

Dr inż. Andrzej Polka  
Katedra Dynamiki Maszyn  
Politechnika Łódzka

## RÓWNANIE DYNAMICZNE RUCHU KULISTEGO CIAŁA SZTYWNEGO W UKŁADZIE PARASOLA

*Streszczenie: W pracy opisano wzajemne położenie płaszczyzny parasola i płaszczyzny krętu w ruchu kulistym oraz wynikające z tego przyrosty wektorów krętu. Wyprowadzono dynamiczne równanie ruchu kulistego ciała sztywnego w postaci wektorowej dla osi związanych z układem parasola. Wykorzystano zapis w postaci multiiloczynów wektorów oraz macierzowy, z użyciem diad iloczynów skalarnych i wektorowych.*

## DYNAMIC EQUATION OF SPHERICAL MOTION OF A RIGID BODY IN AN UMBRELLA SYSTEM

*Abstract: This paper describes relative positions of the umbrella plane and the angular momentum plane of a body in spherical motion as well as the corresponding increments of angular momentum vectors. It derives a dynamic vector equation of spherical motion of a rigid body for the axes bound to the umbrella system. Two notations are used: multiproducts of vectors and matrices (using dyads of scalar and vector products).*

### 1. KRĘT I PŁASZCZYŻNA KRĘTU

W pracy *Momenty bezwładności, równanie krętu i energia kinetyczna ciała sztywnego w układzie parasola* wyprowadzono wektorowe równanie krętu dla ruchu kulistego ciała postaci wektorowej (1) oraz odpowiadające mu równanie krętu w zapisie macierzowym (2)

$$\vec{k} = \vec{k}_O + \vec{k}_{rr} \quad (1)$$

$$I_O \omega = I \omega + I_{rr} \omega . \quad (2)$$

Wektor krętu  $\vec{k} = J_O \vec{\omega}$  (lub macierzowo  $k = I_O \omega$ ), leżący na osi chwilowego obrotu jest całkowitym (wypadkowym) krętem ciała sztywnego.

Rozkład wektorów krętu względem elementów parasola pokazano na rysunku 1.

Z rozkładu krętu wynika, że wektorowa suma rzutów na płaszczyznę parasola równa jest zeru, natomiast równanie wektorowe rzutu równania (1) na oś parasola można zastąpić równaniem sumy skalarnej. Z równania (1) wynikają więc:

$$\vec{k}_\pi = \vec{k}_{O\pi} + \vec{k}_{rr\pi} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \vec{k}_{O\pi} = -\vec{k}_{rr\pi} \quad (3)$$

$$\vec{k}_\omega = \vec{k}_{O\omega} + \vec{k}_{rr\omega} \quad \rightarrow \quad k = k_{O\omega} + k_{rr\omega} . \quad (4)$$

Wektory  $\vec{k}_{O\omega}$  oraz  $\vec{k}_{rr\omega}$  rzutów krętów  $\vec{k}_O$  i  $\vec{k}_{rr}$  na kierunek osi parasola, czyli kierunek wersora  $\vec{e}_\omega$ , opisane są następującymi równaniami wektorowymi i macierzowymi

$$\vec{k}_{O\omega} = (\vec{k}_O \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega \quad , \quad k_{O\omega} = P_{e_\omega e_\omega} k_O \quad ; \quad (5)$$

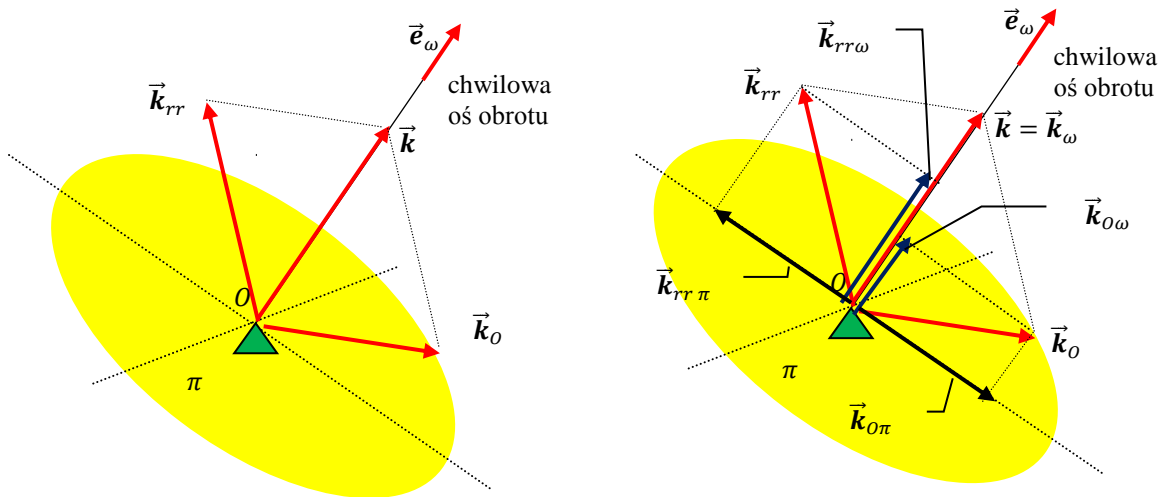
$$\vec{k}_{rr\omega} = (\vec{k}_{rr} \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega \quad , \quad k_{rr\omega} = P_{e_\omega e_\omega} k_{rr} \quad . \quad (6)$$

Po wstawieniu w  $\vec{k}_{rr\omega}$  (6) równania krętu względem płaszczyzny parasola wyrażonego w postaci  $\vec{k}_{rr} = \int_m (\vec{r}\omega) \vec{r} dm$  i następnie wykorzystaniu wyrażenia na moment bezwładności  $J_\pi$  ciała względem płaszczyzny parasola,  $J_\pi = \int_m (\vec{e}_\omega \vec{r})^2 dm$ , otrzymano wektor rzutu krętu płaszczyznowego na oś parasola

$$\vec{k}_{rr\omega} = (\vec{k}_{rr} \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega = \int_m (\vec{e}_\omega \vec{r})^2 dm \vec{\omega} = J_\pi \vec{\omega} \quad \text{oraz} \quad k_{rr\omega} = J_\omega \omega \quad . \quad (7)$$

Wobec  $J_O = J_\omega + J_\pi$  kolejne wektory rzutów krętów na oś parasola (rys. 1) mają następujące wartości skalarne, spełniające warunek (4)

$$k = J_O \omega \quad ; \quad k_{O\omega} = J_\omega \omega \quad ; \quad k_{rr\omega} = J_\pi \omega \quad . \quad (8)$$



Rys. 1. Rozkład wektorów krętu

Wektory krętu tworzą, przechodzącą przez biegun  $O$ , środek ruchu kulistego, płaszczyznę krętu pokazaną na rysunku 2. Wprowadzono na niej wersor  $\vec{e}_O$ , określający położenie w przestrzeni wektora  $\vec{k}_O$  krętu względem bieguna  $O$

$$\vec{e}_O = \vec{k}_O / k_O \quad . \quad (9)$$

Położenie w przestrzeni płaszczyzny krętu określa wersor do niej prostopadły  $\vec{e}_\kappa$ . Wersor ten jest wyznaczony przez iloczyn wektorowy

$$\vec{e}_\kappa = \frac{\vec{e}_O \times \vec{e}_\omega}{|\vec{e}_O \times \vec{e}_\omega|} = \frac{\vec{e}_O \times \vec{e}_\omega}{\sqrt{1 - (\vec{e}_O \vec{e}_\omega)^2}} \quad , \quad (10)$$

Płaszczyzna krętu jest zawsze prostopadła do płaszczyzny parasola i przecina się z nią wzdłuż krawędzi przechodzącej przez biegun  $O$ , jak pokazano na rys. 2. Wersor tej krawędzi  $\vec{e}_\lambda$  wyznaczony jest przez iloczyn wektorowy

$$\vec{e}_\lambda = \vec{e}_\omega \times \vec{e}_\kappa = \frac{\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_0 \times \vec{e}_\omega)}{|\vec{e}_0 \times \vec{e}_\omega|} = \frac{(\vec{e}_\omega \vec{e}_\omega) \vec{e}_0 - (\vec{e}_0 \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega}{\sqrt{1 - (\vec{e}_0 \vec{e}_\omega)^2}}. \quad (11)$$

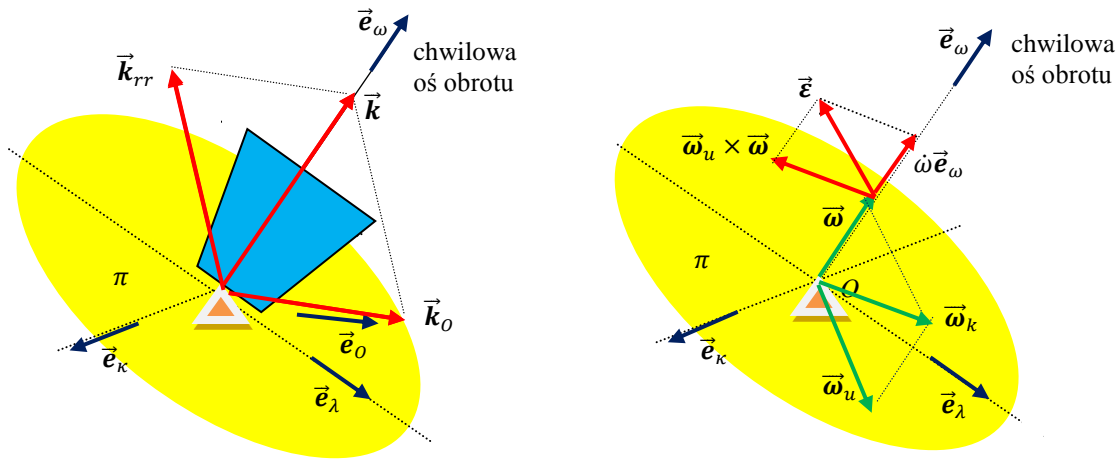
Macierze  $e_\kappa$  i  $e_\lambda$  współrzędnych wersorów  $\vec{e}_\kappa$  i  $\vec{e}_\lambda$  mają postacie

$$\begin{aligned} e_\kappa &= \frac{1}{\sqrt{1 - (e_0^T e_\omega)^2}} P_{e_0 e}^* e_\omega; \\ e_\lambda &= P_{e_\omega e}^* e_\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - (e_0^T e_\omega)^2}} [P_{e_0 e_\omega} - P_{e_\omega e_0}] e_\omega, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie  $P_{e_0 e}^*$  i  $P_{e_\omega e}^*$  są diadami iloczynu wektorowego, zaś  $P_{e_0 e_\omega}$  i  $P_{e_\omega e_0}$  są diadami iloczynu skalarnego [2].

Wersory  $\vec{e}_\kappa$ ,  $\vec{e}_\lambda$  i  $\vec{e}_\omega$  tworzą prawoskrętny, ortogonalny układ  $O\kappa\lambda\omega$  (rys. 2), taki że

$$\vec{e}_\kappa \times \vec{e}_\lambda = \vec{e}_\omega.$$



Rys. 2. Płaszczyzna krętu, układ  $O\kappa\lambda\omega$  i przyspieszenie kątowe ruchu kulistego  $\vec{\epsilon}$

W czasie ruchu układ parasola obraca się z prędkością kątową  $\vec{\omega}$  wokół osi parasola oraz z prędkością kątową  $\vec{\omega}_u$  wokół osi leżącej w płaszczyźnie parasola. Płaszczyzna krętu (rys. 2) obraca się więc wokół chwilowej osi obrotu oraz bierze udział w ruchu obrotowym parasola z prędkością kątową parasola. Na rys. 2 pokazano wektory prędkości kątowych płaszczyzny krętu. Prędkość kątowa wypadkowa płaszczyzny krętu jest wektorem  $\vec{\omega}_k$ , takim że

$$\vec{\omega}_k = \vec{\omega} + \vec{\omega}_u, \quad (13)$$

gdzie  $\vec{\omega}_u$  jest wektorem prędkości kątowej parasola. Macierz współrzędnych wektora  $\vec{\omega}_k$  w ruchomym układzie osi  $O\kappa\lambda\omega$ , związanym z płaszczyzną krętu, ma postać

$$\omega_k = [\omega_{u\kappa} \quad \omega_{u\lambda} \quad \omega]^T \quad \text{gdzie} \quad \omega_{u\kappa} = \vec{\omega}_u \vec{e}_\kappa, \quad \omega_{u\lambda} = \vec{\omega}_u \vec{e}_\lambda. \quad (14)$$

Pierwsze dwie współrzędne macierzy (14) są współrzędnymi rzutów  $\vec{\omega}_{u\kappa}$  i  $\vec{\omega}_{u\lambda}$  wektora prędkości kątowej parasola  $\vec{\omega}_u$  z płaszczyzny parasola na osie wersorów  $\vec{e}_\kappa$  i  $\vec{e}_\lambda$ , natomiast trzecia współrzędna jest długością (wartością  $\omega$ ) prędkości chwilowej ruchu sferycznego. W nieruchomym układzie osi wektory rzutów wektora  $\vec{\omega}_k$  są wektorami

$$\vec{\omega}_{u\kappa} = (\vec{\omega}_u \vec{e}_\kappa) \vec{e}_\kappa ; \vec{\omega}_{u\lambda} = (\vec{\omega}_u \vec{e}_\lambda) \vec{e}_\lambda ; \vec{\omega} , \quad (15)$$

których macierze mają postać  $\omega_{u\kappa} = P_{e_\kappa e_\kappa} \omega_u$  i  $\omega_{u\lambda} = P_{e_\lambda e_\lambda} \omega_u$ .

## 2. PRZYROSTY WEKTORÓW KRĘTU

Do obliczenia przyrostów wektorów krętu wykorzystano twierdzenie o zmienności krętu ciała sztywnego  $\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{m}_O$ , w którym lewą stronę zapisano

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (k_O \vec{e}_O) = \dot{k}_O \vec{e}_O + \vec{\omega}_k \times \vec{k}_O . \quad (16)$$

Uwzględniając w układzie osi  $O\kappa\lambda\omega$ , związanym z płaszczyzną krętu, współrzędne wektora  $\vec{\omega}_k$  (14);  $\omega_k = [\omega_{u\kappa} \ \omega_{u\lambda} \ \omega]^T$  oraz wektora krętu  $\vec{k}_O$ ;  $\vec{k}_O = [0 \ k_{O\lambda} \ k_{O\omega}]^T$ , ponadto zastępując wektor  $\dot{k}_O \vec{e}_O$  jego rzutami na osie układu  $O\kappa\lambda\omega$ ;  $\dot{k}_O \vec{e}_O = \dot{k}_O (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda) \vec{e}_\lambda + \dot{k}_O (\vec{e}_O \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega$ , otrzymano

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}_O}{dt} = \dot{k}_O (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda) \vec{e}_\lambda + \dot{k}_O (\vec{e}_O \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega + (\omega_{u\lambda} k_{O\omega} - \omega k_{O\lambda}) \vec{e}_\kappa + \\ - \omega_{u\kappa} k_{O\omega} \vec{e}_\lambda + \omega_{u\kappa} k_{O\lambda} \vec{e}_\omega . \end{aligned} \quad (17)$$

Ponieważ  $k_{O\omega} = k_O (\vec{e}_O \vec{e}_\omega) = J_\omega \omega$ , to  $\dot{k}_O (\vec{e}_O \vec{e}_\omega) = J_\omega \dot{\omega}$ .

Ponadto wykorzystano związki  $k_{O\lambda} = k_O (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda)$  oraz  $\dot{k}_O = \frac{\dot{\omega}}{\omega} k_O$ . Uzyskano w ten sposób równanie pochodnej wektora krętu

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}_O}{dt} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} k_O (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda) \vec{e}_\lambda + J_\omega \dot{\omega} \vec{e}_\omega + (\omega_{u\lambda} J_\omega \omega - \omega k_O (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda)) \vec{e}_\kappa + \\ - \omega_{u\kappa} J_\omega \omega \vec{e}_\lambda + \omega_{u\kappa} k_O (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda) \vec{e}_\omega . \end{aligned} \quad (18)$$

Z przyrównania pochodnej wektora krętu (18) z równaniem wektora momentu sił zewnętrznych  $\vec{m}_O = (\vec{m}_O \vec{e}_\kappa) \vec{e}_\kappa + (\vec{m}_O \vec{e}_\lambda) \vec{e}_\lambda + (\vec{m}_O \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega$  wynika

$$\begin{aligned} J_\omega \omega \omega_{u\lambda} &= (\vec{m}_O \vec{e}_\kappa) + \omega k_O (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda) \\ \frac{k_O}{\omega} (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda) \dot{\omega} - J_\omega \omega \omega_{u\kappa} &= (\vec{m}_O \vec{e}_\lambda) \\ J_\omega \dot{\omega} + k_O (\vec{e}_O \vec{e}_\lambda) \omega_{u\kappa} &= (\vec{m}_O \vec{e}_\omega) . \end{aligned} \quad (19)$$

Jest to układ równań algebraicznych ze względu na niewiadome współrzędne  $\omega_{u\kappa}$ ,  $\omega_{u\lambda}$  wektora  $\vec{\omega}_u$  prędkości kątowej płaszczyzny parasola oraz wartość  $\dot{\omega}$  pochodnej skalarnej prędkości kątowej parasola.

Z rozwiązania układu równań otrzymano wartości skalarne:

$$\omega_{u\kappa} = \frac{[\vec{k}_O \times \vec{m}_O]_\kappa}{k_O^2} , \quad \omega_{u\lambda} = \frac{(\vec{m}_O \vec{e}_\kappa) + \omega (\vec{k}_O \vec{e}_\lambda)}{J_\omega \omega} \quad (20)$$

$$\text{oraz} \quad \dot{\omega} = \omega \frac{\vec{k}_O \vec{m}_O}{k_O^2} = \omega \frac{\vec{e}_O \vec{m}_O}{k_O} . \quad (21)$$

Z przytoczonego rozumowania wynika, że znajomość współrzędnych wersorów osi chwilowego obrotu  $\vec{e}_\omega$  i wektora krętu względem bieguna  $O$ ,  $\vec{k}_O = k_O \vec{e}_O$ , pozwala ze wzorów (11) – (12) znaleźć położenie płaszczyzny krętu (wersor  $\vec{e}_\kappa$ ) oraz wspólnej krawędzi płaszczyzn parasola i krętu (wersor  $\vec{e}_\lambda$ ). Z kolei znajomość współrzędnych wektora

momentu sił zewnętrznych  $\vec{m}_O$  pozwala określić wartości prędkości kątowych płaszczyzny krętu (20) i skalarną pochodną prędkości kątowej ruchu kulistego (21), co umożliwia obliczenie przyrostów wektorów krętów.

### 3. RÓWNANIE DYNAMICZNE

Dla ciała sztywnego poruszającego się ruchem sferycznym wyprowadzono równanie krętu (1) postaci  $\vec{k} = \vec{k}_O + \vec{k}_{rr}$ , które – zróżniczkowane względem czasu – przekształca się w:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d\vec{k}_O}{dt} + \frac{d\vec{k}_{rr}}{dt} . \quad (22)$$

Równanie to opisuje trzy wektory momentów leżące w jednej płaszczyźnie.

Z prawa zmienności krętu ciała  $\vec{k}_O$  względem nieruchomego bieguna  $O$  wynika

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{m}_O \quad (23)$$

gdzie  $\vec{m}_O$  jest momentem sił zewnętrznych działających na ciało, obliczonym względem punktu  $O$ . Z równania (14) można zatem wnioskować, że pozostałe dwa wektory przyrostów krętu też są wektorami momentów sił względem tego bieguna. Przez analogię do prawa zmienności krętu (15) wprowadzono zatem

$$\frac{d\vec{k}_{rr}}{dt} = \vec{m}_{rr} \quad \text{oraz} \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{m}_d . \quad (24)$$

Wektory przyrostów krętu nazwano odpowiednio:  $\vec{m}_{rr}$  – *wektorem momentu płaszczyznowego* oraz  $\vec{m}_d$  – *wektorem dynamicznym ruchu kulistego*.

$$\text{Otrzymano} \quad \vec{m}_d = \vec{m}_O + \vec{m}_{rr} . \quad (25)$$

Wektory: momentu sił zewnętrznych  $\vec{m}_O$ , momentu płaszczyznowego  $\vec{m}_{rr}$  oraz ich wypadkowa, wektor momentu dynamicznego  $\vec{m}_d$  tworzą płaszczyznę momentów.

Przyspieszenie kątowe ciała w ruchu kulistym  $\vec{\varepsilon}$  (rys. 2) jest wektorową pochodną po czasie wektora prędkości kątowej  $\vec{\omega}$  i ma postać

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \vec{e}_\omega) = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\omega + \omega \frac{d\vec{e}_\omega}{dt} = \dot{\omega} \vec{e}_\omega + \vec{\omega}_u \times \vec{\omega} , \quad (26)$$

gdzie  $\vec{\omega}_u$  jest wektorem prędkości kątowej wektora  $\vec{\omega}$  i – zarazem – wektorem prędkości kątowej parasola, leżącym w płaszczyźnie parasola.

Pochodna wektora krętu ruchu kulistego

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \dot{k} \vec{e}_\omega + \vec{\omega}_k \times \vec{k} \quad (27)$$

– po uwzględnieniu współrzędnych wektora  $\vec{\omega}_k$  (11);  $\omega_k = [\omega_{uk} \ \omega_{ul} \ \omega]^T$  oraz wektora  $\vec{k}$ ;  $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ k]^T$ , w układzie osi  $O\kappa\lambda\omega$ , związanym z płaszczyzną krętu – ma postać

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \dot{k} \vec{e}_\omega + \omega_{ul} k \vec{e}_\kappa - \omega_{uk} k \vec{e}_\lambda . \quad (28)$$

Po wykorzystaniu wartości  $k = J_O \omega$  (8) krętu wypadkowego  $\vec{k}$  oraz uwzględnieniu oczywistego  $\dot{k} = J_O \dot{\omega}$  uzyskano

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = J_O [\dot{\omega} \vec{e}_\omega + \omega(\omega_{u\lambda} \vec{e}_\kappa - \omega_{u\kappa} \vec{e}_\lambda)] . \quad (29)$$

Wyrażenie w nawiasie jest rozwinięciem wyrażenia (26)

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \vec{e}_\omega) = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\omega + \omega \frac{d\vec{e}_\omega}{dt} = \dot{\omega} \vec{e}_\omega + \vec{\omega}_u \times \vec{\omega} ,$$

które jest wektorowym zapisem wektora przyspieszenia kąowego  $\vec{\varepsilon}$  ciała sztywnego w ruchomym układzie osi  $O\kappa\lambda\omega$ .

Z porównania równań  $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{m}_d$  (24) oraz (26) i (29) wynika wektorowe równanie dynamiczne dla ciała sztywnego, poruszającego się ruchem kulistym wokół nieruchomego bieguna  $O$  postaci

$$J_O \vec{\varepsilon} = \vec{m}_d . \quad (30)$$

*Iloczyn wektora przyspieszenia kąowego ciała sztywnego, poruszającego się ruchem kulistym, i stałego momentu bezwładności tego ciała, obliczonego względem bieguna  $O$  – środka ruchu kulistego – równy jest wektorowi momentu dynamicznego, obliczonemu dla tego bieguna w układzie osi ortogonalnych zawieszonych w środku ruchu kulistego.*

#### 4. PODSUMOWANIE

Moment sił zewnętrznych  $\vec{m}_O$ , działający na ciało poruszające się ruchem kulistym, wywołuje zmianę wektora krętu  $\frac{d\vec{k}_O}{dt}$  tego ciała, a ta zmiana generuje zmianę wektora krętu płaszczyznowego  $\frac{d\vec{k}_{rr}}{dt}$ , którą można nazwać wektorem momentu płaszczyznowego  $\vec{m}_{rr}$ . Suma obu wektorów momentów daje wektor momentu dynamicznego  $\vec{m}_d$ , ten zaś – odwrotnie proporcjonalnie do stałej wartości momentu bezwładności ciała  $J_O$ , obliczonego względem stałego punktu, środka ruchu kulistego  $O$  – wymusza zmianę wektora prędkości kąowej  $\vec{\omega}$  w postaci wektora  $\vec{\varepsilon}$  przyspieszenia kąowego ruchu kulistego

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{J_O} (\vec{m}_O + \vec{m}_{rr}) = \frac{1}{J_O} \vec{m}_d,$$

który ma kierunek wektora momentu dynamicznego.

#### LITERATURA

- [1] Leyko J.: *Mechanika ogólna*, PWN, Warszawa 1997.
- [2] Polka A.: *Modelowanie przestrzeni za pomocą multiiloczynów wektorów*.  
Materiały XV-tej Szkoły Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji. Jurata V 2011. Mechanik, nr 7, 2011 str. 619, art. 91 w załączonym CD.
- [3] Polka A.: *Multi-Products of Unit Vectors and Vectors. Basic Notions*,  
Mechanics and Mechanical Engineering, 12, no. 2, 2008, pp. 103-110.
- [4] Polka A.: *Mass Moments of Inertia and Static Moments of a Rigid Body*,  
Mechanics and Mechanical Engineering, 12, no. 4, 2008, pp. 297-308.