ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 184 1970

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО РАБОЧЕГО ВЕКТОРА ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. А. КОЧЕГУРОВ, Н. И. САБЛИН

(Представлена научным семинаром НИИЯФЭА)

В процессе эксплуатации сложные системы длительного пользования периодически останавливаются для проведения профилактических работ.

Целью профилактических работ является проведение мероприятий, способствующих улучшению работоспособности системы, т. е. улучшению ее надежностных характеристик.

Будем считать, что:

1) работоспособность системы оценивается средним значением основного выходного эффекта, обусловленного использованием рассматриваемой системы за известное время ее эксплуатации:

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i t_{pi}(p_i)}{T}, \tag{1}$$

где $\overline{y}$ — среднее значение основного выходного эффекта за время эксплуатации T;

c_i — производительность системы на i-м рабочем участке;

$t_{pi}(p_i)$ — время исправной работы системы на i-м рабочем участке, зависящее от вероятности безотказной работы системы на i-м участке;

n — число рабочих участков;

2) известен закон надежности системы $P\,(t > \tau)$;

3) задано общее время профилактики $T_{\text{пр}}$ и n — частота их проведения;

4) известен вектор производительности системы $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$;

5) задано T — время эксплуатации системы;

6) задано $t_{\text{у}}$ — среднее время устранения одного отказа в системе.

При этих условиях требуется методами математического программирования определить оптимальный рабочий вектор:

$$T_{\text{р}}^{*} = \{t_{\text{р}1}^{*}, t_{\text{р}2}^{*}, \ldots, t_{\text{р}n}^{*}\},$$

обеспечивающий максимум целевой функции (1).

Очевидно, что

$$T = T_p + T_{np} + T_y, \tag{2}$$

где $T_{\text{р}} = \sum_{i=1}^{n} t_{pi}$ — общее рабочее время исправной работы системы;

$T_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^{n} t_{\text{пр}i}$ — общее время профилактики;

$T_y = \sum_{\kappa=1}^{m} t_{y\kappa}$ — время, затраченное на ремонт системы, в случае возникновения отказов в рабочие периоды системы.

При фиксированном времени профилактических работ максимум целевой функции (1) достигается при максимизации T_p или минимизации T_y, что возможно при некотором оптимальном рабочем векторе.

Будем решать поставленную задачу, максимизируя $T_{\text{р}}$.

Не теряя общности, перейдем от оценки (1) к интегральной оценке работоспособности системы:

$$L = \overline{T_y} = \sum_{i=1}^{n} c_i t_{\text{р}i}(p_i). \tag{3}$$

Выражение (3) представляет собой линейную функцию и, таким образом, ввиду неопределенности t_{pi}, зависящих от известных надежностных характеристик системы, поставленная задача решается методами стохастического линейного программирования и сводится к случаю риска [1] при ограничениях:

$$\boldsymbol{A} T_{\text{р}} \leqslant \boldsymbol{B}; \qquad t_{pi} \geqslant 0, \tag{4}$$

где

$$\boldsymbol{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{j1}, & a_{j2}, & \ldots\ a_{jn} \\ . & . & . \\ a_{\kappa 1}, & a_{\kappa 2}, & \ldots\ a_{\kappa n} \end{matrix} \right\|$$ — матрица условий,

$\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ — вектор потерь;

a_{ij} $(j = \overline{1, \kappa};\ \ i = \overline{1, n})$ — коэффициенты, характеризующие долю потерь на i-м рабочем участке системы.

Матрица условий $\boldsymbol{A}$ характеризует потери выходного эффекта из-за ненадежности системы с учетом профилактических работ; вектор потерь $\boldsymbol{B}$ равен средним допустимым потерям из-за ненадежности системы за период эксплуатации T при детерминированных векторах профилактик.

Так как вектор профилактик $T_{\text{пр}}$ в основном определяет надежность системы на рабочем векторе $T_{\text{р}}$ периода эксплуатации системы, детерминируем набор векторов $\{T^j_{\text{пр}}\}$ $(j = \overline{1, \kappa})$ и исходя из этого набора будем определять матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор потерь $\boldsymbol{B}$; при этом каждой j-й строке матрицы будет соответствовать детерминированный вектор из набора $\{T^j_{\text{пр}}\}$.

Так как система после каждого i-го этапа встает на профилактику, то очевидна следующая функциональная связь:

$$a_{ij} = f(t_{\text{пр}i}) = f\,[p_i(t_{\text{пр}i})], \tag{5}$$

где $p_i(t_{\text{пр}i})$ — надежность системы на i-м рабочем участке.

Далее следует выбрать наихудший режим использования системы.

Будем считать наихудшим режимом использования системы, если

$$\begin{cases} t_{\text{р}1} = t_{\text{р}2} = \ldots = t_{\text{р}n} = t_{\text{р}} = \dfrac{T_{\text{р}}}{n}, \\ \\ t_{\text{пр}1} = t_{\text{пр}2} = \ldots = t_{\text{пр}n} = t_{\text{пр}} = \dfrac{T_{\text{пр}}}{n}. \end{cases} \tag{6}$$

Выбор такого наихудшего режима подтверждается практически, так как довольно редко встретишь эксплуатируемую систему с одинаковыми длительностями рабочих периодов и профилактик; исходя из априорной информации о системе наихудший режим использования может быть и другим, что не меняет общности задачи.

Выбрав наихудший режим использования системы, определим коэффициенты матрицы условий a_{ij} из соотношения:

$$a_{ij} = \frac{l_i t_{\text{у}}}{t_{\text{р}}}, \tag{7}$$

где l_i — число отказов на $t_{\text{р}i}$ (i-м рабочем участке);

$t_{\text{у}}$ — среднее время устранения отказа для данной системы;

$t_{\text{р}}$ — рабочий период системы, соответствующий наихудшему режиму использования.

Число отказов l_i зависит от надежности p_i системы на i-м рабочем участке, которая в свою очередь зависит от длительности профилактики на $(i-1)$-м участке профилактик $t_{\text{пр}(i-1)}$. Учет степени влияния $t_{\text{пр}i}$ на надежность системы на $(i+1)$-м рабочем участке $t_{\text{р}(i+1)}$ будем производить по следующей приближенной зависимости:

$$p_{i+1} \approx \left(1 + \kappa \frac{t_{npi}}{T_{np}}\right) p_i \tag{8}$$

$$(\text{при } p_{i+1} \geqslant 1 \quad p_{i+1} \equiv 1),$$

где p_{i+1} — надежность системы после профилактики;

p_i — надежность системы до профилактики, т. е. после окончания i-го рабочего участка;

$\kappa \geqslant 1$ — постоянная, определяется экспериментально.

В случае экспоненциального закона надежности эта зависимость может быть получена точно [см. приложение].

l_i — величина случайная, но при наличии информации о надежности системы определяется с достаточной достоверностью. При экспоненциальном законе надежности, например, l_i определяется из следующего соотношения:

$$l_i = -\frac{T_p}{t_{pi}} \ln p_i. \tag{9}$$

Вектор потерь $\boldsymbol{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_\kappa\}^T$ будем считать равным общим потерям выходного эффекта за наихудший рабочий вектор $T_{\text{р}}$; компоненты $\boldsymbol{B}$ определяются в этом случае соотношением:

$$b_j = t_p \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \tag{10}$$

Определив матрицу $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{B}$ при детерминированном векторе $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, в результате приходим к следующей задаче линейного программирования: требуется вычислить максимум линейной формы

$$L = \sum_{i=1}^{n} c_i t_{pi}(p_i) = c_1 t_{p1}(p_1) + c_2 t_{\text{р}2}(p_2) + \ldots + c_n t_{\text{р}n}(p_n) = \max$$

при следующих ограничениях:

$$\text{а)}\quad a_{11}c_1t_{p1}(p_1)+a_{12}c_2t_{p2}(p_2)+\ldots+a_{1n}c_nt_{pn}(p_n)\leqslant b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{j1}c_1t_{p1}(p_1)+a_{j2}c_2t_{p2}(p_2)+\ldots+a_{jn}c_nt_{pn}(p_n)\leqslant b_j$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{\kappa1}c_1t_{p1}(p_1)+a_{\kappa2}c_2t_{p2}(p_2)+\ldots+a_{\kappa n}c_nt_{pn}(p_n)\leqslant b_\kappa$$
$$\text{б)}\quad t_{pi}\geqslant 0,\quad i=\overline{1,n}.$$

Вычислительные схемы для определения оптимального вектора $T_\text{р}^*$ представлены, например, в монографиях [2, 3].

Пример. Пусть для гипотетической системы заданы $P=e^{-\frac{t}{100}}$

$$T_\text{пр}\leqslant 100;\quad n=4;\quad t_\text{у}=1\text{ час};\quad C\equiv 1;\quad \kappa=1.$$

Требуется определить оптимальный рабочий вектор $\boldsymbol{T}_\text{р}^*$.

Исходя из заданного ресурса времени профилактик принимаем, например, следующий набор $\{\boldsymbol{T}_\text{пр}^j\}$:

$$\boldsymbol{T}_\text{пр}^1=\{10, 20, 30, 40\},\quad \boldsymbol{T}_\text{пр}^2=\{20, 20, 20, 40\},\quad \boldsymbol{T}_\text{пр}^3=\{20, 40, 30, 10\}.$$

Для наихудшего режима использования системы

$$t_\text{р}=\frac{200}{4}=50;\qquad t_\text{пр}=\frac{100}{4}=25.$$

Исходя из принятого набора векторов $\{\boldsymbol{T}_\text{пр}^1,\ \boldsymbol{T}_\text{пр}^2,\ \boldsymbol{T}_\text{пр}^3\}$, а также $t_\text{р}$ и $t_\text{пр}$, определяем по (5) и (10) матрицу условий $\boldsymbol{A}$ и вектор потерь $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}\approx\left\|\begin{matrix}0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}07 & 0{,}15\\ 0{,}02 & 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}17\\ 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}08 & 0{,}20\end{matrix}\right\|\qquad \boldsymbol{B}\approx(15, 20, 16)^T.$$

Определив матрицу условий $\boldsymbol{A}$ и вектор потерь $\boldsymbol{B}$, приходим к следующей задаче линейного программирования: требуется определить максимум линейной формы

$$L=t_\text{р1}+t_\text{р2}+t_\text{р3}+t_\text{р4}=\max$$

при ограничениях а) и б)

$$\text{а)}\quad 0{,}03t_{p1}+0{,}06t_{p2}+0{,}07t_{p3}+0{,}15t_{p4}\leqslant 15,$$
$$0{,}02t_{p1}+0{,}07t_{p2}+0{,}15t_{p3}+0{,}17t_{p4}\leqslant 20,$$
$$0{,}02t_{p1}+0{,}03t_{p2}+0{,}08t_{p3}+0{,}20t_{p4}\leqslant 16;$$
$$\text{б)}\quad t_{pi}\geqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Используя первый вычислительный алгоритм [2] метода последовательного улучшения вектора, определяем оптимальный рабочий вектор $\boldsymbol{T}_\text{р}^*=(150,\ 0,\ 0,\ 65)$, при этом $L\geqslant 200$. Время профилактики в первом приближении можно разделить в отношении $\dfrac{t_\text{р1}}{t_\text{р2}}\approx\dfrac{3}{1}$; в результате получаем $t_\text{пр1}=65$; $t_\text{пр2}=20$.

В настоящей работе задача выбора оптимального рабочего вектора решена для одного общего времени профилактики. Данную задачу можно обобщить, если решать ее для набора времен профилактик $\{T_{прк}\}$, $\overline{к=1,\ N}$.

В этом случае оптимальное решение будет заключаться в выборе такого $T_{прк}$ из набора $\{T_{прк}\}$ и соответствующего ему оптимального рабочего вектора $T^*_{рк}$, которые дают максимум линейной формы:

$$(T^*_{рк},\ T_{прк}) = \max_{T_{прк} \in \{T_{прк}\}} \{L_к\}.$$

Приложение. В случае экспоненциального закона надежности зависимость (8) может быть получена точно при следующих допущениях:

а) система состоит из n однотипных элементов;

б) $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p = e^{-\frac{t}{T}}$, т. е. все элементы имеют одинаковую надежность;

в) в процессе профилактики элементы восстанавливаются до $p = 1$

г) процесс профилактики подчинен экспоненциальному закону

$$H = e^{-\frac{n_{np}}{T_{np}} t_{np}}.$$

При этих допущениях надежность системы:

$$p_c(t) = p^n = e^{-\frac{nt}{T}}.$$

Допустим, что в момент t_1 подвергается профилактике $n_{пр}$ элементов. В этом случае

$$P^*_c(t + t_1) = p_c(t)\, e^{-\frac{n - n_{пр}}{T} t_1} = p_c(t)\, p_c(t_1)\, e^{\frac{n_{np}}{T} t_1}, \qquad (1П)$$

где $p^*_c(t + t_1)$ — надежность системы после профилактики;

$p_c(t_1)$ — надежность системы в момент t_1.

С другой стороны:

$$p_c(t_1) = e^{-\frac{n}{T} t_1} = e^{-\frac{n_{np}}{T} t_1}\, e^{-\frac{n}{T} t}\, e^{\frac{n_{np}}{T_{np}} t_{np}}.$$

Исходя из очевидного равенства:

$$e^{-\frac{n_{np}}{T} t_{np}}\, e^{\frac{n_{np}}{T_{np}} t_{np}} = 1 \text{ или } e^{\frac{n_{np}}{T} t} = e^{\frac{n_{np}}{T_{np}} t_{np}}$$

и используя соотношение (1П), получим:

$$p^*_c(t + t_1) = p_c(t)\, p_c(t_1)\, e^{\frac{n_{np}}{T_{np}} t_{np}}.$$

Разлагая $e^{\frac{n_{np}}{T_{np}} t_{np}}$ в ряд и ограничившись первыми двумя членами разложения, окончательно имеем:

$$p^*_c(t + t_1) \approx \left(1 + n_{np}\frac{t_{np}}{T_{np}}\right) p_c(t_1)\, p_c(t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании, Советское радио, 1966.

2. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Линейное программирование, ФМ, 1963.

3. Ф. И. Карнелевич, Л. Е. Садовский. Элементы линейной алгебры и линейного программирования, ФМ, 1963.