

НЕОБХОДИМЫЕ ПРИЗНАКИ НАИМЕНЬШЕЙ ВЫПУКЛОСТИ ТОЧЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерной и вычислительной математики)

Пусть S_n наименее выпуклая точечная система [1], $a, b \in S_n$.
Введем систему $S' = S_n \cup \{b_1\}$:

$$\zeta'(x, y, z) = \begin{cases} \zeta(x, y, z), & \text{если } x, y, z \neq b_1, \\ \zeta(x, y, b), & \text{если } x, y \neq b, z = b_1, \\ \zeta(a, b, x), & \text{если } x = b_1, y = b, \\ +1, & \text{если } x = a, y = b, z = b_1. \end{cases}$$

Обозначим через $\gamma_{ij}, \gamma'_{ij}$ индекс пары x_i, x_j в системах S и S' :

$$\gamma_{ij} = |L(x_i, x_j)| - |R(x_i, x_j)|, \quad \gamma'_{ij} = |L'(x_i, x_j)| - |R'(x_i, x_j)|.$$

Введем систему S'' следующим образом: $S'' = (S_n \setminus \{a\}) \cup \{b_2\}$.
Пусть d таково, что

$$L(d, b) = \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Положим:

$$\zeta''(x, y, z) = \begin{cases} \zeta(x, y, z), & \text{если } x, y, z \neq b_2, \\ \zeta(x, y, b), & \text{если } x, y \neq b, z = b_2, \\ \zeta(d, b, x), & \text{если } x = b_2, y = b, \\ +1, & \text{если } x = a, y = b, z = b_2. \end{cases}$$

а) $C(S' \setminus \{a\}) - C(S' \setminus \{b_1\}) =$

$$= \sum_{\substack{i < j \\ x_i x_j | \zeta'(x_i, x_j, a) \zeta'(x_i, x_j, b_1) < 0}} \gamma'_{ij} \zeta'(b_1, x_i, x_j) \zeta'(a, b_1, x_i) \zeta'(a, b_1, x_j) =$$

(I) $= \sum_{\substack{i < j \\ x_i x_j | \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0}} \gamma'_{ij} \zeta(b, x_i, x_j) \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) \quad (\text{см. [2]}).$

Далее для $x_i, x_j \in S_n$:

$$\gamma'_{ij} = \sum_{z \in S'} \zeta'(x_i, x_j, z) = \sum_{z \in S_n} \zeta(x_i, x_j, z) + \zeta'(x_i, x_j, b_1) =$$

$$= \sum_{z \in S_n} \zeta(x_i, x_j, z) + \zeta(x_i, x_j, b) = \gamma_{ij} + \zeta(x_i, x_j, b).$$

Итак,

$$(II) \quad \gamma'_{ij} = \gamma_{ij} + \zeta(x_i, x_j, b).$$

Из (I) и (II) получим:

$$(III) \quad \begin{aligned} & C(S'/\{a\}) - C(S'/\{b_1\}) = \\ &= \sum_{\substack{i < j \\ x_i, x_j | \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0}} [\gamma_{ij} \zeta(b, x_i, x_j) \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) + \\ &+ \zeta(x_i, x_j, b) \zeta(b, x_i, x_j) \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j)] = \\ &= \sum_{\substack{i < j \\ x_i, x_j | \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0}} [\gamma_{ij} \zeta(b, x_i, x_j) \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) + \\ &+ \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j)]. \end{aligned}$$

в) Вычислим разность:

$$C(S'') - C(S' \setminus \{a'\}).$$

Обозначим $C_0(S'')$ и $C_0(S' \setminus \{a'\})$ число выпуклых четверок в S'' и $S' \setminus \{a'\}$, не содержащих b_1 и b_2 ; через $C_{b_2}(S'')$ и $C_{b_1}(S' \setminus \{a'\})$ — количество выпуклых четверок с b_2 и b_1 и без точки b ; через $C_{b b_2}(S'')$ и $C_{b b_1}(S' \setminus \{a'\})$ — количество выпуклых четверок с $\{b, b_2\}$ и с $\{b, b_1\}$.

Из определения S' и S'' следует:

$$(IV) \quad C_0(S'') = C_0(S' \setminus \{a'\}),$$

$$(V) \quad C_{b_2}(S'') = C_{b_1}(S' \setminus \{a'\}).$$

Далее

$$|L(a, b)| = \frac{n-2 + \gamma_{ab}}{2}, \quad |R(a, b)| = \frac{n-2 - \gamma_{ab}}{2}.$$

Поэтому из определения S' и S'' следует:

$$\begin{aligned} C_{b b_1}(S' \setminus \{a'\}) &= C_n^4 - \frac{n-2 + \gamma_{ab}}{2} \cdot \frac{n-2 - \gamma_{ab}}{2} = \\ &= C_n^4 - \frac{(n-2)^2 - \gamma_{ab}^2}{4}. \end{aligned}$$

$$C_{b b_2}(S'') = C_n^4 - \left[\frac{n-2}{2} \right] \cdot \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Следовательно,

$$C_{b b_2}(S'') - C_{b b_1}(S' \setminus \{a'\}) = \frac{(n-2)^2 - \gamma_{ab}^2}{4} - \left[\frac{n-2}{2} \right] \left[\frac{n-1}{2} \right],$$

или

$$(VI) \quad C_{b b_2}(S'') - C_{b b_1}(S' \setminus \{a'\}) = -\frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{1 - (-1)^n}{8}.$$

Учитывая IV, (V) и (VI), получим:

$$(VII) \quad C(S'') - C(S' \setminus \{a'\}) = -\frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{1 - (-1)^n}{8}.$$

Складывая (III) и (VII) почленно, получим:

$$(VIII) C(S'') - C(S' \setminus \{b_1\}) = \sum_{\substack{i < j \\ x_i, x_j | \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0}} \{ \gamma_{ij} \zeta(b, x_i, x_j) \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) + \\ + \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) \} - \frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{1 - (-1)^n}{8}.$$

Учитывая, что $S' \setminus \{b_1\} = S_n$, где S_n — наименее выпуклая система из n точек, получаем теорему:

Теорема 1. Если S_n — наименее выпуклая, то имеет место неравенство:

$$\sum_{\substack{i < j \\ x_i, x_j | \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0}} \{ \gamma_{ij} \zeta(b, x_i, x_j) \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) + \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) \} \geq \\ \geq \frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{(-1)^n - 1}{8}.$$

для всех $a, b \in S_n$.

Исходя из последней теоремы, получим еще один необходимый признак наименее выпуклой системы. Меняя в (VIII) местами точки a и b и учитывая, что суммирование здесь ведется по тем парам x_i, x_j , для которых

$$\zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0,$$

получим:

$$\sum_{\substack{i < j \\ x_i, x_j | \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0}} \{ -\gamma_{ij} \zeta(b, x_i, x_j) \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) + \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) \} \geq \\ \geq \frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{(-1)^n - 1}{8}.$$

Складывая почленно (VIII) и (IX), получим:

$$\sum_{i < j} \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) \geq \frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{(-1)^n - 1}{8}.$$

$$(X) \quad x_i, x_j | \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0$$

Теорема 2. Для наименьшей выпуклости системы необходимо выполнение неравенств (X) для всех $a, b \in S_n$.

Получим еще одно видоизменение последнего признака. (X) можно переписать так:

$$\frac{1}{2} \sum_{i < j} \{ 1 - \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) \} \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) \geq \\ \geq \frac{\gamma_{ab}^2}{4} + \frac{(-1)^n - 1}{8}.$$

Откуда

$$\sum_{i < j} \{ \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) - \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) \} \geq \\ (XI) \quad \geq \frac{\gamma_{ab}^2}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i < j} \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) = C^2_{\frac{n-2+\gamma}{2}} + C^2_{\frac{n-2-\gamma}{2}} -$$

$$- \frac{n-2+\gamma}{2} \cdot \frac{n-2-\gamma}{2} = \frac{\gamma^2_{ab}}{2} - \frac{n-2}{2},$$

где $\gamma = \gamma_{ab}$.

Обозначим количество выпуклых и невыпуклых четверок с участием пары точек (a, b) через $C(a, b)$ и $I(a, b)$.

Тогда:

$$(XII) \quad - \sum_{i < j} \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j) \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) = I(a, b) - C(a, b).$$

Учитывая (XII) и (XIII), неравенство (XI) перепишем так:

$$\frac{\gamma^2_{ab}}{2} - \frac{n-2}{2} + I(a, b) - C(a, b) \geq \frac{\gamma^2_{ab}}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4};$$

$$- \frac{n-2}{2} + I(a, b) - C(a, b) \geq \frac{(-1)^n - 1}{4}$$

или

$$(XIV) \quad I(a, b) - C(a, b) \geq \frac{(-1)^n - 1}{4} + \frac{n-2}{2}.$$

Теорема 3. Для наименее выпуклой S_n имеет место неравенство (XIV) для всех $a, b \in S_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Пестов. О некоторых числовых характеристиках точечных систем. Известия ТПИ, т. 134, 1965.
2. Г. Г. Пестов. О числе невыпуклых и выпуклых четверок в плоской точечной системе. Настоящий сборник.