ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ С. М. КИРОВА

Том 230 1972

УХОДЫ ОДНООСНОГО ПОПЛАВКОВОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА НА КАЧАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

А. М. МАЛЫШЕНКО

(Представлена научным семинаром
кафедры автоматики и телемеханики)

В данной статье анализируются уходы одноосного поплавкового гиростабилизатора, установленного на основании, совершающем колебания с малыми амплитудами углов α_i, при которых

$$\sin\alpha_i \simeq \alpha_i; \quad \cos\alpha_i \simeq 1.$$

Подобная ситуация имеет место, в частности, в гиростабилизированных платформах со следящими системами, использующих одноосные гиростабилизаторы в качестве опорных датчиков положения.

Если связать с основанием, на котором установлен гиростабилизатор, правый ортогональный трехгранник осей xyz и ориентировать гиростабилизатор так, как это указано на рис. 1, то движения гиростабилизатора можно описать совокупностью усеченных дифференциальных уравнений

$$H\dot{\varepsilon} - H\Omega_x\theta = -H\Omega_y + M_{\text{МК}} - M_{\theta b}; \tag{1}$$

$$H\dot{\theta} + \mu\dot{\varepsilon} + H\Omega_x\varepsilon = -H\Omega_z + M_{\text{у}} + M_{\varepsilon b}. \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) приняты следующие обозначения:

θ — угол поворота наружного кольца (корпуса) гиростабилизатора относительно основания;

ε — угол поворота наружного кольца гиростабилизатора относительно внутреннего (поплавка);

H — собственный кинетический момент гироскопа;

μ — коэффициент вязкого трения между поплавком и корпусом гироскопа;

Ω_x, Ω_y, Ω_z — проекции абсолютной угловой скорости основания соответственно на оси x, y, z;

$M_{\theta b}$, $M_{\varepsilon b}$ — моменты вредных сил по наружной и внутренней осям подвеса гироскопа:

$M_{\text{у}}$ — управляющий момент;

$M_{\text{МК}}$ — момент межрамочной коррекции гиростабилизатора.

В дальнейшем полагаем, что

$$M_{\text{у}} \equiv 0;$$

$$M_{\text{МК}} = -k\varepsilon,$$

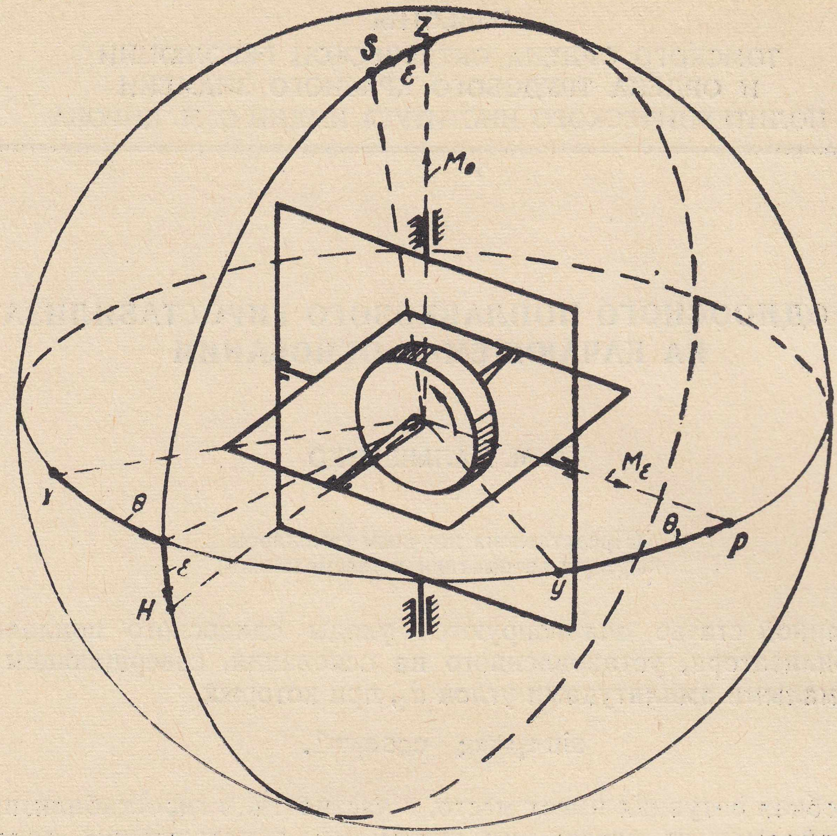

Рис. 1

где k — коэффициент передачи цепи межрамочной коррекции.

При этих условиях уравнения (1) и (2) запишутся в виде:

$$H\dot{\varepsilon}+k\varepsilon-H\Omega_x\theta=-H\Omega_y-M_{\theta b}; \tag{3}$$

$$H\dot{\theta}+\mu\dot{\varepsilon}+H\Omega_x\varepsilon=-H\Omega_z+M_{\varepsilon b}. \tag{4}$$

Для определения скорости ухода гиростабилизатора в инерциальном пространстве $\Omega_z+\dot{\theta}$ перейдем от системы уравнений (3) и (4) к интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t)=&-\Omega_z(t)+\frac{1}{H}M_{\varepsilon b}(t)+\frac{\mu}{H^2}M_{\theta b}(t)+\frac{\mu}{H}\Big[\Omega_y(t)-\\&-\Omega_x(t)\int_0^t\dot{\theta}(t_1)\,dt_1\Big]-\left[\frac{\mu k}{H^2}-\Omega_x(t)\right]\Big\{\varepsilon_0e^{-\frac{t}{T}}-\\&-\int_0^t e^{\frac{t_1-t}{T}}\Big[\Omega_y(t_1)+\frac{1}{H}M_{\theta b}(t_1)+\Omega_x(t_1)\times\\&\times\int_0^{t_1}\dot{\theta}(t_2)\,dt_2\Big]dt_1\Big\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь постоянная времени

$$T=\frac{H}{k}. \tag{6}$$

Уравнение (5) позволяет методом последовательных приближений анализировать движения гиростабилизатора при любых угловых колебаниях основания с частотами, меньшими собственной частоты гиростабилизатора.

Если предположить, что

$$\Omega_i(t)=\Omega_{im}\sin(\omega_i t+\varphi_i),\ i=x,\ y,\ z; \tag{7}$$

$$M_\varepsilon = M_{\varepsilon 0}+M_{\varepsilon m}\sin(\omega_\varepsilon t+\varphi_\varepsilon); \tag{8}$$

$$M_\theta=M_{\theta 0}+M_{\theta m}\sin(\omega_\theta t+\varphi_\theta), \tag{9}$$

то в установившемся режиме работы скорость ухода гиростабилизатора согласно (5) будет равна в первом приближении

$$\Omega(t)=\Omega_z(t)+\dot\theta(t)=\frac{M_{\varepsilon 0}}{H}+\frac{M_{\varepsilon m}}{H}\sin(\omega_\varepsilon t+\varphi_\varepsilon)+$$

$$+\frac{\mu}{k}M_{\theta m}\sin(\omega_\theta t+\varphi_\theta)+\frac{M_{\varepsilon 0}}{H}\Omega_{xm}\sin(\omega_x t+\varphi_x)+$$

$$+\frac{\mu}{H}\Omega_{ym}\cdot\sin(\omega_y t+\varphi_y)+\left[\frac{\mu k}{H^2}-\Omega_{xm}\sin(\omega_x t+\varphi_x)\right]+$$

$$+\frac{M_{\theta m}}{\sqrt{1+T^2\omega_\theta^2}}\sin(\omega_\theta t+\varphi_\theta+\psi_\theta)+\frac{\Omega_{ym}T}{\sqrt{1+T^2\omega_y^2}}\sin(\omega_y t+\varphi_y+\psi_y), \tag{10}$$

где

$$\psi_\theta=\operatorname{arctg}(-\omega_\theta T); \tag{11}$$

$$\psi_y=\operatorname{arctg}(-\omega_y T). \tag{12}$$

На основании (10) можно заключить, что при отсутствии постоянных моментов $M_{\varepsilon 0}$ по оси прецессии и неравенстве между собой круговых частот изменения вредных моментов и проекций угловой скорости основания на оси x, y, z систематический уход гиростабилизатора отсутствует.

При $M_{\varepsilon 0}=0$ систематический уход гиростабилизатора может возникнуть лишь при наличии равнопериодических составляющих гармоник колебаний Ω_x и одной из переменных Ω_y, M_θ или всех трех одновременно. Скорость систематического ухода в последнем случае будет приближенно равна:

$$\Omega_c(t)=-\frac{T}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\Omega_{xm}\Omega_{ym}\cos(\varphi_x-\varphi_y-\psi)-$$

$$-\frac{\Omega_{xm}M_{\theta m}}{2k\sqrt{1+T^2\omega^2}}\cos(\varphi_x-\varphi_M-\psi), \tag{13}$$

где

$$\psi=\operatorname{arctg}(-\omega T), \tag{14}$$

ω — круговая частота колебаний.

При необходимости уточнения величины скорости ухода гиростабилизатора следует, воспользовавшись методом последовательных подстановок, подставить найденное по первому приближению значение скорости ухода в исходное уравнение (5). Практически, при оценке скорости ухода гиростабилизатора можно ограничиться решением (10), так как последующие приближения $\Omega_i(t)$, как показывает решение задачи на аналоговой модели, мало отличается от значения $\Omega_1(t)$.

В моменте внешних сил, действующих на наружное кольцо подвеса гироскопа, при тщательной балансировке последнего превалирует момент сил сухого трения. Анализ влияния сухого трения на систематический уход одноосного гиростабилизатора проводится ниже для случая, когда гиростабилизатор установлен на платформе в трехстепенном кардановом подвесе и кольца последнего поворачиваются на малые углы α, β, γ.

При аппроксимации характеристики сухого трения по оси стабилизации функцией вида

$$M = M_{\text{Т}} \operatorname{sign} \dot{\theta} \tag{15}$$

и допущении, что

$$\varepsilon_0 = 0; \quad M_{\varepsilon 0} = 0; \quad M_{\text{МК}} = -k\varepsilon,$$

усеченные уравнения движения гиростабилизатора принимают вид:

$$H\Omega_x \theta + H\dot{\varepsilon} - k\varepsilon = H\Omega_y - M_{\text{Т}} \operatorname{sign} \dot{\theta}; \tag{16}$$

$$H\dot{\theta} + \mu\dot{\varepsilon} + H\Omega_x \varepsilon = -H\Omega_z. \tag{17}$$

Ограничимся частным случаем движения основания, когда

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi_\alpha); \tag{18}$$

$$\beta = \beta_m \sin(\omega t + \varphi_\beta). \tag{19}$$

Воспользовавшись ранее полученным уравнением (5) для данного частного случая, получим следующее выражение для $\dot{\theta}$ без учета членов второго и более высоких порядков малости:

$$\dot{\theta}(t) = \alpha_m \beta_m \omega \cos(\omega t + \varphi_\alpha) \cdot \sin(\omega t + \varphi_\beta) - \frac{\mu}{H^2} M_{\text{Т}} \operatorname{sign} \dot{\theta} +$$

$$+ \frac{\mu}{H} \beta_m \omega \cos(\omega t + \varphi_\beta) + \left[\frac{\mu k}{H} - \alpha_m \omega \cos(\omega t + \varphi_\alpha) \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{H} \int_0^t e^{\frac{t_1 - t}{T}} M_{\text{Т}} \operatorname{sign} \dot{\theta} \cdot dt - \int_0^t e^{\frac{t_1 - t}{T}} \beta_m \omega \cos(\omega t + \varphi_\beta)\, dt_1 \right]. \tag{20}$$

На основании (17) можно считать, что при принятых условиях

$$\operatorname{sign} \dot{\theta} \simeq -\operatorname{sign} \dot{\varepsilon},$$

так как практически

$$\dot{\varepsilon} \gg \frac{H}{\mu} \Omega_x \varepsilon.$$

При допущении, что

$$\frac{M_\theta}{H} \ll \Omega_{ym},$$

установившееся значение скорости прецессии $\dot{\varepsilon}$ гиростабилизатора равно

$$\dot{\varepsilon} \simeq -\frac{\omega^2 T}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \beta_m \sin(\omega t + \varphi_\beta + \psi). \tag{21}$$

Здесь, как и ранее,

$$\psi = \operatorname{arctg}(-\omega T).$$

Таким образом, при принятом режиме колебаний основания

$$\operatorname{sign}\dot{\theta}=\operatorname{sign}[\sin(\omega t+\varphi_\beta+\psi)]. \tag{22}$$

Если разложить эту периодическую функцию в тригонометрический ряд

$$\operatorname{sign}[\sin(\omega t+\varphi_\beta+\psi)]=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t+\varphi_\beta+\psi)+\frac{\sin(3\omega t+\varphi_\beta+\psi)}{3}+\ldots\right]$$

и ограничиться лишь первой его составляющей, то будем иметь

$$\operatorname{sign}\dot{\theta}\simeq\frac{4}{\pi}\sin(\omega t+\varphi_\beta+\psi). \tag{23}$$

После подстановки (23) в (20) и интегрирования получаем установившееся значение скорости ухода гиростабилизатора

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t)&=\alpha_m\beta_m\cos(\omega t+\varphi_\alpha)\cdot\sin(\omega t+\varphi_\beta)-\frac{4\mu}{\pi H^2}M_{\text{т}}\sin(\omega t+\varphi_\beta+\psi)+\\&+\frac{\mu}{H}\beta_m\omega\cos(\omega t+\varphi_\beta)+\left[\frac{\mu k}{H^2}-\alpha_m\omega\cos(\omega t+\varphi_\alpha)\right]\times\\&\times\left[\frac{4M_{\text{т}}}{\pi k\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi_\beta+2\psi)-\frac{\omega T\beta_m}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\cos(\omega t+\varphi_\beta+\psi)\right].\end{aligned} \tag{24}$$

Постоянная составляющая скорости относительного движения гиростабилизатора при этом равна

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{\text{c}}&=-\frac{1}{2}\alpha_m\beta_m\omega\sin(\varphi_\alpha-\varphi_\beta)+\frac{\omega^2T}{2\sqrt{1-T^2\omega^2}}\alpha_m\beta_m\cos(\varphi_\alpha-\varphi_\beta-\psi)+\\&+\frac{2\alpha_m\omega M_{\text{т}}}{\pi k\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\varphi_\alpha-\varphi_\beta-2\psi),\end{aligned} \tag{25}$$

а скорость ухода в инерциальном пространстве

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{c}}=\Omega_z+\dot{\theta}&=\frac{\omega^2T}{2\sqrt{1+T^2\omega^2}}\alpha_m\beta_m\cos(\varphi_\alpha-\varphi_\beta-\psi)+\\&+\frac{2M_{\text{т}}\omega\alpha_m}{\pi k\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\varphi_\alpha-\varphi_\beta-2\psi).\end{aligned} \tag{26}$$

При одновременных колебаниях платформы вокруг трех осей карданова подвеса с примерно одинаковыми пределами изменения углов колебаний α, β, γ и достаточно высоком коэффициенте усиления цепи межрамочной коррекции гиростабилизатора

$$\operatorname{sign}\dot{\theta}\simeq-\operatorname{sign}\dot{\gamma}.$$

Если при этом углы α и β изменяются согласно (18) и (19), а

$$\gamma=\gamma_m\sin(\omega t+\varphi_\gamma),$$

то дополнительная составляющая скорости систематического ухода гиростабилизатора, обусловленная сухим трением по оси наружной рамки, приближенно равна величине

$$\Omega_M = \frac{2\alpha_m M_T}{\pi k \sqrt{1+T^2\omega^2}} \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\gamma - \psi). \qquad (27)$$

При случайном характере колебаний основания гиростабилизатора и моментов вредных сил по осям его подвеса математическое ожидание скорости ухода гиростабилизатора согласно (5) равно в первом приближении

$$m_\Omega(t) = \frac{1}{H} m_\varepsilon(t) + \frac{\mu}{H^2} m_{M_\theta}(t) + \frac{\mu}{H} m_{\Omega_y}(t) -$$

$$-\frac{\mu k}{H^3}\int_0^t e^{\frac{t_1-t}{T}} m_{M_\theta}(t_1)\,dt_1 + \frac{1}{H}\int_0^t e^{\frac{t_1-t}{T}} [R_{\Omega_x M_\theta}(t,\ t_1) +$$

$$+ m_{\Omega_x}(t_1)\cdot m_{M\theta}(t_1)]\,dt_1 - \frac{\mu k}{H^2}\int_0^t e^{\frac{t_1-t}{T}} [R_{\Omega_x \Omega_y}(t,\ t_1) +$$

$$+ m_{\Omega_x}(t)\cdot m_{\Omega_y}(t_1)]\,dt_1. \qquad (28)$$

Если предположить, что колебания основания и моменты вредных сил — стационарные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями, то

$$m_\Omega(t) = \int_0^t e^{\frac{t_1-t}{T}} [R_{\Omega_x\Omega_y}(t,\ t_1) + \frac{1}{H} R_{\Omega_x M_\theta}(t,\ t_1)]\,dt_1. \qquad (29)$$

В формулах (28) и (29) знак $m_i(t)$ обозначает математическое ожидание i-го процесса, а $R_{ij}(t,t_1)$ — взаимную корреляционную функцию i-го и j-го процессов.

Уточнение величины математического ожидания скорости ухода гиростабилизатора на основании второго приближенного решения уравнений движения для вышеуказанных режимов возмущений приводит к следующему выражению для $m_\Omega(t)$:

$$m_\Omega(t) = \int_0^t e^{\frac{t_1-t}{T}} \left[R_{\Omega_x\Omega_y}(t,\ t_1) + \frac{1}{H} R_{\Omega_x M_\theta}(t,\ t_1) \right] dt_1 -$$

$$-\frac{\mu^2 k}{H^3}\int_0^t \left[\frac{1}{H} R_{\Omega_x M_\varepsilon}(t,\ t_1) + \frac{\mu}{H^2} R_{\Omega_x M_\theta}(t,\ t_1) + \frac{\mu}{H} R_{\Omega_x\Omega_y}(t,\ t_1) - \right.$$

$$\left. - R_{\Omega_x\Omega_z}(t,\ t_1) \right] dt_1. \qquad (30)$$

Отсюда можно заключить, что при принятых условиях систематические уходы гиростабилизатора будут иметь место в тех случаях, когда его основание подвержено угловым колебаниям вокруг оси x и одновременно коррелированным угловым колебаниям вокруг осей y или z, или когда одновременно с Ω_x на гиростабилизатор воздействуют коррелированные с Ω_x моменты вредных сил M_θ или M_ε.