe $D = 40,4$ 1/s oraz $m = 0,2$ [9.9], [9.21]. Linia ciągła na wykresie (rys. 9.4) odpowiada maksymalnym ugięciom kolumny wykonanej z materiału niewrażliwego na prędkość odkształcenia, zaś linia kropkowana obrazuje ugięcia kolumny z materiału, w którym efekt prędkości odkształcenia ma miejsce. Dla oszacowania krytycznej wartości obciążenia dynamicznego dla obydwu wariantów modelu materiału zastosowano kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona. Przedziały, w których lokują się krytyczne wartości DLF_{kr} , dla obydwu przypadków są trudne do rozróżnienia, ponieważ obydwie krzywe prawie się pokrywają.

Zatem kryterium B-H w swojej podstawowej wersji wydaje się niedostateczne do precyzyjnego wykazania różnic w zachowaniu dynamicznym porównywanych kolumn. Jednakże z jego istoty wynika, że w przedziale określającym krytyczne wartości obciążenia istnieje punkt przegięcia linii będącej zapisem funkcji $\Delta w_{max}/h = f(DLF)$. Można zatem, stosując na przykład metodę różnic

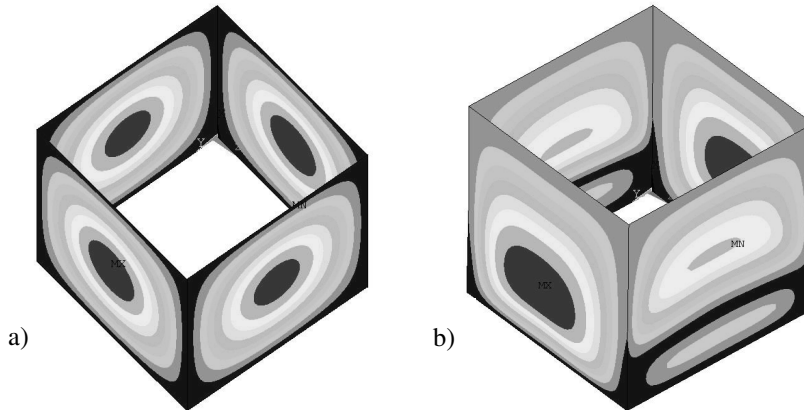
skończonych, wyznaczyć odciętą tego punktu [9.20]. Wartość DLF – amplitudę impulsu, zwiększano krokiem o 0,2, bądź metodą bisekcji zagęszczano ten podział w obszarze gwałtownego narastania ugięć ścian kolumny. Przy znanym kroku narastania amplitud wymuszenia dynamicznego można obliczyć miejsce zerowe drugiej pochodnej funkcji $f(DLF)$ i stąd wartość krytyczną obciążenia dynamicznego analizowanej konstrukcji. Stosując powyższą procedurę w omawianym przypadku, ustalono, że krytyczne obciążenie dynamiczne dla kolumny z materiału sprężysto/lepkoplastycznego jest liczbowo podobne do obciążenia dla kolumny z materiału sprężysto-plastycznego (1,50 wobec 1,49 odpowiednio). W legendzie rysunku 9.4, w ramce wprowadzono zapis „ $\Delta - 1\%$ ” oznaczający różnicę procentową pomiędzy krytycznymi wartościami impulsowego obciążenia dynamicznego dla obydwu materiałów (bez i z EPO).

Analiza kolumny o podobnej geometrii do kolumny analizowanej uprzednio (sześcián, $s = 71$), ale przy przyjęciu niższej wartości granicy plastyczności $\sigma_{pl} = 100$ MPa, przy niezmiennych pozostałych stałych materiałowych, prowadzi do rozważań zjawiska wyboczenia dynamicznego w obszarze sprężysto-plastycznym bądź odpowiednio sprężystym/lepkoplastycznym już przy względnie małych wartościach amplitudy DLF ($\sigma_{kr}^{stat} = 0,9 \times \sigma_{pl}$). Wyniki tej analizy są pokazane na rys. 9.5. Także i w tym przypadku krytyczne wartości DLF zostały wyznaczone jako miejsca zerowe drugiej pochodnej znormalizowanego ugięcia w funkcji amplitudy wymuszenia dynamicznego. Zgodnie z kryterium B-H wartość krytyczna obciążenia dynamicznego kolumny z materiału wrażliwego na EPO jest o 29 % większa od DLF_{kr} dla materiału niereagującego na prędkość odkształcenia.



Rys. 9.5. Przebieg maksymalnego ugięcia ścian kolumny w funkcji DLF (impuls prostokątny $T_p = T$), $s = 71$, $\sigma_{kr}^{stat} = 0,9 \times \sigma_{pl}$

W obydwu przypadkach zaprezentowanych – to jest na rys. 9.4 oraz 9.5, obliczenia kolumny wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego były ograniczone do amplitud impulsu prostokątnego nie wyższych od 1,65 oraz 1,04, odpowiednio. Impulsy o wyższych amplitudach powodowały duże deformacje konstrukcji, co skutkowało brakiem zbieżności w obliczeniach numerycznych.

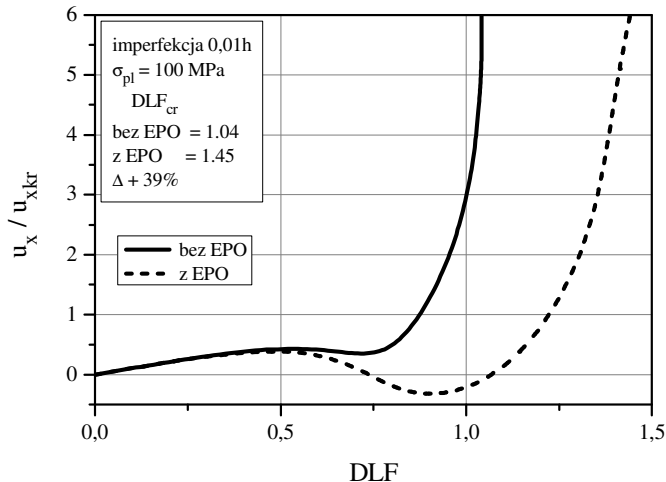


Rys. 9.6. Postacie deformacji kolumny dla różnych wartości amplitudy impulsu dynamicznego ($\sigma_{pl} = 100$ MPa): a) $DLF = 0,8$; b) $DLF = 1,03$

Przypadek powyższy może także posłużyć do porównania zastosowania różnych kryteriów w analizie stateczności dynamicznej. W rozdziale 6 omówiono kilka kryteriów stosowanych w analizie stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych. Aplikacja kryterium Budiansky’ego-Hutchinsona miała już miejsce w omawianych dotychczas przypadkach. Wśród kryteriów podanych w podrozdziale 6.3 są także kryteria sformułowane przez Ari-Gura i Simonetę. Drugie z nich definiuje warunki krytyczne obciążenia jako te, którym towarzyszy zmiana postaci wyboczenia dynamicznego. Dla wyższych wartości amplitudy impulsu dynamicznego na ściankach analizowanych kolumn pojawiają się więcej niż jedna półfale ugięcia, które, nakładając się wzajemnie, dają inny obraz ugięcia wobec przyjętego kształtu wstępnej imperfekcji. Obrazują to odkształcone postaci kolumn pokazane na rysunku 9.6. Stosując zatem do przypadków, gdy występuje zmiana postaci wyboczenia, kryterium Ari-Gura i Simonety, uzyskuje się krytyczne wartości obciążenia dynamicznego równe odpowiednio – 1,03 oraz 1,35. Są one o kilkanaście procent większe niż analogiczne wielkości uzyskane przy zastosowaniu dla tych przypadków kryterium Budiansky’ego-Hutchinsona.

W przebiegu obydwu krzywych na rysunku 9.5 widoczne jest gwałtowne narastanie ugięć przy asymptotycznym zbliżaniu się amplitudy impulsu do pewnej granicznej wartości. Jest to wyraźne dla materiału bez EPO już w przedziale wartości amplitud impulsu i ugięć pokazanych na rysunku 9.5. Odnosi się to także do materiału z EPO, przy czym graficznie ma miejsce poza obszarem

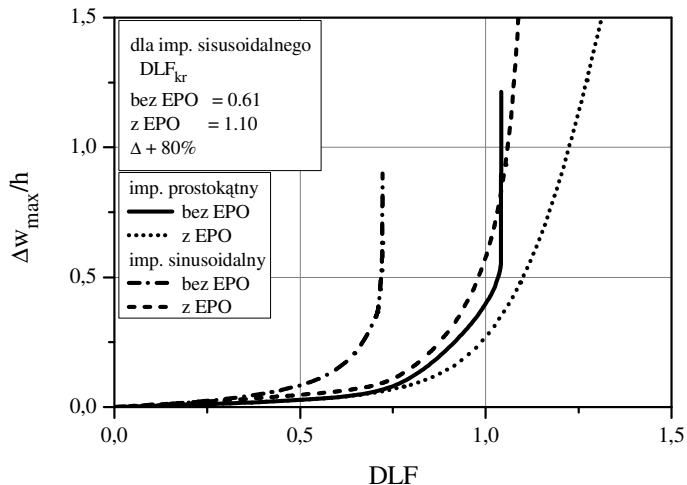
pokazanym na tym rysunku. Podobnie do przebiegu ugięć równie gwałtownie narastają skrócenia kolumny pokazane w funkcji amplitudy impulsu DLF , na



Rys. 9.7. Przebieg skrócenia kolumny w funkcji DLF , $s = 71$

wykresie na rysunku 9.7. Na osi rzędnych tego wykresu odłożono wartości skrócenia kolumny w chwili pierwszego maksymalnego ugięcia jej ścian, znormalizowane skróceniem odpowiadającym statycznym naprężeniom krytycznym. Ujemne wartości skrócenia dla materiału wrażliwego na efekt prędkości odkształcenia oznaczają w rzeczywistości wydłużenie kolumny. Wynika to z drgań w płaszczyźnie ścian po ustaniu impulsu, których amplituda była czasami na tyle duża, że powodowała chwilowe wydłużenie nieobciążonej kolumny. Charakterystyki z rysunku 9.7 można z kolei skomentować w świetle trzeciego z kryteriów Ari-Gura i Simonety przytoczonych w podrozdziale 6.3. Wynika z niego, że za krytyczną należy uznać tę amplitudę impulsu dynamicznego, dla której niewielki wzrost obciążenia powoduje gwałtowny wzrost wartości skrócenia. Amplitudy krytyczne wyznaczone w oparciu o to kryterium mają wartości 1,04 oraz 1,45, odpowiednio dla rozważanych materiałów. Liczbowo są bliskie wartościom krytycznym określonym na podstawie drugiego kryterium Ari-Gura i Simonety, ale o kolejne kilka procent wyższe od wartości dynamicznych obciążeń krytycznych zdefiniowanych przy zastosowaniu kryterium Budiansky’ego-Hutchinsona.

Porównanie powyższe dość wyraźnie obrazuje wpływ wyboru kryterium stateczności dynamicznej na wielkość samego obciążenia krytycznego. Jest to istotna różnica pomiędzy dynamiczną analizą stateczności konstrukcji cienkościennych a statyczną analizą stateczności, która prowadzi do znalezienia punktu bifurkacji [9.10].

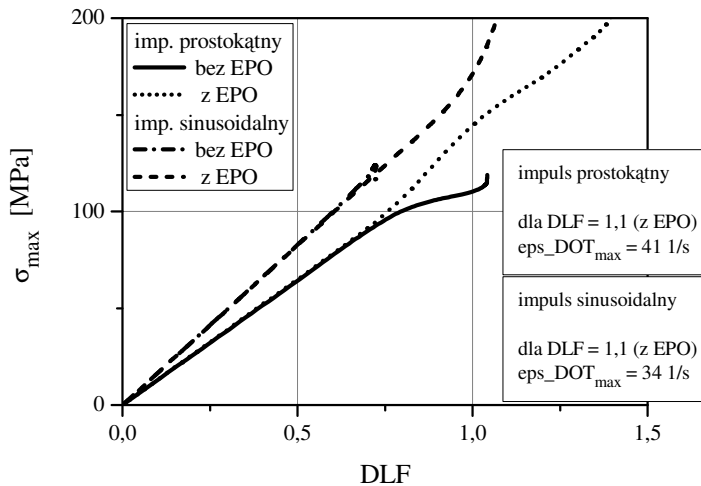


Rys. 9.8. Porównanie działania różnych impulsów: maksymalne ugięcia w funkcji DLF

Zachowując geometrię kolumny oraz jej własności materiałowe z przypadku, którego analizę przedstawiają rysunki 9.5 ÷ 9.7, rozpatrzono zachowanie się tej kolumny pod wpływem działania impulsu o kształcie jednej półfali sinusa. Czas działania tego impulsu – jak poprzednio dla prostokąta, był równy podstawowemu okresowi drgań własnych ($T_p = T$). Amplituda tego impulsu była 1,57 razy większa od amplitudy impulsu prostokątnego, o takim samym czasie działania, aby obydwa impulsy były równe sobie mechanicznie (oznacza to równość pól pod wykresem impulsów). Takie podejście pozwoliło na porównanie skutków działania obydwu impulsów. Względny porównawczy powodem przedstawienia na rysunku 9.8 wyników bieżącej analizy łącznie z uprzednio pokazanymi na rysunku 9.5 przebiegami ugięcia pod wpływem impulsu prostokątnego. Jak wynika to z zamieszczonych krzywych, ugięcia ścian kolumny ściskanej dynamicznie impulsem o kształcie sinusa są zdecydowanie większe od ugięć wywołanych impulsem prostokątnym. Wyznaczone na podstawie kryterium B-H wartości krytyczne amplitudy impulsu sinusoidalnego dla obydwu modeli materiału są niższe niż analogiczne wielkości dla impulsu prostokątnego. Również i dla tego kształtu wymuszenia dynamicznego zakres obliczeń dla materiału sprężysto-plastycznego – niewrażliwego na EPO, jest ograniczony co do wartości amplitudy impulsu. Powodem jest brak zbieżności rozwiązania dla dużych odkształceń.

Przebiegi ugięć towarzyszących obydwu impulsom są odmienne wobec zachowania konstrukcji kolumny wykonanej z materiału liniowo-sprężystego, gdzie różnicowanie przebiegów ugięć występowało dopiero w obszarze dużych amplitud impulsów [9.12], [9.19], [9.21].

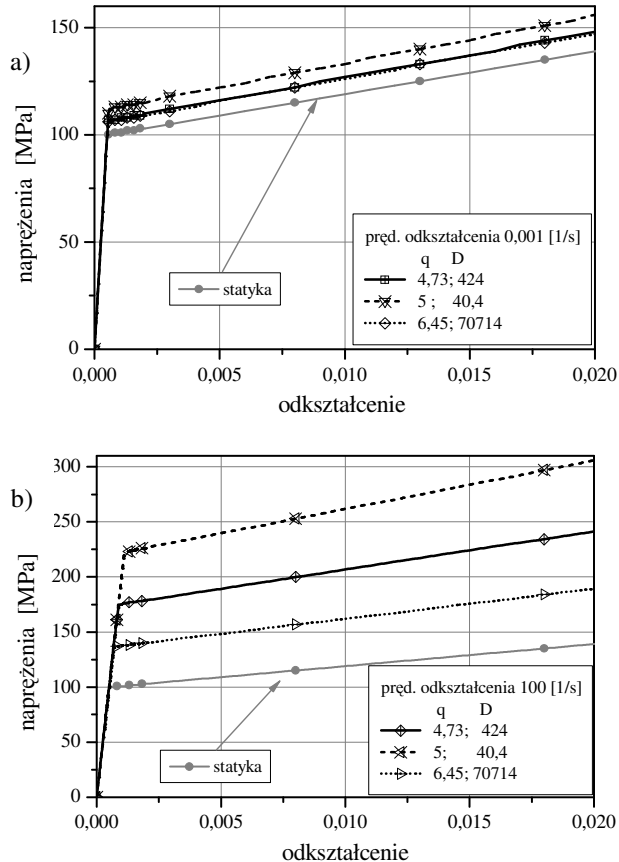
Sądzić by można, iż podczas impulsu sinusoidalnego materiał ma więcej czasu na deformacje plastyczne/lepkoplastyczne (stosownie do przyjętego modelu materiału). W trakcie impulsu prostokątnego całe obciążenie, o pełnej amplitudzie pojawia się od początku trwania obciążenia dynamicznego. Pod działaniem impulsu sinusoidalnego odkształcenia lepkoplastyczne zachodzą z mniejszą prędkością. Jednakże również obraz krzywych przedstawiających przebieg naprężeń efektywnych w funkcji amplitudy impulsu pokazanych na rysunku 9.9, potwierdza fakt, iż dla impulsu sinusoidalnego w porównaniu z prostokątnym szybciej wyczerpuje się nośność konstrukcji. Wprowadzony w legendzie tego rysunku zapis „ $\text{eps_DOT}_{\text{max}}$ ” odnosi się do maksymalnej odnotowanej w odpowiedzi dynamicznej kolumny prędkości odkształcenia.



Rys. 9.9. Porównanie działania różnych impulsów: naprężenia efektywne w funkcji DLF

W prowadzonej analizie kolumn wykonanych z materiału izotropowego jako kryterium początku plastyczności i później funkcję uplastycznienia stosowano warunek Hubera-Misesa-Hencky’ego (równanie (6.8) z przyjęciem jednakowych wartości na granicę plastyczności f^i dla wszystkich trzech kierunków głównych). Zaprezentowane na rysunku 9.9 przebiegi wartości naprężeń maksymalnych dla kolejnych amplitud impulsu dynamicznego odpowiadają maksymalnym wartościom naprężeń efektywnych według kryterium H-M-H, wyznaczonych w momencie wystąpienia maksymalnego ugięcia w jednej ze ścian kolumny. Dla impulsu sinusoidalnego miało to miejsce na opadającym fragmencie sinusoidy, a dla prostokąta przed końcem impulsu bądź tuż po jego ustaniu. Stąd maksymalne naprężenia dla całego analizowanego okresu, który przyjmowano równy 1,5 czasu trwania impulsu sinusoidalnego, pojawiały się przed chwilą osiągnięcia pierwszego maksymalnego ugięcia. Zarejestrowane maksymalne wartości prędkości

odkształcenia są większe dla impulsu prostokątnego niż sinusoidalnego i występują w początkowej fazie trwania impulsu. Krytyczne wartości obciążenia dynamicznego dla impulsu sinusoidalnego są niższe niż dla wymuszenia dynamicznego prostokątem. Natomiast różnica pomiędzy krytycznymi wartościami DLF_{kr} dla materiału z EPO i bez tego efektu jest wyższa niż dla impulsu prostokątnego i wynosi 80%. Wnioski te zgadzają się z wynikami prac, w których efekt prędkości odkształcenia nie był rozważany [9.14], [9.20], [9.23].



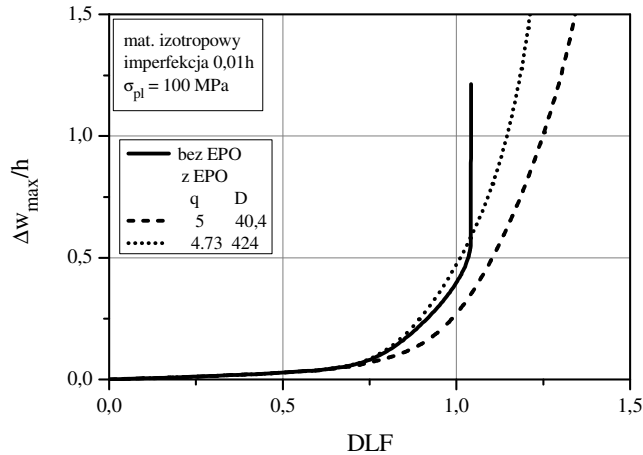
Rys. 9.10. Charakterystyki statyczne i dynamiczne materiału izotropowego dla różnych wartości stałych materiałowych q i D

W równaniu (7.16) oraz (7.17) występują współczynniki liczbowe q i D , które dla danego materiału są określane na drodze eksperymentalnej. W literaturze można znaleźć wartości liczbowe tych współczynników dla niektórych materiałów, zwłaszcza różnych gatunków stali, choć w szeregu publikacji

autorzy zasłaniają się poufnością badań prowadzonych na rzecz wytwórcy, który jako właściciel wyników zastrzega sobie ich dostępność. Niemniej jednak szereg przykładowych danych zawiera praca Jonesa [9.9] czy Cunata [9.6].

Efekt zastosowania różnych wartości liczbowych dla współczynników w równaniach (7.16) na przebieg charakterystyki dynamicznej materiału o $\sigma_{pl}=100$ MPa, pokazują wykresy na rysunku 9.10: a) dla niskiej i b) średniej wartości prędkości odkształcenia. Charakterystyka statyczna tego materiału schematyzowana jest zależnością biliniową. Analiza odpowiedzi kolumny wykonanej z materiału, którego charakterystyki dynamiczne zamieszczono na rysunku 9.10 – dla dwóch przypadków współczynników q i D , daje wyniki bezpośrednio korespondujące ze wzajemnymi relacjami pomiędzy charakterystykami dynamicznymi tego materiału. Zaprezentowane wyniki odnoszą się do impulsu dynamicznego o kształcie prostokąta i czasie trwania równym okresowi drgań własnych. Wartości liczbowe przyjętych współczynników odpowiadają: stali niskowęglowej $q = 5$ i $D = 40,4$ [9.9] oraz stali o symbolu ZstE190BH $q = 4,73$ oraz $D = 424$ – według [9.6]. W początkowym zakresie amplitud wymuszenia dynamicznego (rys. 9.11) ugięcia ścian dla rozpatrywanych trzech wersji charakterystyk są praktycznie jednakowe. Różnice ujawniają się w górnym zakresie amplitud analizowanych impulsów, tj. dla $DLF > 0,8$. Wyznaczone dla przyjętych opisów wrażliwości materiału na *Efekt Prędkości Odkształcenia* wartości krytyczne DLF_{kr} są następujące: odpowiednio $DLF_{kr}(q, D) = DLF_{kr}(5; 40,4) = 1,27$ oraz $DLF_{kr}(4,73; 424) = 1,20$, wobec $DLF_{kr} = 0,93$ dla materiału bez EPO. Jednocześnie – jak wynika z przebiegu krzywych pokazanych na rysunku 9.11 dla środkowego przedziału DLF , ugięcia ścian kolumny ze stali z EPO wariant (4,73; 424) są większe od ugięć tej konstrukcji z materiału bez EPO. Zastosowanie w obliczeniach dynamicznych modelu lepkoplastycznego z tymi współczynnikami pozwala jednak na analizę zachowania kolumny w znacznie szerszym zakresie obciążeń dynamicznych aniżeli przyjęcie opisu sprężysto-plastycznego (bez EPO). Blisko 6% różnica w dynamicznym obciążeniu krytycznym dla materiału wrażliwego na EPO, przy różnym opisie tej wrażliwości za pomocą stałych q i D , potwierdza potrzebę starannie przeprowadzonych badań dynamicznych dla danego materiału w celu wyznaczenia właściwych dla niego stałych materiałowych.

Jest to szczególnie widoczne w przypadku materiałów kompozytowych, o których jest mowa w dalszej części tego rozdziału. Oznacza to także, że materiały o zbliżonych wartościach stałych sprężystych (moduł Younga, granica plastyczności) różnią się w zachowaniu lepkoplastycznym spowodowanym impulsem dynamicznym o skończonym czasie trwania. Podobnych różnic w dynamicznym zachowaniu konstrukcji słupa można spodziewać się przy zastosowaniu różnych modeli lepkoplastycznych materiału, co wiąże się z odmiennymi sformułowaniami równań konstytutywnych [9.4].



Rys. 9.11. Przebiegi maksymalnych ugięć ścian kolumny dla różnych wartości liczbowych stałych q i D

Analiza tych wybranych przypadków odpowiedzi kolumny z materiału izotropowego poddanej dynamicznemu impulsowi ściskającemu pokazuje wyraźny wpływ wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia. Uwzględnienie efektu prędkości odkształcenia we właściwościach materiału skutkuje istotnym wzrostem wartości krytycznego obciążenia dynamicznego. Różnice te wobec materiału niewrażliwego na prędkość odkształcenia sięgają nawet kilkudziesięciu procent, przy stosunkowo niewielkich rejestrowanych prędkościach odkształcenia ($\dot{\epsilon} < 50 \text{ 1/s}$).

9.2. Kolumny z materiałów ortotropowych

Rozważania dotyczące dynamicznego zachowania kolumn wykonanych z materiałów ortotropowych były poprzedzone doбором stałych materiałowych – modułów i granic plastyczności, w sposób pozwalający na wyraźne pokazanie ich wpływu na przebieg procesu wyboczenia dynamicznego uwzględniającego prędkość odkształcenia. Odniesieniem były tu klasyczne materiały konstrukcyjne – metale, które wykazują ortotropie o stopniu znacznie mniejszym niż materiały kompozytowe (np. kompozyty wzmacniane włóknami). Dla walcowanej stali moduły Younga dla kierunku walcowania i kierunku do niego prostopadłego są jednakowe, a anizotropia granic plastyczności jest na poziomie kilku, kilkunastu procent. W literaturze dotyczącej analizy stateczności konstrukcji cienkościennych oraz własności materiałów wartości stałych materiałowych przyjmowane są niejednokrotnie ze względów demonstracyjnych [9.11], [9.15], [9.27]. Z drugiej strony dostępne technologie inżynierii materiałowej pozwalają na wytworzenie materiałów kompozytowych o zadanych własnościach wytrzymałościowych [9.3], [9.17], co przyjętym do obliczeń własnościom materiału ortotropowego

nadaje cech praktycznej prawdopodobności. W tabelicy 9.2 zestawiono przyjmowane w obliczeniach własności materiału ortotropowego (indeksy stałych materiałowych zgodne z oznaczeniami na rysunku 9.1). W dalszych rozważaniach wprowadzono współczynnik ortotropii η [9.11], [9.16]:

$$\eta_i = \frac{E_{yi}}{E_{xi}} \quad (9.1)$$

będący w przypadku każdej i -tej ściany ilorazem modułów Younga w jej płaszczyźnie w kierunkach głównych; modułu E_{yi} w kierunku prostopadłym do kierunku ściskania do modułu E_{xi} w kierunku działającego obciążenia dynamicznego. Przy czym rozpatrywano przypadki jednakowych własności materiału wszystkich ścian kolumny, skąd współczynnik ortotropii miał wspólną wartość dla całej konstrukcji. Przyjęto także, że własności materiału są jednakowe dla rozciągania i ściskania. Wobec tego naprężenia efektywne były określane na podstawie kryterium Hilla w jego podstawowej postaci (6.8), z funkcją plastyczności (6.6).

Tablica 9.2. Stałe materiałowe materiałów ortotropowych

Stała materiałowa	Oznaczenie	Jednostka	Wariant	Wariant	Wariant
			1	2	3
			Wartość liczbowa War. 2 War. 3		
Moduł Younga	E_x	GPa	200	200	100
	E_y	GPa	100	50	200
	E_z	GPa	100	50	200
Moduł odkształcenia postaciowego	G_{xy}	GPa	77	77	77
	G_{yz}	GPa	39	20	77
	G_{xz}	GPa	77	77	77
Wsp. Poissona	ν_{xy}	–	0,30	0,30	0,30
	ν_{yz}	–	0,30	0,30	0,30
	ν_{xz}	–	0,30	0,30	0,30
Gęstość	ρ	kg/m ³	7850	7850	7850

Wprawdzie zależności fizyczne wyprowadzone w rozdziale 5 dotyczyły płaskiego stanu naprężenia, a przyjęty element skończony był elementem powłokowym zgodnym w swojej definicji z teorią cienkich płyt z uwzględnieniem wpływu ścinania, to jednak do obliczeń podawano stałe materiałowe dla trzech kierunków głównych. Przyjmowano przy tym jednakowe wartości dla kierunku y i z (prostopadłe do kierunku ściskania). Sprawilo to, że materiał miał właściwości poprzecznie-izotropowe. Wówczas moduł odkształcenia postaciowego G_{yz} może być wyznaczony z zależności $G_{yz} = E_z/[2 \times (1 + \nu_{yz})]$. Takie podejście jest często stosowane np. w materiałach warstwowych wzmacnianych włóknami, wobec braku danych katalogowych dla kierunku prostopadłego do płaszczyzny laminatu.

Trzy warianty obliczeniowe modułów podanych w tabelicy 9.2 w obliczeniach były łączone z pięcioma wariantami granic plastyczności zestawionych w tabelicy 9.3. Ich wartości dla trzech wariantów korespondują ze współczynnikami ortotropii dla modułów, pozostałe warianty wybrano ze względów porównawczych. W modelu Perzyny przyjęto ponownie stałe materiałowe $D = 40,4$ 1/s oraz $m = 0,2$.

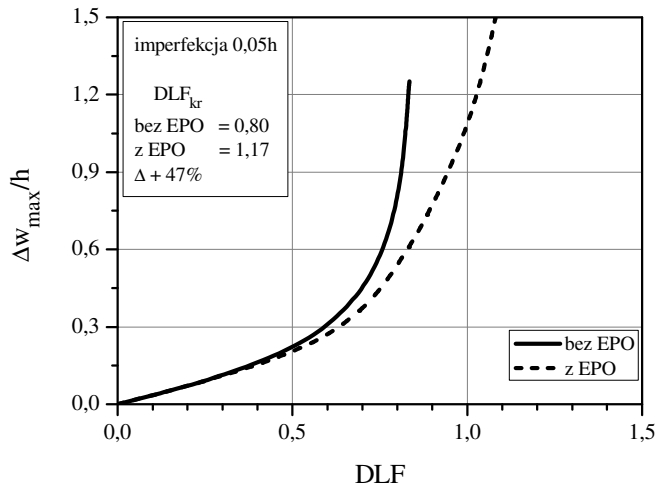
Tabela 9.3. Granice plastyczności materiałów ortotropowych

	Oznaczenie	Jednostka	War. 1	War. 2	War. 3	War. 4	War. 5
			Wartość liczbowa				
Granica plastyczności	σ_{plx}	MPa	100	100	100	50	200
	σ_{ply}	MPa	100	50	25	100	100
	σ_{plz}	MPa	100	50	25	100	100

Spośród bardzo wielu przeanalizowanych przypadków omówione zostaną jedynie wybrane, które są reprezentatywne dla szerszej grupy rozpatrywanych wariantów materiałowych i obciążeniowych. Na początek, przedstawiono wyniki obliczeń kolumny obciążonej impulsem sinusoidalnym o czasie trwania równym okresowi drgań własnych ($T_p = T$) zamieszczone na rysunkach 9.12 ÷ 9.15. Przyjęto pierwszy wariant stałych materiałowych według tabelicy 9.2 – co odpowiada współczynnikowi ortotropii $\eta = 0,5$, połączony z wariantem pierwszym granic plastyczności z tabelicy 9.3. Jeśli idzie o geometrię kolumny, to ponownie miała ona kształt sześciangu, którego ściany o jednakowej grubości spełniały relacje $\lambda = 1$ oraz $s = 80$. Przebiegi krzywych przedstawiających maksymalne ugięcia ścian kolumny (rys. 9.12) w funkcji amplitudy impulsu obciążenia dynamicznego dla materiału bez EPO oraz wrażliwego na EPO w początkowym zakresie zmian DLF pokrywają się, różnicując się dopiero powyżej $DLF > 0,5$. W tym drugim przedziale ugięcia kolumny wykonanej

z materiału wrażliwego na EPO są zdecydowanie niższe od ugięć kolumny z materiału bez EPO. Koresponduje to z przebiegiem naprężeń efektywnych obliczanych na podstawie hipotezy Hilla, pokazanych na rysunku 9.13. Powyżej $DLF = 0,8$ w rozległych obszarach ścian występują odkształcenia plastyczne. W przypadku materiału bez EPO uplastycznienie tych obszarów występuje na całej grubości ściany, co uniemożliwia dalsze obliczenia z powodu braku zbieżności rozwiązania numerycznego. Wprowadzenie modelu materiału lepkoplastycznego wobec efektu wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia pozwala na prowadzenie obliczeń w znacznie szerszym przedziale amplitud impulsu.

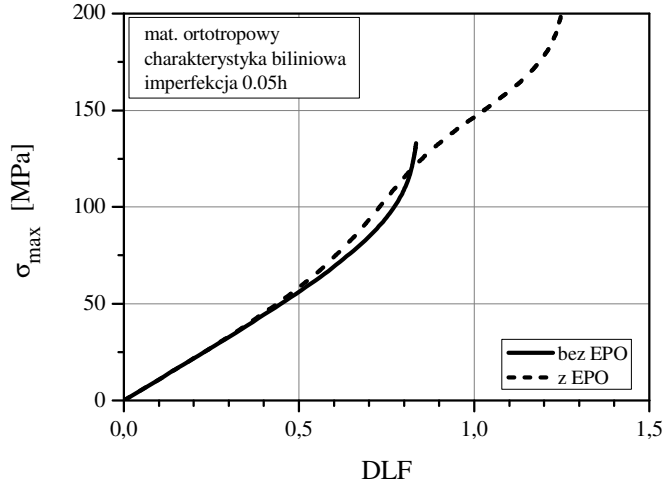
Podobnie jak w przypadku materiałów izotropowych, także dla materiałów ortotropowych określenie krytycznej wartości obciążenia dynamicznego na podstawie kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona – wobec przebiegu krzywych jak na wykresie – rysunek 9.12, nie może ograniczyć się do wyznaczenia przedziałów DLF_{kr} . Dla celów porównawczych konieczne jest bardziej precyzyjne ustalenie liczbowych wartości dynamicznych obciążeń krytycznych.



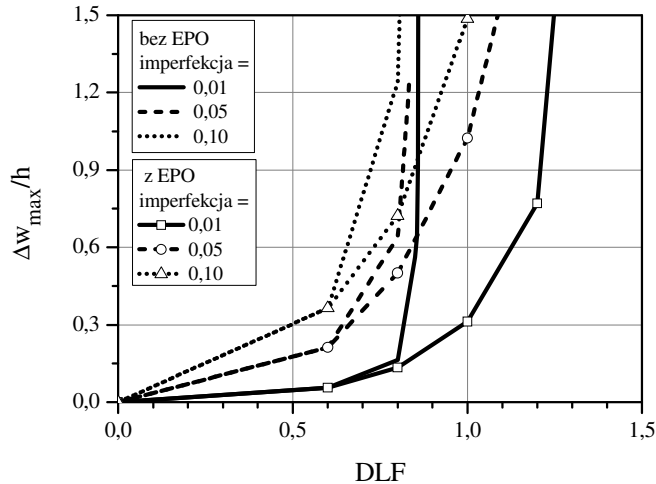
Rys. 9.12. Przebieg maksymalnego ugięcia w funkcji DLF , impuls sinusoidalny, $\eta = 0,5$

Wymaga to obliczenia odciętych punktów przegięcia dla obydwu analizowanych funkcji $\Delta w_{\max}/h = f(DLF)$. Wartości krytyczne DLF dla obydwu rodzajów materiału są podane w ramce tekstowej na rysunku 9.12. Zapis „ $\Delta + 47\%$ ” występujący w tej ramce (podobnie jak we wcześniejszych przypadkach) oznacza różnicę procentową pomiędzy krytycznymi wartościami impulsowego obciążenia dynamicznego dla obydwu materiałów – bez i z efektem prędkości odkształcenia (EPO). Zestawienie wykresów ugięcia w funkcji amplitudy obciążenia dynamicznego dla kolumny z tego samego materiału ortotropowego o różnych wartościach

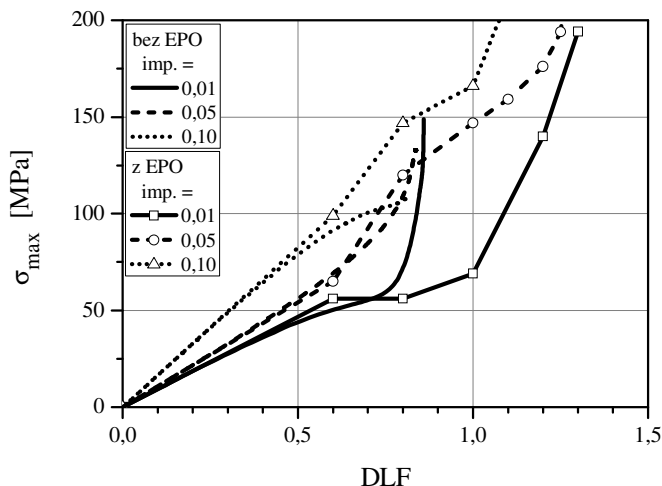
amplitud imperfekcji wstępnych potwierdza zależność dynamicznego zachowania się kolumny od wielkości amplitudy imperfekcji wstępnej (rys. 9.14). Można także dokonać porównania wpływu imperfekcji na różnice pomiędzy krytycznymi wartościami DLF_{kr} dla materiału bez oraz z EPO. Porównanie to podsumowujące także poniżej przytoczone omówienia będzie zamieszczone w tabelcy 9.4.



Rys. 9.13. Przebieg naprężeń efektywnych wg hipotezy Hilla w funkcji DLF materiał war. 1, granice plastyczności war. 1, impuls sinusoidalny, $\eta = 0,5$



Rys. 9.14. Przebieg maksymalnych ugięć w funkcji DLF dla różnych imperfekcji, impuls sinusoidalny, $\eta = 0,5$

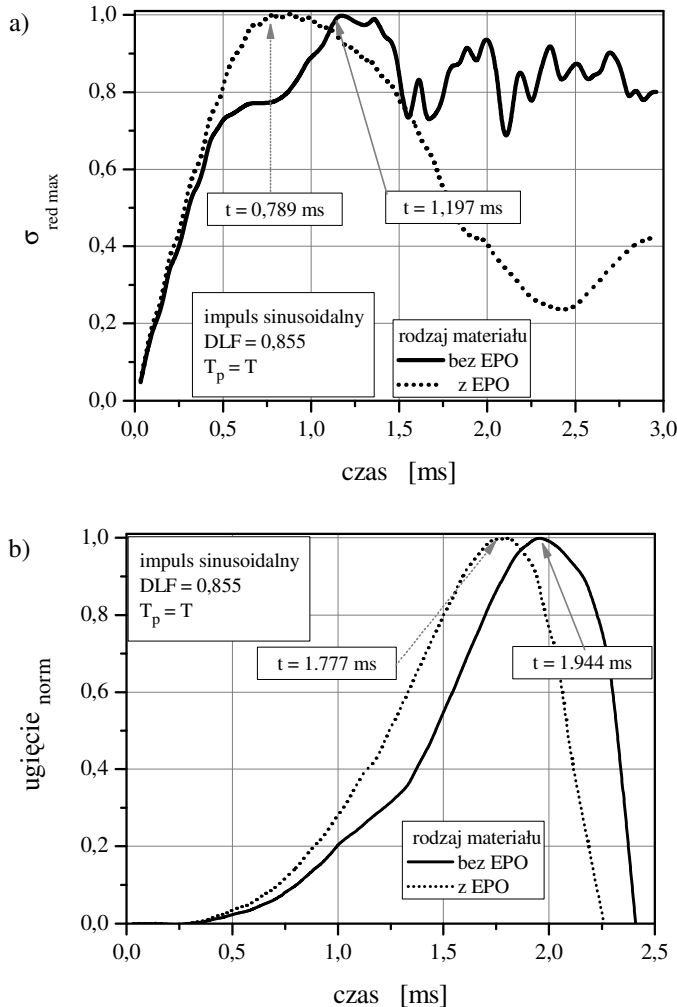


Rys. 9.15. Przebieg naprężeń efektywnych wg hipotezy Hilla w funkcji DLF , materiał war. 1, granice plastyczności war. 1, impuls sinusoidalny, $\eta = 0,5$

Różnice pomiędzy obciążeniami krytycznymi dla danego materiału dla trzech rozpatrywanych poziomów imperfekcji sięgają 40% i są większe dla materiału z EPO. Natomiast wzajemne różnice pomiędzy krytycznymi wartościami obciążenia dynamicznego dla materiału bez EPO oraz materiału z EPO dochodzą nawet do 60%, co ma miejsce dla najwyższej z przyjmowanych amplitudy imperfekcji 0,1*h*. Większej imperfekcji wstępnej towarzyszy większy udział zginania w obciążeniu ścian kolumny, co widoczne jest w tempie narastania naprężeń efektywnych w funkcji amplitudy impulsu pokazanym na rysunku 9.15. Dodatkowo można zaobserwować na tym wykresie, że dla obydwu mniejszych imperfekcji wstępnych 0,01*h* i 0,05*h*, w chwili wystąpienia pierwszego maksymalnego ugięcia ścian naprężenia efektywne są niższe od wartości granicy plastyczności materiału. Ma to miejsce praktycznie do ostatnich amplitud wymuszenia, dla których uzyskiwano zbieżność w obliczeniach. Wynika to z faktu, że pierwsze maksymalne ugięcie ścian kolumny pojawia się tuż przed ustaniem działania impulsu bądź krótko po jego ustaniu. W przypadku impulsu sinusoidalnego jest to faza malejącej amplitudy obciążenia konstrukcji. Natomiast dla impulsów o amplitudzie powyżej 0,6 ÷ 0,7 granica plastyczności materiału jest osiągnięta na wznoszącym fragmencie charakterystyki impulsu.

Dla materiału z EPO występuje podbicie granicy plastyczności i wartość naprężeń efektywnych w ścianach kolumny odpowiadająca aktualnej granicy plastyczności pojawia się zazwyczaj z osiągnięciem amplitudy impulsu sinusoidalnego. Dla początkowych wartości DLF amplitud impulsu dynamicznego – podobnie jak w przypadku ugięć, dla obydwu analizowanych rodzajów materiałów wartości naprężeń efektywnych są jednakowe. Porównania wartości naprężeń w czasie trwania impulsu sinusoidalnego można dokonać, zestawiając przebiegi

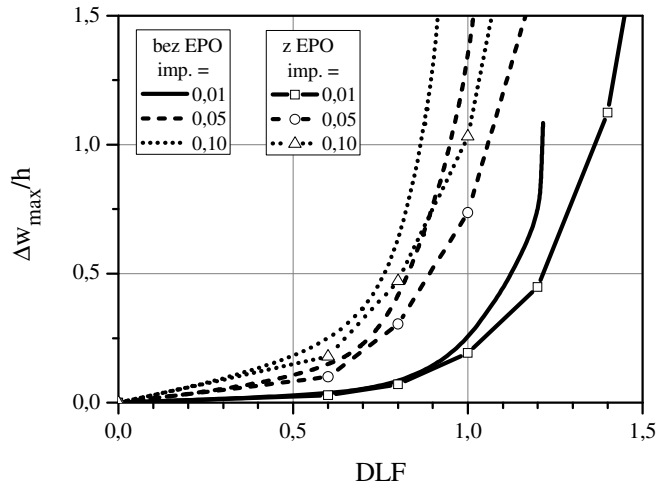
naprężeń efektywnych dla obydwu modeli materiału, znormalizowane do wartości maksymalnej tych naprężeń uzyskanych odpowiednio dla każdego z materiałów dla tej samej amplitudy impulsu. Przykładowo przedstawia to rysunek 9.16a dla amplitudy $DLF = 0,855$ i $T_p = T$. W prostokątach ze strzałkami zaznaczono dodatkowo czas, w którym osiągane są maksymalne wartości naprężeń efektywnych dla obydwu rozważanych modeli materiałów.



Rys. 9.16. Porównanie znormalizowanych przebiegów: a) naprężeń efektywnych b) maksymalnych ugięć w ścianach kolumny dla różnych modeli materiału

Analiza rysunku 9.16a jest dobrym przyczynkiem do przywołania tutaj kryterium Petry-Fahlbuscha, które definiuje dynamiczne obciążenie krytyczne w relacji do naprężeń granicznych, w tym przypadku do granicy plastyczności.

Stosując z kolei kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona do wyznaczenia dynamicznego obciążenia krytycznego, wykorzystuje się wielkość ugięć. W wersji znormalizowanej (odniesione do maksymalnego ugięcia dla analizowanych odpowiedzi kolumny, odpowiednio dla każdego z materiałów) pokazano je dla tego samego przypadku co naprężenia efektywne na rysunku 9.16b. Wprawdzie wykres ten nie jest bezpośrednio podstawą do wyznaczenia wielkości krytycznej obciążenia, ale maksymalne wartości ugięć są wykorzystywane przy tworzeniu pełnego wykresu $\Delta w_{\max}/h = f(DLF)$. Można natomiast wyraźnie dostrzec różnice w czasie osiągnięcia ekstremalnych wartości naprężeń i ugięć dla obydwu materiałów. W ocenie poziomu dynamicznego obciążenia krytycznego skutkuje to ograniczeniem wartości tego obciążenia przy zastosowaniu kryterium Petry-Fahlbusha wobec aplikacji kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona. Jest to wniosek odwrotny do tego, który wynikał z analizy słupów sprężystych [9.12], [9.20]. W tamtych przypadkach naprężenia dopuszczalne były osiągane dla obciążeń wyższych od tych, które wynikały z analizy ugięć według kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona.

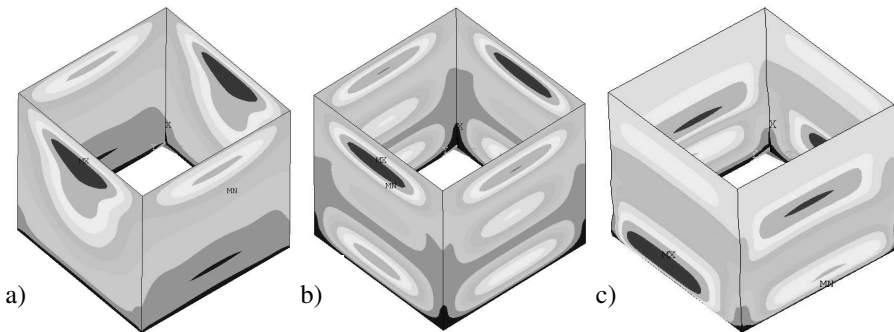


Rys. 9.17. Przebieg maksymalnych ugięć w funkcji DLF dla różnych imperfekcji, impuls prostokątny, $\eta = 0,5$

Do szeregu analogicznych wniosków, jak te sformułowane powyżej dla impulsu sinusoidalnego, można dojść analizując odpowiedź kolumny z tego samego materiału, poddanej impulsowi o kształcie prostokąta (rys. 9.17). Czas trwania impulsu – tak i poprzednio, był równy okresowi drgań własnych kolumny $T_p = T$, w tym przypadku wynosił $T = 1,974$ ms. Z przebiegu krzywych względnego ugięcia ścian kolumny w funkcji amplitudy wymuszenia dynamicznego widoczny jest wyraźny wpływ amplitudy imperfekcji wstępnych, przy podobnym charakterze dla obydwu modeli materiału. Podkreślić można jedynie, że problemy ze

zbieżnością obliczeń wywołane uplastycznieniem ścian kolumny, najwcześniej pojawiły się dla materiału bez EPO i imperfekcji $0,01h$. Również – jak w przypadku impulsu sinusoidalnego, dla mniejszych, początkowo przyjmowanych wartości amplitud DLF , ugięcia ścian kolumny są praktycznie jednakowe dla obydwu rodzajów materiałów (bez i z EPO).

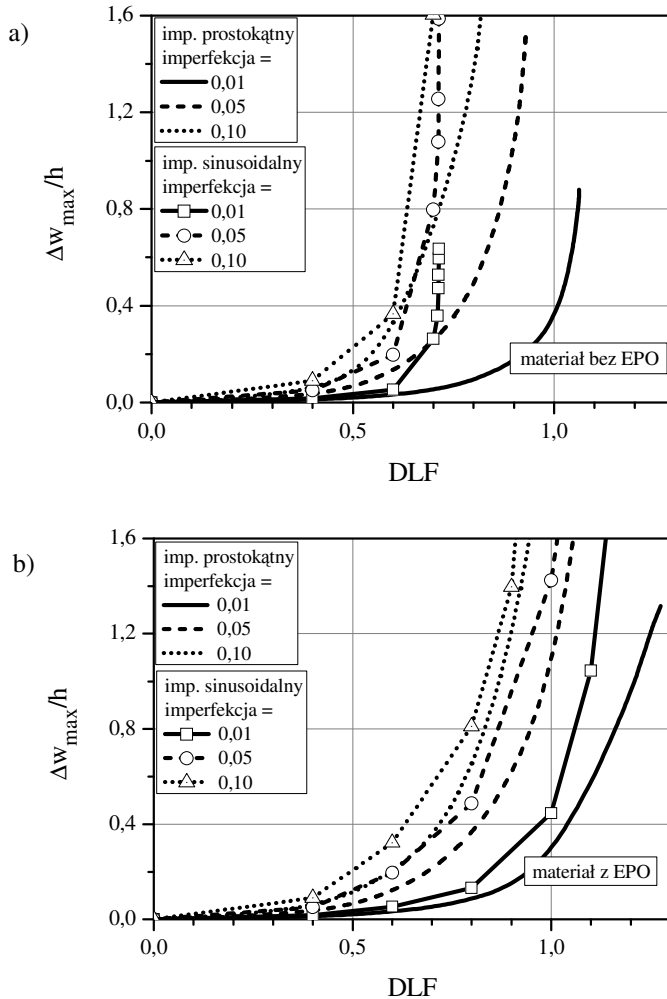
Podobnie do przypadku pokazanego przykładowo na rysunku 9.6 dla materiału izotropowego, także w deformacjach ścian kolumny z materiału ortotropowego w czasie odpowiedzi dynamicznej dochodziło do zmian postaci wybożenia. „Sprawcą” tego zjawiska jest kształt nieobciążonych krawędzi kolumny oraz redystrybucja naprężeń w płaszczyźnie ściany. Na rysunku 9.18 pokazano kształty powierzchni ścian kolumny z materiału o współczynniku $\eta = 0,5$ w chwili pierwszego maksymalnego ugięcia, to jest w momencie dokonywania odczytu amplitudy tego ugięcia w celu sporządzenia wykresu $\Delta w_{\max}/h = f(DLF)$.



Rys. 9.18. Mapy deformacji powierzchni ścian kolumny w chwili wystąpienia maksymalnego ugięcia ściany, materiał ortotropowy, imperfekcja $0,01h$:
 a) $DLF = 0,858$, materiał bez EPO, impuls sinusoidalny;
 b) $DLF = 1,4$, materiał z EPO, impuls sinusoidalny;
 c) $DLF = 1,6$, materiał z EPO, impuls prostokątny

Są to jedynie przykłady deformacji powtarzające się w przeprowadzonych obliczeniach, wybrane z grona bardziej zróżnicowanego aniżeli miało to miejsce w analizie słupów z materiałów bez EPO. Podobny bowiem wpływ krawędzi nieobciążonej na postać oraz wielkość ugięcia był obserwowany w kolumnach z materiałów bez efektu prędkości odkształcenia obciążanych impulsowo, które porównywano z zachowaniem pojedynczej płyty (wypreparowanej ściany składowej) ściskanej dynamicznie [9.12], [9.13], [9.14]. Podobnym zjawiskiem do spotykanego w odpowiedzi kolumny z materiału bez EPO, jest widoczny w deformacjach pokazanych na rysunku 9.18, brak pełnej odpowiedniości ugięć oraz ich amplitud na sąsiadujących ścianach kolumny.

W celu stworzenia możliwości porównania skutków dynamicznego działania impulsów sinusoidalnego oraz prostokątnego na kolumnę o ustalonej geometrii i materiale, podobnie jak i dla materiału izotropowego, zachowano jednakową wartość pola pod krzywą opisującą przebieg w czasie każdego z impulsów (rys. 4.2). Bieżące porównanie dotyczy impulsów działających przez czas równy okresowi drgań własnych kolumny. Rysunek 9.19 przedstawia takie porównanie dla kolumny wykonanej z materiału ortotropowego wariant 1 tablica 9.2 oraz granica plastyczności wariant 2 tablica 9.3, dla materiału bez EPO (rys. 9.19a) oraz dla materiału wrażliwego na EPO (rys. 9.19b). Wartości stałych materiałowych nadal



Rys. 9.19. Porównanie działania impulsów prostokątnego i sinusoidalnego:
a) materiał niewrażliwy na EPO; b) materiał wrażliwy na EPO

$D = 40,4$ 1/s oraz $m = 0,2$. Dla tego zestawu danych materiałowych ma zastosowanie taka sama relacja dla modułów sprężystości i dla granic plastyczności ($\eta = 0,5$). W ogólnej ocenie, ugięcia ścian kolumny wywołane impulsem sinusoidalnym są zdecydowanie większe od ugięć dla analogicznych amplitud impulsu prostokątnego. Odnosi się to do obydwu opisów konstytutywnych materiału. Można jednak zauważyć, że dla materiału z EPO różnice te są mniejsze.

Jak wspomniano, porównywane impulsy sinusoidalny oraz prostokątny były sobie mechanicznie równe, co wiązało się z większą amplitudą impulsu sinusoidalnego. Można zatem przyjąć, że właśnie wielkość amplitudy była odpowiedzialna za większe aniżeli w przypadku impulsu prostokątnego ugięcia ścian kolumny dla impulsu sinusoidalnego. Wpływ amplitudy był bardziej znaczący niż sam kształt impulsu. Podobne wnioski wyływały z analizy zachowania kolumny z materiału niewrażliwego na EPO, poddanej działaniu impulsów o kształcie trapezu [9.12], [9.33]. W pracach tych porównywano równe sobie (mechanicznie) impulsy o jednakowym czasie działania, co wiązało się z różnymi amplitudami, różnymi czasami narastania i opadania impulsu. Czynnikiem wielkości amplitudy impulsu był wówczas decydujący.

Tablica 9.4. Wartości krytyczne obciążenia dynamicznego DLF_{kr} impuls sinusoidalny i prostokątny, $T_p = T$, $\eta = 0,5$

	Rodzaj materiału	imperfekcja 0,01h	imperfekcja 0,05h	imperfekcja 0,10h
Impuls sinusoidalny	bez EPO	0,81	0,80	0,65
	z EPO	1,21	1,17	1,04
	Δ [%]	+50	+47	+61
Impuls prostokątny	bez EPO	1,11	0,98	0,81
	z EPO	1,48	1,22	1,12
	Δ [%]	+34	+24	+38

W tablicy 9.4, w której znajdują się wyniki obliczeń dla impulsu sinusoidalnego, zamieszczono także zestawienie wartości krytycznych obciążenia dynamicznego przy różnych amplitudach imperfekcji wstępnych, dla kolumny obciążonej omawianym impulsem prostokątnym. Współczynnik ortotropii jest tu jednakowy i wynosi $\eta = 0,5$. Dla obydwu kształtów porównywanych impulsów – sinusoidalnego i prostokątnego, dla obydwu modeli konstytutywnych materiału widoczna jest typowa dla konstrukcji cienkościennych zależność dynamicznego obciążenia krytycznego od amplitudy imperfekcji. Procentowe różnice pomiędzy obciążeniami krytycznymi DLF_{kr} dla rozpatrywanych modeli materiałów są

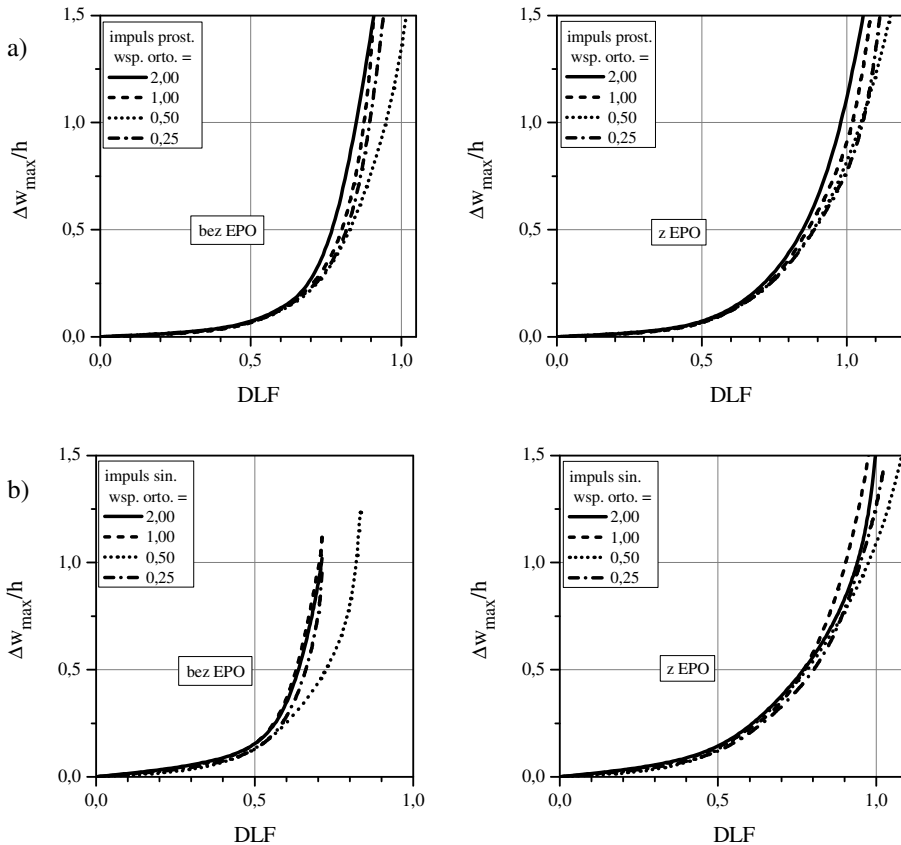
większe dla obciążenia kolumny impulsem sinusoidalnym (do 61%). Przy czym z porównania pomiędzy tymi obciążeniami dla danego modelu materiału, dla różnych poziomów imperfekcji, wynika, że różnice te są mniejsze dla materiału wrażliwego na EPO dla obydwu impulsów dynamicznych – odpowiednio 25% (materiał bez EPO) i 16% (materiał z EPO) dla impulsu o kształcie sinusoidalnym wobec 37% i 32% dla impulsu prostokątnego.

Kolejne zestawienie wyników – rys. 9.20 – dotyczy zachowania kolumn wykonanych z materiałów o różnych wartościach η współczynnika ortotropii (9.1). Kolumny były poddawane działaniu impulsów prostokątnego oraz sinusoidalnego. Czas działania tych impulsów był równy podstawowemu okresowi drgań własnych. Statyczne siły krytyczne były wyznaczane oddzielnie dla każdego rozpatrywanego współczynnika ortotropii η . Omawiana uprzednio różnica w zachowaniu kolumn pod działaniem impulsu prostokątnego i sinusoidalnego (rys. 9.19) jest tu także widoczna. Zależność w odpowiedzi dynamicznej kolumny od stopnia ortotropii jest widoczna w przedziałach powyżej $DLF \approx 0,5 \div 0,7$, przy czym mniejsza z granic odnosi się do impulsu sinusoidalnego. Ugięcia kolumn z materiałów o różnym stopniu ortotropii w początkowym zakresie amplitud impulsu różnią się pomiędzy sobą w bardzo niewielkim stopniu. Dotyczy to obydwu analizowanych impulsów.

Powyżej $DLF \approx 0,5 \div 0,7$ większe zróżnicowanie ugięć dotyczy impulsu prostokątnego i to w odniesieniu do obydwu przypadków materiału z EPO oraz kiedy materiał nie jest wrażliwy na EPO. Krzywe obrazujące ugięcia pod działaniem impulsu sinusoidalnego dla kolumny z materiału bez EPO nie obejmują w całości badanego przedziału amplitud impulsów. Zjawisko podobne miało już miejsce wcześniej i wynikało z braku zbieżności w rozwiązaniu spowodowanym dużymi deformacjami konstrukcji. Ugięcia odpowiadające osiągnięciu przez konstrukcję dynamicznego obciążenia krytycznego były większe dla obydwu impulsów i dla kolumny z materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia. Wykresy na rysunku 9.20 pokazują także redukcję nośności analizowanych konstrukcji.

Wielkości liczbowe krytycznego obciążenia dynamicznego dla materiałów o różnych współczynnikach ortotropii, poddanych działaniu impulsów prostokątnego i sinusoidalnego zestawiono w tablicy 9.5. Wartości DLF_{kr} dla materiałów z EPO są wyższe od obciążeń krytycznych dla materiałów bez EPO nawet do sześćdziesięciu kilku procent. Przy tym samym stopniu ortotropii dla obydwu porównywanych impulsów dynamicznych różnice te są większe dla wymuszenia dynamicznego impulsem sinusoidalnym. W świetle komentarza na początku bieżącego rozdziału, dla spektakularnego zademonstrowania efektu prędkości odkształcenia, dobór geometrii analizowanych kolumn zapewniał poziom statycznych naprężeń krytycznych nieco poniżej granicy plastyczności materiału. Dodatkowo rozpatrywane przypadki ortotropii oznaczają praktycznie względne osłabienie sztywności w jednym z kierunków głównych wobec sztywności materiału

izotropowego. Prowadzi to łącznie do widocznej redukcji dynamicznych obciążeń krytycznych wobec odpowiedniego krytycznego obciążenia statycznego.



Rys. 9.20. Porównanie działania impulsów na materiały o różnym współczynniku ortotropii: a) impuls prostokątny; b) impuls sinusoidalny

Istniejące rozwiązania stateczności dynamicznej dla słupów/kolumn z materiałów (zazwyczaj liniowo-sprężystych), dla których efekt prędkości odkształcenia nie był uwzględniany [9.12], [9.13], [9.19], uzyskane dla przypadków impulsów dynamicznych trwających przez czas krótszy od okresu drgań własnych słupa, tj. $T_p = 0,5T$ lub $T_p = 0,75T$, pokazują, iż reakcje konstrukcji na „krótszy” impuls są w charakterze podobne do zachowania słupa pod działaniem impulsu $T_p = 1T$, ale „odroczone” w czasie. Wyniki analogicznych obliczeń dla słupów z materiału wrażliwego na EPO – przykładowo dla impulsu sinusoidalnego trwającego przez czas $T_p = 0,5T$; potwierdzają to podobieństwo w zachowaniu konstrukcji słupa w odniesieniu do ugięć (rys. 9.21). Dla analogicznych amplitud wymuszenia dynamicznego ugięcia ścian słupa wywołane „krótszym” impulsem są kilkakrotnie mniejsze od ugięć wywołanych „dłuższym” impulsem ($T_p = 1T$).

Sam charakter krzywych na rysunku 9.21 dla obydwu tam zestawionych impulsów o różnych czasach trwania jest podobny.

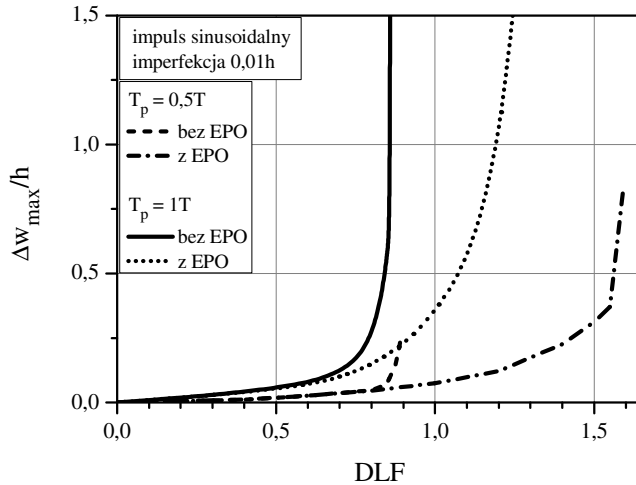
Tablica 9.5. Wartości krytyczne obciążenia dynamicznego DLF_{kr} dla różnych wartości współczynnika ortotropii, imperfekcja 0,05h, impuls sinusoidalny i prostokątny, $T_p = T$

	Rodzaj materiału	współczynnik ortotropii			
		2,0	1,0	0,5	0,25
Impuls sinusoidalny	bez EPO	0,62	0,62	0,80	0,63
	z EPO	0,78	1,01	1,17	0,94
	Δ [%]	26	63	48	49
Impuls prostokątny	bez EPO	0,86	0,90	0,98	0,94
	z EPO	1,04	0,93	1,22	1,08
	Δ [%]	21	3	24	15

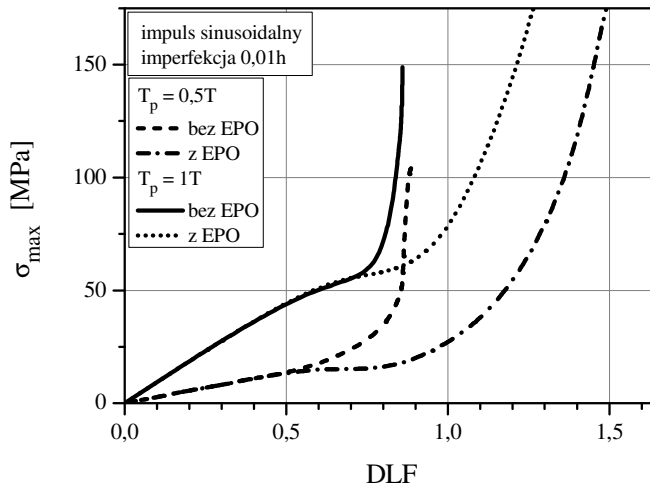
Redukcja nośności dla słupa z materiału bez EPO jest dla obydwu czasów impulsu zbliżona, natomiast w przypadku modelu materiału uwzględniającego EPO utrata nośności następuje dla zdecydowanie większych amplitud impulsu. W odpowiednich przedziałach dla obydwu materiałów można wyznaczyć krytyczne wartości obciążenia dynamicznego. Określone na podstawie kryterium B-H, wartości te są odpowiednio równe: DLF_{kr} wynosi odpowiednio 0,80 i 1,35 dla impulsu „krótkiego” ($T_p = 0,5T$) oraz 0,81 i 1,21 dla impulsu „długiego” ($T_p = 1T$), gdzie niższe wartości odnoszą się do materiału niewrażliwego na EPO. Interesująca jest zbliżona wartość obydwu obciążeń krytycznych dla materiału bez EPO. Wynika to w dużej mierze z przyjęcia takiej geometrii kolumny, dla której wartości statycznych naprężeń krytycznych są niewiele mniejsze od granicy plastyczności. Jednocześnie dla obydwu modeli materiału – sprężystoplastycznego i lepkoplastycznego, w przypadku impulsu „krótkiego” ($T_p = 0,5T$), problemy ze zbieżnością rozwiązania pojawiały się już przy względnie małych ugięciach ścian kolumny.

Zbliżone analogie do tych wskazanych wobec ugięć ścian istnieją w zestawieniu wartości naprężeń efektywnych osiąganych w chwili osiągnięcia przez ściany słupa pierwszego maksymalnego ugięcia – co pokazuje rysunek 9.22. Można zauważyć, że w obszarze dokrytycznym wartości naprężeń powstających w czasie obydwu porównywanych impulsów pozostają do siebie w proporcji większej od względnej relacji ugięć. Na krzywej obrazującej wartości naprężeń efektywnych kolumny z materiału bez EPO praktycznie nie obserwuje się strefy wzmocnienia materiału, która jest wyraźnie obecna w przypadku modelu materiału z EPO, dla obydwu czasów działania impulsu ściskającego. Odnosząc się do wartości dynamicznego obciążenia krytycznego dla konstrukcji o statycznym

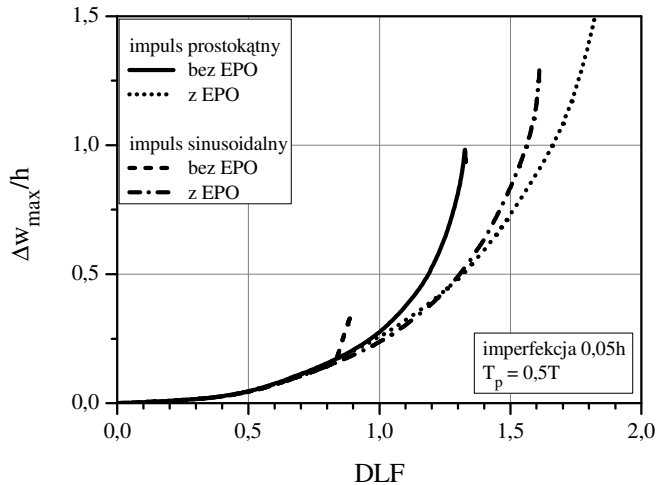
naprężeniu krytycznym bliskim granicy plastyczności, można stwierdzić, że krótkie impulsy są równie niebezpieczne co impulsy dłuższe.



Rys. 9.21. Porównanie ugięć ścian słupa obciążonego krótkim $T_p = 0,5T$ i długim $T_p = T$ impulsem, $\eta = 0,5$



Rys. 9.22. Porównanie naprężeń efektywnych w ścianach słupa obciążonego krótkim $T_p = 0,5T$ i długim $T_p = T$ impulsem, $\eta = 0,5$



Rys. 9.23. Porównanie ugięć wywołanych impulsem prostokątnym i sinusoidalnym; $T_p = 0,5T$, $\eta = 0,5$

Przebiegi ugięć pokazane na rysunku 9.23 wywołane impulsami „krótkimi” ($T_p = 0,5T$) – sinusoidalnym oraz prostokątnym, wykazują znacznie mniejsze zróżnicowanie wzajemne na początku rozważanego przedziału amplitud obciążenia $DLF < 0,7 \div 0,8$, w stosunku do wartości ugięć słupa obserwowanych pod działaniem impulsów „dłuższych” ($T_p = T$). Różnice ugięć w pozostałym obszarze obciążeń są podobne, to znaczy skutek działania impulsu sinusoidalnego porównywalnego z prostokątnym (jednakowe pola pod charakterystyką czasową impulsów) jest bardziej ewidentny. Dynamiczne obciążenie krytyczne, ustalone na podstawie kryterium Budianskiego-Hutchinsona, dla materiału bez EPO jest blisko dwa razy większe dla impulsu prostokątnego (1,21) wobec tego obciążenia dla impulsu sinusoidalnego (0,65). Różnice pomiędzy krytycznym obciążeniem dla materiału wrażliwego na EPO sięgają 77% dla impulsu sinusoidalnego i 55% dla impulsu prostokątnego, wobec analogicznych obciążeń krytycznych dla materiału bez EPO, odpowiednio. Wspomniany wcześniej efekt „odroczenia” przy działaniu krótkich impulsów, obserwowany dość wyraźnie w zachowaniu kolumn z ortotropowych materiałów liniowo-sprężystych jest tu ograniczony [9.12], [9.19].

Przeprowadzone inne od omówionych dotychczas porównania wartości dynamicznych obciążeń krytycznych kolumn wykonanych z materiałów ortotropowych, pokazują wyraźną zależność wielkości tych obciążeń od lepkoplastycznych własności materiału czyli od uwzględnienia w obliczeniach wrażliwości materiału na *Efekt Prędkości Odkształcenia*. Z uwagi na fakt, iż wpływ ten jest już dostatecznie wyraźny w przytoczonych przypadkach, a dalsze rozważane warianty kombinacji własności materiału oraz poziomu granic plastyczności (warianty zestawione w tabelicy 9.2 oraz tabelicy 9.3) jedynie go dodatkowo potwierdzają - nie wnosząc przy tym nowych konstatacji, wyniki

obliczeń dla tych przypadków nie zostały zamieszczone w pracy. Będą one przedmiotem odrębnych publikacji [9.22].

9.3. Kolumny z materiałów kompozytowych

Wiele materiałów kompozytowych w swojej anizotropii ma wyraźnie określone kierunki główne pozwalające na traktowanie ich w obliczeniach jako materiałów ortotropowych. Zachowanie słupów wykonanych z tych materiałów pod działaniem obciążeń impulsowych zostało omówione w poprzednim podrozdziale. Koncepcja modelowania własności mechanicznych jako ortotropowych dotyczy zwłaszcza materiałów strukturalnych, jakimi są warstwowe kompozyty wzmacniane jednokierunkowymi włóknami. W strukturach wielowarstwowych kompozyty włókniste tworzą materiały o różnorodnych własnościach i odrębnych cechach. Ich własności dynamiczne są opisywane w literaturze za pomocą równań konstytutywnych dedykowanych konkretnemu typowi kompozytu. Równania te są odmiennego typu aniżeli równanie Perzyny (7.16), choć często są formułowane na podstawie analogicznego podejścia jak dla materiałów izotropowych – np. teorii plastycznego płynięcia [9.34], [9.38], [9.39]. Współczynniki liczbowe występujące w tych równaniach są wyznaczone w wyniku żmudnych badań eksperymentalnych [9.36].

W przypadku metody elementów skończonych zastosowanej do analizy konstrukcji z materiałów kompozytowych można zastosować praktycznie trzy podejścia. W pierwszym sposobie jest to wykorzystanie istniejących aplikacji, w których zaimplementowane są oddzielne równania konstytutywne dla materiałów składowych – włókien i matrycy (osnowy). Wówczas dla analizowanej konstrukcji generowany jest model z elementów bryłowych, którym przypisywane są własności materiałowe – odpowiednio matrycy bądź włóknom. Kolejną wersją rozwiązania jest wykorzystanie istniejących w aplikacji MES opracowanych modeli konstytutywnych materiału kompozytowego, dla których należy drogą eksperymentalną wyznaczyć zazwyczaj liczne współczynniki materiałowe [9.42]. Wreszcie trzecią metodą jest wprowadzenie do aplikacji MES własnego modelu materiału w formie własnej procedury typu *USERMAT* definiującej równanie/ równania konstytutywne opisujące specyficzne relacje dla wybranego do analizowanego przypadku materiału kompozytowego [9.41]. Jednak i tu zazwyczaj konieczne jest przeprowadzenie żmudnych badań eksperymentalnych nad wyznaczeniem tych relacji oraz określenie analitycznej formy zależności konstytutywnych.

W niniejszej pracy poddano jedynie analizie słupy o ścianach z wielowarstwowego kompozytu o sekwencji [45/-45]_s. Wybór symetrycznego laminatu pozwalał na eliminację efektu sprzężenia zginanie-rozciąganie (brak macierzy [B] w (5.19b)) na odpowiedź dynamiczną konstrukcji [9.20]. Własności materiału

warstwy odpowiadały wariantowi 1 z tablicy 9.2, przy czym przeprowadzono obliczenia dla dwóch wariantów granic plastyczności opisanych w tablicy 9.3 (wariant 1 oraz 2). Odpowiadały one współczynnikowi ortotropii $\eta = 0,5$. Zależności konstytutywne dynamicznego zachowania tych materiałów były modelowane równaniem Perzyny (7.16) ze współczynnikami $\gamma = D = 40,4$ oraz $m = q = 0,2$. Przykładowe wyniki obliczeń dynamicznych obciążeń krytycznych DLF_{kr} są zestawione w tablicy 9.6 dla impulsów sinusoidalnego oraz prostokątnego trwających przez czas równy okresowi drgań własnych, dla różnych amplitud imperfekcji ścian słupa. Ze względów komentowanych wcześniej (wstęp do podrozdziału 9.1), kolumna miała kształt sześcianu o ścianach jednakowej grubości, przy czym $s = b/h = 71$. Przyjęto biliniową charakterystykę materiału.

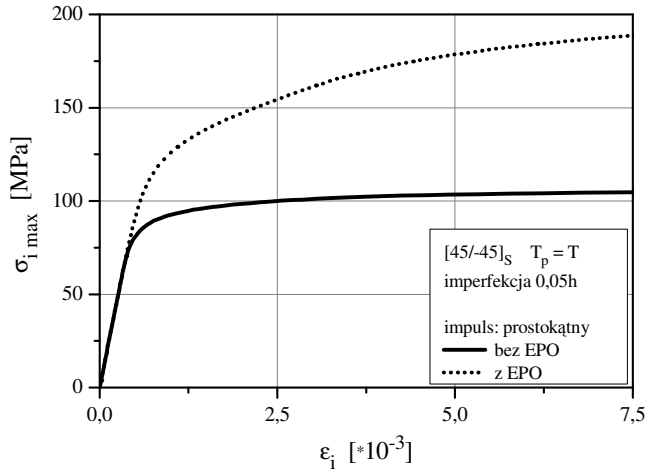
Wyniki obliczeń zestawione w tablicy 9.6 potwierdzają wpływ efektu prędkości odkształcenia na zachowanie konstrukcji kompozytowych. W wartościach dynamicznego obciążenia krytycznego, określonych na podstawie kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona, dla obydwu modeli materiału widoczna jest zależność tych obciążeń od amplitudy imperfekcji wstępnych. Nie można jednak ustalić wpływu amplitudy imperfekcji na wzajemną różnicę pomiędzy krytycznymi obciążeniami dla obydwu analizowanych modeli materiału. Można jedynie zauważyć, że zdecydowanie najmniejsze różnice dynamicznych obciążeń krytycznych wyznaczono dla najwyższej przyjętej do obliczeń imperfekcji, tj. $0,1h$. Dotyczy to obydwu porównywanych kształtów impulsu. Dla dwóch rozważanych impulsów także poziom procentowej różnicy pomiędzy obciążeniami krytycznymi dla obydwu modeli materiału, dla przyjętych amplitud imperfekcji jest zbliżony (kolejne kolumny wierszy z $\Delta\%$ w tablicy 9.6).

Tablica 9.6. Wartości krytyczne obciążenia dynamicznego DLF_{kr} impuls sinusoidalny i prostokątny, $T_p = T$, sekwencja warstw [45/-45]_s

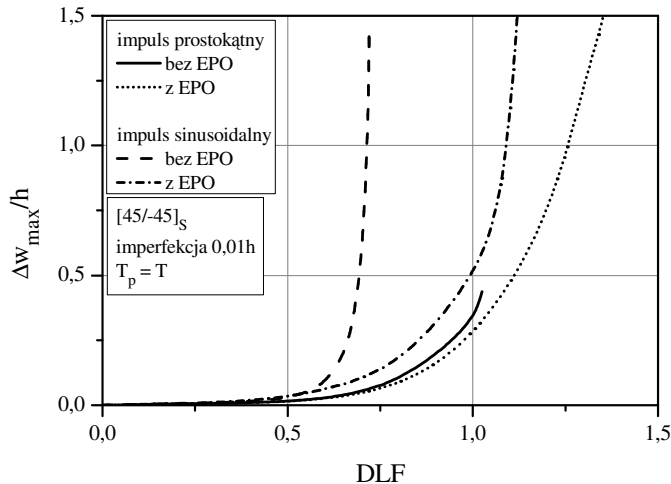
	Rodzaj materiału	imperfekcja 0,01h	imperfekcja 0,05h	imperfekcja 0,10h
Impuls sinusoidalny	bez EPO	0,70	0,64	0,63
	z EPO	1,11	0,97	0,73
	Δ [%]	59	52	16
Impuls prostokątny	bez EPO	0,93	0,82	0,80
	z EPO	1,23	1,13	1,01
	Δ [%]	32	38	26

Efekt prędkość odkształcenia w przebiegu wartości maksymalnych naprężeń efektywnych, według hipotezy Hilla, w ścianach słupa kompozytowego ściskanego impulsem prostokątnym jest wyraźnie widoczny na rysunku 9.24. Przedstawiono na nim zależność maksymalnych naprężeń efektywnych w funkcji intensywności odkształceń dla obydwu rozpatrywanych materiałów – z efektem i bez EPO.

W fazie przed wzmocnieniem materiału widoczny jest ponad 20% wzrost naprężeń dla ścian z kompozytu wrażliwego na EPO w stosunku do materiału niewrażliwego na ten efekt.



Rys. 9.24. Przebiegi naprężeń efektywnych σ_i w funkcji intensywności odkształceń ε_i



Rys. 9.25. Porównanie ugięć w ścianach słupa kompozytowego w funkcji amplitudy impulsu sinusoidalnego i prostokątnego

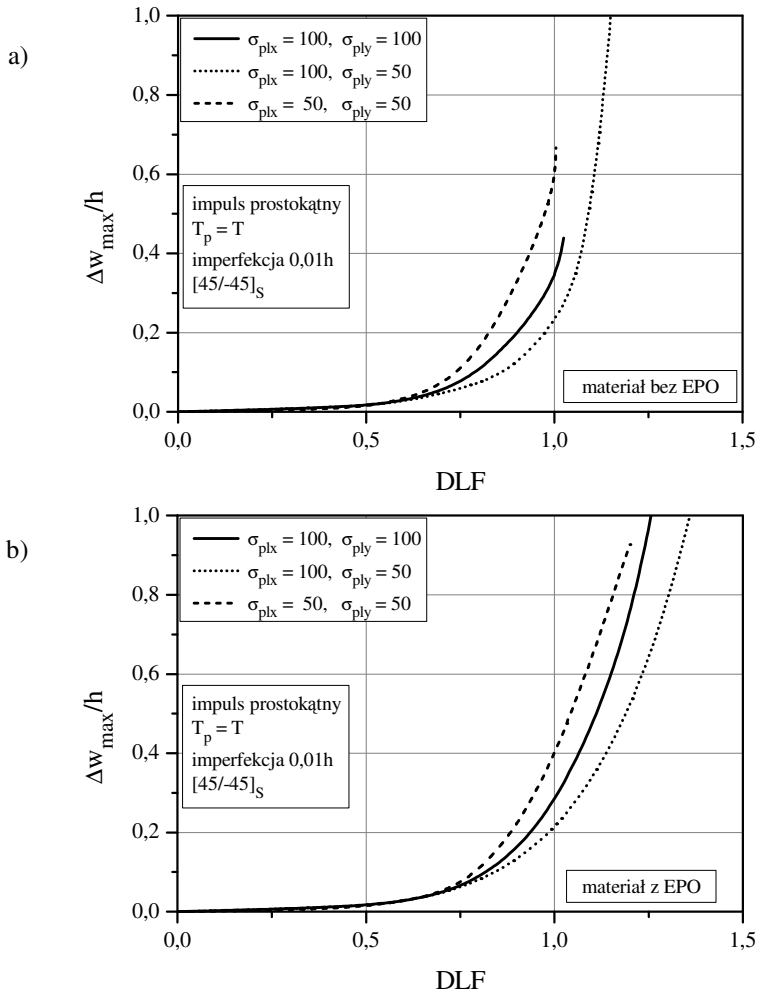
Kolejne porównanie ugięć ścian słupa wywołanych impulsem sinusoidalnym i prostokątnym trwającym przez czas równy podstawowemu okresowi drgań własnych, tym razem dla ścian kompozytowych o własnościach zdefiniowanych na wstępie tego podrozdziału, potwierdza różne zachowania konstrukcji dla obydwu zadawanych impulsów. Ugięcia ścian słupa pod działaniem impulsu

prostokątnego są niższe od ugięć wywołanych impulsem sinusoidalnym, w całym analizowanym przedziale zmienności DLF amplitud impulsu. Dla obydwu kształtów impulsu i materiału bez EPO uzyskano rozwiązania w ograniczonym zakresie zmian amplitudy DLF , dla impulsu prostokątnego dla względnie małych ugięć ścian. Natomiast wartości krytyczne obciążenia dynamicznego – dla poszczególnych amplitud imperfekcji – dla impulsu prostokątnego są wyższe od obciążeń krytycznych wyznaczonych w przypadku dynamicznego działania impulsu sinusoidalnego.

Dla wszystkich przypadków obliczeń prowadzonych dla materiału bez EPO widoczna jest także duża redukcja dynamicznego obciążenia krytycznego wobec obciążenia statycznego. Potwierdzeniem obydwu tych stwierdzeń są wyniki obliczeń podane w tablicy 9.6. Warto tu raz jeszcze podkreślić fakt, iż porównywanie działania impulsów prostokątnego i sinusoidalnego prowadzono dla jednakowych pól pod charakterystyką przebiegu impulsu. Wiązało się to – jak wcześniej wspomniano, z większą wartością amplitudy impulsu sinusoidalnego wobec amplitudy impulsu prostokątnego (wzór (4.4) oraz (4.6)).

Przyjęcie do obliczeń własności materiałów o tym samym współczynniku ortotropii, ale o różnych granicach plastyczności σ_{plx} w kierunku impulsu ściskającego oraz σ_{ply} w kierunku prostopadłym do kierunku działania impulsu, skutkowało wpływem na wielkość ugięć ścian słupa. Wartość referencyjnej granicy plastyczności σ_{pl} pozostała niezmienną. Różnice ugięć ścian w zależności od rodzajów materiału były istotnie widoczne w przedziale wyższych amplitud impulsu – DLF większych od odpowiednio 0,6 i 0,7. Co ciekawe, redukcja obciążenia krytycznego dla obydwu modeli materiału dotyczyła tylko niższej wartości granicy plastyczności w kierunku działania impulsu. W rozwiązaniu statycznym podobny efekt opisano w pracach [2.21] i [9.37].

Należy przyznać, że w przedstawionym wyżej omówieniu kompozyty zostały potraktowane z założenia informacyjnie, sygnałnie. Wynikało to z indywidualizacji modeli lepkoplastycznych dla danego typu materiału kompozytowego i braku jawnych danych materiałowych (danych liczbowych współczynników w modelu konstytutywnym). Jednakże celem podstawowym tego podrozdziału było wykazanie, iż efekt wrażliwości materiału na EPO występuje także w konstrukcjach z materiałów kompozytowych, a różnice w wartościach dynamicznych obciążeń krytycznych istotnie zależą od uwzględnienia wrażliwości materiału na EPO. Dodatkowo duże różnice w wytrzymałości, w rozpatrywanym przypadku granic plastyczności kompozytów w głównych kierunkach ortotropii, sprawiają istotne kłopoty z aplikacją kryterium Hilla jako wyznacznika stanu początku procesu uplastycznienia.

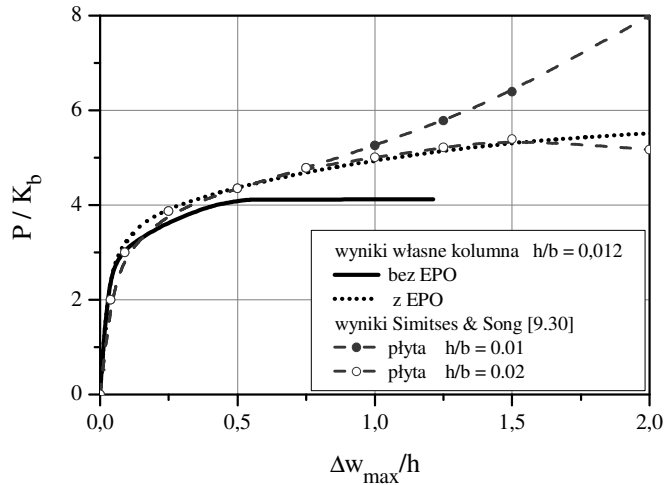


Rys. 9.26. Wpływ granic plastyczności σ_{plx} oraz σ_{ply} na zachowanie dynamiczne słupa o ścianach warstwowych $\eta = 0,5$; materiał: bez EPO a), z EPO b)

9.4. Porównanie wyników obliczeń

Jak o tym kilkakrotnie nadmieniano we wcześniejszych rozdziałach, w literaturze istnieje bardzo niewiele publikacji poświęconych problematyce wybočenja dynamicznego konstrukcji cienkościennych z materiałów lepkoplastycznych. Oczywiście istnieją prace, gdzie modele lepkoplastyczne są stosowane w obliczeniach – najczęściej szybkozmiennych procesów technologicznych, efektów wybuchu itp. Istnieją także prace, w których dokonywane są porównania różnic i podobieństw w wynikach obliczeń przy wykorzystaniu różnych modeli

lepkoplastycznych. Jednakże zaledwie w kilku pracach jest mowa o wyboczeniu konstrukcji cienkościennych, których materiał opisany jest równaniami konstytutywnymi lepkoplastyczności. W pracy Paley'a i Abaudiego o wyboczeniu bifurkacyjnym, omówionej w rozdziale 2, proponuje się przewidywania rozwiązania problemu lepkoplastycznego w oparciu o rozwiązanie sprężyste dla płyty o takich samych warunkach brzegowych. W pracy [9.32] Simitses i Song stosują termo-lepkoplastyczne modele konstytutywne Bodnera-Partoma oraz Walkera, w połączeniu z metodą elementów skończonych, do analizy wyboczenia ściskanych osiowo przegubowo podpartych izotropowych płyt prostokątnych. Prezentowane przez nich krzywe siła-skrócenie w stanie pokrytycznym dla obydwu modeli konstytutywnych są praktycznie jednakowe. Dodatkowo, uzyskane wyniki obliczeń są przedstawiane w bezwymiarowych układach współrzędnych. Wprawdzie większe zainteresowanie autorów jest skupione na wpływie temperatury na wyboczenie badanych płyt, to jednak wśród krzywych pokazanych na rysunku 8 w ich artykule, można znaleźć wyniki, które potraktowano jako referencyjne dla wyników uzyskanych w niniejszej pracy. Porównanie to dotyczy konstrukcji z materiału izotropowego i jest zobrazowane na rysunku 9.27. Krzywe z cytowanej pracy dotyczą kwadratowej płyty, przegubowo podpartej na całym obwodzie, osiowo ściskanej, dla której iloraz grubości i długości był równy 0,01 oraz 0,02, a imperfekcja wynosiła 0,02 grubości płyty. Wyniki te są porównywane z rezultatami obliczeń kolumny o ścianach kwadratowych jednakowej grubości, dla których iloraz $b/h = 0,012$, przy imperfekcji wstępnej wszystkich ścian równej 0,01 ich grubości. Warunki brzegowe i sposób obciążenie były zgodne z opisem w rozdziale 8 i rozdziale bieżącym. W interpretacji tego rysunku zastosowano, odmienny od dotychczas stosowanego w tej pracy, układ osi współrzędnych zgodny z rysunkiem referencyjnym w pracy Simitsesa i Songa. Jednocześnie na osi pionowej dokonano normalizacji obciążenia współczynnikiem $K_b = \pi^2 E h^3 / (12 L^2)$, także powielając podejście z ich pracy. Na rysunku 9.27 krzywe odpowiadające modelowi lepkoplastycznemu materiałowi, uzyskane w obydwu porównywanych pracach prezentują dobrą zgodność. Oczywiście, linia ciągła bez symboli dla materiału bez EPO (niniejsza praca) nie ma odniesienia do pracy Simitsesa i Songa, gdyż autorzy ci nie dokonują porównania rozwiązań uzyskanych w oparciu o modele lepkoplastyczne z rozwiązaniem dla materiału niesprężystego niewrażliwego na prędkość odkształcenia.

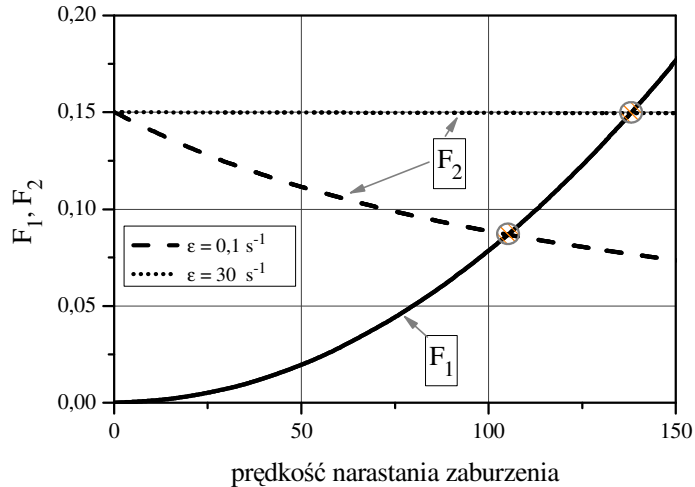


Rys. 9.27. Porównanie wyników własnych z wynikami Simitse i Songa [9.32]

Z kolei dwa artykuły Batry i Wei'a [2.10], [2.96] oraz trzeci wspólny z Yu [2.97] prezentują rozwiązania stateczności dynamicznej dla konstrukcji termolepkoplastycznych: ortotropowej płyty (2005) i izotropowej powłoki (2005 z Yu, 2006). Autorzy – jak sami piszą, stawiają hipotezę, że stan odkształconej płyty jest niestateczny, jeżeli nieskończenie małe zaburzenie nałożone dodatkowo na ten stan powoduje przyrost deformacji, których liczba półfal jest zgodna z podstawową postacią wybożenia. Wobec pominięcia odkształceń sprężystych w ich rozwiązaniu, nie jest możliwe wyznaczenie wartości liczbowej obciążenia krytycznego dla płyty. Stąd bezpośrednie porównanie z ich wynikami dynamicznego obciążenia kolumny nie jest możliwe. Niemniej jednak podjęto próbę oceny stanu kolumny z materiału ortotropowego o współczynniku ortotropii $\eta = 0,5$, o ścianach kwadratowych, przeprowadzoną według ich procedury. Dla rejestrowanych w obliczeniach z impulsem prostokątnym prędkości odkształcenia ($\dot{\epsilon} < 50$ 1/s) oraz wartości stałych (F,G,H,L,M,N) występujących w hipotezie Hilla wynika, że prędkość narastania perturbacji jest dodatnia. Według Batry i Wei'a świadczy to, że zdeformowany stan konstrukcji jest niestateczny.

Wprawdzie odniesienie do pracy Batry i Wei'a nie daje możliwości bezpośredniego porównania liczbowych wyników otrzymanych w niniejszej pracy z ich wynikami, jednakże dla zobrazowania zaproponowanej przez nich metody rozwiązania zagadnienia dla płyty ortotropowej powtórzono tę procedurę dla kolumny. Na rysunku 9.28 zamieszczono wykres, na którym graficznie przedstawiony jest wynik takiej analizy prowadzącej do oceny stanu konstrukcji kolumny. Obliczenia prędkości rozchodzenia się zaburzenia wykonano dla dwóch prędkości odkształcenia: $\dot{\epsilon} = 0,1$ oraz $\dot{\epsilon} = 30$ 1/s. F_1 oraz F_2 są pewnymi funkcjami prędkości rozchodzenia się zaburzenia, których opis analityczny został zdefiniowany w referencyjnej pracy. Kółkami zaznaczono

rozwiązania dla obydwu prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$, wynikające z przyrównania obydwu funkcji F_1 i F_2 . Stan stateczny odkształconej dynamicznie kolumny wiązałby się z ujemną wartością prędkości rozchodzenia się zaburzenia. Wobec uzyskanych w obydwu przypadkach dodatnich wartości prędkości narastania zaburzenia, stan kolumny można uznać za niestateczny.



Rys. 9.28. Wykres przebiegu funkcji F_1 i F_2 z pracy [9.2] dla dwóch prędkości odkształcenia kolumny 0,1 oraz 30 1/s

9.5. Literatura

- [9.1] Bathe K.J., Finite elements procedures, Prentice Hall Int., Inc, 1996.
- [9.2] Batra R.C., Wei Z., Dynamic buckling of a thin thermoviscoplastic tectangular plate, Thin-Walled Structures, 43, 2005, 272-290.
- [9.3] Cesim A., Onur S., Elastic-plastic stress analysis and expansion of plastic zone in clamped and simply supported aluminum metal-matrix laminated plates, Composite Structures, 49, 9-19, 2000.
- [9.4] Chaboche J.L., A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories, Int. J. of Plasticity, 24, 2008, 1642-1693.
- [9.5] Chakrabarty J., Theory of plasticity, McGraw-Hill Book Comp., 1987.
- [9.6] Cunat J.P., Stainless steel properties for automotive applications, Metal Bulletin International Automotive Materials Conference, Cologne, June, 2000.
- [9.7] Grądzki R., Analiza wpływu imperfekcji na zachowanie się i nośność cienkościennych słupów, Zeszyty Naukowe 747, PŁ, Łódź 1998.
- [9.8] Hill R., The mathematical theory of plasticity, Oxford Univ. Press, 1950.
- [9.9] Jones N., Structural impact, Cambridge University Press, 2003.
- [9.10] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K., (Ed.), Selected problems of instabilities in composite structures, A Series of Monographs, TU L, 1999.

- [9.11] Kowal-Michalska K., Nośność graniczna i stan zakrytyczny w obszarze sprężysto-plastycznym ściskanych płyt ortotropowych, Zeszyty Naukowe 721, PŁ, Łódź 1995.
- [9.12] Kowal-Michalska K. (red.), Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych, WNT, Warszawa 2007.
- [9.13] Kowal-Michalska K., Mania R., Dynamic buckling load of thin-walled columns of closed cross-section subjected to pulse loading, Proc. of SSTA 2005, AA Balkema Pub., 353-358, 2005.
- [9.14] Kowal-Michalska K., Mania R.J., Some aspects of dynamic buckling of plates under in-plane pulse loading, Mechanics Mech. Eng., vol. 12, 2, 2008, 135-146.
- [9.15] Królak M. (Ed.), Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich, PWN, Warszawa 1990.
- [9.16] Królak M. (Ed.), Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji ortotropowych o ścianach płaskich, Monografie, PŁ, Łódź 1995.
- [9.17] Li Y., Ramesh K.T., Chin E.S.C., The compressive viscoplastic response of an A359/SiCp metal-matrix composite and of the A359 aluminum alloy matrix, Int. J. of Solids and Struc., 37, 7547-7562, 2000.
- [9.18] Malinin N.N., Rżysko J., Mechanika materiałów, PWN, Warszawa 1981.
- [9.19] Mania R., Stateczność dynamiczna słupów ortotropowych pod obciążeniem impulsowym, Materiały XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane, 275-282, 2006.
- [9.20] Mania R.J., Dynamic buckling of laminated columns, stretching-flexural coupling effect, Euromech 498 Colloquium, Book of Abstracts, Warmiński J. (et al. ed.), Kazimierz D., 224-232, 2008.
- [9.21] Mania R.J., Strain-rate effect in dynamic buckling of thin-walled isotropic columns, Mechanics Mech. Eng., vol. 12, 3, 2008, 189-200.
- [9.22] Mania R.J., Dynamic buckling of orthotropic viscoplastic column, Thin-Walled Structures, (2009 przyjęty do druku).
- [9.23] Mania R., Kowal-Michalska K.: Behaviour of composite columns of closed cross-section under in-plane compressive pulse loading, Thin-Walled Structures, 45, 125-129, 2006.
- [9.24] Mania R., Kowal-Michalska K., Parametryczna analiza stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych metodą elementów skończonych, rozdz. 12 w: Analizy numeryczne wybranych zagadnień mechaniki, Niezgodą T. (ed.), Wydawnictwa WAT, 2007.
- [9.25] Ochola R.O., Marcus K, Nurick G.N., Franz T., Mechanical behaviour of glass and carbon fiber reinforced composites at varying strain rates, Composite Structures, 63, 2004, 455-467.
- [9.26] Owen D.R.J., Hinton E., Finite elements in plasticity: Theory and practice, Pineridge Press Ltd., Swansea, 1980.
- [9.27] Owen D.R.J., Figueiras J.A., Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells, Int. J. for Num. Meth. In Engng., 19, 4, 541-566, 1983.
- [9.28] Peirce, D., Shih, C.F., and Needleman, A., A tangent modulus method for rate dependent solids, Computers & Structures, 18, 1984, 975-888.
- [9.29] Perzyna P., Teoria lepkoplastyczności, PWN, Warszawa 1966.
- [9.30] Perzyna, P. Fundamental problems in viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, Academic Press, New York, 1968, 313-377.
- [9.31] Reddy J.N., An Introduction to nonlinear finite element analysis, Oxford University Press, 2004.
- [9.32] Simites G.J., Song Y., Thermo-elastoviscoplastic buckling behavior of plates, J. Appl. Mech., 61, 1994, 169-175.

- [9.33] Stegliński Ł., Dynamic buckling analysis of thin plates and thin-walled girders/columns subjected to in-plane pulse loading, Master thesis, supervisor: MANIA R., Technical University of Lodz, IFE, 2005.
- [9.34] Tabiei A., Yi W., Goldberg R., Non-linear strain rate dependent micro-mechanical composite material model for finite element impact and crashworthiness simulation, *Int. J. of Non-linear Mechanics*, 40, 2005, 957-970.
- [9.35] Thiruppukuzhi S.V., Sun C.T., Testing and modeling high strain rate behavior of polymeric composites, *Composites Part B*, 29B, 1998, 535-546.
- [9.36] Tsai J., Sun C.T., Constitutive model for high strain rate response of polymeric composites, *Composites Science and Technology*, 62, 2002, 1289-1297.
- [9.37] Tvergaard V., Needleman A., Buckling of eccentrically stiffened elastic-plastic panels on two simple supports or multiply supports, TUD, DACMM, Report no 71, 1974.
- [9.38] Weeks C.A., Sun C.T., Modeling non-linear rate-dependent behavior in fiber-reinforced composites, *Composites Science and Technology*, 58, 1998, 603-611.
- [9.39] Zairi F., Nait-Abdelaziz M., Woznica K., Gloaguen J-M., Elasto-viscoplastic constitutive equations for the description of glassy polymers behavior at constant strain rate, *J. of Eng. Materials and Technology*, 129, 2007, 29-35.
- [9.40] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite element method for solid and structural mechanics*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [9.41] ANSYS 11.0, HTML online documentation, SAS IP, Inc., 2007.
- [9.42] LS-DYNA User's manual, Livermore Software Technology Corp., 2006.

10. WNIOSKI KOŃCOWE

W rozdziale 3 zdefiniowano cel pracy – zbadanie czy i na ile uwzględnienie dynamicznych własności materiału, tj. zastosowanie w opisie materiału modelu lepkoplastycznego, wpływa na wartość dynamicznego obciążenia krytycznego konstrukcji płytowych obciążanych impulsem ściskającym o skończonym czasie trwania. Przedstawione w pracy wyniki obliczeń numerycznych potwierdzają, że związek pomiędzy przyjętym w opisie materiału równaniem konstytutywnym a uzyskaną wartością dynamicznego obciążenia krytycznego jest wyraźnie widoczny.

Na podstawie zdobytych doświadczeń w analizie stateczności dynamicznej cienkościennych konstrukcji płytowych z materiałów, dla których pomija się wrażliwość na prędkość odkształcenia, na wstępie rozdziału 9, przyjęto do rozważań trzy warianty relacji pomiędzy statycznymi naprężeniami krytycznymi i statyczną granicą plastyczności materiału. Dla dwóch pierwszych scenariuszy obliczeń, kiedy statyczne naprężenia krytyczne są dużo niższe od granicy plastyczności materiału, efekt prędkości odkształcenia nie wpływa na dynamiczne obciążenie krytyczne cienkościennej kolumny. Przeprowadzone obliczenia potwierdziły założenie, że efekt prędkości odkształcenia będzie widoczny dla konstrukcji, której statyczne naprężenia krytyczne są niższe, ale bliskie granicy plastyczności. Wprawdzie wyniki te są w zgodzie z prezentowanymi w literaturze wynikami doświadczeń nad dynamicznym zachowaniem materiałów, ale dotychczas jedynie w kilku nielicznych publikacjach potwierdzono słuszność tezy przyjętej w niniejszej pracy. Jak wynika z przeglądu literatury (rozdział 2), miało to miejsce w odniesieniu do dynamicznej stateczności płyt prostokątnych i powłoki walcowej. W zaprezentowanej pracy słuszność tezy o związku własności dynamicznych materiału i stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennej wykazano w odniesieniu do konstrukcji złożonych – cienkościennego słupa o ścianach płaskich. Pozwoliło to dodatkowo uwzględnić efekt współpracy ścian sąsiadujących oraz wpływ odkształcalności naroży (wzdłużnych krawędzi).

Oczywiście różnice pomiędzy materiałem niewrażliwym na efekt prędkości odkształcenia i materiałem, dla którego efekt ten jest obecny, z uwagi na złożoność zagadnienia wymagają szeregu dalszych badań. Dotyczy to zwłaszcza konstrukcji z materiałów kompozytowych, gdzie różnorodność konstrukcji i materiałów nie pozwala na szersze uogólnienia uzyskiwanych wyników, odnosząc wnioskowanie do jednej grupy, czy też typu materiałów. Dodatkowo na przeszkodzie stoi dostępność danych koniecznych do prawidłowego formułowania

równań konstytutywnych. Było to bezpośrednim powodem, dla którego rozważania nad statecznością dynamiczną konstrukcji kompozytowych w niniejszej pracy można uznać jedynie za rozpoczęte.

Uzyskane wyniki potwierdzają istotność efektów reologicznych w dynamicznym zachowaniu słupów z materiałów kompozytowych i będą podstawą do dalszych prac autora nad tą problematyką. Wynika to z rosnącego zastosowania wielowarstwowych konstrukcji cienkościennych i kompozytowych, co wobec mnogości parametrów wchodzących w interakcję w procesach wybożenia dynamicznego rokuje możliwość sformułowania interesujących praktycznie wniosków. Tym bardziej, że zastosowana w pracy teoria ścinania pierwszego rzędu, uznawana przez wielu autorów za bardziej ogólną od teorii cienkich płyt, czy też klasycznej teorii płyt warstwowych, służyła między innymi stworzeniu platformy wyjściowej dla kontynuacji badań w tym zakresie tematycznym, dając możliwość prowadzenia porównań. Uzyskane wyniki sugerują, że w przypadku materiałów kompozytowych w opisie numerycznym należałoby wprowadzać modele opisujące także procesy zniszczenia materiału (modele w skali mikro, jak np. w pracach Goldberga i współautorów [2.20], [2.82]), szczególnie w przypadku wysokich amplitud impulsu dynamicznego. Opis lepkoplastyczny w oparciu o model Perzyny do analizy dynamicznej stateczności konstrukcji cienkościennych jest dostateczny dla „klasycznych” materiałów konstrukcyjnych typu metale bądź wielowarstwowe struktury kompozytowe tworzone na bazie materiałów o zbliżonych do metali stałych materiałowych – dotyczy to wzajemnej proporcji modułów sprężystości.

Wydaje się, że dalsze badania nad statecznością dynamiczną cienkościennych konstrukcji o ścianach płaskich mogłyby być prowadzone także z zastosowaniem innych modeli lepkoplastycznych. Jak wiadomo, są one zazwyczaj opracowane dla określonych materiałów oraz prędkości odkształcenia, często niższych aniżeli prędkości dopuszczane przez model Perzyny (model Perzyny do 10^5 1/s). Dla porównania, w przeprowadzonych w niniejszej pracy obliczeniach praktycznie odnotowane prędkości odkształcenia były niższe lub często dużo niższe od 10^3 1/s. Zatem analiza porównawcza wpływu przyjętego prawa konstytutywnego/ modelu lepkoplastycznego na wartość dynamicznego obciążenia krytycznego wydaje się ciekawym celem.

W zaprezentowanych wynikach zastosowano jednorodny charakter wykresów i tablic, aby stworzyć jednorodną platformę graficzną ułatwiającą ich porównywanie. Uzyskane w niniejszej pracy wyniki obliczeń krytycznego obciążenia dynamicznego pokazują nawet kilkudziesięcioprocentowy wzrost wartości obciążenia krytycznego konstrukcji, której własności materiału uwzględniają jego wrażliwość na efekt prędkości odkształcenia w porównaniu z wartością tego obciążenia wyznaczonego z opisem jedynie sprężysto-plastycznym. Relacja obciążeń krytycznych konstrukcji malała wraz ze wzrostem amplitudy imperfekcji wstępnych ścian słupa. Można to wiązać z większym wpływem zginania ścian składowych na deformacje

konstrukcji, choć – co ciekawe, badania nad dynamicznymi własnościami materiału prowadzone dla ściskania i rozciągania nie wykazują istotnych różnic w opisie lepkoplastycznym związanym z kierunkiem obciążenia. Także stopień ortotropii materiału miał wpływ na proporcję pomiędzy obciążeniem krytycznym dla badanych modeli materiału. Rozpatrywano wprowadzanie materiały, dla których współczynnik η ortotropii miał stosunkowo niewielką wartość wobec relacji, jaka ma miejsce w kompozytach wzmacnianych włóknami, gdzie iloraz modułów dochodzi do kilkunastu. Wpływ ortotropii w rozpatrywanych przypadkach wiązał się dodatkowo z charakterem (kształtem) impulsu. Materiały lepkoplastyczne relatywnie wcześniej – niż sprężysto-plastyczne, reagowały na krótkie (trwające przez czas krótszy od podstawowego okresu drgań własnych) impulsy dynamiczne. Obciążenia krytyczne dla tych impulsów lokowały się w podobnym przedziale wartości jak dla impulsów trwających przez czas równy okresowi drgań własnych, choć przy niższych wartościach ugięć.

W przeważającej liczbie rozważanych przypadków, głównie dla materiału niewrażliwego na *Efekt Prędkości Odkształcenia*, miała miejsce dość istotna redukcja dynamicznego obciążenia krytycznego w stosunku do tego obciążenia uzyskanego w analizie statycznej (*eigen-buckling*). Wartości $DLF_{kr} > 1$ dotyczą wyników dla materiału wrażliwego na EPO, modelowanego prawem konstytutywnym Perzyny. Dla materiałów liniowo-sprężystych fakt ten dotyczył prawie wszystkich opisywanych w literaturze (również w pracach własnych) przypadków wyboczenia dynamicznego. Jedynie w pracy [2.97] dotyczącej płyty kompozytowej oraz [2.34] dla krótkiej kolumny ortotropowej jest mowa o przypadku, w którym dynamiczne obciążenie krytyczne jest nieco mniejsze od statycznego. W przypadku kompozytów można powtórzyć za S.W. Tsai, że swego rodzaju intuicja nabyta przy analizie tradycyjnych materiałów konstrukcyjnych zawodzi w analizie kompozytów, co skłania do ostrożniejszego wnioskowania.

W przedstawionej pracy, w przeważającej liczbie przypadków, do określenia warunków krytycznych w odpowiedzi konstrukcji na dynamiczny impuls obciążenia stosowano kryterium Budianskiego-Hutchinsona. Uzyskane tą drogą wartości obciążeń porównywano z wynikami, do których prowadzi zastosowanie innych znanych kryteriów stateczności dynamicznej – w tym kryterium Petry-Fahlbusha czy kryterium Ari-Gura i Simonety. Wybór ten rodził swego rodzaju problem co do „prawidłowości” przyjętego kryterium stateczności dynamicznej. Jednakże wobec postawionego celu pracy, którym było wykazanie słuszności stosowania dla konstrukcji obciążanych dynamicznie w opisie materiału równań lepkoplastyczności, wobec omówienia kryteriów podanego w rozdziale 6, wykorzystywano w głównej mierze kryterium Budiansky’ego-Hutchinsona. Nie ograniczyło to jednakże aplikacji pozostałych wymienionych wyżej kryteriów i porównywania wyników uzyskanych przy ich zastosowaniu. Podejście takie pozwoliło na wykazanie różnic w obciążeniu krytycznym istniejących pomiędzy

obliczeniami prowadzonymi dla różnych modeli konstytutywnych materiału. Różnice pomiędzy obciążeniami istniały zarówno przy zastosowaniu kryterium deformacyjnego Budianskiego-Hutchinsona, jak i zniszczeniowego Petry-Fahlbusha, czy też jednego z kryteriów Ari-Gura i Simonetty. Pozostaje jednak otwartym pytanie: na ile konstruktor konstrukcji cienkościennych jest w stanie zaakceptować trwałe deformacje w konstrukcji. Stąd przydatność kryteriów odnoszących się do deformacji z pominięciem stanu naprężenia w analizie prowadzonej w obszarze sprężysto-plastycznym czy lepkoplastycznym materiału może być uznana za ograniczoną.

Wydaje się, że kryterium Hilla pomyślane do opisu ortotropii obrabianych plastycznie (np. walcowanych) materiałów metalowych, dla których stopień ortotropii jest stosunkowo niewielki, stwarza pewne problemy numeryczne w zastosowaniu do materiałów kompozytowych wzmacnianych włóknami, dla których stopień ototropii jest względnie wysoki (w pracy zdefiniowano współczynnik ortotropii η). Różnice modułów Younga w kierunkach głównych dla stali po obróbce plastycznej sięgają kilku procent, a granic plastyczności dochodzą do kilkunastu procent. Dla kompozytów moduł Younga w kierunku włókien może być kilkanaście razy większy od modułu Younga w kierunku poprzecznym. Wiąże się z tym różna prędkość rozchodzenia się deformacji w ośrodku, proporcjonalna do modułu sprężystości i gęstości materiału ($\approx \sqrt{E/\rho}$). Dodatkowo podstawowe kryterium Hilla nie uwzględnia kierunkowości własności wytrzymałościowych materiału, a taki opis anizotropii był jedynie możliwy w przypadku przyjętego w modelu MES elementu powłokowego. Stąd wynika wyżej sformułowany wniosek o potrzebie nieco innego kierunku oceny stanu wyciężenia w kompozycie wywołanego impulsem dynamicznym (delaminacja, formy zniszczenia) lub implementacja własnego elementu skończonego pozwalającego na zastosowanie uogólnionego kryterium Hilla łącznie z modelem lepkoplastycznym.

Po raz kolejny odnosząc się do celu pracy, czyli sprawdzenia skutku opisu wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia, przyjętą w rozważaniach geometrię słupa ograniczono do kształtu sześciianu, eliminując wpływ samej geometrii (kształtu ścian, ich grubości) na oceniane zjawisko wyboczenia dynamicznego. Wobec przyjętej geometrii kolumny analizowano wyboczenie lokalne. Wyniki dotychczasowych prac nad statecznością dynamiczną słupów cienkościennych prowadzone przez autora dla materiałów bez efektu prędkości odkształcenia pokazują, że geometria słupa o przekroju zamkniętym – inna od przyjętej w tej pracy, nie prowadzi do nowych jakościowo zjawisk.

Jak wskazano w przeglądzie literatury, autorowi udało się znaleźć i dotrzeć zaledwie do kilku prac dotyczących stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych z materiałów lepkoplastycznych. Oczywiście opis lepkoplastyczny w oparciu o różne modele konstytutywne jest obecny w literaturze, ale dotyczy to

głównie modelowania zjawisk technologicznych, zniszczenia, obciążeń wybuchem. Stąd dokonano bezpośrednich porównań otrzymanych rezultatów z wynikami jedynie dwóch prac spośród pięciu cytowanych w przeglądzie literatury. Porównanie to należy uznać za zadowalające i potwierdzające przyjętą w niniejszej pracy metodę analizy i obliczeń. Dodatkowo uległy potwierdzeniu pewne własności cienkościennych konstrukcji płytowych występujące w procesach wyboczenia dynamicznego. Można do nich zaliczyć czułość na imperfekcje wstępne, kształt impulsu i czas impulsu oraz znaczenie doboru stałych w równaniach konstytutywnych.

Zastosowana w rozwiązaniu metoda elementów skończonych jest metodą stosunkowo elastyczną, a aplikacja procedur materiałowych pozwala w opisie charakterystyki materiału na uzyskanie krzywej odkształcenie-napężenie dość dokładnie oddającej własności materiału konstrukcji rzeczywistej. Narzędzia numeryczne dostępne w MES pozwalają na modelowanie zjawisk występujących w naturalnych warunków lub zjawisk generowanych w warunkach laboratoryjnych. Dostępność metody elementów skończonych wpłynęła istotnie na poszerzenie zakresu zagadnień, które można analizować w projektowaniu konstrukcji inżynierskich.

Konkludując, należy podkreślić, iż w obliczeniach stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych należy uwzględnić wrażliwość materiału na prędkość odkształcenia. Obliczenia stateczności dynamicznej winny iść w parze z identyfikacją spodziewanych lub rzeczywistych prędkości odkształcenia, co pozwoli na przyjęcie wyższych od statycznych wartości naprężeń dopuszczalnych w konstrukcji obciążanej dynamicznie.

SUMMARY

This work deals with dynamic buckling or as it is often called in literature: the dynamic instability or dynamic response of thin-walled plate structures under the pulse loading of finite duration. The short columns with closed rectangular cross section are analyzed. These columns are subjected to dynamic compressive pulse in the plane of component walls. This pulse can be of different shape in time. The isotropic or orthotropic materials are discussed, being described by rate-dependent constitutive equations (in Polish, the strain rate effect is described with shortcut EPO). These type of materials are known as viscoplastic. Review of literature shows only few papers considering dynamic buckling of plates and cylindrical shells. There exists no analysis of combined structures – as the column of plate walls is. Until now there was no comparison of solutions obtained for different material models – between elastic-plastic and viscoplastic ones.

The applied model of column walls as thin plates considers the shear influence onto deformations according to *First Shear Deformation Theory*. The viscoplastic material behavior with Perzyna model is described. The numerical calculations were performed by the finite element method with the application of ANSYS package software. The dynamic buckling load was established with application of dynamic buckling criteria discussed in this work (most often with Budiansky-Hutchinson criteria application). The close relationship between critical buckling load and the consideration of strain rate sensitive material behavior was found, it means with the viscoplastic material model application.

After the introduction and the review of literature on the dynamic buckling of plate structures, the thesis of the work is formulated. In chapter four a variety of dynamic pulses present in nature and commonly used to describe the dynamic loading in analytical solutions are discussed. The basic set of governing equations applied in the dynamic buckling analysis of rectangular orthotropic plate structures are presented in chapter five. This chapter also contains derivation of equations of motion of the first-order shear deformation laminated plate theory with all inertia terms present. In chapter six the criteria usually applied for dynamic critical load determination are discussed. Chapter seven includes the fundamental equations of the associated plastic flow theory and viscoplastic formulation in the framework used in this work. Chapter eight contains the discussion of applied method of solution and problems connected with its completion. Chapter nine presents the summary of both analytical and numerical results. The final remarks close the work.

CHARAKTERYSTYKA ZAWODOWA AUTORA

Autor ukończył studia w 1978 roku na Wydziale Mechanicznym Politechniki, uzyskując dyplom magistra inżyniera „w zakresie podstawowych problemów techniki – mechanika stosowana”. W tym samym roku podjął pracę na stanowisku asystenta stażysty w Ośrodku Aparatury Naukowej Politechniki Łódzkiej, przechodząc następnie na stanowiska asystenta naukowo-badawczego i starszego asystenta naukowo-badawczego. W latach 1991-2001 Radosław Mania pracował poza Politechniką Łódzką. Ponownie podjął pracę w Politechnice Łódzkiej w 2001 roku w Katedrze Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji. W 2002 roku autor obronił z wyróżnieniem pracę doktorską zatytułowaną „Analiza wpływu własności materiałowych rdzenia na stateczność trapezowej płyty trójwarstwowej”. W lipcu 2002 r. dr inż. Radosław Mania został zatrudniony na stanowisko adiunkta w Katedrze Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji PŁ, na którym to stanowisku pracuje do dziś.

W latach 1978-1990 Radosław Mania prowadził prace naukowo-badawcze dotyczące zagadnień stateczności cienkościennych konstrukcji warstwowych typu sandwich, aplikacji metod numerycznych do uzyskiwania rozwiązań tych zagadnień, wprowadzana i wykorzystania – tak nazywanej wtedy, techniki mikrokomputerowej w pracach badawczych i pomiarach przemysłowych, zastosowania metod tensometrycznych w pomiarach wielkości mechanicznych, w tym opracowania i konstrukcji urządzeń pomiarowych na bazie tensometrów elektrooporowych. Wiązało się to zwłaszcza ze współpracą z zakładami oponiarskimi z grupy Stomil oraz zakładami tworzyw sztucznych z grupy ERG.

W ostatnim okresie pracy w Politechnice Łódzkiej współpraca z przemysłem koncentruje się na analizie statycznej i dynamicznej (obciążenia sejsmiczne i transportowe) wielkogabarytowych konstrukcji cienkościennych, prowadzonej przy zastosowaniu metody elementów skończonych oraz metod analityczno-numerycznych. W obszarze naukowym autor kontynuuje prace nad statecznością konstrukcji cienkościennych, rozszerzając je o obciążenia dynamiczne impulsowe, czyli zagadnienia wyboczenia dynamicznego. Efektem tych prac poświęconych wyboczeniu dynamicznemu jest niniejsza publikacja.

Rezultatem dotychczasowej pracy naukowej jest autorstwo lub współautorstwo w czterech rozdziałach w monografiach, w kilkunastu artykułach, w tym w czasopismach z tzw. listy filadelfijskiej oraz w ponad 30 referatach wygłoszonych

na konferencjach krajowych i zagranicznych. Radosław Mania był także współwykonawcą kilku projektów badawczych finansowanych przez KBN i MNSzW. Za osiągnięcia w pracy naukowej i badawczej autor otrzymał kilka nagród Rektora Politechniki Łódzkiej, ostatnią w 2009 roku.

W ramach działalności dydaktycznej Radosław Mania prowadzi wykłady i ćwiczenia w języku polskim i angielskim z wytrzymałości materiałów, mechaniki technicznej, numerycznych metod mechaniki oraz metody elementów skończonych na Wydziale Mechanicznym i Centrum Kształcenia Międzynarodowego PŁ. Jest promotorem ośmiu prac magisterskich, w tym siedmiu absolwentów Centrum Kształcenia Międzynarodowego, wśród których czterech było studentami uczelni zagranicznych. Był opiekunem grupy studenckiej.

Radosław Mania był także współredaktorem materiałów konferencyjnych dwóch Sympozjów Stateczności Konstrukcji organizowanych przez Katedrę Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji, a od 2008 z ramienia Dziekana Wydziału Mechanicznego PŁ jest wydziałowym koordynatorem Programu LLP Erasmus.

