ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 249 1973

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЧАСТНЫМИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В этой статье используются известные тождественные преобразования частного двух гипергеометрических рядов для получения элементарных соотношений между этими рядами.

Для функций F, Φ, ${}_2F_0$ элементарные соотношения получены в частном случае $(b=0)$ и для функции I в общем случае (здесь $F \equiv F(a, b; c; z)$ и т. д.). В статье применяется следующая запись произведения $(a)_\kappa = a(a+1)\ldots(a+\kappa-1)$.
Соотношения получены для следующих рядов:

$$F(a, b; c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m!\,(c)_m} z^m, \ |z| < 1; \ \Phi(b; c; z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b)_m z^m}{m!\,(c_m)}; \ {}_2F_0(a; b;; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m!\, z^{-m}},$$

$$|z| \ll 1; \ I(c, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!\,(c)_m}.$$

1. Изучим следующую конечную цепную дробь (тождество) ([1]), стр. 98; [2], стр. 132):

$$\begin{cases} \dfrac{F(a,\ b+1;\ c+1;\ z)}{F(a,\ b;\ c;\ z)} \equiv \dfrac{1}{1}\ \dfrac{u_1 z}{-\ 1}\ \dfrac{v_1 z}{-\ 1}\ - \cdots - \\ -\dfrac{v_n z \dfrac{F(a+n,\ b+n+1;\ c+2n+1;\ z)}{F(a+n,\ b+n;\ c+2n;\ z}}{1}, \\ u_j = \dfrac{(a+j-1)(c-b+j-1)}{(c+2n-2)_2}, \\ v_j = \dfrac{(b+j)(c-a+j)}{(c+2j-1)_2},\ j = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Представим правую часть тождества (1) подходящей дробью в частном случае $(b = 0)$, получим

$$\frac{F(a,\ 1;\ c+1;\ z)}{1} \equiv \frac{p_{2n} F_1 - v_n z p_{2n-1} F_2}{q_{2n} F_1 - v_n z q_{2n-1} F_2}$$

(явные значения p_m, q_m в п. 4). Из последнего тождества нетрудно получить следующие элементарные соотношения:

$$\begin{cases} F(a, 1;\ c+1;\ z) = p_{2n} F(a+n, n;\ c+2n;\ z) - \\ - p_{2n-1} v_n z F(a+n,\ n+1;\ c+2n-1;\ z); \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 1 = q_{2n} F(a+n, n;\ c+2n;\ z) - \\ - v_n z q_{2n-1} F(a+n,\ n+1;\ c+2n-1;\ z). \end{cases} \tag{3}$$

2. Три предельных случая тождества (1) следующие ([2], стр. 134—137):

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi(b+1;\ c+1;\ z)}{\Phi(b;\ c;\ z)} \equiv \dfrac{1}{1} - \dfrac{a_1 z}{1} - \dfrac{b_1 z}{1} - \cdots - \\ - \dfrac{b_n z \Phi(b+n+1;\ c+2n+1;\ z)\,[\Phi(b+n;\ c+2n;\ z)]^{-1}}{1}, \\ a_j = \dfrac{c-b+j-1}{(c+2j-2)_2}, \quad b_j = \dfrac{-b-j}{(c+2j-1)_2}, \ j = 1, \ldots, n; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{{}_2F_0(a, b+1;;\ z)}{{}_2F_0(a, b;;\ z)} \equiv \dfrac{1}{1} - \dfrac{c_1 z}{1} - \dfrac{d_1 z}{1} - \cdots - \\ - \dfrac{d_n z\, {}_2F_0(a+n, b+n+1;;\ z)\,[{}_2F_0(a+n, b+n;;\ z)]^{-1}}{1}, \\ c_j = a+j-1, \quad d_j = b+j, \quad j = 1, \ldots, n; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} I(c+1, z)\,[I(c, z)]^{-1} \equiv \dfrac{1}{1} + \dfrac{e_1 z}{1} + \dfrac{g_1 z}{1} + \cdots \\ \cdots + \dfrac{g_n z I(c+2n+1, z)\,[I(c+2n, z)]^{-1}}{1}, \\ e_j^{-1} = (c+2j-2)_2, \quad g_j^{-1} = (c+2j-1)_2. \end{cases} \tag{6}$$

3. Аналогично п. 1 получим элементарные соотношения для частных значений функций из равенств (4), (5) ($b = 0$) и функции I:

$$\begin{cases} \Phi(1;\ c+1;\ z) = A_{2n} \Phi(n;\ c+2n;\ z) + \\ + b_n z A_{2n-1} \Phi(n+1;\ c+2n+1;\ z); \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} 1 = B_{2n} \Phi(n; c+2n;\ z) + \\ + b_n z B_{2n-1}; \Phi(n+1; c+2n+1; z); \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} {}_2F_0(a,\ 1;;\ z) = C_{2n}\, {}_2F_0(a+n,\ n;;\ z) - \\ - d_n z C_{2n-1}\, {}_2F_0(a+n,\ n+1;;\ z); \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} 1 = D_{2n}\, {}_2F_0(a+n,\ n;;\ z) - \\ - d_n z D_{2n-1}\, {}_2F_0(a+n_i,\ n+1;;\ z); \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} I(c+1,\ z) = E_{2n} I(c+2n,\ z) + \\ + g_n z E_{2n-1} I(c+2n+1,\ z); \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} I(c, z) = G_{2n} I(c+2n, z) + \\ + g_{2n} z G_{2n-1} I(c+2n+1, z). \end{cases} \tag{12}$$

4. Значения многочленов в равенствах (2), (3), (7)—(12) следующие ([3], стр. 21, 23; [4]):

$$
\left\{
\begin{aligned}
q_{2n-1} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(1-a-n)_{\kappa}}{(2-c-2n)_{\kappa}} (-z)^{\kappa};\\
q_{2n} &= \sum_{\kappa=0}^{n} C_{n}^{\kappa} \frac{(1-a-n)_{\kappa}}{(1-c-2n)_{\kappa}} (-z)^{\kappa};\\
p_{2n-1} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(1-a-n)_{\kappa}}{(2-c-2n)_{\kappa}} (-z)^{\kappa} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} \frac{(a+1)_m}{(c+2)_m} z^m;\\
p_{2n} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n}^{\kappa} \frac{(1-a-n)_{\kappa}}{(1-c-2n)_{\kappa}} (-z)^{\kappa} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} \frac{(a)_m}{(c+1)_m} z^m.
\end{aligned}
\right.
\tag{13}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&A_m = \lim_{a\to\infty} p_m\left(\frac{z}{a}\right); \qquad B_m = \lim_{a\to\infty} q_m\left(\frac{z}{a}\right);\\
&C_m = \lim_{c\to\infty} p_m(cz); \qquad D_m = \lim_{c\to\infty} q_m(cz).
\end{aligned}
\right.
\tag{14}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
E_{2n-1} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{C_{2n-\kappa-2}^{\kappa} z^{\kappa}}{(c+1)_{\kappa}(c+2n-1-\kappa)_{\kappa}};\\
E_{2n} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{2n-\kappa-1}^{\kappa} \left[(c+1)_{\kappa}(c+2n-\kappa)_{\kappa}\right]^{-1} z^{\kappa};\\
G_{2n-1} &= \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{2n-\kappa-1}^{\kappa} \left[(c)_{\kappa}(c+2n-1-\kappa)_{\kappa}\right]^{-1} z^{\kappa};\\
G_{2n} &= \sum_{\kappa=0}^{n} C_{2n-\kappa}^{\kappa} \left[(c)_{\kappa}(c+2n-\kappa)_{\kappa}\right]^{-1} z^{\kappa};\\
&n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
\right.
\tag{15}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.

2. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., Гостехиздат, 1956.

3. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. Изв. ТПИ. Т. 131, 1965.

4. В. Е. Корнилов. Применение произведения биномов для вычисления функций Бесселя. Изв. ТПИ. Т. 205, 1970.