

Dr inż. Andrzej Polka  
Katedra Dynamiki Maszyn Politechniki Łódzkiej

## MOMENTY BEZWŁADNOŚCI, RÓWNANIE KRĘTU I ENERGIA KINETYCZNA CIAŁA SZTYWNEGO W UKŁADZIE PARASOLA

*Praca wprowadza momenty bezwładności ciała sztywnego dla układu parasola związanego z dowolną osią oraz z osią chwilowego obrotu ciała w ruchu kulistym. Dla układu parasola związanego z chwilową osią obrotu wyznaczono równanie krętu oraz wartość energii kinetycznej ciała. Wykorzystano zapis w postaci multiiloczynów wektorów oraz macierzowy, z użyciem diad iloczynów skalarnych i wektorowych.*

*Słowa kluczowe: ruch kulisty, moment bezwładności, równanie krętu, diada*

## MASS MOMENTS OF INERTIA, EQUATION OF ANGULAR MOMENTUM AND KINETIC ENERGY OF A RIGID BODY IN AN UMBRELLA SYSTEM

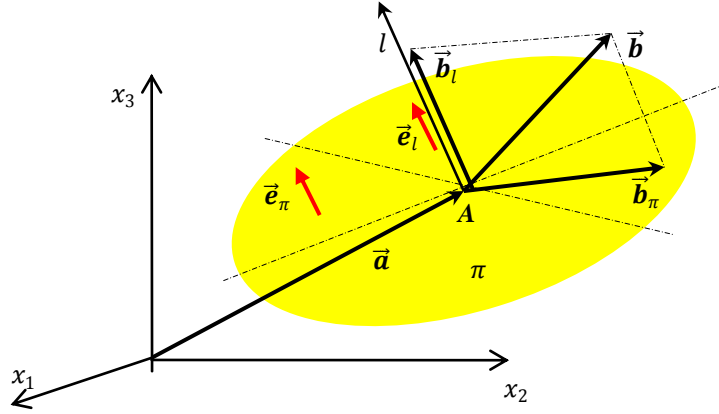
*This paper introduces mass moments of inertia of a rigid body for an umbrella system bound to any axis and subsequently for an umbrella system bound to the axis of momentary rotation of a body in spherical motion. For an umbrella system bound to the axis of momentary rotation an equation of angular momentum and a formula for the kinetic energy of the body are derived. Two notations are used: multiproducts of vectors and matrices (using dyads of scalar and vector products).*

*Keywords: spherical motion, mass moment of inertia, equation of angular momentum, dyad*

### 1. UKŁAD PARASOLA

Przyjęto w pracy istnienie trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej  $\mathbf{R}^3$ , która opisana jest bazą ortonormalną  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Układ trzech elementów: dowolny punkt  $A$  w przestrzeni  $\mathbf{R}^3$ , dowolna prosta  $l$  przechodząca przez ten punkt oraz płaszczyzna  $\pi$ , prostopadła do prostej  $l$  w tym punkcie, nazwano w pracy „parasolem”. Nazwę tę tłumaczy kształt układu w przestrzeni trójwymiarowej (rys. 1). Położenia parasola w przestrzeni określają współrzędne punktu  $A$  (współrzędne wektora  $\vec{a}$ ;  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ ) oraz współrzędne wersora prostej  $l$  parasola i zarazem wersora płaszczyzny parasola  $\pi$ , ( $\vec{e}_l = \vec{e}_\pi$ ;  $\mathbf{e}_l = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]^T$ ).



Rys. 1 Układ parasola

Parasol tworzy w przestrzeni  $\mathbf{R}^3$  swoisty układ odniesienia, w którym można - w stosunkowo prosty sposób - opisać dowolny wektor  $\vec{b}$  oraz iloczyn wektorowy dwóch wektorów  $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$ . Rzuty wektora  $\vec{b}$  na elementy parasola w pokazano na rysunku 1. Jeżeli wektor  $\vec{b}$  jest opisany macierzą współrzędnych  $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ , to jego rzuty  $\vec{b}_l$  i  $\vec{b}_\pi$ , w zapisie wektorowym i macierzowym mają postać

$$\vec{b}_l = (\vec{b}\vec{e}_l)\vec{e}_l \quad ; \quad \mathbf{b}_l = \mathbf{P}_{e_l e_l} \mathbf{b}, \quad (1)$$

$$\vec{b}_\pi = \vec{b} - \vec{b}_l \quad ; \quad \mathbf{b}_\pi = \mathbf{b} - \mathbf{b}_l = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_{e_l e_l}) \mathbf{b}, \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{I}_3$  jest macierzą jednostkową trzeciego stopnia, natomiast macierz  $\mathbf{P}_{e_l e_l}$  jest diadą, macierzą iloczynu zewnętrznego dwóch wektorów, której postać, własności i funkcje spełniane w zapisie multiiloczynów opisano w pracach [3,4].

Wektor iloczynu wektorowego  $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$  (gdy  $\vec{a}$ ;  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ ) może być w przestrzeni  $\mathbf{R}^3$  zapisany w jednej z dwóch postaci macierzy, macierzy kolumnowej  $\mathbf{w}$  lub wierszowej  $\mathbf{w}^T$

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} \quad \text{lub} \quad \mathbf{w}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^*, \quad (3)$$

gdzie wyrazy obu diad iloczynu wektorowego - macierzy  $\mathbf{P}_{ae}^*$  oraz  $\mathbf{P}_{eb}^*$  - równe są odpowiednio

$$\mathbf{P}_{ae}^* = [p_{ij}] = [\sum_{k=1}^3 \{sgn(i-j)(k-i)(k-j)\} a_k], \quad (i,j=1,2,3), \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_{eb}^* = [p_{ij}] = [\sum_{k=1}^3 \{sgn(i-j)(k-i)(k-j)\} b_k], \quad (i,j=1,2,3). \quad (5)$$

Rzut wektora  $\vec{w}$  na oś  $l$  parasola,  $\vec{w}_l = (\vec{w}\vec{e}_l)\vec{e}_l$ , ma postać jednej z macierzy

$$\mathbf{w}_l = \mathbf{P}_{e_l e_l} \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} \quad \text{lub} \quad \mathbf{w}_l^T = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^* \mathbf{P}_{e_l e_l}. \quad (6)$$

Rzut wektora  $\vec{w}$  na płaszczyznę  $\pi$  parasola,  $\vec{w}_\pi = \vec{w} - \vec{w}_l = \vec{w} - (\vec{w}\vec{e}_l)\vec{e}_l$ , ma współrzędne w postaci macierzy kolumnowej  $\mathbf{w}_\pi$  lub wierszowej  $\mathbf{w}_\pi^T$

$$\mathbf{w}_\pi = \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} - \mathbf{P}_{e_l e_l} \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} = \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_{e_l e_l}), \quad (7)$$

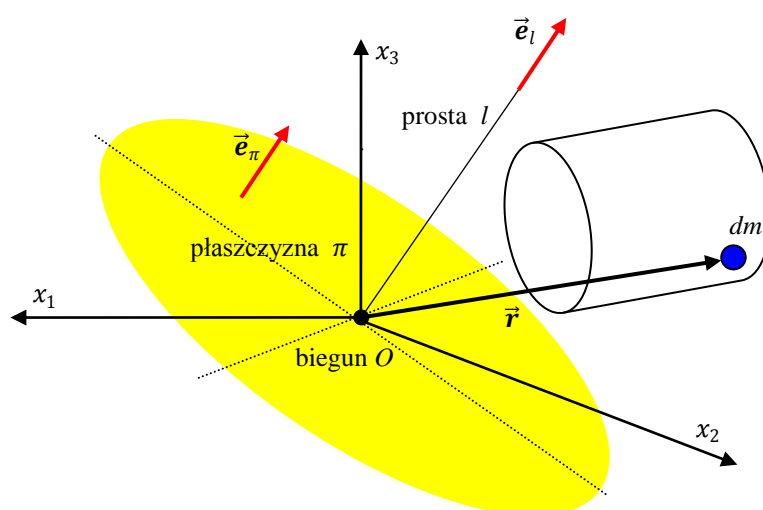
$$\mathbf{w}_\pi^T = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^* - \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^* \mathbf{P}_{e_l e_l} = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^* (\mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_{e_l e_l}). \quad (8)$$

Pokazany tu układ parasola jest szczególnie przydatny przy opisie ruchu kulistego ciała sztywnego, zarówno dla analizy momentów bezwładności ciała, jak i wyrażenia parametrów kinematycznych lub opisu dynamiki ruchu.

Dla takiego opisu przyjęto układ parasola zawieszony w nieruchomym początku układu współrzędnych, który jest zarazem środkiem ruchu kulistego.

## 2. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI CIAŁA SZTYWNEGO

Dowolny punktu ciała sztywnego jest punktem, którego położenie w układzie parasola określone jest wychodzącym z bieguna  $O$  promieniem-wektorem  $\vec{r}$ . Momenty bezwładności dowolnego, jednorodnego ciała sztywnego, obliczone względem elementów parasola, są sumami (całkami) iloczynów stopnia drugiego promienia-wektora  $\vec{r}$ , określającego położenie masy elementarnej  $dm$  oraz wersorów  $\vec{e}_l = \vec{e}_\pi$ , określających położenie parasola w przestrzeni  $\mathbf{R}^3$ , jak to pokazano na rys. 2.



Rys. 2 Ciało sztywne w układzie parasola

Momenty bezwładności ciała sztywnego względem elementów parasola: względem bieguna  $O$  -  $J_0$  ; prostej  $l$  -  $J_l$  oraz płaszczyzny  $\pi$  -  $J_\pi$  , wprowadzono w postaci całek z następujących kwadratów iloczynów skalarnych i iloczynów wektorowych [2,5]

$$J_0 = \iiint_m \vec{r}^2 dm ; J_l = \iiint_m (\vec{e}_l \times \vec{r})^2 dm ; J_\pi = \iiint_m (\vec{e}_\pi \vec{r})^2 dm \quad (9)$$

Wyrażenia podcałkowe równań (9) spełniają tożsamość Lagrange'a

$$(\vec{e}_l \times \vec{r})^2 = \vec{r}^2 - (\vec{e}_\pi \vec{r})^2,$$

z czego wynika, że

$$J_0 = J_l + J_\pi . \quad (10)$$

*Dla dowolnego bieguna moment bezwładności ciała sztywnego względem tego bieguna jest sumą momentów bezwładności tego ciała względem każdej prostej poprowadzonej przez biegun i płaszczyzny prostopadłej do tej prostej również przechodzącej przez ten biegun.*

Dla wektora  $\vec{r}$ , którego współrzędne tworzą macierz  $\mathbf{r} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  zdefiniowano diadę  $\mathbf{P}_{rr}$  [3,4], czyli macierz postaci (11) oraz jej sumę (całkę) po całej masie  $m$  ciała,

stanowiącą *macierz płaszczyznowych momentów bezwładności ciała sztywnego*  $\mathbf{I}_{rr}$  (12), zawierającą na głównej przekątnej momenty bezwładności względem ortogonalnych płaszczyzn układu współrzędnych ( $J_{ii} = \iiint_m x_i^2 dm$ ;  $i = 1,2,3$ ), natomiast poza główną przekątą - odśrodkowe momenty bezwładności względem płaszczyzn układu współrzędnych ( $J_{ij} = \iiint_m x_i x_j dm$ ). Macierz (12) jest całką z macierzy (11) w tym znaczeniu, że kolejne wyrazy macierzy (12) są całkami z odpowiednich wyrazów macierzy (11), co można zapisać w formie  $\mathbf{I}_{rr} = \iiint_m \mathbf{P}_{rr} dm$ . Wówczas

$$\mathbf{P}_{rr} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{I}_{rr} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (11)(12)$$

Macierz płaszczyznowych momentów bezwładności ciała sztywnego  $\mathbf{I}_{rr}$  jest dopełnieniem macierzy (tensora) momentów bezwładności ciała sztywnego  $\mathbf{I}$  do macierzy diagonalnej  $\mathbf{I}_0$  momentu bezwładności względem bieguna, której wyrazami jest stała wartość  $J_0$  (9) momentu bezwładności ciała względem bieguna  $O$ . Jeśli bowiem

$$\mathbf{I}_0 = J_0 \mathbf{I}_3 \quad (13)$$

gdzie  $\mathbf{I}_3$  jest macierzą jednostkową trzeciego rzędu, a kolejne momenty bezwładności  $J_i$  ciała względem osi układu współrzędnych oraz tensor momentów bezwładności ciała sztywnego  $\mathbf{I}$  mają odpowiednio postacie

$$J_i = \iiint_m (r^2 - x_i^2) dm, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_3 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

to oczywista jest tożsamość

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I} + \mathbf{I}_{rr}. \quad (15)$$

*Suma dwóch macierzy momentów bezwładności ciała sztywnego: tensora momentów bezwładności  $\mathbf{I}$  oraz macierzy płaszczyznowych momentów bezwładności  $\mathbf{I}_{rr}$  równa jest diagonalnej macierzy  $\mathbf{I}_0 = J_0 \mathbf{I}_3$  biegunowego momentu bezwładności względem bieguna  $O$ , środka układu współrzędnych.*

Moment bezwładności  $J_l$  ciała względem prostej  $l$  (9) parasola jest iloczynem tensora momentów bezwładności ciała stałego  $\mathbf{I}$  oraz macierzy współrzędnych wersora prostej  $\mathbf{e}_l = [c_{l1} \ c_{l2} \ c_{l3}]^T$ , liczbą zapisaną w postaci

$$J_l = \iiint_m (\vec{\mathbf{e}}_l \times \vec{\mathbf{r}})^2 dm = \mathbf{e}_l^T \mathbf{I} \mathbf{e}_l. \quad (16)$$

Moment bezwładności ciała  $J_\pi$  względem płaszczyzny  $\pi$  (9) parasola można, po tożsamościowym przekształceniu i skorzystaniu z własności (11) i (12), wyrazić jako iloczyn macierzy płaszczyznowych momentów bezwładności ciała  $\mathbf{I}_{rr}$  i macierzy współrzędnych wersora prostej  $\mathbf{e}_l = [c_{l1} \ c_{l2} \ c_{l3}]^T$

$$J_\pi = \iiint_m (\vec{\mathbf{e}}_\pi \vec{\mathbf{r}})^2 dm = \iiint_m (\vec{\mathbf{e}}_\pi \vec{\mathbf{r}}) (\vec{\mathbf{r}} \vec{\mathbf{e}}_\pi) dm = \mathbf{e}_l^T (\iiint_m \mathbf{P}_{rr} dm) \mathbf{e}_l, \quad (17)$$

$$J_\pi = \mathbf{e}_l^T \mathbf{I}_{rr} \mathbf{e}_l.$$

Z własności (15) wynikają następujące wnioski:

- ponieważ moment bezwładności  $J_O$  ciała względem bieguna  $O$  ma dla ciała sztywnego wartość stałą, jego pochodna względem dowolnej zmiennej równa jest zero. Wynika z tego, że suma pochodnych odpowiednich wyrazów macierzy momentów bezwładności i macierzy płaszczyznowych momentów bezwładności względem dowolnej zmiennej  $\tau$  jest „grą o sumie zero”,

$$\frac{dI}{d\tau} + \frac{dI_{rr}}{d\tau} = 0 . \quad (18)$$

- macierzową tożsamość (15) można pomnożyć lewo- i prawostronnie razy macierz  $e_l$  współrzędnych wersora dowolnej prostej  $l$

$$e_l^T J_O I_3 e_l = e_l^T I e_l + e_l^T I_{rr} e_l$$

i, po wykorzystaniu (16) oraz (17), otrzymuje się tożsamość

$$J_O = J_l + J_\pi . \quad (19)$$

*Moment bezwładności ciała sztywnego względem bieguna  $O$ , środka ortogonalnego układu współrzędnych, jest sumą momentów bezwładności tego ciała względem dwóch wzajemnie prostopadłych elementów, prostej  $l$  i płaszczyzny  $\pi$ , poprowadzonych przez ten biegun i tworzących układ parasola.*

- macierzową tożsamość (15) można pomnożyć stronami prawostronnie razy macierz współrzędnych  $\omega$  wektora prędkości kątowej ruchu kulistego  $\vec{\omega}$ , ( $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ ) wybierając tym samym jako oś parasola kierunek wektora  $\vec{\omega}$ , a więc oś chwilowego obrotu ciała. Otrzymuje się wówczas - po uwzględnieniu (13) - macierzowe równanie krętu ruchu kulistego postaci

$$I_O \omega = I \omega + I_{rr} \omega . \quad (20)$$

- macierzową tożsamość (15) można pomnożyć stronami prawostronnie razy macierz  $\epsilon$  współrzędnych wektora przyspieszenia kątowego ruchu kulistego  $\vec{\epsilon}$  ( $\epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]^T$ ) i otrzymuje się wówczas – po uwzględnieniu (13) - macierzowe równanie dynamiczne ruchu kulistego postaci

$$I_O \epsilon = I \epsilon + I_{rr} \epsilon . \quad (21)$$

Równanie to wyprowadzone zostało w oddzielnej pracy, w postaci wektorowej i macierzowej.

### 3. ENERGIA I KRĘT CIAŁA SZTYWNEGO W RUCHU KULISTYM

Wyprowadzone wyżej zależności pozwalają na określenie energii kinetycznej oraz równania krętu ciała sztywnego w ruchu kulistym z wykorzystaniem układu parasola jako układu odniesienia.

Przyjęto, że ciało sztywne, zamocowane obrotowo w biegunie  $O$ , porusza się ruchem kulistym wokół chwilowej osi obrotu, której położenie w  $\mathbf{R}^3$  określa wersor tej osi  $\vec{e}_\omega$  o macierzy współrzędnych  $e_\omega = [c_{\omega 1} \ c_{\omega 2} \ c_{\omega 3}]^T$ , z prędkością kątową  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega$  ( $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ ), której wektor leży na osi obrotu. Z środkiem ruchu kulistego  $O$  związane parasol o osi  $\vec{e}_\omega$  i prostopadłej płaszczyźnie  $\pi$ , pokazany na rysunku 3.

Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu kulistym jest sumą energii wszystkich mas elementarnych  $E = \frac{1}{2} \iiint_m \vec{v}^2 dm$  gdzie prędkość  $\vec{v}$  masy elementarnej  $dm$ , masy o położeniu określonym promieniem  $\vec{r}$ , jest iloczynem wektorowym  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Stąd, po uwzględnieniu (9) otrzymano

$$E = \frac{1}{2} \iiint_m \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_m (\vec{e}_\omega \times \vec{r})^2 dm = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2. \quad (22)$$

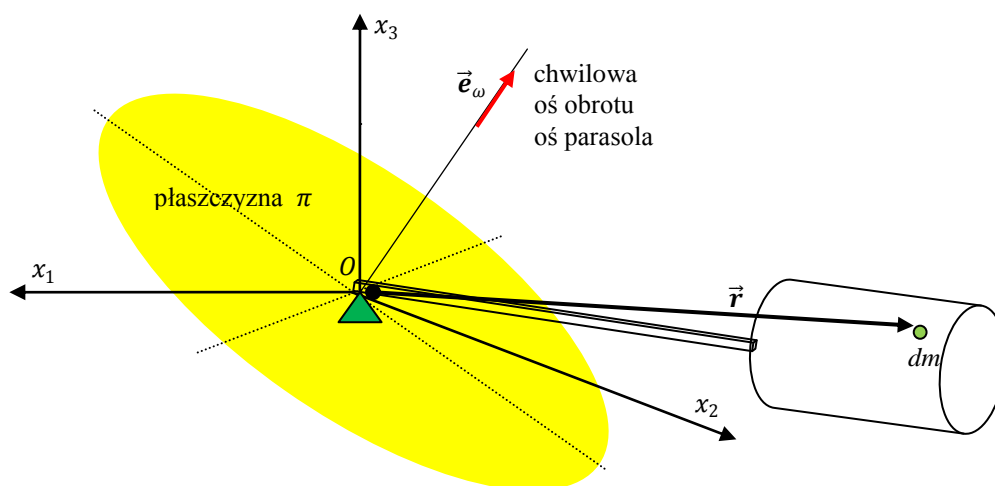
Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu obrotowym wokół chwilowej osi obrotu zależy od momentu bezwładności ciała względem tej osi i kwadratu wartości chwilowej prędkości kątowej.

Równanie krętu dla ciała sztywnego w ruchu kulistym wynika z definicji krętu  $\vec{k}_O$  ciała obliczonego względem nieruchomego bieguna

$$\vec{k}_O = \iiint_m \vec{r} \times \vec{v} dm = \iiint_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm. \quad (23)$$

Wyrażenia podcałkowe jest podwójnym iloczynem wektorowym i jest tożsamościowo równe

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}.$$



Rys. 3 Ruch kulisty ciała sztywnego

Wobec tego kręt  $\vec{k}_O$  ciała względem nieruchomego bieguna  $O$  ma postać

$$\vec{k}_O = \vec{\omega} \iiint_m r^2 dm - \iiint_m (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r} dm. \quad (24)$$

Ponieważ  $\iiint_m r^2 dm = J_O$ , pierwszy z członów prawej strony równania jest wektorem  $\vec{k} = J_O \vec{\omega}$  leżącym zawsze na chwilowej osi obrotu, o długości zależnej tylko od wartości prędkości kątowej  $\omega$ , bowiem moment bezwładności ciała względem bieguna  $O$ ,  $J_O$ , ma wartość stałą.

Drugi z członów prawej strony równania (24), wyrażenie  $\iiint_m (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r} dm$  jest wektorem krętu do tej pory niedefiniowanym, wektorem, który nazwano tu *krętem płaszczyznowym* i oznaczono  $\vec{k}_{rr}$ .

Wobec tego równanie krętu (24) przybiera postać

$$\vec{k} = \vec{k}_O + \vec{k}_{rr} \quad (25)$$

Z równania wynika, że kręt

$$\vec{k} = J_O \vec{\omega} \quad (26)$$

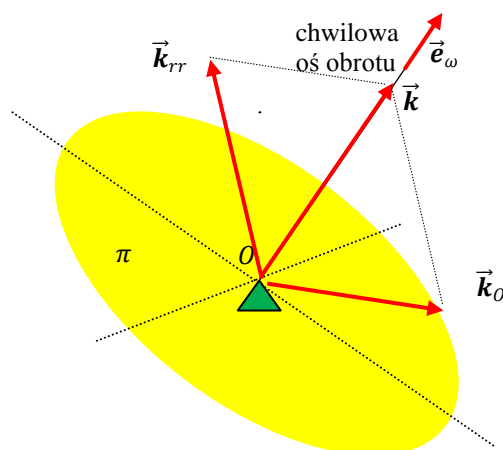
leżący na osi obrotu jest całkowitym (wypadkowym) krętem ciała sztywnego. Rozkład wektorów krętu względem elementów parasola pokazano na rysunku 4. Kolejne wyrażenia równania (25) w postaci macierzowej mają postać.

Kręt całkowity  $\vec{k} = J_O \vec{\omega}$  jest macierzą  $\mathbf{k} = J_O \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}$ .

Kręt względem bieguna  $O$   $\vec{k}_O$  (23) jest macierzą  $\mathbf{k}_O = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$  [1,2].

Kręt płaszczyznowy  $\vec{k}_{rr} = \iiint_m (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r} dm$  można – po wykorzystaniu diady  $\mathbf{P}_{rr}$  [3,4], czyli macierzy postaci (11) oraz jej całki po całej masie  $m$  ciała, stanowiącej *macierz płaszczyznowych momentów bezwładności ciała sztywnego*  $\mathbf{I}_{rr}$  (12) - przedstawić jako macierz

$$\mathbf{k}_{rr} = (\iiint_m \mathbf{P}_{rr} dm) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_{rr} \boldsymbol{\omega} .$$



Rys. 4 Wektory krętu

Uzyskano równanie krętu ciała sztywnego w zapisie macierzowym,

$$\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_{rr} \boldsymbol{\omega} . \quad (27)$$

Równanie to ma postać tożsamą z równaniem (20), uzyskanym po pomnożeniu równania (15) stronami razy macierz współrzędnych  $\boldsymbol{\omega}$  wektora prędkości kątowej ruchu kulistego  $\vec{\omega}$ . Równanie (27) jest macierzowym odpowiednikiem wektorowego równania krętu (25) w ruchu kulistym ciała sztywnego.

## LITERATURA

- [1] Buczkowski R., Banaszek A.: *Mechanika ogólna w ujęciu wektorowym i tensorowym*.  
Warszawa: Wyd. Naukowo- Techniczne 2006
- [2] Leyko J.: *Mechanika ogólna*. Warszawa: PWN 1997
- [3] Polka A.: *Modelowanie przestrzeni za pomocą multiiloczynów wektorów*.  
Materiały XV-tej Szkoły Komputerowego Wspomagania Projektowania,  
Wytwarzania i Eksploatacji. Jurata V 2011.  
Mechanik, nr 7, 2011 str. 619, art. 91 w załączonym CD.
- [4] Polka A.: *Multi-Products of Unit Vectors and Vectors. Basic Notions*.  
Mechanics and Mechanical Engineering, 12, No.2, 2008, str. 103-110.
- [5] Polka A.: *Mass Moments of Inertia and Static Moments of a Rigid Body*.  
Mechanics and Mechanical Engineering, (2008), 12, No.4, str. 297-308.