ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 224 1976

О СДВИГЕ УПРУГИХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ВЫСТУПОВ

В. И. МАКСАК

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

В работах [1, 2] решены задачи о сдвиге сжатых упругих выступов, имеющих эллиптическую форму контактной зоны. Распределение касательных напряжений в плоскости соприкосновения находилось на основании предположения, что при увеличении силы сдвига состояние предельного равновесия развивается гомотетически от границы контакта к его центру. Таким образом, контактная площадка в любой момент нагружения оказывается разделенной на две части: «ядро», представляющее площадку, ограниченную эллипсом, и кольцо между этим эллипсом и эллипсом контура. На поверхности кольца (зона проскальзывания) реализуется предельное состояние, характеризуемое касательными напряжениями $\tau = f\sigma$, где f — коэффициент трения покоя, а σ — нормальное напряжение (вычисляемое по Герцу); на площади «ядра» (зона сцепления) величина касательного напряжения определяется из условия отсутствия проскальзывания.

Ниже рассматривается сдвиг сжатых эллипсоидальных выступов в условиях более сложного нагружения. Пусть два упругих эллипсоидальных выступа, сжатые силой N и первоначально нагруженные сдвигающей силой P_y вдоль одной из главных осей эллипса контакта, сдвигаются силой P_x вдоль второй главной оси эллипса. Предполагается, что в любой момент нагружения равнодействующая сдвигающих сил не больше силы трения покоя, равной fN.

Для нахождения величины перемещения при нагружении сдвигающей силой P_y можно использовать решение Р. Миндлина [1] или А. И. Лурье [2]:

$$\Delta = \begin{cases} \dfrac{3fN}{4Ga}\left[1-\left(1-\dfrac{P_y}{fN}\right)^{2/3}\right]\varkappa(e), & a>b \\ \dfrac{3fN}{4Gb}\left[1-\left(1-\dfrac{P_y}{fN}\right)^{2/3}\right]\varkappa(e), & b>a \end{cases}, \tag{1}$$

где G — модуль сдвига,

a, b — главные полуоси эллиптической контактной зоны,

$\chi(e)$ — коэффициент, зависящий от соотношения полуосей a и b.

Первая из этих формул применяется при сдвиге вдоль большей полуоси, вторая — вдоль меньшей.

Для получения решения при нагружении второй сдвигающей силой (P_x) используем следующие предположения:

1. Коэффициент трения постоянен и не зависит от характера нагружения.

2. Векторы касательных напряжений в плоскости контакта параллельны вектору сдвигающей силы.

Тогда коэффициент трения можно представить в виде

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2},$$

где f_y и f_x — коэффициенты трения, соответствующие компонентам сдвигающей силы P_y и P_x. Учитывая аналогичную зависимость между сдвигающей силой P и ее компонентами, получим

$$\left.\begin{aligned} f_y &= f\sqrt{1-\left(\frac{P_x}{N}\right)^2}, \\ f_x &= f\sqrt{1-\left(\frac{P_y}{N}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом, в общем случае нагружения, когда компоненты сдвигающей силы не уменьшаются, для вычисления смещения могут быть использованы зависимости:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_y &= \frac{3f_y N}{4Ga(b)}\left[1-\left(1-\frac{P_y}{f_y N}\right)^{2/3}\right]\varkappa_y, \quad a>b, \ (b>a) \\ \Delta_x &= \frac{3f_x N}{4Gb(a)}\left[1-\left(1-\frac{P_x}{f_x N}\right)^{2/3}\right]\varkappa_x, \quad b>a, \ (a>b) \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Очевидно, что

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2},$$

причем вектор сдвигающей силы $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$ для рассматриваемого контакта не совпадает с вектором смещения Δ, а сдвигающая сила P_x (по второму направлению) вызывает дополнительный прирост сдвига по первому направлению (P_y).

Вводя обозначение $P_y = P \operatorname{Sin} \alpha$, получим направление смещения (угол β) в зависимости от направления силы сдвига P (угол α).

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\varkappa_y}{\varkappa_x} \operatorname{tg}\alpha.$$

Величина смещения по этому направлению определится из формулы:

$$\Delta = \frac{0{,}75\sqrt{f^2N^2 - P^2\cos^2\alpha}}{Ga\sin\alpha}\left[1 - \left(1 - \frac{P\sin\alpha}{\sqrt{f^2N^2 - P^2\cos^2\alpha}}\right)^{2/3}\sqrt{\varkappa_x^2\cos^2\alpha + \varkappa_y^2\sin^2\alpha}\right]. \qquad (4)$$

Из формулы (4) легко определяется величина расхождения векторов силы сдвига и смещения

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{(\varkappa_y - \varkappa_x)\operatorname{tg}\alpha}{\varkappa_x + \varkappa_y \operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad (5)$$

а также значение угла α, при котором расхождение векторов максимально

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{\varkappa_x}{\varkappa_y}}. \qquad (6)$$

Использованные условия для получения зависимостей (3) были проверены экспериментально в условиях упругого предварительного смещения, при котором, как известно, осуществляется сдвиг множества выступов в дискретном контакте двух соприкасающихся твердых тел [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. R. D. Mindlin. Compliance of Elastic Bodies in Contact. J. of Applied Mechanics, 1949, 16, № 3.
2. А. И. Лурье. Пространственные задачи теории упругости. Гос. изд-во технико-теоретической литературы. М., 1955.
3. Б. П. Митрофанов. Упругое предварительное смещение. Изв. вузов, «Машиностроение», № 5, 1965.