ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. С. М. КИРОВА

Том 277 1977

ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ $f(x)$ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫХ $f^{(\varkappa)}(x)$, ПОЛУЧАЕМЫЕ СПОСОБОМ ЧАСТИЧНОГО СОВМЕЩЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ УЗЛОВ x_s

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена научным семинаром кафедры инженерной и вычислительной математики)

1. Способом частичного совмещения назовем такой способ приближенного представления на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функции $f(x) \in L$ из линейного пространства L через некоторую другую функцию $\varphi(x) \in L_{n+1}$ из $(n+1)$-мерного подпространства $L_{n+1} \subset L$, при котором в $n+1$ заданных точках x_s отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ удовлетворяется условие

$$\varepsilon_s = \varphi(x_s) - f(x_s) = 0, \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, n). \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1}$$

Однако во всех других точках $x_j \neq x_s$ отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ условие (1) вообще не удовлетворяется, так что

$$\varepsilon_j = \varphi(x_j) - f(x_j) \neq 0, \quad (j \neq s) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2}$$

в общем случае. Точки x_s отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, в которых удовлетворяется условие (1), назовем узлами способа частичного совмещения.

Обычно приближенное представление $\varphi(x) \in L_{n+1} \subset L$ для функции $f(x) \in L$ на рассматриваемом отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ задается разложением представления $\varphi(x)$ по каким-либо $n+1$ выбранным нами опорным взаимонезависимым функциям $\varphi_\nu(x) \in L_{n+1}$, так что

$$f(x) \approx \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x), \tag{3}$$

где c_ν — коэффициенты, подлежащие определению. Часто в качестве $n+1$ опорных функций $\varphi_\nu(x)$ используют

$$1)\ \varphi_\nu(x) = x^\nu, \quad 2)\ \varphi_\nu(x) = \frac{1}{x^\nu}, \quad 3)\ \varphi_\nu(x) = \sin \nu x, \cos \nu x,$$
$$4)\ \varphi_\nu(x) = T_\nu(x). \tag{4}$$

В последнем случае $T_\nu(x)$ — многочлены Чебышева второго рода, которые определяются так:

$$1)\ T_\nu(x)=\cos(\nu \arccos x),\ 2)\ \cos x=\theta,\quad 3)\ T_\nu(x)=\cos \nu\theta,$$
$$4)\ T_{\nu+1}(x)=2\,x\,T_\nu(x)-T_{\nu-1}(x),\ T_0(x)=1,\ T_1(x)=x. \tag{5}$$

При любом способе выбора приближенного представления (3) для функции $f(x)$ полезно преобразовать отрезок $a\leqslant x\leqslant b$ в отрезок $-1\leqslant\xi\leqslant+1$, что выполняется так:

$$1)\ x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\xi,\quad 2)\ \xi=\frac{2\,x-(a+b)}{b-a},$$
$$3)\ (x=a)\to(\xi=-1),\quad 4)\ (x=b)\to(\xi=+1). \tag{6}$$

Если представление $\varphi(x)$ для функции $f(x)$ задано разложением общего вида (3), то коэффициенты c_ν, $(\nu=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n)$ этого разложения находятся решением свода из $n+1$ уравнений первой степени

$$\sum_{\nu=0}^{n}\varphi_\nu(x_s)c_\nu-\varphi(x_s)=\sum_{\nu=0}^{n}\varphi_\nu(x_s)c_\nu-f(x_s)=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}a_{s\nu}\,c_\nu-f_s=0,\quad (s=0,1,...,n), \tag{7}$$

который получим, вставляя в (3) значения $x=x_0$, x_1, ..., x_n и учитывая условие (1). В силу взаимонезависимости опорных функций $\varphi_\mu\ (x)$, $\varphi_\nu\ (x)$ определитель свода уравнений (7) отличен от нуля

$$|\,\varphi_\nu(x_s)\,|_0^n=|\,a_{s\nu}\,|_0^n\neq 0. \tag{8}$$

и потому из решения свода (7) его $n+1$ неизвестных c_ν устанавливаются единственным образом.

2. Предположим теперь, что приближенное представление $\varphi(x)$ для функции $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ задано в виде, несколько отличном от (3), а именно [1]:

$$f(x)\approx\varphi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\sum_{\varkappa=0}^{n}\frac{A_\varkappa}{(x-x_\varkappa)}=$$
$$=\prod_{\nu=0}^{n}(x-x_\nu)\sum_{\varkappa=0}^{n}\frac{A_\varkappa}{(x-x_\varkappa)}\ . \tag{9}$$

Положим здесь $x=x_s$. Тогда мы можем написать, что

$$f(x_s)\approx\varphi(x_s)=\prod_{\nu=0}^{s-1}(x_s-x_\nu)(x_s-x_s)\prod_{\varkappa=s+1}^{n}(x_s-x_\nu)\times$$
$$\times\left[\sum_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{A_\varkappa}{(x_s-x_\varkappa)}+\frac{A_s}{(x_s-x_s)}+\sum_{\varkappa=s+1}^{n}\frac{A_\varkappa}{(x_s-x_\varkappa)}\right]=$$
$$=\prod_{\nu=0}^{n}(x_s-x_\nu)\sum_{\varkappa=0}^{s-1}\frac{A_\varkappa}{(x_s-x_\varkappa)}+\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}(x_s-x_\nu)A_s+\prod_{\nu=0}^{n}(x_s-x_\nu)\sum_{\varkappa=s+1}^{n}\frac{A_\varkappa}{(x_s-x_\varkappa)}\ .$$

Но первое и третье слагаемые обращаются в нуль, так как

$$\prod_{\nu=0}^{n}(x_s-x_\nu)=\prod_{\nu=0}^{s-1}(x_s-x_\nu)(x_s-x_s)\prod_{\nu=s+1}^{n}(x_s-x_\nu)=0.$$

Отсюда заключаем, что

$$f(x_s)\approx\varphi(x_s)=A_s\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}(x_s-x_\nu)$$

и, следовательно,

$$A_s\approx\frac{f(x_s)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(x_s-x_\nu)},\quad (s=0,1,\ldots,n;\ \nu\neq s). \tag{10}$$

Подстановка значения (10) для A_s в (9) дает после замены $\varkappa$ на s

$$\begin{aligned} f(x)\approx\varphi(x)&=\prod_{\nu=0}^{n}(x-x_\nu)\sum_{s=0}^{n}\frac{A_s}{(x-x_s)}=\sum_{s=0}^{n}A_s\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}(x-x_\nu)=\\ &=\sum_{s=0}^{n}\frac{f(x_s)}{\prod\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}(x_s-x_\nu)}\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}(x-x_\nu)=\sum_{s=0}^{n}B_s\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}(x-x_\nu), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$B_s=\frac{f(x_s)}{\prod\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}(x_s-x_\nu)},\quad (s,\nu=0,1,\ldots,n;\ \nu\neq s). \tag{12}$$

Таким образом, мы установили, что если приближенное представление $\varphi(x)$ для $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ задать согласно (9) с неопределенными пока коэффициентами $A_\varkappa$, то значения этих коэффициентов находятся согласно (10), а для функции $f(x)$ получаем явное выражение (11).

Приближенное представление (11) для $f(x)$, полученное под условием (1) при произвольном расположении $n+1$ узлов x_s на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, является, очевидно, алгебраическим многочленом n-й степени и в способе частичного совмещения называется разложением Лагранжа. Легко видеть, что разложение Лагранжа соответствует тому случаю, когда в качестве опорных функций $\varphi_\nu(x)$ в конечном ряде (3) взяты $\varphi_\nu(x)=x^\nu$.

3. Перечень (4) часто употребляемых опорных функций $\varphi_\nu(x)$ показывает, что для $f(x)$ в способе частичного совмещения возможны следующие удобные для расчета разложения:

$$\begin{aligned} &1)\ f(x)\approx\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu x^\nu,\quad 2)\ f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu x^{-\nu};\\ &3)\ f(x)\approx\sum_{\nu=0}^{n}(c_{\nu1}\sin\nu x+c_{\nu2}\cos\nu x), \end{aligned} \tag{13}$$

или развернуто

$$3)\ f(x)=c_{01}\sin 0\,x+c_{02}\cos 0\,x+\sum_{\nu=1}^{n}(c_{\nu 1}\sin\nu\,x+c_{\nu 2}\cos\nu\,x)=$$

$$=c_{02}+\sum_{\nu=1}^{n}(c_{\nu 1}\sin\nu\,x+c_{\nu 2}\cos\nu\,x); \tag{13}$$

$$4)\ f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}c_{\nu}T_{\nu}(x)=c_0+c_1x+c_2(2\,x^2-1)+c_3x(4\,x^2-3)+$$

$$+c_4(8\,x^4-8x^2+1)+c_5x(16\,x^4-20\,x^2+5)+c_6(32\,x^6-48\,x^4+18\,x^2-1)+\ldots$$

Единственной трудностью при использовании разложений (13) для приближенного представления функции $f(x)$ данным способом является то обстоятельство, что для каждого нового набора узлов x_s на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ необходимо заново вычислять матрицу $[a_{s\nu}]_0^n$ коэффициентов $a_{s\nu}$ и вектор $[f_s]_0^1$ для соответствующего свода уравнений (7) и затем решать его для определения всех $n+1$ коэффициентов c_{ν}, входящих в разложение (3). Впрочем, подобного рода расчеты, если они выполняются на ЦВМ, могут быть запрограммированы наперед для заданных предельных значений n и заданного вида (4) опорных функций $\varphi_{\nu}(x)$, что существенно облегчит и ускорит эти расчеты.

4. Рассчитаем теперь последовательные производные $f'(x)$, $f''(x)$, ... для функции $f(x)$. Этот расчет можно произвести двумя способами:

а) исходя из готовых конечных рядов (13) для $f(x)$,

б) опираясь на выражение $f(x)$ рядом Лагранжа (9), который не дает еще окончательного представления для $f(x)$ и потому не совсем удобен для дифференцирования.

Первый путь позволяет очень просто находить для $f(x)$ производные $f^{(\nu)}(x)$ любого порядка ν, но требует большой предварительной работы по расчету указанным выше способом всех коэффициентов c_{ν} выбранной разновидности (13) для $f(x)$.

Второй путь расчета производных $f'(x)$, $f''(x)$, ... основан непосредственно на разложении Лагранжа (9) для $f(x)$ и требует только знания коэффициентов B_s, но приводит к громоздким выражениям для $f'(x)$, $f''(x)$, ... вследствие сложности исходного выражения (11).

5. Найдем в общем виде производные $f'(x)$, $f''(x)$ и $f'''(x)$ для $f(x)$, а также получим отсюда необходимые в дальнейшем общие выражения $f'(x_r)$, $f''(x_r)$ и $f'''(x_r)$ этих производных в узловых точках x_r отрезка $a\leqslant x\leqslant b$, опираясь на разложение Лагранжа (11).

Записав разложение (11) в сжатом виде

$$f(x)=\sum_{s=0}^{n}\left[B_s\prod_{\nu=0}^{n}(x-x_{\nu})\right],\quad \nu\neq s, \tag{11}$$

где

$$B_s=\frac{f(x_s)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(x_s-x_{\nu})},\quad (s,\ \nu=0,1\ldots,n;\ \nu\neq s) \tag{10}$$

и дифференцируя это разложение для $f(x)$, найдем

$$f'(x)=\sum_{s=0}^{n}\left[B_s\left(\sum_{\substack{\lambda=0\\ \lambda\neq\nu}}^{n}\frac{1}{(x-x_{\lambda})}\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq s}}^{n}(x-x_{\nu})\right)\right].$$

Отсюда получим следующее окончательное выражение для

$$f'(x)=\sum_{s=0}^{n}\left[B_s\left(\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\prod_{\nu=0}^{n}(x-x_\nu)\right)\right]_{\substack{s\neq\nu\cap\lambda\\ \nu\neq s\cap\lambda\\ \lambda\neq s\cap\nu}}, \qquad (14)$$

где

$$\eta_\lambda=\begin{cases}+1, & \text{если } \lambda\neq s\cap\nu\\ 0, & \text{если } \lambda=s\cup\nu.\end{cases} \qquad (15)$$

Дифференцируя далее выражение (11) для $f'(x)$, найдем

$$f''(x)=\sum_{s=0}^{n}\left\{B_s\left[\sum_{\substack{\lambda=0\\ \lambda\neq\mu}}^{n}\eta_\lambda\left(\sum_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(x-x_\nu)}{(x-x_\mu)}\right)_{\nu\neq s}\right]\right\}.$$

Отсюда получим окончательно

$$f''(x)=\sum_{s=0}^{n}\left\{B_s\left[\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\left(\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\mu\prod_{\nu=0}^{n}(x-x_\nu)\right)\right]\right\}, \qquad (16)$$

$$\begin{pmatrix} s\neq\nu\cap\lambda\cap\mu & \lambda\neq s\cap\nu\cap\mu\\ \nu\neq s\cap\lambda\cap\mu & \mu\neq s\cap\nu\cap\lambda\end{pmatrix}$$

где

$$\eta_\mu=\begin{cases}+1, & \text{если } \mu\neq s\cap\nu\cap\lambda\\ 0, & \text{если } \mu=s\cup\nu\cup\lambda.\end{cases} \qquad (17)$$

Подобным же образом найдем, что

$$f'''(x)=\sum_{s=0}^{n}\left\langle B_s\left\{\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\left[\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\mu\left(\sum_{\sigma=0}^{n}\eta_\sigma\prod_{\nu=0}^{n}(x-x_\nu)\right)\right]\right\}\right\rangle, \qquad (18)$$

$$\begin{pmatrix} s\neq\nu\cap\lambda\cap\mu\cap\sigma & \lambda\neq s\cap\nu\cap\mu\cap\sigma & \sigma\neq s\cap\nu\cap\lambda\cap\mu\\ \nu\neq s\cap\lambda\cap\mu\cap\sigma & \mu\neq s\cap\nu\cap\lambda\cap\sigma & \end{pmatrix}$$

где

$$\eta_\sigma=\begin{cases}+1, & \text{если } \sigma\neq s\cap\nu\cap\lambda\cap\mu\\ 0, & \text{если } \sigma=s\cup\nu\cup\lambda\cup\mu.\end{cases} \qquad (19)$$

Исходя теперь из полученных нами выражений (14), (16) и (18) для производных $f'(x)$, $f''(x)$ и $f'''(x)$, выведем выражения для значений $f'(x_i)$, $f''(x_i)$ и $f'''(x_i)$ этих производных в заданном узле $x_i=x_0, x_1, \ldots, x_n$ отрезка $a\leqslant x\leqslant b$.

Прежде всего, исходя из выражения (14) для $f'(x)$, найдем, что

$$f'(x_i)=\sum_{s=0}^{n}B_s\left[\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]_{\substack{s\neq\nu\cap\lambda\\ \nu\neq s\cap\lambda\\ \lambda\neq s\cap\nu}}.$$

Отсюда в более развернутой записи получим

$$f'(x_i)=\left\{B_i\left[\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]+\sum_{\substack{s=0\\ s\neq i}}^{n}B_s\left[\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]\right._{\substack{s\neq\nu\cap\lambda\\ \nu\neq s\cap\lambda\\ \lambda\neq s\cap\nu}},$$

$$f'(x_i)=\left\{B_i\left[\sum_{\substack{\lambda=0\\(i\neq\nu\cap\lambda)}}^{n}\eta_\lambda\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]+\sum_{\substack{s=0\\s\neq i}}^{n}B_s\left[\eta_i\prod_{\nu=0}^{i-1}(x_i-x_\nu)\prod_{\nu=i+1}^{n}(x_i-x_\nu)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\substack{\lambda=0\\\lambda\neq i}}^{n}\eta_\lambda\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\lambda)\right]\right\}\begin{matrix}s\neq\nu\cap\lambda\\\nu\neq s\cap\lambda.\\\lambda\neq s\cap\nu\end{matrix}$$

Но слагаемые последней суммы

$$\eta_\lambda\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)=0,\quad(\lambda\neq i;\ \nu\neq\lambda),$$

так как в эти слагаемые входит множитель $(x_i-x_i)=0$. Поэтому для $f'(x_i)$ в заданном узле x_i отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ находим следующее окончательное выражение:

$$f'(x_i)=\left\{B_i\left[\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]+\sum_{s=0}^{n}B_s\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right\}. \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix}s\neq\nu\cap\lambda\cap i; & \lambda\neq s\cap\nu\cap i;\\ \nu\neq s\cap\lambda\cap i; & i\neq s\cap\nu\cap\lambda.\end{pmatrix}.$$

Таким же образом, исходя из выражения (16) для $f''(x)$, установим прежде всего, что в заданном узле x_i отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ будем иметь

$$f''(x_i)=\sum_{s=0}^{n}B_s\left\{\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\left[\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\mu\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]\right\}.$$

$$\begin{pmatrix}s\neq\nu\cap\lambda\cap\mu; & \lambda\neq s\cap\nu\cap\mu;\\ \nu\neq s\cap\lambda\cap\mu; & \mu\neq s\cap\nu\cap\lambda;\end{pmatrix}.$$

Отсюда более развернуто найдем, что

$$f''(x_i)=B_i\left\{\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\left[\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\mu\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]\right\}+$$

$$\begin{pmatrix}i\neq\nu\cap\lambda\cap\mu; & \lambda\neq i\cap\nu\cap\mu;\\ \nu\neq i\cap\lambda\cap\mu; & \mu\neq i\cap\nu\cap\lambda.\end{pmatrix}$$

$$+\sum_{\substack{s=0\\s\neq i}}^{n}B_s\left\{\eta_i\left[\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\mu\prod_{\nu=0}^{i-1}(x_i-x_\nu)\prod_{\nu=i+1}^{n}(x_i-x_\nu)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\left[\sum_{\substack{\mu=0\\\mu\neq i}}^{n}\eta_\mu\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]\right\},\ \begin{pmatrix}s\neq\nu\cap\lambda\cap\mu; & \lambda\neq s\cap\nu\cap\mu;\\ \nu\neq s\cap\lambda\cap\mu; & \mu\neq s\cap\nu\cap\lambda.\end{pmatrix}.$$

Но слагаемые внутренней суммы в третьем члене этого выражения для $f''(x_i)$ равны нулю:

$$\eta_\mu\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)=0,\ (\mu\neq i;\quad \nu\neq\mu),$$

так как все эти слагаемые содержат множитель $(x_i-x_i)=0$. Поэтому для второй производной $f''(x_i)$ в заданном узле x_i отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ получим следующее окончательное выражение:

$$f''(x_i)=B_i\left\{\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\left[\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\mu\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]\right\}+ \tag{21}$$

$$+\sum_{s=0}^{n}B_s\left[\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\mu\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]\Bigg\}.$$

$$\left(\begin{array}{l} s\neq\nu\cap\lambda\cap\mu\cap i;\ \lambda\neq s\cap\nu\cap\mu\cap i;\ i\neq s\cap\nu\cap\lambda\cap\mu. \\ \nu\neq s\cap\lambda\cap\mu\cap i;\ \mu\neq s\cap\nu\cap\lambda\cap i; \end{array}\right)$$

Наконец, для третьей производной $f'''(x_i)$ в узле x отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ найдем тем же путем следующее окончательное выражение:

$$f'''(x_i)=\left\{B_i\left\{\sum_{\lambda=0}^{n}\eta_\lambda\left\{\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\lambda\left[\sum_{\varkappa=0}^{n}\eta_\varkappa\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]\right\}\right\}\right\}+$$

$$+\sum_{s=0}^{n}B_s\left\{\sum_{\mu=0}^{n}\eta_\mu\left[\sum_{\varkappa=0}^{n}\eta_\varkappa\prod_{\nu=0}^{n}(x_i-x_\nu)\right]\right\}\Bigg\}. \tag{22}$$

$$\left(\begin{array}{lll} s\neq\nu\cap\lambda\cap\mu\cap\varkappa\cap i; & \lambda\neq s\cap\nu\cap\mu\cap\varkappa\cap i; & \varkappa\neq s\cap\nu\cap\lambda\cap\mu\cap i; \\ \nu\neq s\cap\lambda\cap\mu\cap\varkappa\cap i; & \mu\neq s\cap\nu\cap\lambda\cap\varkappa\cap i; & i\neq s\cap\nu\cap\lambda\cap\mu\cap\varkappa. \end{array}\right)$$

Пример. Пусть $s=0, 1, 2, 3, 4$, а $i=2$. Тогда

а) $$f(x)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+$$

$$+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+$$

$$+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+$$

$$+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+$$

$$+\frac{f(x_4)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)=$$

$$B_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+B_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+$$

$$B_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+B_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+$$

$$+B_4(x-x_0)(x-x_1)x-x_2)(x-x_3).$$

Если здесь ввести обозначения

$$1)\ x_\varkappa-x_\lambda=x_{\varkappa\lambda},\quad 2)\ x-x_\alpha,$$

то $f(x)$ запишется в следующем сокращенном виде:

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{x_{01}x_{02}x_{03}x_{04}}x_{\alpha1}\,x_{\alpha2}\,x_{\alpha3}\,x_{\alpha4}+\frac{f(x_1)}{x_{10}x_{12}x_{13}x_{14}}x_{\alpha0}\,x_{\alpha2}\,x_{\alpha3}\,x_{\alpha4}+$$

$$+\frac{f(x_2)}{x_{20}x_{21}x_{23}x_{24}}x_{\alpha0}\,x_{\alpha1}\,x_{\alpha3}\,x_{\alpha4}+\frac{f(x_3)}{x_{30}x_{31}x_{32}x_{34}}x_{\alpha0}\,x_{\alpha1}\,x_{\alpha2}\,x_{\alpha4}+$$

$$+\frac{f(x_4)}{x_{40}x_{41}x_{42}x_{43}}x_{\alpha0}\,x_{\alpha1}\,x_{\alpha2}\,x_{\alpha3}\,,$$

или еще более сокращенно

$$f(x)=B_0 x_{\alpha 1}\, x_{\alpha 2}\, x_{\alpha 3}\, x_{\alpha 4}+B_1 x_{\alpha 0}\, x_{\alpha 2}\, x_{\alpha 3}\, x_{\alpha 4}+B_2 x_{\alpha 0}\, x_{\alpha 1}\, x_{\alpha 3}\, x_{\alpha 4}+$$
$$+B_3 x_{\alpha 0}\, x_{\alpha 1}\, x_{\alpha 2}\, x_{\alpha 4}\; B_4 x_{\alpha 0}\, x_{\alpha 1}\, x_{\alpha 2}\, x_{\alpha 3}\,.$$

б) $$f'(x_2)=B_0 x_{21} x_{23} x_{24}+B_1 x_{20} x_{23} x_{24}+B_3 x_{20} x_{21} x_{24}+B_4 x_{20} x_{21} x_{23}+$$
$$+B_2(\eta_0 x_{21} x_{23} x_{24}+\eta_1 x_{20} x_{23} x_{24}+\eta_3 x_{20} x_{21} x_{24}+\eta_4 x_{20} x_{21} x_{23})$$

или иначе

$$f'(x_2)=(B_0 x_{21}+B_1 x_{20}) x_{23} x_{24}+(B_3 x_{24}+B_4 x_{23}) x_{20} x_{21}+$$
$$+B_2[(x_{20}+x_{21}) x_{23} x_{24}+(x_{23}+x_{24}) x_{20} x_{21}].$$

в) $$f''(x_2)=B_0(\eta_1 x_{23} x_{24}+\eta_3 x_{21} x_{24}+\eta_4 x_{21} x_{23})+$$
$$+B_1(\eta_0 x_{23} x_{24}+\eta_3 x_{20} x_{24}+\eta_4 x_{20} x_{23})+$$
$$+B_3(\eta_0 x_{21} x_{24}+\eta_1 x_{20} x_{24}+\eta_4 x_{20} x_{21})+$$
$$+B_4(\eta_0 x_{21} x_{23}+\eta_1 x_{20} x_{23}+\eta_3 x_{20} x_{21})+$$
$$+B_2[\eta_0)\eta_1 x_{23} x_{24}+\eta_3 x_{21} x_{24}+\eta_4 x_{21} x_{23})+$$
$$+\eta_1(\eta_0 x_{23} x_{24}+\eta_3 x_{20} x_{24}+\eta_4 x_{20} x_{23})+$$
$$+\eta_3(\eta_0 x_{21} x_{24}+\eta_1 x_{20} x_{24}+\eta_4 x_{20} x_{21})+$$
$$+\eta_4(\eta_0 x_{21} x_{23}+\eta_1 x_{20} x_{23}+\eta_3 x_{20} x_{21})].$$

Отсюда после приведения подобных членов найдем, что

$$f''(x_2)=(B_0+B_1) x_{23} x_{24}+(B_0+B_3) x_{21} x_{24}+(B_0+B_4) x_{21} x_{23}+$$
$$+(B_1+B_3) x_{20} x_{24}+(B_1+B_4) x_{20} x_{23}+(B_3+B_4) x_{20} x_{21}+$$
$$+2\, B_2(x_{20} x_{21}+x_{20} x_{23}+x_{20} x_{24}+x_{21} x_{23}+x_{21} x_{24}+x_{23} x_{24}).$$

г) $$f'''(x_2)=B_0[\eta_1(\eta_3 x_{24}+\eta_4 x_{23})+\eta_3(\eta_1 x_{24}+\eta_4 x_{21})+\eta_4(\eta_1 x_{23}+\eta_3 x_{21})]+$$
$$+B_1[\eta_0(\eta_3 x_{24}+\eta_4 x_{23})+\eta_3(\eta_0 x_{24}+\eta_4 x_{20})+\eta_4(\eta_0 x_{23}+\eta_3 x_{20})]+$$
$$+B_3[\eta_0(\eta_1 x_{24}+\eta_4 x_{21})+\eta_1(\eta_0 x_{24}+\eta_4 x_{20})+\eta_4(\eta_0 x_{21}+\eta_1 x_{20})]+$$
$$+B_4[\eta_0(\eta_1 x_{23}+\eta_3 x_{21})+\eta_1(\eta_0 x_{23}+\eta_3 x_{20}(+\eta_4\eta_0 x_{21}+\eta_1 x_{20})]+$$
$$+6\, B_2(x_{20}+x_{21}+x_{23}+x_{24}).$$

Выполнив здесь еще приведение подобных членов, получим

$$\frac{1}{2} f'''(x_2)=(B_0+B_1)(x_{23}+x_{24})+(B_0+B_3)(x_{21}+x_{24})+$$
$$+(B_0+B_4)(x_{21}+x_{23})+(B_1+B_3)(x_{20}+x_{24})+$$
$$+(B_1+B_4)(x_{20}+x_{23})+(B_3+B_4)(x_{20}+x_{21})+$$
$$+3\, B_2({}_{20}x+x_{21}+x_{23}+x_{24}).$$

д) Если в разложении для $\frac{1}{2} f'''(x_2)$ заменить x_2 через $x=x_\alpha$ затем продифференцировать полученное выражение по $x=x_\alpha$, то мы найдем после упрощения, что

$$\frac{1}{6} f''''(x_2)=B_0+B_1+B_3+B_4+4\, B_2$$

е) $$f'''''(x_2)=0.$$

Приведенный пример показывает, что численный расчет согласно (20)—(22) производным $f^{(\varkappa)}\ (x_i)$ в заданных произвольно расположенных узлах x_i отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ целесообразно выполнять только при $n \leqslant 5$ и тогда $f^{(n)}\ (x_i)=0$. Если же требуется найти численные значения производных более высокого порядка, то нужно исходить из представления $f(x)$ разложением Ньютона с разделенными разностями [2]

$$f(x)=f(x_0)+f(x_0x_1)(x-x_0)+f(x_0x_1x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\ldots= \tag{23}$$

$$=f(x_0)+\sum_{\varkappa=1}^{n} f(x_0x_1\ldots x_\varkappa)\prod_{\nu=0}^{n-1}(x-x_\nu)+f(xx_0x_1\ldots x_n)\prod_{\nu=0}^{n}(x-x_\nu).$$

Здесь $f(x_0x_1\ldots x_\chi)$ и $f(xx_0x_1\ldots x_n)$ — разделенные разности порядка $\varkappa-1$ и n, которые определяются следующим образом:

$$1)\ f(x_0x_1\ldots x_\varkappa)=\frac{f(x_0x_2\ldots x_{\varkappa-1})-f(x_1x_2\ldots x_\varkappa)}{x_0-x_\varkappa}, \tag{24}$$

$$2)\ f(xx_0x_1\ldots x_n)=\frac{f(xx_0x_1\ldots x_{n-1})-f(x_0x_1x_2\ldots x_n)}{x-x_n},$$

так что

$$1)\ f(x_0x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1},\ 2)\ f(xx_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Однако если требуются общие выражения для производных $f^{(\varkappa)}(x_i)$ в неравномерных узлах x_i отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, то обращение к соответствующим выражениям вида (20)—(22) неизбежно, несмотря на их усложнение с возрастанием числа взятых узлов n при расчете $f^{(\varkappa)}(x_i)$.

6. В настоящей статье были рассмотрены различные общие выражения для функции $f(x)$ и ее производных $f^{(\varkappa)}\ (x)$, полученные способом частичного совмещения при произвольном расположении узлов x_s. Отсюда мы образовали соответствующие общие выражения для значений $f^{(\varkappa)}(x_i)$ производных $f^{(\varkappa)}\ (x)$ в заданных узлах x_i некоторого отрезка $a \leqslant x \leqslant b$. В дальнейшем будет показано, как эти узловые значения $f^{(\varkappa)}(x_i)$ производных $f^{(\varkappa)}\ (x)$ могут быть использованы для точного решения способом частичного совмещения краевой задачи по произвольной замкнутой области $D^{(2)}=D^{(2)}+\Gamma$ с границей Γ

$$0)\ x=(x^1,\ x^2),\quad 1)\ L(x)u(x)=f(x), \tag{25}$$

$$2)\ Л(x)u(x)\,|_{\Gamma}=h(x,\ y),$$

если $L(x)$ и $Л(x)$ — линейные дифференциальные операторы в частных производных, не зависящие от времени t.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Д. Бут. Численные методы. М., Физматгиз, 1959.

2. Э. Уиттекер и Г. Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. М.-Л., ОНТИ, 1935.