ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 221 1976

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ ЦИЛИНДР В ЩЕЛЕВОМ ВИХРЕТОКОВОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ

В. К. ЖУКОВ, Р. М. ЗАКИРОВ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры информационно-измерительной техники)

В статье рассматривается реакция измерительной обмотки щелевого вихретокового преобразователя при внесении в зазор последнего круглого ферромагнитного цилиндра. При решении данной задачи сделаны следующие допущения: поле в зазоре считается равномерным, не учитывается влияние края преобразователя вдоль оси цилиндра, магнитная проницаемость цилиндра постоянна и не зависит от напряженности магнитного поля. Перейдем к аналитическому определению векторного потенциала магнитного поля в воздушном пространстве, окружающем цилиндр, который находится в поперечном переменном магнитном поле, с учетом вышеуказанных допущений (рис. 1). Однородное уравнение Гельмгольца для векторного потенциала $\bar{A}$ переменного магнитного поля имеет вид

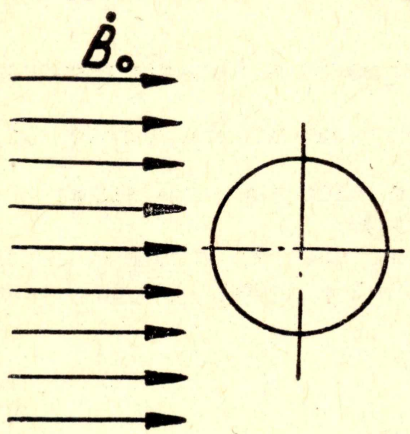

Рис. 1. Цилиндр в поперечном магнитном поле

$$\nabla^2 \bar{A} + \kappa^2 \bar{A} = 0, \tag{1}$$

где $k^2 = \omega^2 \mu_a \tilde{\varepsilon}$; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота магнитного поля; $\mu_a = \mu \cdot \mu_0$ — абсолютная магнитная проницаемость среды; μ — относительная магнитная проницаемость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м* — магнитная постоянная; $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_a - i\delta/\omega$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_0$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м* — электрическая постоянная; δ — удельная проводимость, *сим/м*.

Решение уравнения (1) будем проводить в цилиндрической системе координат, направив ось z вдоль оси цилиндра. При сделанных выше допущениях вектор $\bar{A}$ имеет только одну составляющую $\bar{A} = \mathrm{i}_z A$, которая не зависит от координаты z. Обозначим векторный потенциал в проводящей среде ферромагнитного цилиндра через $\dot{A}_c$, а в воздушном пространстве — через $\dot{A}_b$. Так как в среде цилиндра $\omega\mu_a\delta \gg \omega^2\mu_a\varepsilon_a$, то можно принять $k^2 = k_c^2 = -i\omega\mu_a\delta$, и соответственно, в воздушном пространстве $\omega\mu_0\delta \ll \omega^2\mu_0\varepsilon_0$, а $k^2 = k_в^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$. Если пренебречь влиянием токов смещения на характер распределения электромагнитного поля, можно принять $k_в = 0$.

Раскрывая в (1) оператор Лапласа ∇^2 в цилиндрической системе координат, получим два уравнения соответственно для среды цилиндра и для воздушной среды

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_c}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \dot{A}_c}{\partial \varphi^2} + \kappa_c^2 \dot{A}_c = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_b}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_b}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \dot{A}_b}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{3}$$

Оба уравнения решаются методом разделения переменных. С учетом физической картины поля решение уравнения (2) будет иметь вид:

$$\dot{A}_c = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{C}_m J_m(\kappa_c r) \sin m\varphi, \tag{4}$$

где $\dot{C}_m$ — постоянная интегрирования; $J_m(k_c r_0)$ — функция Бесселя m-го порядка первого рода.

Векторный потенциал в воздушном пространстве, окружающем цилиндр, представляет собой сумму векторного потенциала возбуждающего поля $\bar{A}$ и векторного потенциала $\bar{A}_b$ поля вихревых токов в цилиндре

$$\dot{\bar{A}}_b = \bar{A}_0 + \dot{\bar{A}}_{b_1}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (3), получим

$$\frac{\partial^2 \dot{A}_{b_1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_{b_1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{A}_{b_1}}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) должно удовлетворять следующим требованиям: оно должно быть нечетным относительно угла φ и стремиться к нулю при $r \to \infty$. Этому удовлетворяет следующая функция:

$$\dot{A}_{b_1} = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{N}_m r^{-m} \sin m\varphi, \tag{7}$$

где $\dot{N}_m$ — постоянная интегрирования.

Так как вектор $\bar{A}$ определяется уравнением $\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{A}$ с точностью до градиента произвольной скалярной функции, то последнюю можно принять равной нулю.

Выразим $\dot{A}_0$ через индукцию $\dot{B}_0$:

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 r \sin\varphi. \tag{8}$$

Подставив (7) и (8) в (5), получим выражение для векторного потенциала в воздухе

$$\dot{A}_b = \dot{B}_0 r \sin\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{N}_m r^{-m} \sin m\varphi. \tag{9}$$

Постоянные $\dot{C}_m$ в (4) и $\dot{N}_m$ в (9) определим из граничных условий для магнитного поля, которые в данной системе координат имеют вид

$$\dot{A}_c = \dot{A}_b; \quad \frac{1}{\mu_a}\frac{\partial \dot{A}_c}{\partial r} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \dot{A}_b}{\partial r}, \text{ при } r = r_0, \tag{10}$$

где r_0 — радиус цилиндра.

Подставив (4) и (9) в равенства (10), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \dot{C}_m J_m(\kappa_c r_0) \sin m\varphi = \dot{B}_0 r_0 \sin \varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{N}_m r_0^{-m} \sin m\varphi, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2\mu_a} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{C}_m \left[J_{m-1}(\kappa_c r_0) - J_{m+1}(\kappa_c r_0)\right] \sin m\varphi =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \dot{B}_0 \sin \varphi + \frac{1}{\mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} (-m) \dot{N}_m r_0^{-(m+1)} \sin m\varphi. \tag{12}$$

Преобразовав левую часть равенства (11) в соответствии с рекуррентным соотношением [1]:

$$J_\nu(x) = \frac{x}{2\nu} \left[J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)\right], \tag{13}$$

приравнивая множители при синусах с одинаковым аргументом отдельно в равенствах (11) и (12), приходим к выводу, что $\dot{C}_m = \dot{N}_m = 0$ при $m > 1$, а

$$\dot{C}_1 = \frac{4\mu_a \dot{B}_0}{\kappa_c \left[(\mu_a + \mu_0) J_0(\kappa_c r_0) + (\mu_a - \mu_0) J_2(\kappa_c r_0)\right]}, \tag{14}$$

$$\dot{N}_1 = r_0^2 \dot{B}_0 \frac{(\mu_a - \mu_0) J_0(\kappa_c r_0) + (\mu_a + \mu_0) J_2(\kappa_c r_0)}{(\mu_a + \mu_0) J_0(\kappa_c r_0) + (\mu_a - \mu_0) J_2(\kappa_c r_0)}. \tag{15}$$

Разделим числитель и знаменатель на постоянную величину μ_0 и преобразуем (15), используя (13).

Тогда

$$\dot{N}_1 = r_0^2 \dot{B}_0 \left[\frac{2\mu J_1(\kappa_c r_0)}{(\mu - 1) J_1(\kappa_c r_0) + \kappa_c r_0 J_0(\kappa_c r_0)} - 1\right]. \tag{16}$$

Таким образом, выражение (9) для векторного потенциала в воздушном пространстве, окружающем цилиндр, примет вид

$$\dot{A}_b = \dot{B}_0 r \sin \varphi \left[1 + \frac{r_0^2}{r^2} \dot{F}(\kappa_c r_0)\right], \tag{17}$$

где

$$\dot{F}(\kappa_c r_0) = \frac{2\mu J_1(\kappa_c r_0)}{(\mu - 1) J_1(\kappa_c r_0) + \kappa_c r_0 J_0(\kappa_c r_0)} - 1. \tag{18}$$

Определим результирующий магнитный поток, пронизывающий прямоугольную измерительную обмотку, которая имеет следующие геометрические параметры (рис. 2): стороны $ДС$ и MN равны $2l$ и параллельны оси z; стороны $ДN$ и CM равны $2c$ и параллельны оси y.

$$\Phi = \int_S \bar{B}\, d\bar{S} = \int_S \operatorname{rot} \bar{A}_b\, d\bar{S} = \oint_l \bar{A}\, d\bar{l}, \tag{19}$$

где L — контур измерительной обмотки.

Вектор $\bar{A}_b$ параллелен DC и MN и перпендикулярен DN и CM. Кроме того, он не зависит от координаты z. Подставив (17) в (19), получим

$$\Phi = 4\dot{B}_0 l r \sin \varphi \left[1 + \frac{r_0^2}{r^2} \dot{F}(\kappa_c r_0)\right]. \tag{20}$$

Здесь под r и φ подразумеваются координаты сторон обмотки, параллельных оси z. Поэтому $r \cdot \sin\varphi = c$, а поток

$$\dot{\Phi} = 4B_0 lc \left[1 + \frac{r_0^2}{r^2}\dot{F}(\kappa_c r_0)\right] = \dot{\Phi}_0 + \Delta\dot{\Phi}, \qquad (21)$$

где $\dot{\Phi}_0 = \dot{B}_0 \cdot 2l \cdot 2c = \dot{B}_0 S$ — магнитный поток внешнего возбуждающего поля, пронизывающий обмотку; $\Delta\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0 \frac{r_0^2}{r^2} F(\kappa_c r_0)$ — магнитный поток, созданный вихревыми токами в цилиндре.

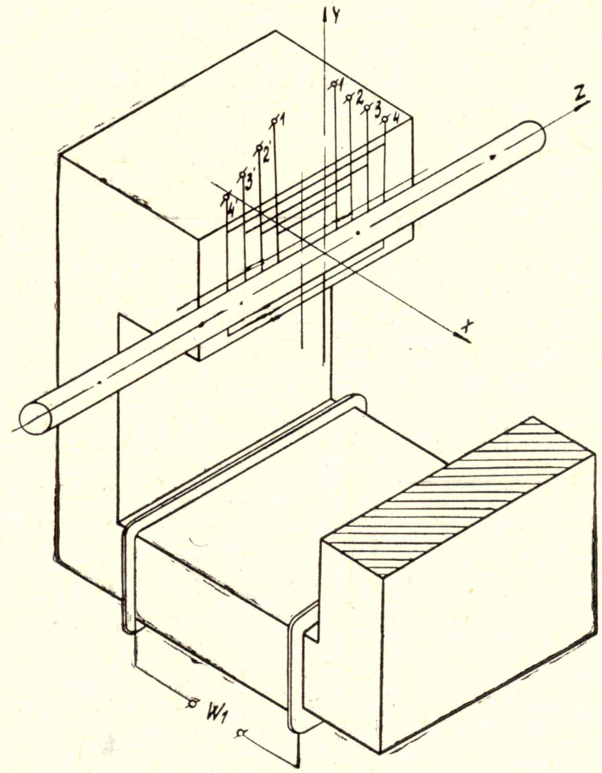

Рис. 2

В выражении для полного магнитного потока соленоида с круглым изделием вводится коэффициент заполнения, равный квадрату отношения радиуса изделия к радиусу соленоида [2]. По аналогии можно ввести понятие о коэффициенте заполнения и в рассматриваемом случае, под которым следует понимать отношение

$$\eta = \frac{r_0^2}{r^2}. \qquad (22)$$

Э. д. с., наводимая в измерительной обмотке потоком $\dot{\Phi}_0$, равна

$$\dot{E}_0 = -w\frac{d\dot{\Phi}_0}{dt} = -i\omega w\dot{\Phi}_0, \qquad (23)$$

где w — число витков обмотки.

Соответственно

$$\Delta\dot{E} = -i\omega w\Delta\dot{\Phi} = -i\omega w\Phi_0\eta\dot{F}(\kappa_c r_0). \qquad (24)$$

Для удобства анализа приращение э. д. с., обусловленное вихревыми токами в цилиндре, представим в нормированной форме

$$\frac{\Delta\dot{E}}{-|\dot{E}_0|} = i\eta\dot{F}(\kappa_c r_0). \qquad (25)$$

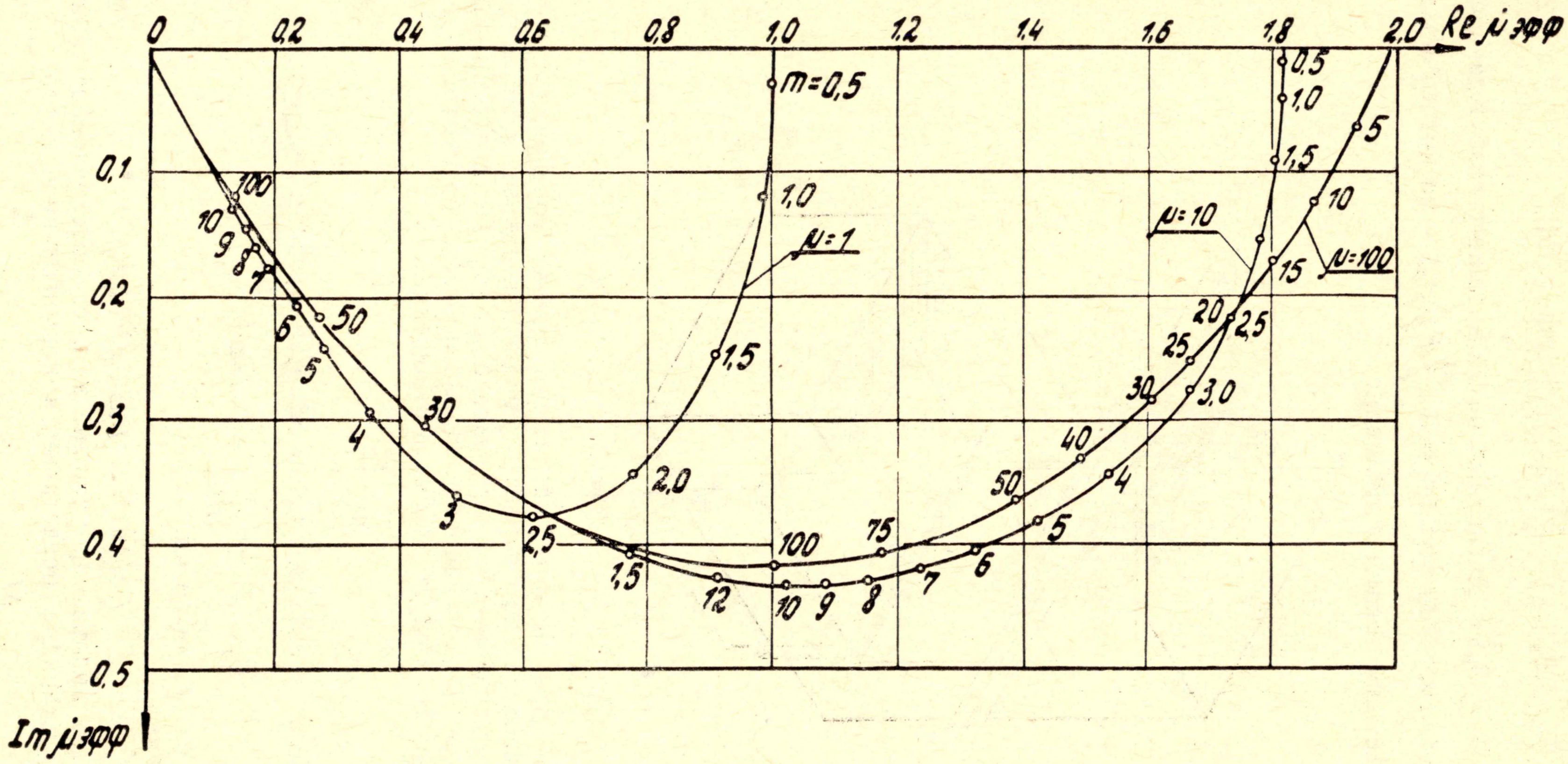

Рис. 3. Изменение эффективной проницаемости $\mu_{эфф}$ в зависимости от обобщенного параметра m и относительной магнитной проницаемости μ

В теории вихретоковых преобразователей для оценки влияния изделия на характер распределения поля вводится понятие об эффективной магнитной проницаемости изделия $\dot{\mu}_{эфф}$, которая является комплексной величиной [2]. Введем понятие эффективной магнитной проницаемости в выражение (25)

$$\frac{\Delta \dot{E}}{-|\dot{E}_0|} = i\eta\,(\dot{\mu}_{эфф} - 1), \tag{26}$$

где $\dot{\mu}_{эфф} - 1 = \dot{F}\,(\kappa_c r_0)$,

$$\dot{\mu}_{эфф} = \frac{2\mu J_1(\kappa_c r_0)}{(\mu - 1)\,J_1(\kappa_c r_0) + \kappa_c r_0 J_0(\kappa_c r_0)}\,. \tag{27}$$

Эффективная проницаемость (27) является основной характеристикой при контроле методом вихревых токов. Она определяется функциями Бесселя $J_1(\kappa_c r_0)$ и $J_0(\kappa_c r_0)$ от комплексного аргумента $\kappa_c r_0 = i^{3/2} r_0 \sqrt{\omega\mu_a\sigma}$. Величина $\kappa r_0 = r_0\sqrt{\omega\mu_a\sigma} = m$ — называется обобщенным параметром и отражает основные электрофизические свойства цилиндра.

Выражения (26) и (27) при различных m были проанализированы с помощью ЭЦВМ «Наири-2». По результатам расчета построены кривые на комплексной плоскости эффективной магнитной проницаемости (рис. 3) и на комплексной плоскости относительного приращения э. д. с. (рис. 4).

Из выражения (27) и рис. 3 видно, что в случае немагнитного цилиндра ($\mu = 1$) годограф эффективной магнитной проницаемости для щелевого преобразователя аналогичен годографу $\dot{\mu}_{эфф}$ для проходного преобразователя. Однако в случае ферромагнитного цилиндра ($\mu > 1$) годограф для щелевого преобразователя значительно отличается от годографа для проходного преобразователя. Если для проходного преобразователя при $m \to 0$ $\dot{\mu}_{эфф} \to \mu$, то для щелевого преобразователя при больших μ в аналогичном случае $\dot{\mu}_{эфф} \to 2$.

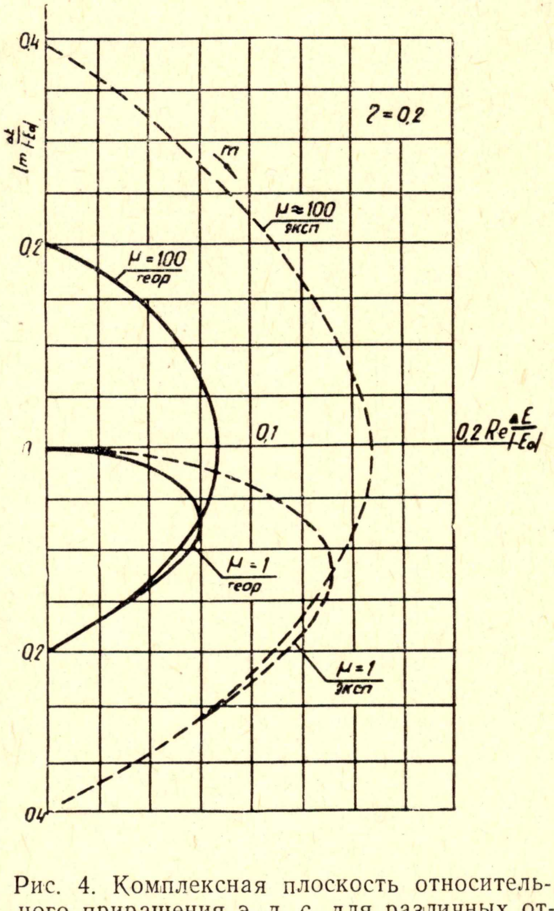

Рис. 4. Комплексная плоскость относительного приращения э. д. с. для различных относительных магнитных проницаемостей

С целью подтверждения результатов теоретических исследований были проведены экспериментальные исследования с щелевым преобразователем (рис. 2). Размеры полюсов магнитопровода — 120×60 *мм*. На торцы полюсов были наклеены четыре измерительные обмотки по 20 витков каждая. Геометрические размеры соответственно: I—30×20 *мм*; II — 50×30 *мм*; III — 70×40 *мм*; IV — 90×50 *мм*. Здесь первая цифра — размер вдоль оси z, вторая — вдоль оси y. В качестве испытуемого образца использовался медный цилиндр диаметром 13,9 *мм* и электропроводностью $47{,}5 \cdot 10^6 \frac{сим}{м}$. По результатам эксперимента построены годографы нормированных привнесенных э.д.с. (рис. 4), где сплошные линии — результат аналитического расчета, штриховые линии — результат экспериментальных данных. Анализ этих кривых позволяет сделать заключение, что качественно результаты экспериментальных данных подтверждают результаты аналитического расчета, количественно же наблюдается значительное расхождение и тем больше, чем больше высота измерительной обмотки. Это объясняется тем, что при аналитическом выводе не учитывалось влияние полюсов магнитопровода на характер распределения поля вихревых токов, созданных в цилиндре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1965.
2. Неразрушающие испытания под ред. Р. Мак-Мастера. Кн. II, М., «Энергия», 1965.