ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 205 1972

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ Е-ФУНКЦИИ МАК-РОБЕРТА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики Томского политехнического института)

В настоящей статье Е-функция Мак-Роберта (1) представляется в виде суммы подходящих дробей и остаточного члена, для которого дана оценка в области вещественного переменного $x > 0$.

В статье применяются сокращенные обозначения

$$y = x:(\tau \ldots t),\ (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1),\ (a)_0 = 1.$$

Для Е-функции Мак-Роберта ([1], стр. 200)

$$E(\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\ 1:\rho_1,\ldots,\rho_q:x) = E[x] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+m)\ldots\Gamma(\alpha_p+m)}{\Gamma(\rho_1+m)\ldots\Gamma(\rho_q+m)} \left(-\frac{1}{x}\right)^m,\quad x \gg 1,\ p \geqslant q+1, \tag{1}$$

параметры которой удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1 > \ldots > \alpha_p > 1,\ \rho_1 > \ldots > \rho_q,$$
$$\rho_1 > \alpha_{p-q+1},\ldots,\ \rho_q > \alpha_p, \tag{2}$$

имеет место следующая теорема.

Теорема. Функция (1) с параметрами (2) может быть представлена в виде следующей $p-1$ кратной суммы подходящих дробей:

$$E[x] = \frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1)\ldots\Gamma(\rho_q)} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} \ldots \sum_{\nu=1}^{n} b_{1m} \ldots b_{p-1\nu} \frac{P_{2n}(x_{p-1})}{Q_{2n}(x_{p-1})} + R_{pn}(x). \tag{3}$$

Коэффициенты $a_{\pi\mu}$, $b_{\pi\mu}$ $(\pi = 1,\ldots,p-1,\ \mu = 1,\ldots,n)$ в равенстве (3) имеют все положительные значения ([2], стр. 5, 24) и ввиду ([3], стр. 28, (7)), ([4], стр. 23, (5)) определяются согласно равенствам

$$\begin{cases} \prod\limits_{\mu=1}^{n}\left(1+\dfrac{x}{a_{\pi\mu}}\right) = \sum\limits_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa \dfrac{x^\kappa}{(\alpha_\pi)_\kappa} = q_{2n}(x), \\ a_{\pi 1} > \ldots > a_{\pi n} > 0,\ \pi = 1,\ldots,p-q. \\ \prod\limits_{\mu=0}^{n}\left(1+\dfrac{x}{a_{\pi\mu}}\right) = \sum\limits_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa \dfrac{(\rho_{\pi-p+q}+n-1)_\kappa}{(\alpha_\pi)_\kappa} x^\kappa = Q_{2n}(x), \\ 1 > a_{\pi 1} > \ldots > a_{\pi n} > 0,\ \pi = p-q+1,\ldots,\ v-1. \end{cases} \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&b_{\pi\mu} = \frac{-p_{2n}(-a_{\pi\mu})}{a_{\pi\mu}\frac{d}{dx}\left[q_{2n}(-a_{\pi\mu})\right]}, \quad \pi = 1,\ldots, p-q;\\
&p_{2n}(x) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} x^{\kappa+1} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} C_n^m \frac{(-1)^{n-\kappa-m-1}}{(\alpha_\pi + n - \kappa - m - 1)_{\kappa+1}},\\
&b_{\pi\mu} = \frac{-p_{2n}(-a_{\pi\mu})}{a_{\pi\mu}\frac{d}{dx}\left[q_{2n}(-a_{\pi\mu})\right]}, \quad \pi = p-q+1,\ldots, p-1; \quad P_{2n}(x) =\\
&= \sum_{\kappa=0}^{n-1} x^{\kappa-1} \sum_{m=0}^{n-\kappa-1} C_n^{\kappa+m+1} (-1)^m \frac{(\rho_{\pi-p+q} + n - 1)_{\kappa+m+1}}{(\alpha_\pi + m)_{\kappa+1}\,(\rho_{\pi-p+q})_m}.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Остаточный член $R_{pn}(x)$ в равенстве (3) меньше суммы 0, 1,..., $p-1$ кратных сумм:

$$\begin{aligned}
R_{pn}(x) < \frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1)\ldots\Gamma(\rho_q)}\Bigg[&\frac{n!}{(a_1+1)_n\, q_{2n}(x_0)\, q_{2n+1}(x_0)} +\\
&+ \sum_{m=1}^{n} \frac{b_{1m}\, n!}{(\alpha_2+1)_n\, q_{2n}(x_1)\, q_{2n+1}(x_1)} + \ldots +\\
+ \sum_{m=1}^{n}\ldots\sum_{j=1}^{n} &\frac{b_{1m}\ldots b_{p-q-1\, j}\, n!}{(\alpha_{p-q}+1)_n\, q_{2n}(x_{p-q-1})\, q_{2n+1}(x_{p-q+1})} + \ldots +\\
&+ \sum_{m=1}^{n}\ldots\sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_{1m}\ldots b_{p-1\,\nu}\, n!\,(\rho_q - \alpha_p)_n}{(\rho_q)_n(\alpha_p+1)_n\, Q_{2n}(x_{p-1})\, Q_{2n+1}(x_{p-1})}\Bigg].
\end{aligned} \tag{6}$$

В неравенстве (6) многочлены $q_{2n+1}(x)$ и $Q_{2n+1}(x)$ и коэффициенты $x_0,\ldots, x_{p-1}$ следующие:

$$q_{2n+1}(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa \frac{x^\kappa}{(\alpha_\pi+1)_\kappa}, \quad \pi = 1,\ldots, p-q. \tag{7}$$

$$Q_{2n+1}(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa \frac{(\rho_{\pi-p+q}+n)_\kappa}{(\alpha_\pi+1)_\kappa} x^\kappa, \quad \pi = p-q+1,\ldots, p-1.$$

$$x_0 = \frac{\rho_1\ldots\rho_q}{\alpha_2\ldots\alpha_p} x, \quad x_1 = \frac{\rho_1\ldots\rho_q}{\alpha_3\ldots\alpha_p a_{1m}} x, \ldots, \tag{8}$$

$$x_{p-q-1} = \frac{\rho_1\ldots\rho_q x}{\alpha_{p-q+1}\ldots\alpha_p a_{1m}\ldots a_{p-q-1\,j}}, \ldots, \quad x_{p-1} = \frac{x}{a_{1m}\ldots a_{p-1\,\nu}}.$$

Доказательство. На основании ([1[, стр. 201, (3)) и стр. 72, (10), (12)) представим функцию (1) кратным интегралом:

$$\begin{aligned}
E[x] = I_p = &\frac{1}{\Gamma(\rho_1 - \alpha_{p-q+1})\ldots\Gamma(\rho_q - \alpha_p)} \int_0^1 t^{\alpha_p - 1} \times\\
&\times (1-t)^{\rho_q - \alpha_p - 1}\, dt \ldots \int_0^1 s^{\alpha_{p-q+1}-1}(1-s)^{\rho_1 - \alpha_{p-q+1}-1}\, dx \times\\
&\times \int_0^\infty r^{\alpha_{p-q}-1} e^{-r}\, dr \ldots \int_0^\infty v^{\alpha_1 - 1}\left(1 + \frac{v\ldots t}{x}\right)^{-1} e^{-v}\, dv.
\end{aligned} \tag{9}$$

Последний интеграл равенства (9) ввиду ([5], стр. 144) и ([3], стр. 28) представим суммой подходящей дроби и остаточного члена:

$$E[x] = I_{p-1}\int_0^\infty v^{\alpha_1-1}\left(1+\frac{v\ldots t}{x}\right)^{-1} e^{-v}\,dv < I_{p-1}\Gamma(\alpha_1)\times$$

$$\times\left[\frac{p_{2n}(y_1)}{q_{2n}(y_1)}+\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n\, q_{2n}(y_1)\, q_{2n+1}(y_1)}\right],\ \alpha_1>1,\quad y_1=\frac{y}{w}. \qquad (10)$$

Второе слагаемое неравенства (10) вычисляется до конца и меньше первого слагаемого неравенства (6)

$$\frac{I_{p-1}\Gamma(\alpha_1)\,n!}{(\alpha_1+1)_n\, q_{2n}(y_1)\, q_{2n+1}(y_1)} < \frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_o)}{\Gamma(\rho_1)\ldots\Gamma(\rho_q)}\times$$

$$\times\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n\, q_{2n}(x_0)\, q_{2n+1}(x_0)},\ y_1=\frac{y}{w}. \qquad (11)$$

Для доказательства неравенства (11) ввиду равенств (15) преобразуем ее левую часть

$$\frac{I_{p-1}\,n!}{(\alpha_1+1)_n\, q_{2n}(y_1)\, q_{2n+1}(y_1)} = \frac{I_{p-2}\,\Gamma(\alpha_2)\,n!}{(\alpha_1+1)_n\, q_{2n}(y_2)\, q_{2n+1}(y_2)}+$$

$$+I_{p-2}\Gamma(\alpha_2)\left\{\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\alpha_1}{\gamma_\lambda}\beta_\lambda\left[\lim_{\kappa\to\infty}\frac{p_{2\kappa}(y:\gamma_\lambda)}{q_{2\kappa}(y:\gamma_\lambda)}-\frac{1}{1+\gamma_\lambda:y_2}\right]-\right. \qquad (12)$$

$$\left.-\sum_{\lambda=1}^{n}\varsigma_\lambda\left[\lim_{\kappa\to\infty}\frac{p_{2\kappa}(y:\delta_\lambda)}{q_{2\kappa}(y:\delta_\lambda)}-\frac{1}{1+\delta_\lambda:y_2}\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{I_{p-2}\,\Gamma(\alpha_2)\,n!}{(\alpha_1+1)_n\, q_{2n}(y_2)\, q_{2n+1}(y_2)};\quad y_2=\frac{y}{\alpha_2}.$$

Для доказательства неравенства (12) получим несколько формул.

1). Расположим корни подходящих дробей в порядке возрастания $\gamma_1<\ldots<\gamma_n$, $\delta_1<\ldots<\delta_n$, тогда ввиду ([2], стр. 15) и (15) $\gamma_\lambda>\delta_\lambda$, $\lambda=1,\ldots,n$

$$\frac{p_{2\kappa}(y:\gamma_\lambda)}{q_{2\kappa}(y:\gamma_\lambda)}\leqslant\frac{p_{2\kappa}(y:\delta_\lambda)}{q_{2\kappa}(y:\delta_\lambda)},\ \kappa=1,2,\ldots,\ 0\leqslant y<\infty. \qquad (13)$$

2). Последовательности четных подходящих дробей являются возрастающими последовательностями ([5], стр. 12)

$$\frac{p_{2\kappa}(y)}{q_{2\kappa}(y)}\leqslant\frac{p_{2\kappa+2}(y)}{q_{2\kappa+2}(y)},\ \kappa=1,2,\ldots, \qquad (14)$$

3). Второе слагаемое правой части неравенства (10) ввиду (4), (5), (7) и ([6], стр. 374, (67)) преобразуем следующим путем:

$$\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n\, q_{2n}(y_1)\, q_{2n+1}(y_1)} = \frac{p_{2n+1}(y_1)}{q_{2n+1}(y_1)}-\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}=$$

$$=1-\frac{\alpha_1}{y_1}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\beta_\lambda}{1+\gamma_\lambda:y_1}-\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\varsigma_\lambda}{1+\delta_\lambda:y_1}= \qquad (15)$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\alpha_1\beta_\lambda:\gamma_\lambda}{1+\gamma_\lambda:y_1}-\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\varsigma_\lambda}{1+\delta_\lambda:y_1}+\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n}.$$

4) Ввиду неравенств (13) и (14) получим еще несколько неравенств

$$\frac{y}{y+\gamma_\lambda\alpha_2} \leqslant \frac{y}{y+\gamma_\lambda(\alpha_2-\varepsilon)} \leqslant \frac{p_{2\kappa+2}(y:\gamma_\lambda)}{q_{2\kappa+2}(y:\gamma_\lambda)}, \ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

$$\frac{y}{y+\delta_\lambda\alpha_2} \leqslant \frac{y}{y+\delta_\lambda(\alpha_2-\varepsilon)} \leqslant \frac{p_{2\kappa+2}(y:\delta_\lambda)}{q_{2\kappa+2}(y:\delta_\lambda)}, \ \varepsilon > 0. \tag{17}$$

Далее, ввиду неравенств (13), (14), (16) и (17), сумма, расположенная в фигурных скобках левой части неравенства (12), удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\alpha_1}{\gamma_\lambda} \beta_\lambda \left[\lim_{\kappa\to\infty} \frac{p_{2\kappa}(y:\gamma_\lambda)}{q_{2\kappa}(y:\gamma_\lambda)} - \frac{y}{y+\gamma_\lambda\alpha_2} \right] - \\
&- \sum_{\lambda=1}^{n} \varsigma_\lambda \left[\lim_{\kappa\to 8} \frac{p_{2\kappa}(y:\delta_\lambda)}{q_{2\kappa}(y:\delta_\lambda)} - \frac{y}{y+\delta_\lambda\alpha_2} \right] \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\alpha_1}{\gamma_\lambda} \beta_\lambda \left[\frac{y}{y+\gamma_\lambda(\alpha_2-\varepsilon)} - \frac{y}{y+\gamma_\lambda\alpha_2} \right] - \\
&- \sum_{\lambda=1}^{n} \varsigma_\lambda \left[\frac{y}{y+\delta_\lambda(\alpha_2-\varepsilon)} - \frac{y}{y+\delta_\lambda\alpha_2} \right] = F(y).
\end{aligned} \tag{18}$$

Правая часть неравенства (18) ввиду (4), (7) и (15) имеет неположительное значение

$$\begin{aligned}
F(y) = &\frac{n!}{(\alpha_1+1)_n \, q_{2n}\left(\frac{y}{\alpha_2-\varepsilon}\right) q_{2n+1}\left(\frac{y}{\alpha_2-\varepsilon}\right)} - \\
&- \frac{n!}{(\alpha_1+1)_n \, q_{2n}\left(\frac{y}{\alpha_2}\right) q_{2n+1}\left(\frac{y}{\alpha_2}\right)} \leqslant 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

поэтому, ввиду неравенств (18) и (19), справедливо также и неравенство (12).

Преобразуя аналогично вышеизложенному $p-2$ кратный интеграл I_{p-2} правой части неравенства (12), а также ввиду ([7], стр. 312, (9)), ([4], стр. 23, (5)) и (9), мы получим неравенство (11).

Первое слагаемое правой части неравенства (10) представим в виде суммы элементарных дробей. Интеграл от каждой элементарной дроби в свою очередь будет опять являться интегралом такого же вида, как и последний интеграл правой части равенства (9) и т. д.

Последовательное интегрирование элементарных дробей один раз и остаточных членов до конца и представление интегралов от элементарных дробей подходящими дробями и остаточными членами и опять следующее интегрирование элементарных дробей и т. д. приведет нас к формуле (3) и оценке остаточного члена согласно формуле (6), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М., Физматгиз, 1965.

2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.

3. В. Е. Корнилов. Применение цепных дробей к вычислению некоторых видов интегралов. «Изв. ТПИ», т. 131, стр. 26—30, Томск, 1965.

4. В. Е. Корнилов. Приложение цепных дробей к вычислению интегралов от биномных дифференциалов. «Изв. ТПИ». т. 131, стр. 21—25, Томск, 1965.

5. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.

6. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. т. 3, ч. 2, М., ГИТТЛ, 1953.

7. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.