

## Секция 2: Математическое моделирование прикладных задач

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ  
ДИЛАТАНСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ**

*А.Ф. Ревуженко \**, *д.т.н.*, *С.В. Клишин \**, *д.т.н.*, *В.Ю. Бегляков \*\**, *к.т.н.*

*\*Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН,  
630091, г. Россия, Новосибирск, Красный проспект, 54*

*\*\*Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского  
Томского политехнического университета  
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26  
E-mail: [begljakov@rambler.ru](mailto:begljakov@rambler.ru)*

В настоящее время метод дискретных элементов приобретает все большую популярность и используется для решения ряда задач геомеханики. Суть его состоит в том, что реальная среда заменяется некоторой упаковкой дискретных частиц, между которыми постулируются те или иные законы взаимодействия [1, 2]. Формы частиц также представляют собой свободный многомерный параметр, который должен быть выбран из дополнительных соображений. Этот метод является принципиальной альтернативой классическим методам, основанным на традиционных представлениях механики сплошных сред.

Как известно, преимущества метода дискретных элементов заключаются в следующем. В рамках данного метода не возникает дополнительных трудностей при решении задач с большими деформациями и поворотами. Кроме того, можно без принципиальных усложнений описывать локализацию сдвигов и физически нелинейные эффекты [3, 4]. При этом никаких данных о непрерывных определяющих уравнениях среды не требуется.

Роль последнего обстоятельства неоднозначна. Фактически это обстоятельство означает следующее: решая задачу методом дискретных элементов, у нас нет полного представления о том, для какой, собственно, среды мы ее решаем. Это означает, что в вопросе о степени адекватности полученных результатов, также ясности может не быть.

Действительно, задать начальную упаковку частиц и законы взаимодействия между частицами — это совсем не то же самое, что задать определяющие уравнения деформирования среды. В определяющих уравнениях содержится информация о поведении элементарных объемов среды. В пределах элементарного объема распределение напряжений и деформаций можно считать постоянными, а распределение скоростей и перемещений — линейными по координатам (градиентные модели исключим.) Таким образом, располагая определяющими уравнениями, мы ясно представляем себе макросвойства среды, с которой имеем дело. Кроме того, в нашем распоряжении оказывается и весь арсенал средств, который выработан в непрерывной механике за последние 200 лет. Он включает в себя средства для анализа типа уравнений, определения скоростей различных типов волн, теоремы о предельных нагрузках, критерии устойчивости и многое другое. Иными словами, еще до решения конкретной задачи, мы уже основные черты решения знаем заранее. Это существенно облегчает как поиск адекватных постановок задач, так и интерпретацию полученных решений.

При использовании метода дискретных таких возможностей уже нет. Поэтому возникает необходимость в «наведении моста» между двумя указанными выше подходами. Конечная цель «создания моста» состоит в том, чтобы соединить вместе преимущества метода дискретных элементов и методов механики сплошных сред.

В работе [1] это предлагается сделать следующим образом. Вначале задаются форма частиц, их грансостав и алгоритм формирования начальной упаковки частиц. Задаются также условия взаимодействия между частицами. Далее (до исследования основной задачи) предлагается решение серии вспомогательных задач. Цель решения данных задач состоит в том, чтобы понять, каким именно определяющим уравнениям соответствуют выбранные упаковки частиц и законы взаимодействия между ними. Поэтому вспомогательные задачи ставятся таким образом: выбирается подходящая область  $V$ , ограниченная поверхностью  $S$ . На поверхности  $S$  задаются скорости или смещения, линейные по координатам. Коэффициенты, которые фигурируют в линейных зависимостях, однозначно определяют деформации, скорости деформаций, повороты и скорости поворотов элементарного объема сплошной среды, если его отождествить с объемом  $V$ . Данные коэффициенты могут зависеть только от времени и не должны зависеть от координат. Смещения на границе  $S$  вызывают силы реакции между частицами, а также на самой границе  $S$ . Осредняя эти силы по соответствующим сечениям тела  $V$ , можно получить тензоры средних напряжений и их скоростей. В результате можно найти связь напряжений и деформаций для некоторой траектории нагружения. Такая связь относится уже к опре-

деляющим уравнениям среды. В вырожденном случае в уравнении могут содержаться либо только напряжения, либо только деформации, либо их скорости. В первом случае речь идет об условии предельного состояния среды, во втором — о её дилатансионных характеристиках.

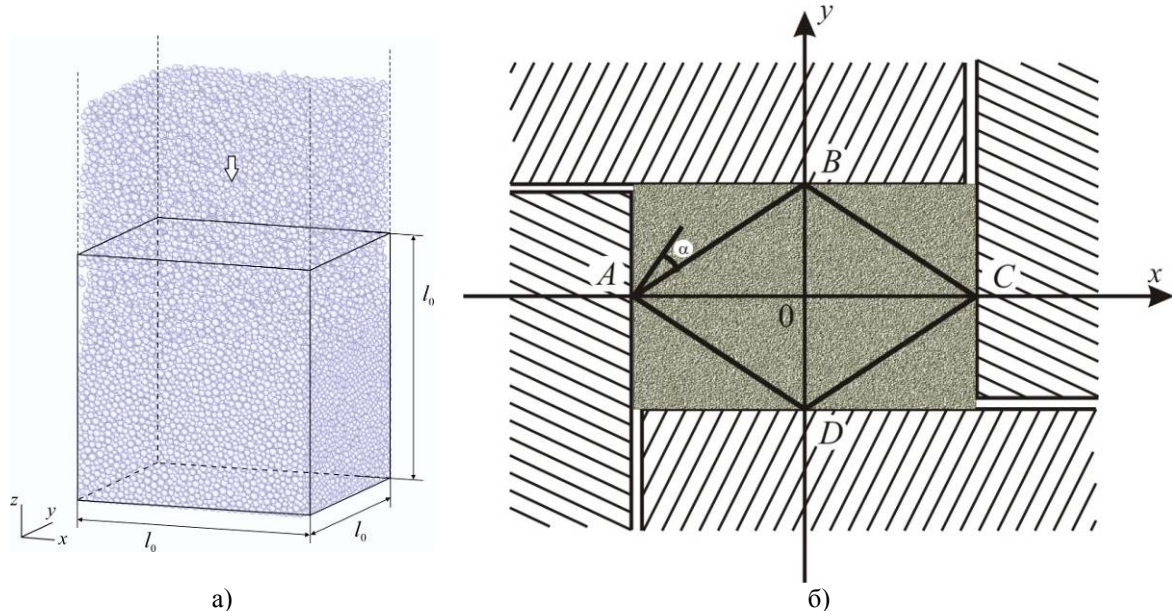


Рис. 1. Схема численного эксперимента: засыпка дискретных элементов в контейнер под действием силы тяжести (а); схема нагружения (б)

В целом описанная выше программа является весьма обширной, и описание ее результатов выходит за рамки одной статьи. Поэтому ниже ограничимся описанием макросвойств только одного типа упаковок сферических частиц. Кроме того, ограничимся монотонными нагружениями без поворота осей тензора деформации. Отношение максимального радиуса частицы к минимальному равнялось 2. Общее количество частиц в численных экспериментах составляло порядка 70 000, распределение радиусов в указанном диапазоне выбиралось на основе равномерного закона. Данными частицами заполнялась область в виде куба длиной ребра  $l_0 = 1$ . Формирование упаковки осуществлялось путем создания начального распределения всего набора из первоначально не контактирующих между собой частиц на определенной высоте над неподвижной нижней гранью  $z = 0$  и последующей их усадке под действием силы тяжести с учетом контактного взаимодействия друг с другом и границами емкости (контейнера) (рис. 1а). По достижению состояния равновесия частицы, у которых вертикальная координата центра тяжести не удовлетворяла соотношению  $z_i \leq 1$ , удалялись. Значения угла сухого трения  $\varphi_{ij}$  между частицами с номерами  $i$  и составляли  $10^\circ$  и  $30^\circ$ . Трение между частицами и границей отсутствует. Плотность частиц  $\rho_i = 2500 \text{ кг/м}^3$ , модуль упругости  $E_i = 10 \text{ ГПа}$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ), вязкость отсутствует.

Нагружение осуществлялось следующим образом. Боковые грани куба симметрично смещались в направлении осей  $\theta_x$  и  $\theta_y$  (рис. 1б). Программа нагружения выбиралась таким образом, чтобы площадь камеры в плане оставалась неизменной:

$$l_x \cdot l_y = \text{const}, l_x = AC, l_y = BD.$$

В процессе нагружения, значение  $l_x$  монотонно увеличивалось от 1, а значение  $l_y$  — уменьшалось. В данных условиях область  $ABCD$  будет испытывать большие сдвиги и на всей траектории нагружения ее площадь  $ABCD$  будет оставаться постоянной. Именно такой сдвиг был экспериментально реализован в работе [5]. Представленная схема нагружения удобна для исследования дилатансии в сыпучем материале, которую можно сразу вычислить по изменению высоты образца.

Боковые поверхности емкости предполагались абсолютно жесткими и гладкими. На верхней грани задавались либо нулевые касательные и постоянные нормальные напряжения (условие пригрузки), ибо нулевые значения касательных напряжений и нулевые вертикальные компоненты смещений. Последнее соответствует условиям, когда положительная дилатансия материала подавляется фиксированной жесткой гладкой плитой.

В процессе численного счета выводились параметры образца

$$\varepsilon_x = \frac{l_x - l_0}{l_0}, \varepsilon_y = \frac{l_y - l_0}{l_0}, \varepsilon_z = \frac{l_z - l_0}{l_0},$$

и напряжения

$$\sigma_x = \frac{1}{l_y \cdot l_z} \sum_{i=1}^{N_x} F_{x,i}, \sigma_y = \frac{1}{l_x \cdot l_z} \sum_{i=1}^{N_y} F_{y,i},$$

где  $F_{x,i}$  и  $F_{y,i}$  — горизонтальная и вертикальная компонента вектора контактной силы, действующей на стенку со стороны  $i$ -й частицы соответственно. Как отмечалось  $l_0 = 1$  — начальная длина ребер области. Суммирование производилось только по частицам, находящимся в контакте с границей;  $N_x$  и  $N_y$  — количество контактов частиц и соответствующей границы;  $l_z$  — текущая высота образца. По напряжениям на боковых гранях, можно вычислить величину  $\zeta = \sigma_x / \sigma_y$  — коэффициент бокового распора.

Следует подчеркнуть, что здесь значения  $\zeta$  вычисляются методом дискретных элементов, не прибегая ни к каким уравнениям континуальной механики. С другой стороны, из континуальной теории предельного равновесия следует, что значение коэффициента бокового распора должно равняться  $\xi = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)$ , где  $\Phi$  — эффективный угол внутреннего трения среды. Поэтому по значениям  $\zeta$  можно

определить эффективное значение угла  $\Phi$ , которое должно фигурировать в континуальной модели.

На рис. 2а показана дилатансионная кривая, а на рис. 2б — коэффициент бокового распора  $\zeta$  при постоянной пригрузке на верхней грани области  $\sigma_z = const$ . Сплошная линия соответствует значению угла сухого трения между частицами  $\varphi_{ij} = 10^\circ$ , а штриховой — значению  $\varphi_{ij} = 30^\circ$ . Видно, что на начальном этапе деформирования происходит уплотнение материала, а затем — разрыхление. Это качественно соответствует экспериментальным данным, представленным в [5, 6] для песка (то есть для материала с несферическими частицами и другим грансоставом).

Из диаграммы на рис. 2б видно, что материал переходит в предельное состояние при  $\varepsilon_x = 0.2$ . В экспериментах все диаграммы приводились как функции угла  $\alpha$  (см. рис. 1б). Легко показать, что  $\alpha = 90^\circ - 2 \arctg(1 + \varepsilon_x)^{-2}$ .

Следовательно, значению  $\varepsilon_x = 0.2$  отвечает угол сдвига, который равняется  $\alpha = 20^\circ$ .

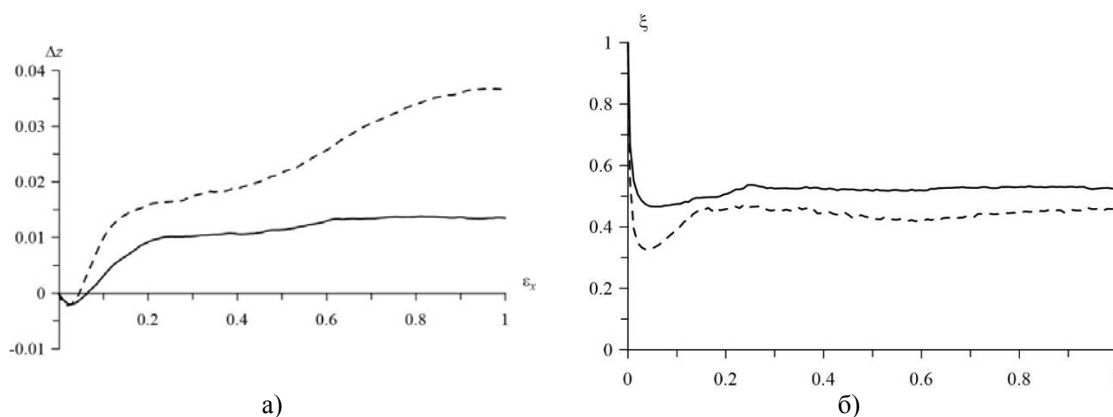


Рис. 2. Результаты численного эксперимента при постоянной пригрузке на верхней границе ( $\sigma_z = const$ ): дилатансионная кривая (а); коэффициент бокового распора  $\zeta$  (б). Сплошная линия соответствует значению угла сухого трения между частицами  $\varphi_{ij} = 10^\circ$ , штриховая —  $\varphi_{ij} = 30^\circ$

На рис. 3 представлена величина  $\zeta$  в случае фиксированной верхней границы ( $\varepsilon_z = 0$ ). Здесь, в отличие от предыдущего условия, значения  $\zeta$  для  $\varphi_{ij} = 10^\circ$  превышают значения данной величины для угла сухого трения между частицами, равного  $30^\circ$ .

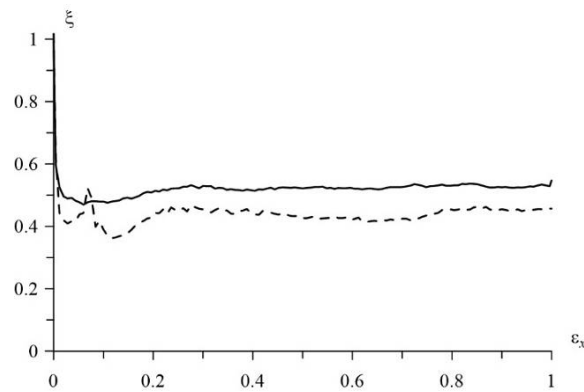


Рис. 3. Коэффициент бокового распора  $\zeta$  в численном эксперименте с фиксированной верхней границей. Сплошная линия соответствует значению угла сухого трения между частицами  $\varphi_{ij} = 10^\circ$ , штриховая —  $\varphi_{ij} = 30^\circ$

При таком краевом условии объем образца остается неизменным, то есть дилатансия подавляется за счёт увеличения напряжений на границе образца (рис. 4).

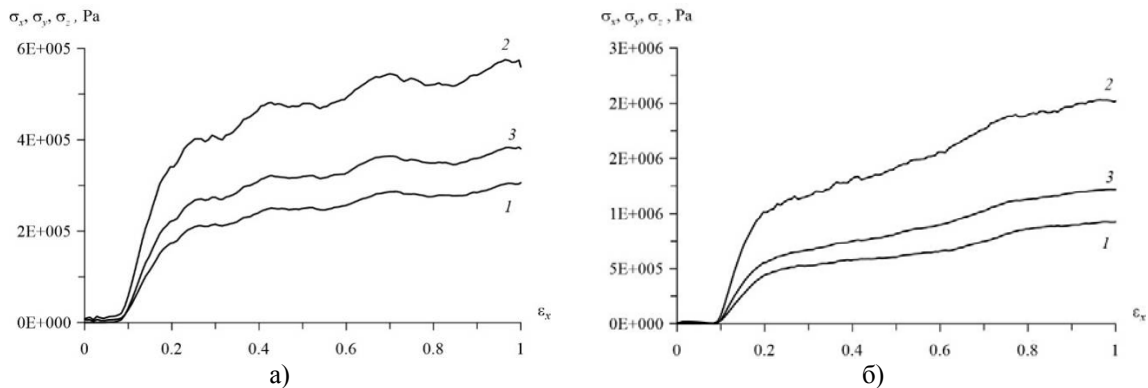


Рис. 4. Напряжения, действующие на границах образца при фиксированной верхней грани ( $\varepsilon_z = 0$  при  $z = l_0$ ): угол сухого трения между частицами  $\varphi_{ij} = 10^\circ$  (а);  $30^\circ$  (б)

#### Выводы

Таким образом, до величины сдвигов порядка 0.2 ( $\alpha \sim 20^\circ$ ) состояние образца можно отнести к допредельному. При больших сдвигах образец переходит в предельное состояние. Полученные численные данные можно использовать в соответствующих континуальных моделях сплошной среды.

#### Литература.

1. Revuzhenko A.Ph., Klishin S.V. Numerical Method for Constructing a Continual Deformation Model Equivalent to a Specified Discrete Element Model // Physical Mesomechanics, 2013, Volume 16, Issue 2, pp. 152–161.
2. Kazantsev A.A., Klishin S.V., Revuzhenko A.F. On the pressure of loose material on the bottom and walls of a drum // Applied Mechanics and Materials, 2014, vol. 682, pp 375–379.
3. Lavrikov S.V. Simulation of geomaterial flow in convergent channels with consideration for internal friction and dilatancy // Journal of Mining Science, 2010, Vol. 46, Issue 5, pp. 485–494.
4. Aksenov V.V., Lavrikov S.V., Revuzhenko A.F. Numerical modeling of deformation processes in rock pillars // Applied Mechanics and Materials, 2014, vol. 682, pp 203–205.
5. Bobryakov A.P., Revuzhenko A.Ph. Uniform displacement of a granular material. Dilatancy // Journal of Mining Science, 1982, Volume 18, Issue 5, pp. 373–379.
6. Bobryakov A.P., Revuzhenko A.Ph., Shemyakin E.I. Uniform shear of granular material. Localization of deformation // Journal of Mining Science, 1983, Volume 19, Issue 5, pp. 372–376.