Воронин Александр Васильевич, канд. техн. наук, доцент кафедры интегрированных компьютерный систем управления Института кибернетики ТПУ.
E-mail: voroninav@tpu.ru
Область научных интересов: теория автоматического управления, моделирование систем, исследование систем управления автономными объектами.
Щелканова Татьяна Алексеевна, магистрант кафедры интегрированных компьютерных систем управления Института кибернетики ТПУ.
E-mail: 3ene4ka@sibmail.com
Область научных интересов: теория автоматического управления, исследование систем управления для неустойчивых и нейтральных объектов.

УДК 621.37

СИНТЕЗ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

А.В. Воронин, Т.А. Щелканова

Томский политехнический университет
E-mail: 3ene4ka@sibmail.com

Статья посвящена исследованию компенсационного метода синтеза полиномиальных регуляторов с учетом изменений в управляемости и наблюдаемости замкнутой системы. Проанализирован алгоритм получения регуляторов по методу желаемой передаточной функции, позволяющий получить близкие показатели качества как по управлению, так и по возмущению.

Ключевые слова:
Система автоматического регулирования, передаточная функция, нули, полюсы, возмущающее воздействие, управляющее воздействие.

Введение

Подход к синтезу регуляторов линейных систем посредством предварительного выбора желаемой передаточной функции замкнутой системы известен достаточно давно [1]. Операторно-структурная схема, коэффициент усиления системы автоматического регулирования (САР) и технически осуществимые параметры регулятора определяются из условия равенства передаточной функции проектируемой системы регулирования и желаемой передаточной функции. Метод прост и нагляден, достаточно формализован и приводит к явному решению в форме передаточной функции регулятора определенной структуры и конкретных параметров.

Вместе с тем, использование метода желаемой передаточной функции требует осторожного обращения. Его применение без предварительного анализа свойств объекта управления может привести к неработоспособной замкнутой системе, прежде всего, из-за проблем с грубостью.

Известно несколько модификаций метода желаемой передаточной функции. Алгоритм, изложенный в работе [2] предполагает, что сокращение правых и нулевых полюсов и нулей в передаточных функциях объекта и регулятора является недопустимым из-за соображений грубости системы, левые же нули могут и даже должны сокращаться.

Такой подход имеет ряд особенностей, в частности, в связи с тем, что задача у САР двоякая. С одной стороны, САР должна наиболее точно отрабатывать задающий сигнал, с другой – минимально пропускать на выход возмущающие воздействия. При этом обычно предполагается, что изучение переходной функции по управлению позволяет судить и о прохождении через систему возмущающих воздействий. Но это справедливо только тогда, когда в передаточной функции системы нет сокращающихся нулей и полюсов. Более того, когда система достаточно далека от границы неуправляемости или ненаблюдаемости. В противном случае синтез на основе переходной функции по управлению может не дать желаемого результата.

Описание метода желаемой передаточной функции

Идея синтеза регулятора методом желаемой передаточной функции состоит в том, что для известной передаточной функции объекта

$$W_0(s)=\frac{P(s)}{R(s)}=\frac{p_m s^m + p_{m-1}s^{m-1}+\ldots+p_0}{r_n s^n + r_{n-1}s^{n-1}+\ldots+r_0}$$

и желаемой функции замкнутой системы $W_ж(s)$ в соответствии с рис. 1 можно записать

$$\frac{W_{рег}(s)\cdot W_O(s)}{1+W_{рег}(s)\cdot W_O(s)}=W_ж(s), \quad (1)$$

где $W_{рег}(s)$ – искомая передаточная функция регулятора.

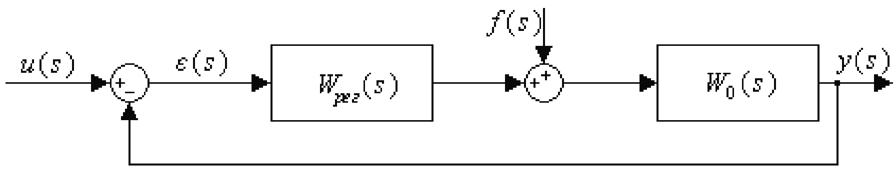

Рис. 1. Структурная схема системы регулирования

Разрешив равенство (1) относительно $W_{рег}(s)$, получаем:

$$W_{рег}(s)=\frac{1}{W_O(s)}\cdot\frac{W_ж(s)}{1-W_ж(s)}. \quad (2)$$

В соответствии с методикой [2] выполним факторизацию передаточной функции объекта, то есть представим ее в виде

$$W_O(s)=\frac{\mathrm{P}(s)}{\mathrm{R}(s)}=\frac{\mathrm{P}^-(s)\cdot\mathrm{P}^+(s)}{\mathrm{R}^-(s)\cdot\mathrm{R}^+(s)},$$

где $\mathrm{P}^-(s)$, $\mathrm{R}^-(s)$ – полиномы с левыми нулями, $\mathrm{P}^+(s)$, $\mathrm{R}^+(s)$ – полиномы с правыми и нейтральными нулями. Будем считать, что полиномы $\mathrm{P}^+(s)$, $\mathrm{R}^+(s)$ имеют единицу при старшей степени s. Это всегда можно сделать, отнеся коэффициент передачи к $\mathrm{P}^-(s)$, $\mathrm{R}^-(s)$. Подставив в (2) факторизованную передаточную функцию объекта управления, получим

$$W_{рег}(s)=\frac{\mathrm{R}^-(s)\cdot\mathrm{R}^+(s)}{\mathrm{P}^-(s)\cdot\mathrm{P}^+(s)}\cdot\frac{W_ж(s)}{1-W_ж(s)}.$$

Для того чтобы правые полюсы и нули объекта не могли быть скомпенсированы правыми нулями и полюсами регулятора, его передаточная функция не должна содержать полинома $R^+(s)$ в числителе и полинома $P^+(s)$ в знаменателе. Это возможно, если выполняются условия

$$W_ж(s)=\frac{P^+(s)\cdot M(s)}{G(s)}, \quad (3)$$

$$1-W_ж(s)=\frac{R^+(s)\cdot N(s)}{G(s)}, \quad (4)$$

где $M(s)$ и $N(s)$ – некоторые неопределенные полиномы, а $G(s)$ – знаменатель желаемой передаточной функции $W_ж(s)$. Исключив $W_ж(s)$ из (3) и (4) получим основное уравнение синтеза

$$P^+(s)\cdot M(s)+R^+(s)\cdot N(s)\cdot s^r = G(s), \quad (5)$$

из которого, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях обеих частей полиномиального уравнения (5), могут быть получены коэффициенты полиномов $M(s)$ и $N(s)$.

Передаточную функцию регулятора с учетом (3) и (4) можно представить в виде

$$W_{рег}(s)=\frac{\mathrm{R}^-(s)}{\mathrm{P}^-(s)}\cdot\frac{M(s)}{N(s)\cdot s^r}. \quad (6)$$

Выбор порядков полиномов $G(s), N(s), M(s)$ выполняется из условий разрешимости, физической осуществимости и грубости, которые могут быть записаны в виде системы неравенств относительно степеней рассматриваемых полиномов. Для этого введем величину n_K для обозначения порядка полинома $K(s)$.

Из условия физической реализуемости желаемой передаточной функции (4) можно записать условие

$$n_G \geq n_{P^+} + n_M, \tag{7}$$

где n_G, n_{P^+}, n_M – порядки полиномов $G(s), P^+(s), M(s)$, соответственно.

Относительный порядок передаточной функции в левой части (4) равен нулю. Соответственно относительный порядок передаточной функции в правой части (4) также должен быть равен нулю

$$n_G = n_{R^+} + n_N + r, \tag{8}$$

где r – необходимый порядок астатизма синтезируемой системы.

Для выполнения условия грубости, необходимо, чтобы относительный порядок передаточной функции регулятора был неотрицательным. Очевидно, что это условие выполняется, если

$$n_{R^-} + n_M \leq n_{P^-} + n_N + r. \tag{9}$$

Еще одно условие связано с числом уравнений, получаемых из соотношения (5). Так как число уравнений, которые могут быть сформированы равно $n_G + 1$, а число неизвестных равно $n_M + n_N + 2$, для разрешимости системы должно выполняться неравенство

$$n_G + 1 \leq n_M + n_N + 2 \text{ или } n_G \leq n_M + n_N + 1. \tag{10}$$

Выражения (7–10) являются основой при определении степеней полиномов $M(s)$ и $N(s)$. Из этих же соотношений может быть получены неравенства для определения порядка синтезируемой системы

$$n_G - n_R \geq n_{R^+} - n_{P^-} + r - 1, \tag{11}$$

$$n_G \geq n_R - n_{P^-}. \tag{12}$$

Полученным условиям отвечает большое число различных регуляторов, которые могут существенно отличаться по сложности, обеспечиваемым точностным и динамическим показателям, и т. д.

Особенностью описанного метода является его «заточенность» на определенную передаточную функцию, т. е. на определенную пару «вход–выход», так как он принципиально предполагает сокращение устойчивых пар левых нулей и полюсов. В результате такого сокращения система становится неуправляемой или ненаблюдаемой, но только по управляющему входу. По возмущающему входу потери управляемости или наблюдаемости может не быть, соответственно переходные процессы и установившиеся режимы по разным входам могут иметь существенно различные характеристики. Причем, эта разница будет тем больше, чем существеннее отличаются друг от друга исходная и желаемая динамики замкнутой системы.

Пусть мы имеем неустойчивый объект с передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{16}{s^2 - 16}. \tag{13}$$

Операторно-структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 1 и содержит два входа – по управлению $u(t)$ и по возмущению $f(t)$. Рассмотрим различные варианты интегро-дифференцирующих компенсационных регуляторов с точки зрения обеспечения одних и тех же характеристических уравнений по различным входам.

Исходя из уравнений (11, 12) физически реализуемый регулятор для объекта (13) может быть получен при выборе желаемого полинома замкнутой системы второго порядка. Примем, что желаемая замкнутая система является статической и что желаемым является биномиальное размещение полюсов в точке $s=-10$. Соответственно

$$G(s)=(s+10)^2=s^2+20s+100.$$

Из условия (9) получаем $N(s)=n_1 s+n_0$. С учетом условия реализуемости полином $M(s)$ может иметь нулевой порядок, т. е. $M(s)=m_0$. Подставив $M(s)$ и $N(s)$ в уравнение (5) имеем

$$n_1 s^2+(n_0-4n_1)s+(m_0-4n_0)=s^2+20s+100.$$

Сформированная на основе полученного уравнения система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} n_1 &= 1, \\ n_0-4n_1 &= 20, \\ m_0-4n_0 &= 100 \end{aligned}$$

имеет единственное решение: $n_1=1, n_0=24, m_0=196$, и передаточная функция регулятора получается в виде

$$W_{рег}(s)=\frac{s+4}{16}\cdot\frac{196}{s+24}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по управлению с учетом сокращения левого полюса объекта и левого нуля регулятора записывается как $W_{зам}(s)=\dfrac{196}{(s+10)^2}$.

Легко проверить, что полученная система является ненаблюдаемой и мода, соответствующая полюсу $s=-4$, не проходит на выход.

Однако передаточная функция по возмущению, вычисленная на основе схемы на рис. 1, равна

$$W_f(s)=\frac{16(s+24)}{(s+4)(s+10)^2}.$$

Как видно, здесь нет сокращения нуля и полюса и даже нет близких нуля и полюса. Таким образом, переходная функция по возмущению имеет третий порядок и содержит моду, которую по управлению удалось компенсировать.

Ниже на рис. 2 представлены две кривые переходных процессов: одна соответствует переходному процессу по управлению, другая – по возмущению. Кривые нормированы по уровню. Видно, что процесс по возмущению существенно более затянут. Очевидно, это следствие того, что устойчивый полюс объекта не скомпенсирован.

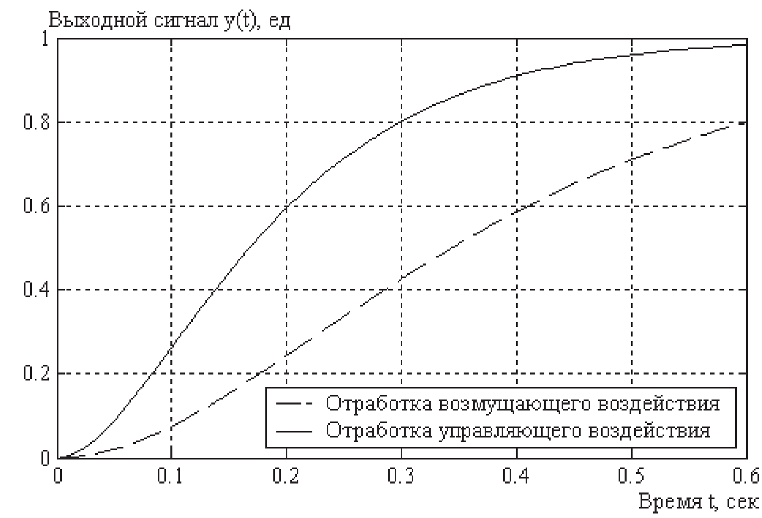

Рис. 2. Переходные характеристики: по управлению и по возмущению

Очевидно также, что одинаковые или близкие по времени установления процессы по управлению и возмущению могут быть получены только в случае, если нет сокращения нуля и полюса и, более того, нет близких нуля и полюса. Для того чтобы это обеспечить следует воспользоваться формулами, исключающими получение диполей.

В этом случае формулы (3) и (4) расчета имеют вид

$$W_{ж}(s) = \frac{P(s)}{G(s)} M(s), \tag{14}$$

$$1 - W_{ж}(s) = \frac{R(s)}{G(s)} N(s), \tag{15}$$

а формула (6)

$$W_{рег}(s) = \frac{M(s)}{N(s)}. \tag{16}$$

Основное полиномиальное уравнение синтеза (6) записывается как

$$P(s)M(s) + R(s)N(s) = G(s).$$

Набор ограничений на порядки полиномов $G(s), N(s), M(s)$ из условий разрешимости, физической осуществимости и грубости, имеет вид

$$n_G \le n_M + n_N + 1, \tag{17}$$

$$n_M \le n_N + r, \tag{18}$$

$$n_G = n_R + n_N + r, \tag{19}$$

$$n_G \ge n_P + n_M + r. \tag{20}$$

Ограничения снизу на порядок желаемой передаточной функции системы n_G имеют вид

$$n_G \ge 2n_R - 1. \tag{21}$$

Вернемся к примеру. В соответствии с (21) минимальный порядок желаемого полинома $G(s)$ равен трем.

Сохраняя принцип биномиального распределения, примем

$$G(s) = (s+10)^3 = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000.$$

Для данного случая из (19) имеем $N(s) = n_1 s + n_0$. Соответственно, по (17) и (18) полином $M(s)$ должен быть не выше первого порядка. Из условия разрешимости (20) имеем $M(s) = m_1 s + m_0$.

Условия (14), (15) выглядят как

$$W_{ж}(s) = \frac{16}{(s+10)^3} M(s), \quad 1 - W_{ж}(s) = \frac{(s^2 - 16)}{(s+10)^3} N(s),$$

и уравнение синтеза (6) имеет вид

$$16\,M(s) + (s^2 - 16)\,N(s) = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000. \tag{22}$$

Подставив в $N(s)$ и $M(s)$ в (22) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &n_1 = 1; \\ &n_0 = 30; \\ &16m_1 - 16n_1 = 300; \\ &16m_0 - 16n_0 = 1000. \end{aligned}$$

Отсюда $m_1 = 19,75; m_0 = 92,5; n_1 = 1; n_0 = 30$ и передаточная функция регулятора в соответствии с (16) равна

$$W_{рег}(s) = \frac{19,75s + 92,5}{s + 30} = \frac{19,75(s + 4,68)}{s + 30}.$$

В этом случае передаточная функция по возмущению для системы на рис. 1, имеет вид $W_f(s) = \dfrac{16(s + 30)}{(s + 10)^3}$, т. е. передаточная функция по возмущению имеет такой же полином в знаменателе, что и передаточная функция по управлению.

На рис. 3 приведены нормированные по уровню графики переходных функций замкнутой системы по управлению и возмущению. Видно, что длительности переходных процессов близки.

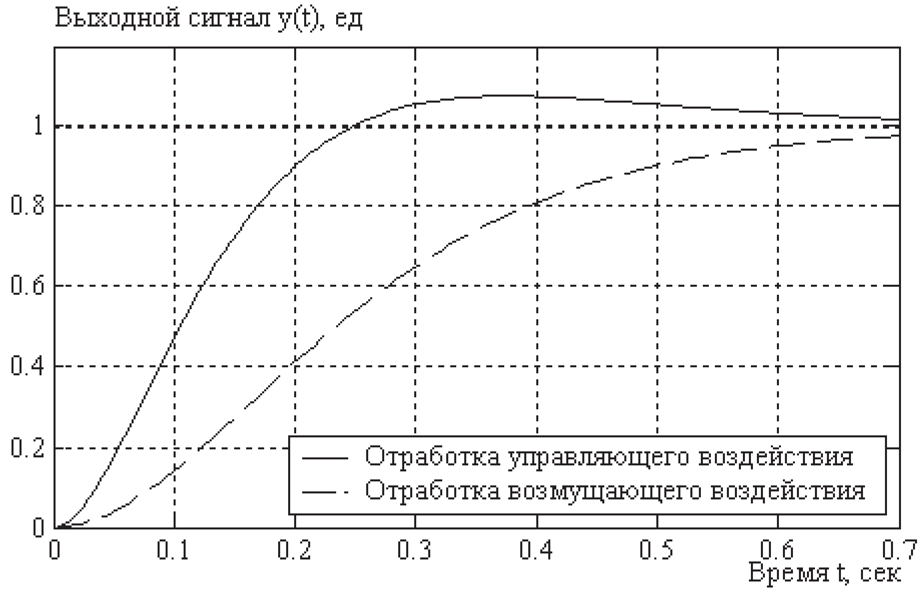

Рис. 3. Переходные характеристики: по управлению и по возмущению

Таким образом, использование регулятора, не содержащего в своей структуре элементов, приводящих к сокращению части передаточной функции объекта управления, обеспечивает регулирование как по управляющему воздействию, так и по возмущению, действующим на объект, причем показатели времени регулирования этих процессов близки.

Выводы

Представленные результаты говорят о том, что метод желаемой передаточной функции в модификации [2], связанный с сокращением нулей и полюсов системы и с переходом к не полностью управляемой или не полностью наблюдаемой системе, дает, в общем случае, различное качество управления по различным входам, в частности по управлению и по возмущению. Если актуальным является получение близких показателей качества по разным входам, предпочтительным является метод, не связанный с сокращениями нулей и полюсов, хотя и приводящий к более высоким порядкам полиномиальных регуляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

Поступила 10.07.2012 г.