ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

т. 245 1975 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕПОЛНЫХ ФУНКЦИЙ ГАУССА И КУММЕРА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

В статье рассматривается вопрос о представлении неполных функций Гаусса и Куммера суммой подходящей дроби и остаточного члена. При этом остаточный член по модулю меньше модуля разности двух соседних подходящих дробей в соответствующей области комплексного переменного z.

1. Функции Гаусса F и Куммера ${}_2F_0$ (асимптотический ряд) представим следующими интегралами:

$$\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z) = J_1 + J_2 =$$

$$= \int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt;\ \beta > 0,\ \gamma > \beta. \qquad (1)$$

$$\Gamma(\alpha)_2 F_0\left(\alpha,\ \beta;\ \frac{1}{z}\right) = I_1 + I_2 = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}(1-t:z)^{-\beta}\,dt;\ \alpha > 0. \qquad (2)$$

По аналогии с неполными бета- и гамма-функциями назовем неполными функциями Гаусса или Куммера соответственно интегралы (1) или (2), если один из постоянных пределов интегрирования заменить переменным пределом интегрирования $x\ (0 < x < 1$ или $0 < x < +\infty)$.

2. Интегралы (1) и (2) с помощью переменного предела x представим соответственно суммой интегралов J_1, J_2 и I_1, I_2, полученные интегралы преобразуем и окончательно имеем:

$$\begin{cases} x^{-\beta} I_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\alpha)_n}{(\beta+n)\cdot n!} F(\beta+n;\ \beta+1-\gamma;\ \beta+n+1;\ x) \times \\ \times x^n z^n;\ 0 < x < 1,\ \gamma > \beta+1,\ \alpha < 1. \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{(1-z)^{\alpha}}{(1-x)^{\gamma-\beta}} \cdot J_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\alpha)_n}{(\gamma-\beta+n)\cdot n!} \times \\ \times F(\gamma-\beta+n,\ 1-\beta;\ \gamma-\beta+n+1;\ 1-x)\,(1-x)^n z^n (z-1)^{-n}; \\ 0 < x < 1,\ \beta > 1,\ \alpha < 1. \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} x^{-\alpha} I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \left[\int_0^1 t^{\alpha+n-1} e^{-xt}\, dt \right] \left(\frac{x}{z} \right)^n; \\ 0 < x < +\infty, \quad \beta < 1. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \frac{e^x x^{1-\alpha}}{(1 - x : z)^{-\beta}} I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{1}{(z - x)^n} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \left[\int_0^{\infty} e^{-t} t^n \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} dt \right] (z - x)^{-n}; \\ 0 < x < +\infty, \; \beta < 1. \end{cases} \tag{6}$$

На основании равенств (1)—(6), теоремы ([1], стр. 211), а также ([2], стр. 226; [3], задача 1220) определители

$$\begin{vmatrix} a_p \dots a_{p+m-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p+m-1} \dots a_{p+2m-2} \end{vmatrix}; \dots; \begin{vmatrix} d_p \dots d_{p+m-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_{p+m-1} \dots d_{p+2m-2} \end{vmatrix};$$

$$p, \ m = 1, \ 2, \dots$$

положительны. Поэтому степенные ряды (3)—(6) представляются каждый суммой подходящей дроби и остаточного члена, который по модулю меньше модуля разности двух соседних подходящих дробей, и эти оценки справедливы соответственно в следующих областях комплексного переменного z [4]:

$$Re z, \; Re\left(\frac{z}{z-1}\right), \; Re\left(\frac{1}{z}\right), \; Re\,(z - x)^{-1} \leqslant 0.$$

При установлении пределов изменения параметров функций F в равенствах (3), (4) необходимо так подобрать значения параметров, чтобы в предельном случае ($x = 1$ или $x = 0$ соответственно) эти функции монотонно убывали с увеличением индекса n [4].

Например, для функции F ряда (3) имеем ([5], стр. 374, (67)

$$F(\beta + n, \ \beta + 1 - \gamma; \ \beta + n + 1; \ 1) = \frac{\Gamma(\beta + n + 1)\, \Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(1)\, \Gamma(\gamma + n)}.$$

Последовательность $\left\{ \frac{\Gamma(\beta + n + 1}{\Gamma(\gamma + n)} \right\} n = 0, \ 1, \ 2, \dots$ монотонно убывает только в том случае, если $\gamma > \beta + 1$. Для формулы (4) этим условием является неравенство $\beta > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.
2. В. Л. Данилов, А. И. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.
3. И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1957.
4. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению обобщенных гипергеометрических функций. Изв. ТПИ, т. 205, 1972.
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, том 3, часть вторая. М., Гостехиздат, 1953.