И З В Е С Т И Я

ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ.С.М.КИРОВА

Том 257 1973

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.И.Рубан

В работе предложен метод расчета оптимальных уравнений для нелинейных динамических объектов:

$$\dot{x} = f(x,t) + \varphi(x,t,u),\ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

когда $u(t)$ принадлежит заданной замкнутой области U и удовлетворяет критерию

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \big(Q(x,t) + \psi(t,u)\big)\,dt = \min_{u(t)\in U}. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ и $u(t)$ соответственно n и m - мерные вектор-столбцы фазовых координат и управляющих воздействий; $Q(x,t)$ характеризует качество процесса управления; $\psi(t,u)$ - потери, вызванные работой сигналов управления.

Пусть положительно определенная функция $V(x,t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (ДУ) в частных производных

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} f(x,t) = -Q(x,t),\ V(x(t_1),t_1) = 0. \tag{3}$$

Тогда необходимым и достаточным условием минимума функционала (2) является

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\varphi(x,t,u) + \psi(t,u) = \min_{u(t)\in U}. \tag{4}$$

Так, если, $\varphi(x,t,u) = B(x,t)u(t)$, $\psi(t,u) = \frac{1}{2}u^T D^{-1} u$, где $D^{-1}(t)$ - матрица, обратная диагональной матрице положительных коэффициентов $D(t)$, T - операция транспонирования и на $u(t)$ наложены ограничения типа $|u(t)| \leq H(t)$, то из (4) следует, что

$$u_э(t) = \begin{cases} -D(t)B^T\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^T & \text{при } \left|DB^T\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^T\right| \leq H, \\ -H\,\mathrm{sign}\,B^T\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^T & \text{при } \left|DB^T\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^T\right| \geq H; \end{cases} \tag{5}$$

$\operatorname{sign} Z = 1$, если $Z > 0$, $\operatorname{sign} Z = -1$, если $Z < 0$.

Для случая, когда $f(x,t) = A(t)\,x(t)$, $Q = \frac{1}{2}\, x^T(t)\, C(t)\, x(t)$, где $C(t)$ – диагональная матрица положительных коэффициентов, положительно определенную функцию [1] $V(x,t)$ следует искать в виде $V = x^T \Gamma x$. В соответствии с уравнением (3) матрица $\Gamma(t)$ является решением линейного ДУ

$$\dot{\Gamma} = -(\Gamma + \Gamma^T)A - C, \quad \Gamma(t_1) = 0. \tag{6}$$

Приведенные результаты можно использовать и как эффективный метод синтеза регуляторов при наличии ограничений на управления на основе использования критерия

$$J + V(x(t_1), t_1) = \min_{u(t) \in U}. \tag{7}$$

Рассмотрим пример: синтез регулятора температурного режима реактора идеального смешения, в котором идет реакция типа $A + B \rightleftharpoons C + D$

Обозначения: $x_1(t), x_2(t)$ – соответственно концентрации веществ A и B на выходе реактора, $x_{10}(t), x_{20}(t)$ – на входе; $v_0(t)$ – скорость входного потока; $\theta(t)$ – объем зоны реакции. Тогда уравнения реактора приобретают вид

$$\dot{x}_i(t) = -K(t)\,x_1(t)\,x_2(t) + (x_{i0}(t) - x_i(t))\frac{v_0(t)}{\theta(t)},\ i = 1,2,\ K(t) = K_0 \exp\left\{-\frac{E}{RT(t)}\right\}, \tag{8}$$

где температура имеет пороговые ограничения $b_1 \le T(t) \le b_2$. (9)

Искомым управляющим воздействием считаем

$$u(t) = K(t) - \frac{(x_{10} - x_{20}) \cdot v_0}{2\, x_1\, x_2\, \theta}, \tag{10}$$

причем $h_1(t) \le u(t) \le h_2(t)$, $h_i = K_0 \exp\left\{-\frac{E}{Rb_i}\right\} - \frac{(x_{10} - x_{20})v_0}{2\, x_1\, x_2\, \theta}$, $i = 1,2$. (11)

В случае необходимости всегда можно перейти от $u(t)$ к температуре $T(t)$. Тогда в соответствии с (5) алгоритм работы регулятора приобретает вид

$$u_э(t) = \begin{cases} Z(t) & \text{при} \quad h_1(t) \le Z(t) \le h_2(t), \\ h_1(t) & \text{при} \quad Z(t) \le h_1(t), \\ h_2(t) & \text{при} \quad Z(t) \ge h_2(t), \end{cases} \tag{12}$$

$$Z(t) = 4d(t)\,\gamma(t)\,(x_1(t) + x_2(t)), \quad \dot{\gamma}(t) = 2\gamma(t)\, v_0(t)\, \theta^{-1}(t) - C(t)$$

и $u_э(t)$ обеспечивает минимум функционала

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [(x_1 + x_2)^2 C + u^2 d^{-1}]\, dt + V(x_1(t_1) + x_2(t_1), t_1), \quad V(x,t) = x^2 \gamma.$$

Литература

1. А.А.Красовский. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 3, 164–175, (1970).