

Секция 10. Прикладные задачи математики

$$-\int (1-t^2)^2 dt = -\int dt + 2\int t^2 dt - \int t^4 dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$-\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5} + C.$$

Пример №4. Вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+bx^2}} = \int x^{-2} (a+bx^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Здесь $m = -2, n = 2, p = -\frac{1}{2}$, так что $\frac{m+1}{n} + p = -1$ (третий случай). Используя подстановку

$$t = \sqrt{\frac{a}{x^2} + b}, x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t^2 - d}}, dx = -\frac{\sqrt{a} dt}{\sqrt{(t^2 - d)^3}}$$

будем иметь

$$I = \int \left(-\frac{1}{a}\right) dt = -\frac{t}{a} + C = -\frac{\sqrt{\frac{a}{x^2} + b}}{a} + C.$$

Литература.

1. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч.2 – М.: Издательство «Наука». – 1966. – 800 с.
2. В.Е.Шнейдер и др. Краткий курс высшей математики. – М.: Издательство «Высшая школа». – 1972. – 640 с.

ФРАКТАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

*Н.С. Давлатзода, студент гр. 10А51, Ш.С. Нозирзода, студент гр.10А41,
научный руководитель: Березовская О.Б.*

*Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского
Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26*

Зачастую гениальные открытия, совершенные в науке, способны кардинально изменять нашу жизнь. Так, например, изобретение вакцины может спасти множество людей, а создание нового вооружения приводит к убийству. Однако существуют и такие открытия, которые, что называется, остаются в тени, причем несмотря на то, что они также оказывают то или иное влияние на нашу жизнь. Одним из таких открытий стал фрактал. Большинство людей даже не слышали о таком понятии и не смогут объяснить его значение

Само слово «фрактал» с латыни переводится как "частичный", "разделенный", "раздробленный", а что касается содержания этого термина, то формулировки как таковой не существует. Обычно его трактуют как самоподобное множество, часть целого, которая повторяется своей структурой на микроуровне. Этот термин придумал в семидесятых годах XX века Бенуа Мандельброт, который признан отцом фрактальной геометрии. Сегодня под понятием фрактала подразумевают графическое изображение некой структуры, которая при увеличенном масштабе будет подобна сама себе.

На рубеже 19-20 веков изучение природы фракталов носило эпизодический характер. Это объясняется тем, что математики предпочитали изучать объекты, поддающиеся исследованию, на основе общих теорий и методов. В 1872 году немецким математиком К. Вейерштрассом был построен пример непрерывной функции, нигде не дифференцируемой. Однако это построение оказалась целиком абстрактным и трудным для восприятия. Дальше пошел швед Хельге фон Кох, который в 1904 году построил непрерывную кривую, не имеющую нигде касательной. Ее довольно легко нарисовать, и,

как оказалось, она характеризуется фрактальными свойствами. Один из вариантов данной кривой назвали в честь ее автора – «снежинка Коха». Далее идею самоподобия фигур развивал будущий наставник Б. Мандельброта француз Поль Леви. В 1938 году он опубликовал статью «Плоские и пространственные кривые и поверхности, состоящие из частей, подобных целому». В ней он описал новый вид – С-кривую Леви. Все вышеперечисленные фигуры условно относятся к такому виду, как геометрические фракталы.

К данному классу относится множество Мандельброта. Первыми исследователями этого направления стали французские математики Пьер Фату и Гастон Жюлиа. В 1918 году Жюлиа опубликовал работу, в основе которой лежало изучение итераций рациональных комплексных функций. Здесь он описал семейство фракталов, которые близко связаны с множеством Мандельброта. Невзирая на то, что данная работа прославила автора среди математиков, о ней быстро забыли. И только спустя полвека благодаря компьютерам труд Жюлиа получил вторую жизнь. ЭВМ позволили сделать видимым для каждого человека ту красоту и богатство мира фракталов, которые могли «видеть» математики, отображая их через функции. Мандельброт стал первым, кто использовал компьютер для проведения вычислений, позволивших построить изображение этих фигур.

Мандельброт начинал свою научную карьеру в исследовательском центре IBM. Изучая возможности передачи данных на большие расстояния, ученые столкнулись с фактом больших потерь, которые возникали из-за шумовых помех. Бенуа искал пути решения этой проблемы. Просматривая результаты измерений, он обратил внимание на странную закономерность, а именно: графики шумов выглядели одинаково в разном масштабе времени.

Аналогичная картина наблюдалась как для периода в один день, так и для семи дней или для часа. Сам Бенуа Мандельброт часто повторял, что он работает не с формулами, а играет с картинками. Этот ученый отличался образным мышлением, любую алгебраическую задачу он переводил в геометрическую область, где правильный ответ очевиден. Так что неудивительно, что такой человек, отличающийся богатым пространственным мышлением, и стал отцом фрактальной геометрии. Ведь осознание данной фигуры может прийти только тогда, когда изучаешь рисунки и вдумываешься в смысл этих странных завихрений, образующих узор. Фрактальные рисунки не имеют идентичных элементов, однако обладают подобностью при любом масштабе.

Одним из первых рисунков этой фигуры была графическая интерпретация множества, которая родилась благодаря работам Гастона Жюлиа и была доработана Мандельбротом. Гастон пытался представить, как выглядит множество, построенное на базе простой формулы, которая проинтегрирована циклом обратной связи. Попробуем сказанное объяснить человеческим языком, так сказать, на пальцах. Для конкретного числового значения с помощью формулы находим новое значение. Подставляем его в формулу и находим следующее. В результате получается большая числовая последовательность. Для представления такого множества требуется проделать эту операцию огромное количество раз: сотни, тысячи, миллионы. Это и проделал Бенуа. Он обработал последовательность и перенес результаты в графическую форму. Впоследствии он раскрасил полученную фигуру (каждый цвет соответствует определенному числу итераций). Данное графическое изображение получило имя «фрактал Мандельброта».

Теория фракталов довольно быстро нашла практическое применение. Первыми, кто взял на вооружение принципы и алгоритмы построения этих необычных форм, стали художники. Первым из них стал будущий основатель студии Pixar Лорен Карпентер. Работая над презентацией прототипов самолетов, ему в голову пришла идея в качестве фона использовать изображение гор. Сегодня с такой задачей сможет справиться практически каждый пользователь компьютера, а в семидесятых годах прошлого века ЭВМ были не в состоянии выполнять такие процессы, ведь графических редакторов и приложений для трехмерной графики на тот момент еще не было. И вот Лорену попала книга Мандельброта «Фракталы: форма, случайность и размерность». В ней Бенуа приводил множество примеров, показывая, что существуют фракталы в природе, он описывал их разнообразную форму и доказывал, что они легко описываются математическими выражениями. Данную аналогию математик приводил в качестве аргумента полезности разрабатываемой им теории в ответ на шквал критики от своих коллег. Они утверждали, что фрактал - это всего лишь красивая картинка, не имеющая никакой ценности, являющаяся побочным результатом работы электронных машин. Карпентер решил опробовать этот метод на практике. Внимательно изучив книгу, будущий аниматор стал искать способ реализации фрактальной геометрии в компьютерной графике. Ему понадобилось всего три дня, чтобы визуализировать

вполне реалистичное изображение горного ландшафта на своем компьютере. И сегодня этот принцип широко используется. Как оказалось, создание фракталов не занимает много времени и сил.

Принцип, использованный Лореном, оказался прост. Он состоит в том, чтобы разделить более крупные геометрические фигуры на мелкие элементы, а те - на аналогичные меньшего размера, и так далее. Карпентер, используя крупные треугольники, дробил их на 4 мелких, и так далее, до тех пор, пока у него не получился реалистичный горный пейзаж. Таким образом, он стал первым художником, который применил фрактальный алгоритм в компьютерной графике для построения требуемого изображения. Сегодня этот принцип используется для имитации различных реалистичных природных форм.

Уже через несколько лет Лорен применил свои наработки в масштабном проекте – анимационном ролике Vol Libre, показанном на Siggraph в 1980 году. Это видео потрясло многих, и его создатель был приглашен работать в Lucasfilm. Здесь аниматор смог реализовать в полной мере, он создал трехмерные ландшафты для полнометражного фильма "Star Trek". Любая современная программа («Фракталы») или приложение для создания трехмерной графики (Terragen, Vue, Bryce) использует все тот же алгоритм для моделирования текстур и поверхностей.

В прошлом лазерный физик, Беддарт создал ряд весьма интригующих геометрических фигур, которые назвал фракталы Фаберже. Внешне они напоминают декоративные яйца русского ювелира, на них такой же блестящий замысловатый узор. Беддарт использовал шаблонный метод для создания своих цифровых визуализаций моделей. Полученные изделия поражают своей красотой. Изюминка заключается в том, что построить такой фрактал сможет любой желающий, воспользовавшись программной библиотекой WebGL. Она позволяет исследовать в реальном времени различные фрактальные структуры.

Природа создана из самоподобных фигур, просто мы этого не замечаем. Достаточно посмотреть через увеличительное стекло на нашу кожу или листок дерева, и мы увидим фракталы. Или взять, к примеру, ананас или даже хвост павлина – они состоят из подобных фигур. А сорт капусты брокколи Романеску вообще поражает своим видом, ведь это поистине можно назвать чудом природы.

Оказывается, фракталы – это не только геометрические фигуры, они могут быть и звуками. Так, музыкант Джонатан Колтон пишет музыку с помощью фрактальных алгоритмов. Он утверждает, что такая мелодия соответствует природной гармонии.

Индикатор-фрактал нашла весьма неожиданное применение. На ее основе создан инструмент для анализа рынка фондовой биржи, и, как следствие, его начали применять на рынке «Форекс». Сейчас индикатор-фрактал находится на всех торговых платформах и применяется в торговой технике, которую называют ценовым прорывом. Разработал эту методику Билл Вильямс. Как комментирует свое изобретение автор, данный алгоритм является сочетанием нескольких «свечей», в котором центральная отражает максимальную либо, наоборот, минимальную экстремальную точку.

Таким образом, в хаосе, который окружает нас, на самом деле существуют идеальные формы. Природа является лучшим архитектором, идеальным строителем и инженером. Она устроена весьма логично, и если мы не можем найти закономерность, это не значит, что ее нет. Может быть, нужно искать в ином масштабе. С уверенностью можно сказать, что фракталы хранят еще немало секретов, которые нам только предстоит открыть.

Литература.

1. Теория Фракталов [Электронный ресурс].// http://levinaleks.narod.ru/fractals2.htm#_Toc104640354./.
2. Современное состояние и проблемы естественных наук : сборник трудов II Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов (Юрга, 4–5 июня, 2015 г.) / Юргинский технологический институт. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2015. – 313 с
3. Современное состояние и проблемы естественных наук: сборник трудов Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов / Юргинский технологический институт. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 357 с.
4. А. А. Кириллов. Повесть о двух фракталах. — Летняя школа «Современная математика». — Дубна, 2007.
5. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: «Институт компьютерных исследований», 2002.