

Dr inż. Agnieszka A. CHUDZIK
Politechnika Łódzka
Katedra Dynamiki Maszyn

NIELINIOWE UKŁADY DYNAMICZNE – PROBLEM NADAL OTWARTY

Streszczenie: W pracy przedstawiono zjawisko wystąpienia synchronizacji oscylatorów typu Duffing podwieszonych do elastycznej belki. Zbadano wpływ zmiany modelu belki na zachowanie oscylatorów. Wykazano, że dla danych warunków początkowych wzbudzenia, początkowo nieliniowe, chaotyczne oscylacje struktury stają się okresowe i synchroniczne.

NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM – PROBLEM STILL OPEN

Abstract: The paper presents the phenomenon of synchronization of Duffing oscillators suspended on a flexible beam. This article presents the results of changes in the beam model on the behavior of oscillators. It was shown that for the initial conditions of excitation, initially nonlinear, chaotic oscillations of structures become periodic and synchronous.

1. WPROWADZENIE

Pierwsze dokonania dotyczące zjawisk drganiowych miały miejsce już w starożytności. Ludziom od niepamiętnych czasów towarzyszyły instrumenty muzyczne i tak do najbardziej popularnych należały lutnie zwane kinor (Egipt, Syria, Chaldeii), instrument strunowy o nazwie wina (Indie), aulos – flet pojedynczy lub białos – flet podwójny (Hellanda) itd. W IV w. p.n.e. Chińczycy posługiwali się sejsmografem do wykrywania trzęsień ziemi. Architekt Tryphon z Aleksandrii (214 r. p.n.e.) używał podwieszonych u sufitu naczyń glinianych jako detektorów drgań gruntu (rodzaj wahadeł).

Początki nowożytnej mechaniki, w tym teorii drgań, wyznaczają prace Galileusza. Badając ruch wahadła matematycznego, odkrył on związek między jego długością a częstotliwością wahnięć.

Postęp w teorii drgań układów ciągłych nastąpił w XVIII, kiedy to Euler (1744) i D. Bernoulli (1751) wyprowadzili równania drgań belki. Nieliniowość – zjawisko to obserwowane było już u zarania nowożytnej ery teorii drgań. Zjawisko to zaobserwował Huygens w XVII w., badając ruch wahadła. Pionierem badania zjawisk nieliniowych był matematyk francuski Poincare.

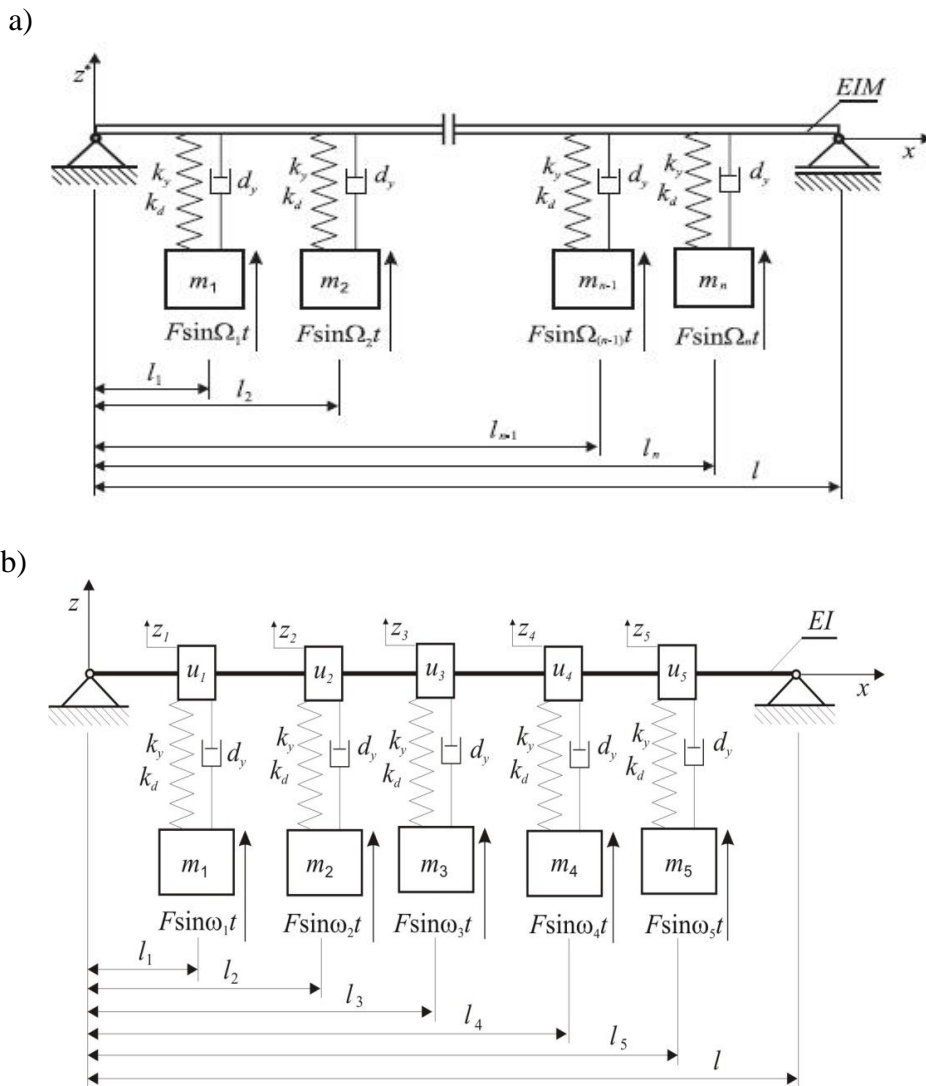
Modele nieliniowe pojawiły się w analizie zagadnień inżynierskich. Do autorów najwcześniejszych rozwiązań należą Duffing – twórca przybliżonej metody wyznaczania odpowiedzi oscylatora ze sprężyną nieliniową na wymuszenie okresowe oraz van der Pol, który wykrył zjawisko cykli granicznych [1].

Liczba publikacji opisujących zjawisko generowania się drgań w układach mechanicznych jest ogromna [4, 5, 9, 10]. Dotyczą one różnych problemów inżynierskich – zwykle tworzone są modele badanych układów, a następnie analizowane metodami analitycznymi lub numerycznymi.

Mimo tak dużej liczby prac, nadal trudno jest podać precyzyjne reguły, które pozwoliłyby przewidywać wzbudzenie drgań chaotycznych w badanym układzie.

W układzie dynamicznym wyróżniamy różne rodzaje synchronizacji, np.: może być taki przypadek, że udział poszczególnych obiektów w procesie synchronizacji jest podobny i synchronizacja całego układu jest wynikiem oddziaływania pomiędzy poszczególnymi obiektami układu. Inny przypadek to taki, kiedy jeden z obiektów układu ma dominujący wpływ na procesy zachodzące podczas pracy układu i może być wtedy traktowany jako obiekt zewnętrzny, tzn. wpływ oddziaływania na niego jest pomijalnie mały [2].

W artykule zbadano dynamikę dwóch nieliniowych zewnętrznie wzbudzonych chaotycznych oscylatorów połączonych za pośrednictwem elastycznej struktury – sprężystej belki [3, 4]. Badania przeprowadzono dla dwóch przypadków. W pierwszym przypadku belkę potraktowano jako model ciągły, natomiast w drugim przypadku dyskretny – tzn. belkę traktujemy jak „sprężynę” i następnie przykładamy skupione masy w poszczególnych węzłach belki (rys. 1). Nieliniowe oscylatory Duffinga wzbudzone są przez sygnał okresowy. Pokazano także odpowiedzi sprężystej belki i oscylatorów na wzbudzenie, któremu nie towarzyszy synchronizacja ich oscylacji.



Rys. 1. Model analizowanej struktury [4]:

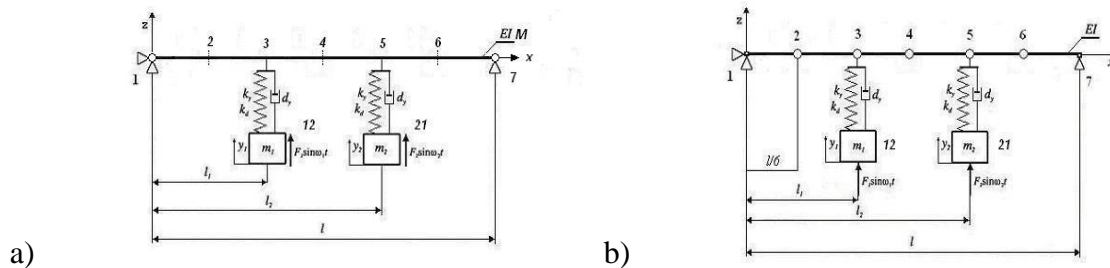
a) model ciągły, b) model dyskretny

2. MODEL NUMERYCZNY

W badaniu układów o wielu stopniach swobody efektywnymi metodami są metody numeryczne, wykorzystujące różne algorytmy całkowania. Ze względu na dużą liczbę stopni swobody, do opisu ruchu stosuje się zapisy macierzowe, na podstawie których sporządza się odpowiedni algorytm obliczeń numerycznych.

Obliczenia numeryczne wykonano metodą elementów skończonych, wykorzystując metodę Newtona–Raphsona. Metoda ta służy do rozwiązywania nieliniowego układu równań algebraicznych, który można zapisać w postaci wektorowej [6].

Do obliczeń zbudowano numeryczny model badanych struktur (rys. 2).



Rys. 2. Model numeryczny badanej struktury: a) ciągły, b) dyskretny

Zastosowane oscylatory są opisane są następującym równaniem:

$$m_i \cdot \frac{d^2 y_i}{dt^2} + d_y \cdot \frac{dy_i}{dt} + k_y \cdot y_i + k_d \cdot y_i^3 = f \cdot \sin \omega_i \cdot t$$

gdzie: d_y , k_y , k_d , f , ω_i są stałymi, a $i = 1, 2$. Założono, że belka jest podparta na obu końcach, tak jak pokazano na rys. 2.

Belka o długości l została podzielona na 6 równych części. Do obliczeń numerycznych wykorzystano elementy modelujące:

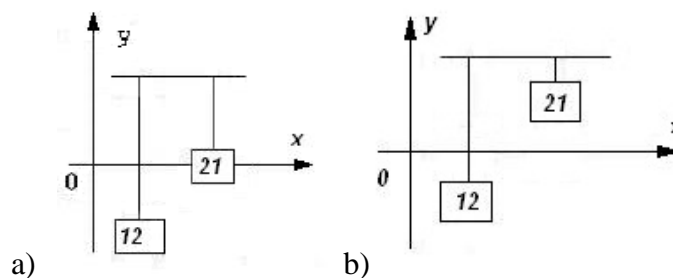
- sprężynę nieliniową – COMBIN 39,
- tłumik wiskotyczny – COMBIN 14,
- belkę – BEAM,
- masy podwieszono – MASS.

Do analizy numerycznej przyjęto następujące parametry oscylatora Duffinga:

$$d_y = 0,168 \frac{N \cdot \text{sec}}{m}; k_y = 0,5 \frac{N}{mm}; k_d = 0,5 \frac{N}{mm}; f = 1\text{Hz}; \omega = 1 \frac{1}{\text{sec}} \cdot g = 1.$$

Założono, że belka wykonana została ze stali.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla następujących warunków początkowych wzbudzenia oscylatorów (rys. 3).

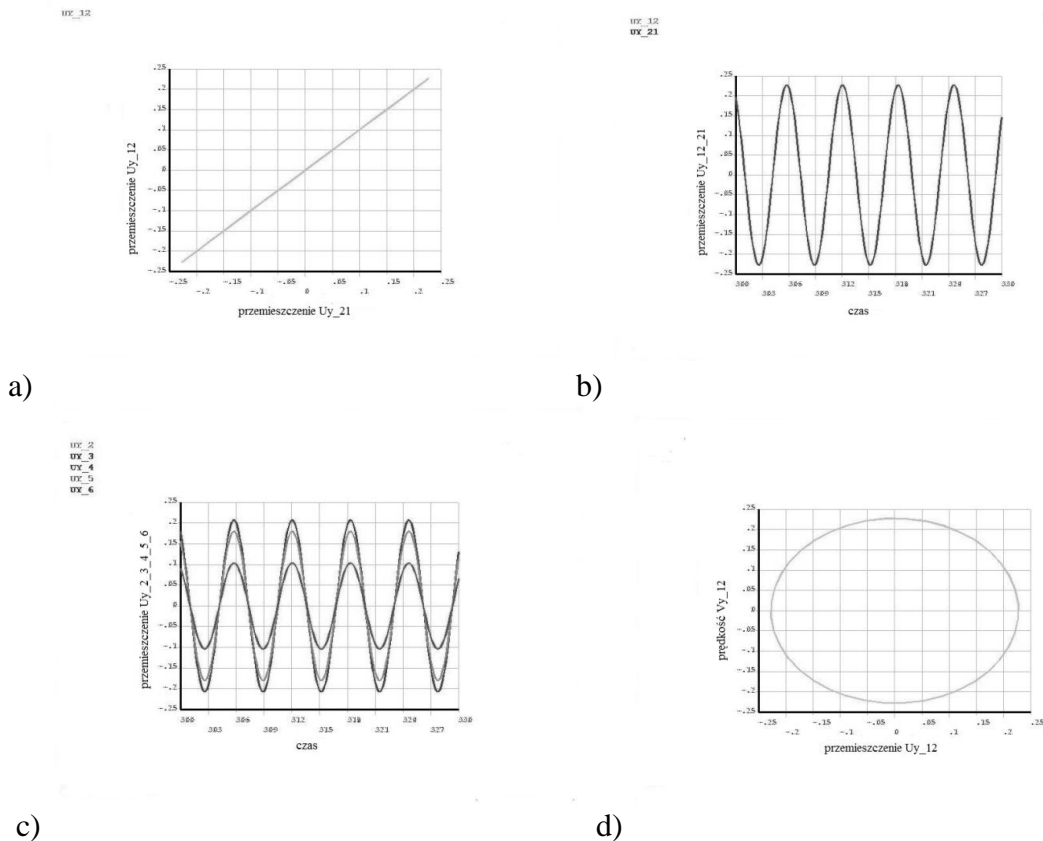


Rys. 3. Warunki początkowe wzbudzenia oscylatorów

3. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w postaci wykresów (rys. 4) przedstawiających wzajemne zmiany przemieszczeń poszczególnych węzłów należących do układu. W pracy zaprezentowane zostaną wyniki dla przypadku rys. 3a wzbudzenia oscylatorów. W omawianym przypadku zbadano wpływ warunków początkowych wzbudzenia oscylatorów na pracę całego układu jak i oddziaływanie belki pod wpływem wzbudzenia.

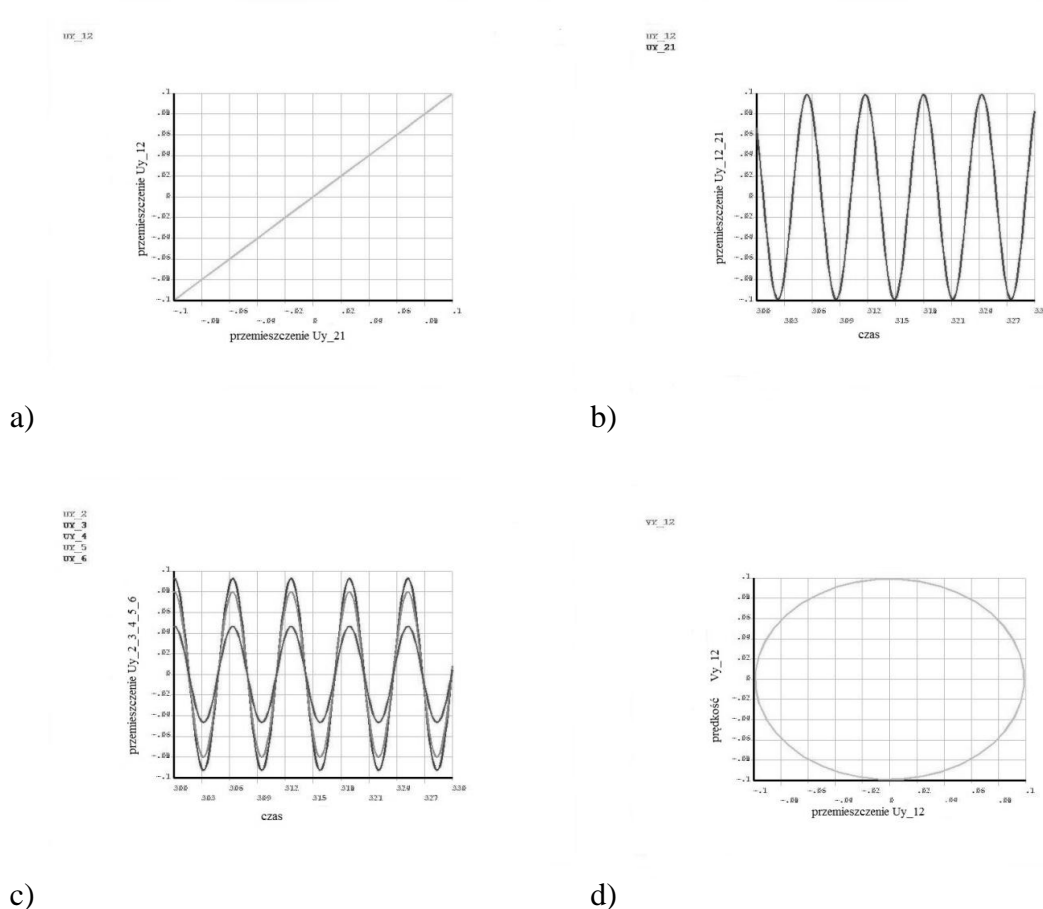
Zgodnie z tym co wcześniej opisano w pracy, obliczenia wykonano dla różnej struktury belki (rys. 2a i rys. 2b). W pierwszym przypadku na rys. 4a przedstawiono wzajemną zależność pomiędzy przemieszczeniem węzła nr 12 i nr 21. Tymi węzłami oznaczono masy pod oscylatorami, do których przyłożono wymuszenie. Liniowy charakter wykresu sugeruje, że zachodzi synchronizacja oscylatorów. Rysunek 4b przedstawia charakter zmiany przemieszczenia tych węzłów w czasie. Z wykresu wynika, że początkowo nieliniowe, chaotyczne oscylatory Duffinga stają się okresowe i synchroniczne. Rysunek 4c przedstawia wykresy pokazujące odpowiedź dynamiczną belki podczas pracy układu. Prezentowane wyniki obliczeń pokazują nam charakter odkształceń poszczególnych węzłów układu. Zależność prędkości węzła nr 12 w funkcji jego przemieszczenia pokazano na rys. 4d. Z charakteru tego wykresu również wynika synchronizacja układu.



Rys. 4.

Takie same obliczenia przeprowadzono dla drugiego przypadku rys. 2b. Belka zamodelowana została jak „struna”, do której w poszczególnych węzłach dołączone zostały masy. Pozostały elementy bez zmian. Analogiczne wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 5. Z rys. 5a i b widać synchronizację początkowo chaotyczne, nieskorelowane oscylatory stają się okresowe i synchroniczne.

Pozostałe wyniki dla przypadku drugiego (rys. 3b) zostaną zaprezentowane podczas wygłaszania referatu.



Rys. 5

4. PODSUMOWANIE

Analiza dynamiki nieliniowych układów mechanicznych charakteryzuje się dużą czasochłonnością. Zastosowanie programu MES pozwoliło na przeprowadzenie symulacji dynamiki rzeczywistej struktury składającej się ze sprężystej belki, do której dołączono dwa nieliniowe, chaotyczne oscylatory Duffinga. Sprzężenie oscylatorów poprzez dołączenie ich do elastycznej struktury pozwoliło zbadać wzajemny wpływ na siebie tych oscylatorów. W pracy spodziewano się, że oscylatory będą miały wpływ na odpowiedź dynamiczną belki. Jednak zadaniem autora było wykazanie, że struktura modelu belki – tzn. ciągły czy dyskretny – nie ma wpływu na wzajemne oddziaływanie podzespołów dołączonych do niej, jak również na pracę samej belki. Badania wykazały, że charakter poszczególnych wykresów, np.: rys. 4a i 5a oraz rys. 4b i 5b jest taki sam.

Uzyskano podobną zgodność, jeżeli chodzi o charakter krzywych wykresu w pozostałych przypadkach (rys. 4c i 5c oraz rys. 4d i rys. 5d). Wykazano ponadto, że dla danych warunków początkowych wzbudzenia, początkowo nieskorelowane, chaotyczne oscylatory Duffinga stają się okresowe i synchroniczne. Badania potwierdziły ścisły związek między dynamiczną odpowiedzią belki a dynamiką oscylatorów. Regularne warunki oscylacji belki są odpowiedzią na okresowe zachowanie oscylatorów.

LITERATURA

- [1] Arczewski K., Pietrucha J., Szuster J.T.: *Drgania układów fizycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008.
- [2] Awrajcewicz J.: *Chaos i synchronizacja w układach fizycznych*, Zbiory Główne Politechniki Łódzkiej.
- [3] Chudzik A.A.: *Synchronization and periodization Duffing oscillators coupled by elastic beam: Finite Element Method approach*, Journal Of Theoretical And Applied Mechanics, 48, 2, Warsaw 2010, pp. 517-524.
- [4] Czołczyński K., Stefański A., Perlikowski P., Kapitaniak T.: *Multistability and chaotic beating of Duffing oscillators suspended on an elastic structure*, Journal of Sound And Vibration, Vol. 322, Issue 3, 8 May 2009, pp. 513-523.
- [5] Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.: *A map with more than coexisting low-period periodic attractors*, Physical Review E 54, 1996, pp. 71-81.
- [6] Łuczko J.: *Drgania regularne i chaotyczne w nieliniowych układach mechanicznych*, Politechnika Krakowska, Kraków 2008.
- [7] Kraut S., Feudel U.: *Multistability, noise and attractor hopping: the crucial role of chaotic saddles*, Physical Review E 66, 2002, doi:015207(1-4).
- [8] Kaneko K.: *Dominance of Milnor attractors and noise-induced selection in a multiattractor system*, Physical Review Letters 78, 1997, pp. 2736-2739.
- [9] Pecora L., Carroll T.S.: *Physical Review Letters* 64 (1990) 821-824.
- [10] Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C.S.: *The synchronization of chaotic systems*, Physics Reports 366 (I), 2002.