ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 211 1970

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АНАЛОГОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

И. Г. ВИНТИЗЕНКО, В. А. ТАРТАКОВСКИЙ

(Представлена научным семинаром отдела вычислительной техники НИИ АЭМ при ТПИ)

Рассматривается метод моделирования аналоговой схемы на ЭЦВМ, в основе которого лежат итерации. В процессе итераций вычисляются значения функций на выходе каждого из аналоговых блоков. Каждому аналоговому блоку соответствует оператор p_m, они образуют композицию P_k. Особенностью метода является то, что последовательные приближения $l_i \in L$ имеют вид

$$l_i = \sum_n a_i^n \varphi_n \ , \tag{1}$$

где $\varphi_n = \varphi_n(x)$ — полная система, определенная на множестве действительных чисел из $[0, h]$.

Из (1) вытекает необходимое свойство операторов P_k

$$P_k(l_{\in L}) = c_{\in L} \ . \tag{2}$$

В результате итераций должна быть найдена неподвижная точка $y(x)_{\in L}$ отображения $P_k(y)$. Эта точка существует [1] (теорема Банаха), если P_k для x из $[0, h]$ есть оператор сжатия.

Пусть $\varphi_n \equiv \frac{x^n}{n!}$, а в P_k входят операторы интегрирования, сложения и умножения. Из их свойств, а также из того, что

$$\int_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ ;\ x^n \cdot x^m = x^{n+m}\ ,$$

следует справедливость (1) и (2).

Таким образом, интегрирование сводится к увеличению индекса на единицу, а умножение — к сложению индексов.

Исходная информация для ЦВМ представляется в виде списка операторов p_m, связей между ними, а также массивов коэффициентов передач и начальных условий. Организуется процесс итераций по правилам:

1. Нулевое приближение на первом шаге есть начальные условия.

2. Последующие приближения являются результатом действия оператора блока на входные величины с учетом начальных условий.

В результате итераций на выходе каждого из блоков аналоговой схемы образуется степенной ряд l_i, который сходится для x из $[0, h]$. [1, 2].

3. Процесс итераций прекращается, когда разность последующего и предыдущего приближений будет меньше ε.

4. Нулевое приближение на следующем шаге получаем сдвигом l_i влево на h, т. е.

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

переходит в

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i ,$$

где

$$a_i = \sum_{k=i}^{n} \alpha_k \binom{k}{k-i} h^{k-i} ;$$

после этого переходим к пункту 2.

Кроме системы x^n, возможно применение и других систем, например полиномов Чебышева. Для широкого класса функций разложение по чебышевским многочленам сходится много быстрее, чем по любой другой системе ортогональных функций, [2] для них справедливы следующие соотношения:

$$\int_0^x \mathrm{T}_0 dx = \mathrm{T}_1; \quad \int_0^x \mathrm{T}_1\, dx = \frac{1}{4}\left(\mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_0\right);$$

$$n > 1 \int_0^x T_n\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_{n-1}}{n-1} + \frac{2\,nG}{n^2-1} T_0\right] ;$$

G зависит от двух последних двоичных разрядов числа n

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} ;$$

$$\mathrm{T}_m \cdot \mathrm{T}_n = \frac{1}{2}\left[\mathrm{T}_{m+n} + \mathrm{T}_{m-n}\right] .$$

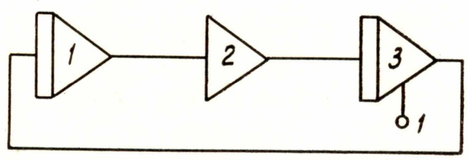

Рис. 1. Аналоговая схема для получения синуса, косинуса.

N блока / N итер	I	2	3
0	0	0	I
I	$-x$	$+x$	$1-\frac{x^2}{2!}$
2	$-x+\frac{x^3}{3!}$	$+x-\frac{x^3}{3!}$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$
— — —	— — —	— — —	— — —
n	$\approx -\sin x$	$\approx \sin x$	$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{x^{2i}}{2!} \approx \cos x$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика. «Мир», Москва, 1969.

2. С. Качмаж, Х. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. «Физматгиз», Москва, 1958.
3. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. «Физматгиз», Москва, 1962.
4. Р. Хэмминг. Численные методы. «Наука», Москва, 1968.
5. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. Приближенное решение операторных уравнений. «Наука», Москва, 1969.