ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ЦЕПНЫЕ ДРОБИ НЕКОТОРЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедры высшей математики)

В статье получены рекуррентные соотношения для следующих рядов:

1) сумма ряда Гаусса $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ с элементом $\beta = n, \gamma - n$ преобразуется к ряду $F(\alpha + n - 1, 1; \gamma; z)$;

2) сумма ряда Куммера $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ в случае $\alpha = n, \gamma - n$ преобразуется к сумме ряда $\Phi(1; \gamma; z)$;

3) асимптотический ряд функции Куммера

$$F\left(\alpha, \beta;; \frac{1}{z}\right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\kappa (\beta)_\kappa}{(1)_\kappa z^\kappa}, \quad |z| \gg 1, \quad Re(z) < 0 \tag{1}$$

в случае $\beta = n$ преобразуется к сумме ряда $F\left(\alpha + n - 1, 1;; \frac{1}{z}\right)$.

Полученные после преобразований степенные ряды разлагаются в цепные дроби, которые можно найти в [1] и [2]. А исходные ряды представляются суммой двух многочленов, причем одна из этих сумм умножается на сумму бесконечного ряда, разлагающегося в цепную дробь.

В статье введена сокращенная запись произведения

$$(a)_\kappa = a(a+1)\ldots(a+\kappa-1) = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0 = 1.$$

1. Степенной ряд

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n, \quad |z| < 1, \quad \gamma \neq 0, -1, \ldots, \tag{2}$$

который получается путем разложения в ряд определенного интеграла с переменным верхним пределом ([3], стр, 308):

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \frac{(\gamma-1) z^{1-\gamma}}{(1-z)^{\alpha+1-\gamma}} \int_0^z z^{\gamma-2} (1-z)^{\alpha-\gamma} dz, \quad \gamma > 1, \tag{3}$$

может быть разложен в цепную дробь ([1], стр. 320)

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\alpha z}{\gamma - \ddots - \cfrac{\kappa(\gamma - \alpha + \kappa - 1) z}{\gamma + 2\kappa - 1 - \cfrac{(\gamma + \kappa - 1)(\alpha + \kappa) z}{\gamma + 2\kappa - \ddots}}}} \tag{4}$$

и удовлетворяет соотношению

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = -(\gamma - 1) \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha - \gamma + 1)_{n+1}} (1 - z)^n + \frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha - \gamma + 1)_\kappa} (1 - z)^\kappa F(\alpha + \kappa, 1; \gamma; z). \tag{5}$$

Сумма ряда (2) удовлетворяет соотношению

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = -\frac{\gamma - 1}{\alpha - \gamma + 1} + \frac{\alpha}{\alpha - \gamma + 1} (1 - z) F(\alpha + 1, 1; \gamma; z), \tag{6}$$

так как коэффициент при z^κ в правой части равенства

$$\frac{\alpha}{\alpha - \gamma + 1} \left[\frac{(\alpha + 1)_\kappa}{(\gamma)_\kappa} - \frac{(\alpha + 1)_{\kappa - 1}}{(\gamma)_{\kappa - 1}} \right] = \frac{\alpha (\alpha + 1)_{\kappa - 1} [\alpha + \kappa) - (\gamma + \kappa - 1)]}{(\alpha - \gamma + 1)(\gamma)_\kappa} \equiv \frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}.$$

Равенство (5) при $\kappa = 1$ совпадает с соотношением (6). Предположим, что справедлива формула (5), тогда, заменяя $F(\alpha + \kappa, 1; \gamma; z)$ по формуле (6), получим:

$$F(\alpha, 1; \gamma; z) = -(\gamma - 1) \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha - \gamma + 1)_{n+1}} (1 - z)^n + \frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha - \gamma + 1)_\kappa} (1 - z)^\kappa \left[-\frac{\gamma - 1}{\alpha - \gamma + \kappa + 1} + \frac{\alpha + \kappa}{\alpha - \gamma + \kappa + 1} (1 - z) F(\alpha + \kappa + 1, 1; \gamma; z) \right] =$$

$$= -(\gamma - 1) \sum_{n=0}^{\kappa} \frac{(\alpha)_n}{(\alpha - \gamma + 1)_{n+1}} (1 - z)^n + \frac{(\alpha)_{\kappa+1}}{(\alpha - \gamma + 1)_{\kappa+1}} (1 - z)^{\kappa+1} F(\alpha + \kappa + 1, 1; \gamma; z),$$

чем подтверждается соотношение (5).

Аналогично можно рассмотреть свойства сумм рядов

$$\Phi(1; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\gamma)_n}, \quad \gamma \neq 0, -1, \ldots, \tag{7}$$

$$F\left(\alpha, 1;; \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{z^n}, \quad |z| \gg 1, \quad Re(z) < 0, \tag{8}$$

которые можно преобразовать соответственно к неполной гамма-функции и функции Прима ([4], стр. 110), разложения которых в цепные дроби известны ([2], стр. 301), а именно:

$$\Phi(1;\ \gamma;\ z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{\gamma - \ddots - \cfrac{\kappa z}{\gamma + 2\kappa - 1 - \cfrac{(\gamma+\kappa-1)z}{\gamma + 2\kappa - \ddots}}}} \tag{9}$$

$$F\left(\alpha,\ 1;;\ \frac{1}{z}\right) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\alpha}{-z + \ddots + \cfrac{\kappa}{1 + \cfrac{\alpha+\kappa}{-z + \ddots}}}} \tag{10}$$

Сумма степенного ряда (7) удовлетворяет соотношению:

$$\Phi(1;\ \gamma;\ z) = \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{z^n}{(\gamma)_n} + \frac{z^\kappa}{(\gamma)_\kappa}\Phi(1; \gamma+\kappa;\ z). \tag{11}$$

Сумма асимптотического ряда (8) удовлетворяет соотношению:

$$F\left(\alpha,\ 1;;\ \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha)_n}{z^n} + \frac{(\alpha)_\kappa}{z^\kappa} F\left(\alpha+\kappa,\ 1;;\ \frac{1}{z}\right). \tag{12}$$

Равенства (11), (12) легко проверяются путем подстановки рядов (7), (8) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z в левой и правой частях рассматриваемых равенств.

2. Если к следующей функции ([3], стр. 308):

$$F(\alpha,\ n;\ \gamma;\ z) = \sum_{\kappa=1}^{n} (-1)^{\kappa+1} C_{n-1}^{\kappa-1} \frac{(\alpha+1-\kappa)_{n-1}}{(1)_{n-1}} F(\alpha+n-\kappa,\ \ 1;\ \gamma;\ z), \tag{13}$$

стоящей в правой части равенства, применить равенство (5), то получится

$$F(\alpha,\ n;\ \gamma;\ z) = \sum_{\kappa=1}^{n} (-1)^{\kappa+1} C_{n-1}^{\kappa-1} \frac{(\alpha+1-\kappa)_{n-1}}{(1)_{n-1}} \Bigg[-(\gamma-1) \sum_{m=0}^{\kappa-2} \frac{(\alpha+n-\kappa)_m}{(\alpha-\gamma+n-\kappa+1)_{m+1}} (1-z)^m + \frac{(\alpha+n-\kappa)_{\kappa-1}}{(\alpha-\gamma+n-\kappa+1)_{\kappa-1}} (1-z)^{\kappa-1} F(\alpha+n-1,1;\ \gamma;\ z)\Bigg].$$

После раскрытия скобок получим:

$$F(\alpha,\ n;\ \gamma;\ z) = \frac{\gamma-1}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=2}^{n} (-1)^\kappa C_{n-1}^{\kappa-1} \sum_{m=0}^{\kappa-2} \frac{(\alpha+1-\kappa)_{n+m-1}}{(\alpha-\gamma+n-\kappa+1)_{m+1}} (1-z)^m + \frac{(\alpha)_{n-1}}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{(1-n)_{\kappa-1}(1-\alpha)_{\kappa-1}}{(1)_{\kappa-1}(1+\gamma-\alpha-n)_{\kappa-1}} (1-z)^{\kappa-1} F(\alpha+n-1,1;\gamma;\ z). \tag{14}$$

Ряд $F(\alpha+n-1, 1; \gamma; z)$ теперь может быть представлен цепной дробью (4). Гипергеометрический ряд $F(\alpha, \gamma-n; \gamma; z)$ ввиду известного соотношения ([5], стр. 319)

$$F(\alpha, \gamma-n; \gamma; z) = (1-z)^{n-\alpha} F(\gamma-\alpha, n; \gamma; z) \tag{15}$$

и формулы (14) также может быть выражен посредством цепной дроби (4).

3. После последовательного применения известного рекуррентного соотношения ([5], стр. 334)

$$\Phi(n; \gamma; z) = \frac{\gamma-1}{n-1} \Phi(n-1; \gamma-1; z) - \frac{\gamma-n}{n-1} \Phi(n-1; \gamma; z) \tag{16}$$

получается

$$\Phi(n; \gamma; z) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^{\kappa} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(\gamma-n)_n}{(1)_{n-1} (\gamma-n+\kappa)} \Phi(1; \gamma-n+1+\kappa; z). \tag{17}$$

К функции, расположенной в правой части равенства (17), применяется равенство (11):

$$\Phi(n; \gamma; z) = \frac{(\gamma-n)_n}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(-1)^{\kappa}}{\gamma-n+\kappa} \Bigg[\sum_{m=0}^{n-\kappa-2} \frac{z^m}{(\gamma-n+1+\kappa)_m} + \frac{z^{n-\kappa-1}}{(\gamma-n+1+\kappa)_{n-\kappa-1}} \Phi(1; \gamma; z) \Bigg].$$

Раскрывая скобки, окончательно получим

$$\Phi(n; \gamma; z) = \frac{(\gamma-n)_n}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_{n-1}^{\kappa} (-1)^{\kappa} \sum_{m=0}^{n-\kappa-2} \frac{z^m}{(\gamma-n+\kappa)_{m+1}} + \frac{1}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^{\kappa} (-1)^{\kappa} (\gamma-n)_{\kappa} z^{n-\kappa-1} \Phi(1; \gamma; z), \tag{18}$$

где $\Phi(1; \gamma; z)$ разлагается в цепную дробь (9).

Ряд $\Phi(\gamma-n; \gamma; -z)$ ввиду известного соотношения ([5], стр. 334)

$$\Phi(\gamma-n; \gamma; -z) = e^{-z} \Phi(n; \gamma; z) \tag{19}$$

также представляется цепной дробью (9).

4. Сумма асимптотического ряда $F\left(\alpha, n;; \frac{1}{z}\right)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(n-1) F\left(\alpha, n;; \frac{1}{z}\right) = \alpha F\left(\alpha+1, n-1;; \frac{1}{z}\right) - (\alpha-n+1) F\left(\alpha, n-1;; \frac{1}{z}\right), \tag{20}$$

так как коэффициент при $z^{-\kappa}$ в правой части равенства

$$\frac{(\alpha)_{\kappa+1} (n-1)_{\kappa}}{(1)_{\kappa}} - \frac{(\alpha-n+1) (\alpha)_{\kappa} (n-1)_{\kappa}}{(1)_{\kappa}} = \frac{(\alpha)_{\kappa} (n-1)_{\kappa+1}}{(1)_{\kappa}},$$

что и доказывает справедливость этой формулы.

После последовательного применения соотношения (20) получим

$$F\left(\alpha, n;; \frac{1}{z}\right) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^{\kappa} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(\alpha-\kappa)_{n-1}}{(1)_{n-1}} F\left(\alpha+n-\kappa-1;\ 1;; \frac{1}{z}\right). \quad (21)$$

Применяя равенство (12), имеем

$$F\left(\alpha, n;; \frac{1}{z}\right) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} (-1)^{\kappa} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(\alpha-\kappa)_{n-1}}{(1)_{n-1}} \left[\sum_{m=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha+n-\kappa-1)_m}{z^m} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\alpha+n-\kappa-1)_{\kappa}}{z^{\kappa}} F\left(\alpha+n-1,\ 1;; \frac{1}{z}\right)\right].$$

После раскрытия скобок получается:

$$F\left(\alpha, n;; \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=1}^{n-1} C_{n-1}^{\kappa} (-1)^{\kappa} \sum_{m=0}^{\kappa-1} \frac{(\alpha-\kappa)_{n+m-1}}{z^m} +$$

$$+ \frac{(\alpha)_{n-1}}{(1)_{n-1}} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_{n-1}^{\kappa} \frac{(1-\alpha)_{\kappa}}{z^{\kappa}} F\left(\alpha+n-1, 1;; \frac{1}{z}\right), \quad (22)$$

где асимптотический ряд $F\left(\alpha+n-1; 1;; \frac{1}{z}\right)$ может быть представлен цепной дробью (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля, М.-Л., Гостехиздат, 1948.
2. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби), М., Физматгиз, 1961.
3. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
4. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций, М., Физматгиз, 1959.
5. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения, М., Гостехиздат, 1953.