ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 231 1971

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

М. С. РОЙТМАН

(Представлена научным семинаром кафедры радиотехники)

Автогенератор* путем структурных преобразований может быть сведен к структурной схеме, приведенной на рис. 1. Он описывается нелинейным дифференциальным уравнением m-го порядка ($m \geqslant 2$)

$$W[E(x, \dot{x}...)] - 1 = 0. \tag{1}$$

Для приближенного решения системы 2-го порядка с одним нелинейным элементом применяются хорошо известные методы медленно меняющихся амплитуд (разработаны Ван-дер-Полем [1], Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси [2]) и малого параметра** (предложен А. А. Андроновым на основе работ А. Пуанкаре [3]).

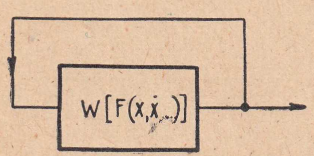

Рис. 1.

Однако следует заметить, что метод медленно меняющихся амплитуд применим только тогда, когда можно отвлечься как от нелинейных искажений формы, так и от нелинейных смещений частоты.

Ряд модификаций метода малого параметра излагается в [4]. Для исследования нелинейных систем 2-го порядка может быть эффективно использован и метод переменного масштаба (с большой полнотой он дан в монографии [5]).

Весьма наглядным является метод фазового пространства (разработан Х. Леотэ [6], А. Льенардом [7], А. А. Андроновым, В. А. Виттом и С. Э. Хайниным [3]). Все большее применение, особенно в автоматике, получают различные модификации гармонической линеаризации нелинейных систем*** [8, 9, 10, 11 и др.] (основы ее заложены в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова). Достоинством гармонической линеаризации является прежде всего то, что возможен анализ систем любого порядка с одним нелинейным элементом. Однако получение уточненных решений связано с громоздкими вычислениями (например, приемы Ю. Н. Топчеева) и малой наглядностью.

---

* В настоящей работе рассматриваются автогенераторы на базе усилительных звеньев, а не двухполюсников с отрицательным сопротивлением.

** Метод малого параметра принципиально применим и для анализа систем выше 2-го порядка.

*** Анализ автогенератора методом эквивалентной линеаризации крутизны лампы был впервые проведен Ю. Б. Кобзаревым [12].

Заметим, что при анализе систем авторегулирования интересуются уточненным решением прежде всего для основной гармоники. Нас же весьма интересуют и нелинейные искажения на выходе генератора.

Поэтому, несмотря на относительно хорошо разработанную теорию квазилинейных автоколебательных систем, автор счел оправданной попытку упростить анализ и сделать его более наглядным.

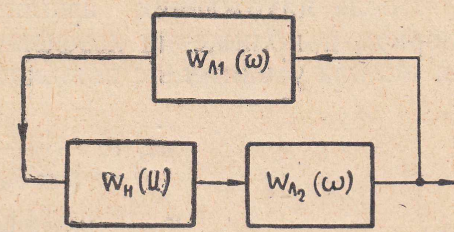

Рис. 2.

Структура автогенератора может быть приведена к виду, данному на рис. 2, где $W_{л1}, W_{л2}$—линейные звенья, $W_{н}$ —нелинейное частотонезависимое звено.

При подаче на вход нелинейного звена (точка a) синусоидального сигнала $U_m \sin\omega t$ первая гармоника выходного напряжения равна

$$U_{m\text{вых}} \sin\omega t = \frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi} W_{н}\left[U_m \sin\omega t\right] U_m \sin\omega t d\omega t.$$

Отношение

$$\frac{U_{m\text{вых}}}{U_m} = W_{н}(u) \tag{2}$$

будем именовать линеаризованным (осредненным) коэффициентом передачи нелинейного звена.

Величина $W_н\ (u)$ теперь зависит от амплитудного (среднего, действующего) значения напряжения, но не от мгновенного.

Уравнение (1) может быть переписано в виде

$$W_{л1}(\omega)\, e^{j\varphi_1(\omega)}\cdot W_{н}(u)\cdot W_{л2}(\omega)\, e^{j\varphi_2(\omega)} - 1 = 0.$$

Меняя обозначения на более привычные для радиоинженера

$$\dot{W}_{л1}(\omega) = \dot{\beta}_n(\omega) \text{ и } W_{н}(u)\cdot \dot{W}_{л2}(\omega) = K_{н}(u)\cdot \dot{K}_{у}(\omega) = \dot{K}(u)(\omega),$$

получим

$$K(u)(\omega)\cdot\beta_n(\omega)\, e^{j\left[\varphi_K(\omega)+\varphi_\beta(\omega)\right]} - 1 = 0.$$

Система будет генерировать на частотах ω, для которых выполняются общеизвестные условия баланса фаз

$$\varphi_K(\omega) + \varphi_\beta(\omega) = \varphi_\Sigma(\omega) = 2n\pi \ (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{3}$$

амплитуд

$$K(u)(\omega)\cdot\beta(\omega) \geqslant 1. \tag{4}$$

Если условия (3), (4) выполняются только на одной частоте, то колебания будут квазигармоническими. Частота генерации (ω_0) в первом приближении определяется из (3), а амплитуда колебаний из уравнения

$$K(u)(\omega)\cdot\beta(\omega) = 1. \tag{5}$$

Легко заметить, что для устойчивости стационарного решения должно выполняться условие

$$\frac{dK(u)}{du} < 0. \tag{6}$$

Формулы (2, 3, 5) справедливы вне зависимости от того, где расположено нелинейное звено (если, конечно, нелинейность входного и выходного сопротивлений этого звена мало влияет на систему, что обычно на практике и стараются делать).

Эквивалентная добротность системы определяется из выражения

$$Q_э = \frac{d\varphi_\Sigma(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{\omega}{2}.$$

После нахождения амплитуды и частоты генерации определим в первом приближении коэффициенты гармоник генератора, рассматривая его как усилитель с положительной обратной связью [13]

$$\dot{\kappa}_{п\text{г}} = \frac{\dot{\kappa}_{r\text{у}}}{1 - \dot{\beta}_n(n\omega) \cdot \dot{K}(u)(n\omega)}, \tag{7}$$

где $\kappa_{n\text{у}}$ — коэффициент n-ой гармоники усилителя без положительной ОС;

$\dot{\beta}_n(n\omega)$, $\dot{K}(u)$ $(n\omega)$ — коэффициенты передачи для n-й гармоники цепи ПОС и усилителя соответственно.

Такой переход не только упрощает определение искажения, но и резко упрощает нахождение в случае необходимости уточненного решения.

Практически, при расчетах можно в (7) вместо $K(u)(n\omega)$ подставлять $K(n\omega)$ (т. е. считать усилитель линейным).

Итак, порядок нахождения первого приближения следующий:

1) определяем по (3) частоту генерации;

2) находим линеаризованное значение коэффициента передачи нелинейного звена;

3) из равенства (5) определяем амплитуду входного сигнала U_m, а затем и амплитуду первой гармоники $U_{m\text{вых}}$ на выходе генератора

$$K(u) \cdot U_m = U_{m\,\text{вых}};$$

4) по формуле (7) вычисляем нелинейные искажения генератора.

В большинстве случаев первого приближения вполне достаточно. и стремление к повышению точности расчетов не оправдано. Но иногда нахождение уточненного решения принципиально необходимо. Применительно к амплитудно-стабильным генераторам это требуется делать, когда нелинейность имеет нечетный характер. Ввиду важности затронутого вопроса рассмотрим его подробнее.

Функция нелинейного элемента f(x) (лампы, транзистора, диода) может быть представлена в виде ряда Тэйлора или Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot \frac{df(0)}{dx} + \frac{x^2 d^2 f(0)}{2!\, dx^2} + \cdots + \frac{x^i}{i!} \frac{d^i f(0)}{dx^i}$$

с остаточным

$$R_n = \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \cdot \frac{d^{i+1} f(\Theta x)}{dx^{i+1}} (0 < \Theta < 1),$$

т. е. полиномом n-го порядка

$$f(x) = K_0 + K'x + K''x^2 + \cdots + K^i x^i, \tag{8}$$

где

$$K = \frac{df(0)}{dx}; \quad K'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 f(0)}{dx^2}; \quad K^i = \frac{1}{i!} \cdot \frac{d^i f(0)}{dx^i}.$$

Для электронных элементов ряд (8) является быстросходящимся, и при анализе автогенераторов допустимо ограничиваться первыми

---

* Так как нас интересуют широкодиапазонные генераторы, то нелинейности можно считать мало зависящими от частоты и, следовательно, функцией лишь одной переменной.

тремя членами*, которые дают полную качественную картину о НЭ (постоянная, четная и нечетная составляющие).

Допускаемая при этом ошибка обычно меньше существующего разброса параметров.

Итак, аппроксимируя коэффициент передачи нелинейного звена $K_н$ в виде ряда (8) и подав на его вход $U_m \sin \omega t$, на выходе получим:

$$u_{вых}(t) = U_m \sin \omega t \cdot K_н [U_m \sin \omega t] = \left(K_н + \frac{3}{4} K_н'' U_m^2 \right) \cdot$$

$$\cdot U_m \sin \omega t + \frac{1}{2} K_н' U_m^2 - \frac{1}{2} K_н' U_m^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{4} K_н'' \cdot \qquad (9)$$

$$\cdot U_m^3 \sin \omega t = \sum_{n=1}^{3} A_{nн} \sin (n\omega t + \varphi_n).$$

Линеаризованное значение коэффициента усиления равно

$$K(u)(\omega) = \left[K_н + \frac{3}{4} K_н'' U_m^2 \right] K_{л2}(\omega). \qquad (10)$$

Легко заметить, что $\frac{dK(u)}{du} = 0$, если в разложении (8) отсутствуют четные производные, т. е.

$$\frac{d^2 f(0)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^4 f(0)}{dx^4} = 0, \ldots$$

Но если $\frac{dK(u)}{du} = 0$, то устойчивая генерация невозможна (речь идет пока о системах с безынерционными нелинейностями (БНЭ).

Чтобы окончательно судить о стабильности периодического режима, необходимо найти его уточненное решение.

Итак, можно сформулировать следующее правило (оно будет уточнено): если в разомкнутой системе автогенератора при подаче на ее вход синусоидального сигнала на выходе отсутствуют нечетные гармоники**, то обязательно требуется определять уточненное решение.

Для нахождения нелинейных искажений и уточненного решения воспользуемся следующим приемом.

Подадим на вход усилителя синусоидальное напряжение от источника с внутренним сопротивлением, равным выходному звену $\beta_п(\omega)$. Коэффициент передачи по основной гармонике определяется по (10), а коэффициенты высших гармоник усилителя равны

$$\dot{K}_{ny} = \frac{\dot{K}_{л2}(n\omega)}{\dot{K}_{л2}(\omega)} \cdot K_{n\,(нэ)} \approx \frac{\dot{K}(u)(n\omega)}{\dot{K}(u)(\omega)} \cdot K_{n\,(нэ)}, \qquad (11)$$

где
$$K_{n\,(нэ)} = \frac{1}{U_m \cdot K_н \pi} \int_0^{2\pi} K_н [U_m \sin \omega t] \, U_m \sin n\omega t \, d\omega t.$$

---

* Учет высших нелинейностей строго необходим во всех тех случаях, когда часть сигнала помехи (или помех) за счет комбинационных членов может попасть в зону прозрачности устройства, и этот факт существенен (например, в приемниках аппаратуры радиоразведки). В некоторых случаях, например, при использовании опорных диодов, целесообразнее применять кусочно-линейную аппроксимацию. Но какова бы не была аппроксимация НЭ нижеделанные выводы остаются в силе.

** Непосредственно из (9) видно, что $\frac{dK(U)}{dU} \neq 0$, если имеются нечетные гармоники, т. е. если $\frac{d^2 f(0)}{dx^2} \neq 0$.

Коэффициенты гармоник для генератора получим, подставив значение $\dot{K}_{пу}$ в выражение (7). На выходе генератора будем иметь

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{n=1}^{q} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

Уточненное решение можно найти, анализируя комбинационные продукты. Напряжения гармоник с выхода генератора через цепь положительной обратной связи 1 снова поступают на вход нелинейного звена. Теперь мы должны найти комплексный коэффициент передачи НЭ, учитывая, что вместо синусоидального сигнала $U_m \sin \omega t$ необходимо в $W_н[u(t)]$ подставлять спектр

$$u(t) = \sum_{n=1}^{q} A_n \beta_n(n\omega) \sin[n\omega t + \varphi_n + \varphi_\beta(n\omega)]. \tag{12}$$

Коэффициент передачи НЭ

$$\dot{K}_{\text{н уточ}}(u) = K_{\text{нут}}(u) e^{j\varphi_{\text{нэ}}} = \frac{U_{m\,\text{вых}}}{U_m} e^{j\varphi_{\text{нэ}}} = K_{н}(u) + \Delta_1 K_{н}(u) + j\Delta_2 K_{н}(u), \tag{13}$$

где $\Delta_1 K(u)$, $\Delta_2 K(u)$ — дополнительные составляющие коэффициента передачи, обусловленные появлением в спектре выходного напряжения комбинационных составляющих основной частоты.

Все выкладки по определнию $\Delta_1 K_п(u)$ и $\Delta_2 K_н(u)$ можно резко упростить, если воспользоваться правилами комбинаторики и учесть, что

$$\beta[(n-1)\omega] > \beta(n\omega)_{n \geqslant 2}. \tag{14}$$

Дополнительную составляющую первой гармоники дадут комбинации членов рядов (8) и (12), степени которых равны

$$|n-i|_{\substack{i \neq 0 \\ n \neq 0}} = 1.$$

Но вследствии затухания нелинейности* и условия (14) основной вклад дает составляющая (n—i) = (2—1).

Основанием для дальнейшего упрощения анализа является реально имеющееся ограничение для всех рассматриваемых генераторов — малость нелинейных искажений на выходе.

Следовательно, «нелинейное смещение» фазы первой гармоники напряжения на выходе НЭ по отношению к выходному невелико и с достаточным основанием можно считать

$$\cos\varphi_{\text{нэ}} \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_{\text{нэ}}^2 \approx 1.$$

Тогда

$$K_{\text{нут}}(u) \approx K_н(u) + \Delta_1 K_н(u)$$

и

$$\varphi_{\text{нэ}} = \arcsin\frac{\Delta_2 K_н(u)}{K_н(u) + \Delta_1 K_n(u)} \approx \arcsin\frac{\Delta_2 K(u)^{**}}{K_н(u)}.$$

Учитывая, что суммарный фазовый сдвиг для первой гармоники равен нулю [см. (3)] и

$$\dot{U}_m = \dot{U}_m \dot{K}_н(u) \cdot \kappa_{л2}(\omega) \dot{\beta}(\omega) = A_1 \dot{\beta}(\omega),$$

* Для определенности оговоримся, что под затуханием нелинейности приняты условия $\frac{d}{dU} K_н' U_m > \frac{d}{dU} K_н''' U_m^3$ и $\frac{d}{dU} K_н'' U_m^2 > \frac{d}{dU} K_н'''' U_m^4$

** Принятые упрощения не являются принципиально необходимыми.

поправка на амплитуду и частоту основной гармоники колебаний определяется из равенств

$$\frac{\Delta_1 K_н(u)}{K_н(u)} \approx \frac{1}{U_m K_н(u)\pi}\int_0^{2\pi} K_н'\left[U_m \sin\omega t - \mathrm{Re}\,\frac{A_{2н}\dot K_{л2}(2\omega)}{1-\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\dot\beta(2\omega)\cos 2\omega t\right]^2 \sin\omega t d\omega t = \frac{K_н'}{K_н(u)}\cdot A_{2н}\,\mathrm{Re}\,\frac{\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}{K_н(u)\left[1-\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)\right]}; \qquad (15)$$

$$\frac{\Delta_2 K(u)}{K_н(u)} = \frac{1}{U_m K_н(u)\pi}\int_0^{2\pi} K_н'\left[U_m \sin\omega t + \mathrm{Im}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{A_{2н}\dot K_{л2}(2\omega)}{1-\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}\cdot\dot\beta(2\omega)\sin 2\omega t\right]^2 \cos\omega t d\omega t =$$

$$= \frac{K_н'}{K_н(u)} A_{2н}\,\mathrm{Im}\,\frac{\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}{K_н(U)\left[1-\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)\right]}. \qquad (16)$$

Но

$$A_{2н} = \frac{1}{2}\left|K_н'\right| U_m^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{dK_н[f(u)]}{du}\right| U_m^2 = \kappa_{2н} A_{1н} = \kappa_{2н} K_н(u)\,U_m,$$

где $\kappa_{2н}$ — коэффициент второй гармоники на выходе нелинейного звена;

$A_{1н}$ — амплитуда первой гармоники.

$$K_н' = \frac{2\kappa_{2н}\cdot K(u)}{U_m}\cdot\mathrm{sign}\,\frac{dK[f(u)]}{du}$$

и формулы (15), (16) можем записать в виде

$$\frac{\Delta_1 K_н(u)}{K_н(u)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{K_н(U)^2}\left|\frac{dK_н[f(U)]}{dU}\right|^2 U_m^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}{1-\dot K[(U)(2\omega)]\dot\beta(2\omega)}\cdot\right.$$

$$\cdot\,\mathrm{sign}\,\frac{dK[f(u)]}{du}, \qquad (17)$$

или

$$\frac{\Delta_1 K_н(u)}{K_н(u)} = 2\kappa_{2н}^2\cdot\mathrm{Re}\,\frac{\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}{1-\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}\,\mathrm{sign}\,\frac{dK[f(u)]}{du}; \qquad (18)$$

$$\varphi_{нэ} \approx \arcsin\frac{\Delta_2 K(u)}{K_н(u)} = \arcsin\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[K_н(u)]^2}\left|\frac{dK_н[f(u)]}{du}\right|^2\cdot$$

$$u_m^2\,\mathrm{Im}\,\frac{\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}{K_н(u)\left[1-\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)\right]}, \qquad (19)$$

или

$$\varphi_{нэ} \approx \arcsin 2\kappa_{2н}^2\,\mathrm{Im}\,\frac{\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)}{K_н(u)\left[1-\dot K(u)(2\omega)\dot\beta(2\omega)\right]}\,\mathrm{sign}\,\frac{dK[f(u)]}{du}. \qquad (20)$$

Подставляя в (5) уточненное значение коэффициента передачи нелинейного звена, можем определить амплитуду установившихся колебаний.

Из условия баланса фаз найдем нелинейное смещение частоты

$$\Delta\omega \approx \frac{-\varphi_{\text{гэ}}}{\dfrac{\partial\varphi_{\Sigma}(\omega)}{\partial\omega}}. \tag{21}$$

Поправка на величину 3-й гармоники генератора равна

$$\Delta\dot{A}_3 = \frac{\dot{K}_{\text{л}2}(3\omega)}{1-\dot{K}(u)(3\omega)\dot{\beta}(3\omega)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{(-K_{\text{н}}')\,U_m\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{A_{2\text{н}}\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}{K_{\text{н}}(u)\left[1-\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)\right]}\cdot e^{j3\omega t}\right\}e^{-j3\omega t}\,d\omega t =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{[K_{\text{н}}(u)]^2}\left|\frac{dK_{\text{н}}[f(u)]}{du}\right|^2 U_m^3\frac{\dot{K}(u)(3\omega)}{1-\dot{K}(u)(3\omega)\dot{\beta}(3\omega)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}{1-\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}\,\text{sign}\left\{-\frac{dK_{\text{н}}[f(u)]}{du}\right\}=$$

$$=2\kappa_{2\text{н}}^2 U_m\frac{\dot{K}(u)(3\omega)}{1-\dot{K}(u)(3\omega)\dot{\beta}(3\omega)}\cdot\frac{\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}{1-\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}\,\text{sign}\,\cdot$$

$$\cdot\left\{-\frac{dK_{\text{н}}[f(u)]}{du}\right\}. \tag{22}$$

Сопоставление полученных формул позволяет сделать, несмотря на допущенные упрощения, ряд важных выводов.

1. Нахождение уточненного решения оправдано только тогда, когда

$$\left|\kappa_{2\text{н}}^2\frac{\dot{K}(u)(3\omega)/\dot{K}(u)(\omega)}{1-\dot{K}(u)(3\omega)\dot{\beta}(3\omega)}\cdot\frac{\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}{1-\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}\right| > 2\kappa_{3\text{у}}, \tag{23}$$

где $K_{3\text{у}}$ — коэффициент третьей гармоники усилителя (разомкнутой системы).

Если неравенство (23) превратить в равенство, то и тогда максимальное значение относительной поправки на амплитуду основной гармоники автоколебаний не превышает 10%.

2. Для стабильной генерации должны выполняться условия:

а) при четной нелинейности

$$\frac{dK[f(u)]}{du}\cdot\text{Re}\,\frac{\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}{1-\dot{K}(u)(\omega)\dot{\beta}(2\omega)} < 0;$$

б) при нечетной

$$\frac{d^2K[f(u)]}{du^2} < 0;$$

в) при комбинированной

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{dK[f(u)]}{du}\right\}^2\cdot\text{Re}\,\frac{\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)}{K_{\text{н}}(u)\left[1-\dot{K}(u)(2\omega)\dot{\beta}(2\omega)\right]}\cdot$$

$$\text{sign}\,\frac{dK[f(u)]}{du}+\frac{3}{8}\cdot\frac{d^2K[f(u)]}{du^2} < 0.$$

3. Для получения минимальных искажений при заданной стабильности амплитуды колебаний необходимо, чтобы НЭ имел симметричную характеристику (нечетную).

4. Между знаком $\dfrac{dK(U)}{dU}$ и фазами гармоник для данной схемы существует однозначная связь. Эта связь существует и между самими величинами $K(u)$ и $K_{п}$ ($K_{гу}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических колебаний Связьиздат, М., 1935.
2. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. ЖЭТФ, 4, 1934.
3. А. А. Андронов, А. Л. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. Физматгиз, М., 1959.
4. Дж. Хейл. Колебания в нелинейных системах. Изд. «Мир», М., 1966.
5. Н. Г. Бондарь. Некоторые автономные задачи нелинейной механики. Изд. «Наукова думка», Киев, 1969.
6. H. Leaute. Sur les oscillations a longues periodes dans les machines actinees par des moteurs hydrouliques et sur les moyens de prevenir ces oscilations. Sour. de l'Ecode Polytechnigue. 55, 1, 1885.
7. A. Liénard. Etude des oscilations entretenues, Rev. gen. d'Electr. 1928.
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1963.
9. Е. П. Попов, И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, М., 1960.
10. И. И. Кринецкий. Расчет нелинейных автоматических систем. «Техника», Киев, 1968.
11. О. Блакьер. Анализ нелинейных систем. «Мир», М., 1969.
12. Ю. Б. Кобзарев. О квазилинейном методе трактовки явлений в ламповом генераторе почти синусоидальных колебаний. ЖТФ, т. V, № 2, 1935.
13. М. С. Ройтман. Генератор чисто синусоидального напряжения Изв. вузов СССР, Радиоэлектроника, № 8, 1967.