АСИМПТОТИКИ И НЕВЯЗКА УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА-КОЛМОГОРОВА-ПЕТРОВСКОГО-ПИСКУНОВА С АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

А.А. Прозоров
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов, ассистент, к.ф.-м.н. Е.А. Левченко
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: aap51@tpu.ru

ASYMPTOTICS AND RESIDUAL FOR FISHER-KOLMOGOROV-PETROVSKII-PISKUNOV EQUATION WITH ANOMALOUS DIFFUSION

A.A. Prozorov
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu.Trifonov, Assistant Professor, PhD. E.A. Levchenko
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin ave., 30, 634050
E-mail: aap51@tpu.ru

Annotation. *Asymptotic solutions to the nonlocal one-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation with fractional derivatives in the diffusion operator are constructed. Fractional derivative is determined in accordance with the Weil, Grunwald–Letnikov and Liouville approaches. Asymptotic solutions in a class of functions that are perturbations of a quasi-steady-state exact solution are found. The asymptotics constructed tend to this quasi-steady-state solution at large times. It is shown that the fractional derivatives lead to drift of the mass center of the system and break the symmetry of the initial distribution*

Нелокальное обобщенное уравнение Фишера–Колмогорова-Петрова-Пискунова (ФКПП) [1, 2] с аномальной диффузией [3] можно записать в виде:

$$u_t(x,t) = Du_\alpha(x,t) + au(x,t) - u(x,t)\int_{-l}^{l} b_\gamma(x,y)u(y,t)dy\,. \tag{1}$$

Здесь и далее дробная производная понимается в смысле производной Вейля для периодических функций [3]. Функция влияния $b_\gamma(x,y) = b_\gamma(x-y)$ предполагается чётной, $b_\gamma(x) = b_\gamma(-x)$, и разложимой в ряд Фурье:

$$b_\gamma(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{i\omega_m x}\,, \qquad b_m = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} b(z)e^{-i\omega_m z}\,dz\,, \tag{2}$$

где $\omega_m = \pi m / l$. Будем искать решение уравнения (1) в виде разложения в ряд Фурье

$$u(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m(t)e^{i\omega_m x}\,, \qquad \beta_m(t) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u(z,t)\,e^{-i\omega_m z}\,dz\,. \tag{3}$$

Подставим разложения Фурье (2), (3) в уравнение (1). Для этого вычислим дробную производную $u_\alpha(x,t)$ с помощью разложения (3) в соответствии с правилом вычисления дробной производной по Вейлю [3]:

$$u_\alpha(x,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(i\,\omega_m)^\alpha\beta_m(t)e^{i\omega_m x}\ . \tag{4}$$

Здесь под i^α понимается главная ветвь корня $i^\alpha=e^{i\frac{\pi\alpha}{2}}$. Продифференцируем соотношение (3) по времени, воспользовавшись уравнением (1) и разложениями (2) и (3) для коэффициентов $\beta_k(t)$ (3) получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot\beta_k=\bar a_k\beta_k-\sum_{j=-\infty}^{\infty}\beta_{k-j}b_{k-j}\beta_j,\quad k=\overline{-\infty,\infty}. \tag{5}$$

где $\bar a_k=D\left(i\omega_k\right)^\alpha+a.$ Система (5) допускает решение вида

$$\beta_k(t)=\beta_0(t)\delta_{k0},\quad \beta_0(t)=\frac{\beta_{00}e^{at}}{1+\dfrac{b_0\beta_{00}}{a}(e^{at}-1)}\quad \beta_k\,|_{t=0}=\beta_{00}\delta_{k0}. \tag{6}$$

Сделаем в системе уравнений (5) замену переменных $t=T\tau$ (T – характерное время эволюции системы). Тогда для правой части системы (5) запишем $\dot\beta_k=\dfrac{1}{T}\dfrac{d\beta_k}{d\tau}$. Будем искать асимптотические решения β_k получившейся системы при $T\to\infty$ в виде

$$\beta_k(t)=\beta_k^{(0)}(\theta,\tau)+\frac{1}{T}\beta_k^{(1)}(\theta,\tau)+..., \tag{7}$$

где функции $\beta_k^{(m)}(\theta,\tau)$ подлежат определению. Переменную τ можно интерпретировать как «медленное время», а переменную $\theta=\varphi(\tau)T$ как «быструю» переменную. С учетом правил дифференцирования сложной функции получим

$$\left[\varphi_\tau\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial\tau}\right]\left(\beta_k^{(0)}+\frac{1}{T}\beta_k^{(1)}+...\right)=\bar a_k\left(\beta_k^{(0)}+\frac{1}{T}\beta_k^{(1)}+\dots\right)-\sum_{p=-\infty}^{\infty}b_p\left(\beta_{k-p}^{(0)}+\frac{1}{T}\beta_{k-p}^{(1)}+\dots\right)\left(\beta_p^{(0)}+\frac{1}{T}\beta_p^{(1)}+\dots\right).$$

Приравняв слагаемые при одинаковых степенях $1/T$ и решив полученные уравнения , запишем

$$\beta_k^{(0)}(\theta,\tau)=\beta_0^{(0)}(\theta,\tau)\delta_{k0},\quad \beta_0^{(0)}(\theta,\tau)=\frac{\beta_{00}e^\theta}{1+\dfrac{b_0\beta_{00}}{a}(e^\theta-1)}=\frac{\beta_{00}e^{at}}{1+\dfrac{b_0\beta_{00}}{a}(e^{at}-1)}. \tag{8}$$

$$\beta_j^{(1)}(\theta,\tau)=\frac{\beta_{0j}^{(1)}e^{\bar a_j\theta/a}}{\left(1+\dfrac{b_0\beta_{00}^{(0)}}{a}(e^\theta-1)\right)^{(b_j+b_0)/b_0}}=\frac{\beta_{0j}^{(1)}e^{\bar a_j t}}{\left(1+\dfrac{b_0\beta_{00}^{(0)}}{a}(e^{at}-1)\right)^{(b_j+b_0)/b_0}}.$$

Здесь $\varphi(\tau)=a\tau,\quad \theta=\varphi(\tau)T=at.$ Разложение (7) в силу (3) индуцирует разложение решения:

$$u(x,t)=u^{(0)}(x,t)+\frac{1}{T}u^{(1)}(x,t), \tag{9}$$

где $u^{(0)}(x,t)$ определено в (8), а $u^{(1)}(x,t)$ вещественна и определена выражением

$$u^{(1)}(x,t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\beta_{0j}^{(1)}e^{\tilde a_j t}e^{i\omega_j x}}{\left(1+\dfrac{b_0\beta_{00}^{(0)}}{a}(e^{at}-1)\right)^{(b_j+b_0)/b_0}}=\frac{\beta_{00}^{(1)}e^{at}}{\left[1+\dfrac{b_0\beta_{00}^{(0)}}{a}(e^{at}-1)\right]^2}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta_{0j}^{(1)}e^{\tilde\Omega_j^{(\alpha)}t}\cos\left[\Omega_j^{(\alpha)}t+\omega_j x\right]}{\left[1+\dfrac{b_0\beta_{00}^{(0)}}{a}(e^{at}-1)\right]^{(b_j+b_0)/b_0}}. \tag{10}$$

Здесь $\Omega_j^{(\alpha)}=D\left|\dfrac{j\pi}{l}\right|^\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)\mathrm{sign}(j)$. Поставим для уравнения (1) задачу Коши, положив

$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x) = \beta_{00} + \frac{1}{T}\exp(-x^2)\,,\; b_\gamma(x,y) = b_0 \exp\left\{-(x-y)^2\right\},\; a = 0{,}5\,,\; T = 20\,,\; D = 0{,}01\,,\; b_0 = 1.$$

Графики функции $u(x,t)$ для различных α приведены на рис.1.

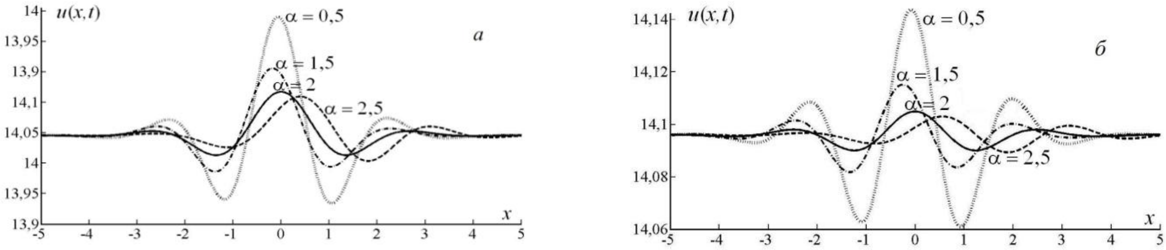

Рис. 1. Плотность распределения $u(x,t)$ в моменты времени $t = 15$ (а), $t = 20$ (б) для различных α

Как видно из рис. 1, из начального симметричного распределения гауссовского типа с одним пиком в процессе эволюции, как и в случае обычной диффузии [2], формируется распределение с дополнительными пиками, поведение которых зависит от порядка дробной производной. Высота этих пиков увеличивается по сравнению с высотой пиков при обычной диффузии ($\alpha = 2$), и распределение перестает быть симметричным Чем ниже порядок дробной производной, тем больше смещение графика по сравнению с обычной диффузией и сильнее отклонение от стационарного состояния.[4]

Подставим функцию $u(x,t)$ в уравнение (1) и получим

$$u_t(x,t) - Du_\alpha(x,t) - au(x,t) + u(x,t)\int_{-l}^{l} b_\gamma(x-y)u(y,t)dy = g(x,t)$$

Функция $g(x,t)$ называется невязкой уравнения и имеет вид: $g(x,t) = \frac{1}{T^2}\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{(1)}_{0k}\beta^{(1)}_{0j} e^{(\bar{a}_j+\bar{a}_k)t+i(\omega_k+\omega_j)x} b_j}{\left[1+\frac{b_0\beta^{(0)}_{00}}{a}(e^{at}-1)\right]^{2+\frac{(b_j+b_k)}{b_0}}}$.

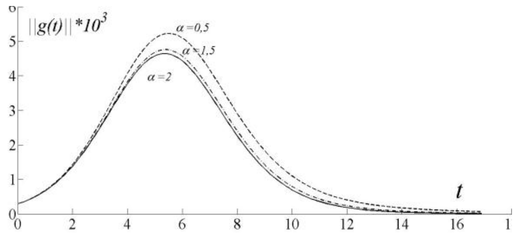

Рис.2. График нормы функции $g(x,t)$

На рис.2 изображена норма $\|g(x,t)\|$ – в пространстве $L_1[-l,l]$. Нетрудно заметить, что норма невязки стремится к нулю, а следовательно приближенное решение стремится к точному

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Annual Eugenics, 1937. V.7. P. 255.
2. Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. С. 38.
4. Прозоров А.А., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В Асимптотики одномерного нелокального уравнения Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова с аномальной диффузией // Известия вузов физика.- 2015.- Т.7.- (в печати).