ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 295 1976

РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СОЗДАННОГО ПРОВОДНИКОМ С ТОКОМ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАЗУ

В. А. ЛУКУТИН

(Представлена научным семинаром кафедры теоретических основ электротехники)

Определение электродинамических усилий в обмотках трансформаторов и электрических машин, а также вычисление индуктивностей рассеяния этих обмоток в конечном итоге сводится к расчету магнитного поля, созданного прямолинейным проводником с током, помещенным в паз прямоугольного сечения. Подобные расчеты весьма распространены в инженерной практике, поэтому этот вопрос часто освещался в литературе [2, 3, 4].

Обычно поле сводят к двухмерному, для чего цилиндрическую обмотку трансформаторов развертывают в прямолинейную полосу и считают, что поверхности ферромагнитных стержней представляют плоскости, ограничивающие с трех сторон расчетную область. На рис. 1. показан однофазный трансформатор с двумя обмотками, причем на правой половине этого рисунка представлена расчетная область, границы которой заштрихованы. В области помещена обмотка, сечение

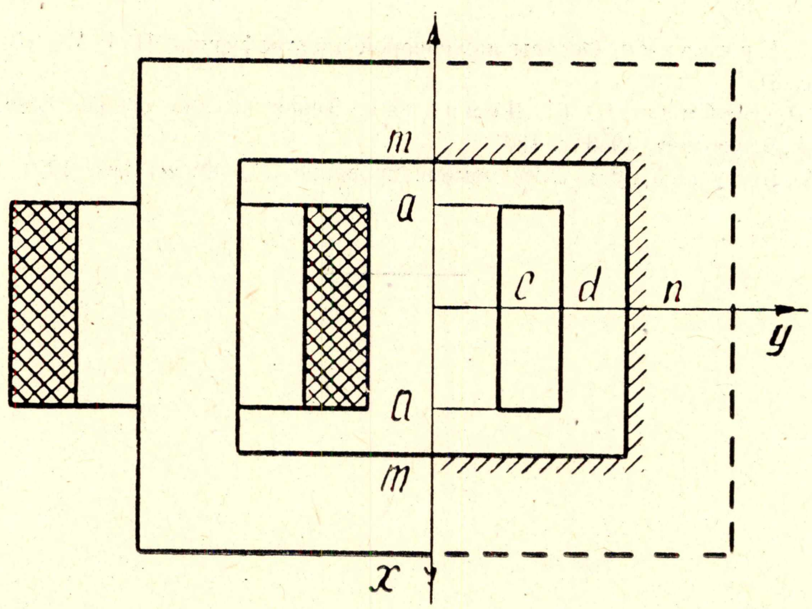

Рис. 1.

которой представляется прямоугольником со сторонами $2a$ и $(d-c)$, а намагничивающая сила ее равна Iw.

Заметим, что такая же область получается и при исследовании поля проводников с током, размещенных в пазах ротора или статора электрической машины. В этом случае ферромагнитные стенки пазов спрямлены, а выпучиванием потока пренебрегаем.

Учет влияния ферромагнитных границ принуждает применять метод зеркальных отображений, что приводит к громоздкому решению в виде бесконечного ряда, весьма неудобному для инженерных целей [2]. В связи с этим используют приближенные решения, существенно упрощая задачу, но проигрывая при этом в точности [3].

Ниже показана возможность получения приближенного аналитического выражения для векторного потенциала в области, показанной на рис. 1, используя прямой вариационный метод Канторовича [1].

Известно, что поле в области удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-\mu\delta(x,y). \tag{1}$$

Здесь δ — плотность тока в сечении обмотки,

A — векторный магнитный потенциал.

Если допустить, что ферромагнитная среда, окружающая область, имеет $\mu=\infty$, то граничные условия будут такие:

$$B_x=\frac{\partial A}{\partial y}=0, \quad \text{при } y=n \tag{2}$$

$$B_y=-\frac{\partial A}{\partial x}=0, \text{ при } y=0 \text{ и } x=\pm m.$$

Решение задачи будем искать в виде одного слагаемого, представляющего собою произведение двух функций, одну из которых выбираем произвольно. Эта функция должна удовлетворять граничным условиям (2) и быть, по крайней мере, дважды дифференцируемой. Можно записать, учитывая симметрию поля, следующее решение поставленной задачи:

$$A(x,\ y)=\varphi(x)f(y), \tag{3}$$

где $\varphi(x)=m^2-x^2+\frac{x^4}{2m^2}$ — произвольно выбранная функция, а $f(y)$ — неизвестная функция, которую нужно определить.

Подставим выбранное решение в функционал [1]

$$J=\iint\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2-2\mu\delta A\right]dxdy. \tag{4}$$

и выполним интегрирование по одной переменной в пределах от $x=-m$ до $x=m$, причем следует учитывать, что $\delta=0$ при $|x|>a$.

Выполнив все необходимые вычисления, получим

$$J=\int F(f',\ f,\ y)\,dy,$$

$$F=0{,}609\,f^2(y)+1{,}237\,m^5 f'^2(y)-0{,}133\,\mu\delta(y)f(y)\left(30\,m^2a-10a^3\,\frac{3\,a^5}{m^2}\right). \tag{5}$$

Теперь воспользуемся уравнением Эйлера [1]

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial f'}=0 \tag{6}$$

и, подставив в него (5), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$f''(y)-\frac{0{,}493}{m^2}f(y)=-\mu\delta(\nu)\frac{0{,}539}{m^5}\left(30\,m^2a-10\,a^3+\frac{3\,a^5}{m^2}\right). \tag{7}$$

Общее решение (7) запишется так:

$$f_1(y)=K_1e^{p_1y}+K_2e^{p_2y}, \tag{8}$$

где

$$p_1=\frac{0{,}702}{m},\ p_2=-\frac{0{,}702}{m}.$$

В правой части уравнения (7) стоит функция распределения плотности тока, которую можно аппроксимировать степенным рядом

$$\delta(y)=\frac{Iw}{2\,a(d-c)}(D_1y+D_3y^3+\cdots+D_ky^k+\cdots).$$

Если ограничиться первыми тремя слагаемыми ряда, то частное решение уравнения (7) запишется таким образом:

$$f_2(y)=C_1y+C_3y^3+C_5y^5. \tag{9}$$

Постоянные интегрирования K_1 и K_2 определяются выбором начальной силовой линии. Полагая $A=0$ при $y=0$, из (8, 9) получаем

$$0=f_1(0)+f_2(0)=K_1+K_2. \tag{10}$$

Если воспользоваться граничным условием $\frac{\partial A}{\partial y}=0$ при $y=n$, то можно определить

$$K_1=-K_2=-\frac{m(C_1+3\,C_3n^2+5\,C_5n^4)}{1{,}404\ \mathrm{Ch}\,p_1}. \tag{11}$$

Коэффициенты C_k находятся подстановкой частного решения $f_2(y)$ в дифференциальное уравнение (7):

$$6\,C_3y+20\,C_5y^3-\frac{0{,}493}{m^2}(C_1y+C_3y^3+C_5y^5)\doteq$$

$$=-\mu\delta_0\frac{0{,}0539}{m^5}(D_1y+D_3y^3+D_5y^5)\cdot b.$$

Приравниваем множители при одинаковых степенях y в последнем равенстве и получаем формулы для нахождения C_k:

$$C_1=\frac{\mu\delta_0 b}{m^3}(0{,}109\,D_1+m^2 1{,}33\,D_3+m^4 53{,}9\,D_5);$$

$$C_3=\frac{\mu\delta_0 b}{m^3}(0{,}109\,D_3+m^2\,4{,}43\,D_5);$$

$$C_5=\frac{\mu\delta_0 b}{m^3}D_5; \qquad \delta_0=\frac{Iw}{2\,a(d-c)}; \tag{12}$$

$$b=30\,m^2a-10\,a^3+\frac{3\,a^5}{m^2}.$$

Теперь можно подставить найденные коэффициенты в наше решение. В общем виде оно имеет вид

$$A(x,y)=\left(m^2-x^2+\frac{x^4}{2\,m^2}\right)\left[C_1y+C_3y^3+C_5y^5-\right.$$
$$\left.-\frac{m(C_1+3C_3n^2+5\,C_5n^4)}{0{,}702\,\mathrm{Ch}\,p_1}\cdot\mathrm{Sh}\frac{0702\,y}{m}\right]. \tag{13}$$

Эта формула удобна для расчетов, она позволяет легко находить составляющие магнитной индукции в любой точке пространства по формулам

$$B_x=\frac{\partial A}{\partial y}; \qquad B_y=-\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{14}$$

В ряде задач наибольший интерес представляет радиальная (B_y) составляющая магнитной индукции. В этом случае целесообразно задаваться в решении (3) функцией $f(y)$, а вычислять указанным путем $\varphi(x)$, что позволит получить более точные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., Госиздат. техн.-теор. лит., 1949.

2. К. Бинс, П. Лауренсон. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. «Энергия», 1970.

3. Г. Н. Петров, И. С. Наяшков. Электродинамические силы в трансформаторах. «Электричество», 1955, № 8.

4. Д. Н. Морозов. Трансформаторы. М., Госэнергоиздат, 1962.