ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 101 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1958 г.

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПОРИСТЫХ ТЕЛ

Г. М. СЕРЫХ, О. А. ПОНОМАРЕВ

Представлено профессором-доктором Г. И. ФУКС

Как было указано в работе [5], распространение тепла в пористом теле является весьма сложным процессом. Большая часть тепла передается через остов пористого тела.

В связи с этим особое значение приобретает аналитическое исследование вопроса распространения тепла в пористом теле при условии, что поры имеют термическое сопротивление $R = \infty$.

Для нахождения зависимости $\lambda = \lambda\,(m)$ применим метод суперпозиции. Суть метода заключается в следующем: считаем, что в каждом выделенном элементе пространства существует некоторая функция, не зависящая от внешних воздействий. Влияние со стороны других элементов пространства (внешнее воздействие) осуществляется путем распространения функций этих элементов на выделенный элемент. Получающаяся при этом сложная функция равна сумме функций выделенного элемента и возмущений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеем пористое тело в виде неограниченной пластины весьма малой толщины. Поры абсолютно не проводят тепла. Распространение тепла по толщине пластины отсутствует.

Вырежем сначала на пластине только одну пору. Поместим оси координат в центр поры (фиг. 1). При некотором градиенте температур комплексный потенциал обтекания поры тепловым потоком имеет вид [1]:

$$w = v\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \tag{1}$$

где: v — некоторая постоянная, R — радиус поры.

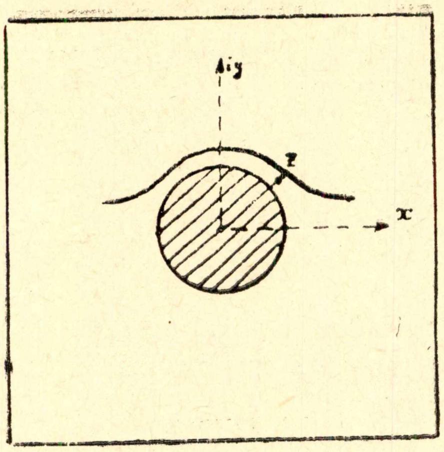
Заполним плоскость порами так, чтобы создалась некоторая пористость m. Выделим в пористом поле элементарную ячейку (фиг. 2) с границей Γ. Рассмотрим комплексный потенциал в зоне A в непосредственной близости от поры.

Согласно принятого выше принципа суперпозиций:

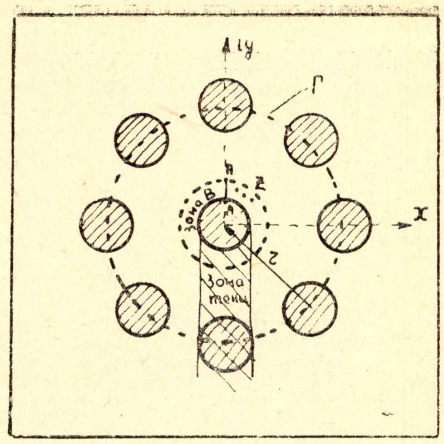
$$w = w_n + w_b\,, \tag{2}$$

где: w_n — потенциал поры, $w_в$ — потенциал возмущений.

$$w_в = w_1 + w_2 - w_3 - w_4 - w_5 + w_6 + w_7 \tag{3}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Имеем:

$$w_n = v\left(z + \frac{R^2}{z}\right); \tag{4}$$

$$w_1 = v\left(re^{i\,135^\circ} + z + \frac{R^2}{re^{i\,135^\circ} + z}\right);$$

$$w_2 = v\left(-r + z + \frac{R^2}{-r+z}\right); \tag{5}$$

$$w_3 = v\left(re^{i\,225^\circ} + z + \frac{R^2}{re^{i\,225^\circ} + z}\right);$$

$$w_4 = v\left(re^{i\,270^\circ} + z + \frac{R^2}{re^{i\,270^\circ} + z}\right);$$

$$w_5 = v\left(re^{-i\,45^\circ} + z + \frac{R^2}{re^{-i\,45^\circ} + z}\right);$$

$$w_6 = v\left(r + z + \frac{R^2}{r+z}\right);$$

$$w_7 = v\left(re^{i\,45^\circ} + z + \frac{R^2}{re^{i\,45^\circ} + z}\right);$$

Подставив (4) и (5) в (2) и приведя подобные, получим:

$$w = v\left(2z + \frac{R^2}{z} + \frac{4r}{\sqrt{2}}i + \frac{R^2}{-\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r}{\sqrt{2}}i + z} - \frac{R^2}{-r+z} - \frac{R^2}{-\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}}i + z} - \frac{R^2}{-ri+z} - \frac{R^2}{\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}}i + z} + \frac{R^2}{r+z} + \frac{R^2}{\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r}{\sqrt{2}}i + z}\right). \tag{7}$$

Разделим действительную и мнимую части:

$$\varphi = v\left\{2x + \frac{R^2x}{x^2+y^2} + \frac{R^2\left(x-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+y\right)^2} + \frac{R^2\,(x-r)}{(x-r)^2+y^2} + \right.$$

$$+\frac{R^2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}-x\right)}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}-x\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}-y\right)^2} - \frac{R^2x}{x^2+(y-r)^2} - \frac{R^2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+x\right)}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+x\right)^2+\left(y-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} +$$

$$\left. + \frac{R^2\,(r+x)}{(r+x)^2+y^2} + \frac{R^2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+x\right)}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+x\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+y\right)^2}\right\}. \tag{8}$$

Функция φ отождествляется с температурной кривой $\tau \equiv \varphi$.

Градиент температуры в сечении AA (фиг. 2) выразится формулой:

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{x=0} = v\left\{2 + \frac{R^2}{y^2} + \frac{2R^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+y\right)^2} + \frac{2R^2}{r^2+y^2} - \right.$$

$$-\frac{2R^2r^2}{\left[\frac{r^2}{2}+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+y\right)^2\right]^2} - \frac{2\cdot 2\,R^2r^2}{(r^2+y^2)^2} + \frac{-R^2}{\frac{r^2}{2}+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}-y\right)^2} +$$

$$\left. + \frac{2R^2r^2}{\left[\frac{r^2}{2}+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}-y\right)\right]^2} - \frac{R^2}{(x-r)^2} - \frac{R^2}{\frac{r^2}{2}+\left(y-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}. \tag{9}$$

С достаточной степенью точности можно принять:

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{AA} \approx \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\ y=R}} = v\left(3 + \frac{2}{\frac{r^2}{R^2}+2\frac{r}{R}\frac{1}{\sqrt{2}}+1} - \right.$$

$$-\frac{2R^2r^2}{\left(r^2+\frac{2}{\sqrt{2}}rR+R^2\right)^2} + \frac{2R^2}{r^2+R^2} - \frac{4R^2r^2}{r^4+2r^2R^2+R^4} -$$

$$\left. - \frac{2R^2}{r^2-\frac{2r}{\sqrt{2}}R+R^2} + \frac{2R^2r^2}{\left(r^2-\frac{2}{\sqrt{2}}rR+R^2\right)^2} - \frac{R^2}{R^2-2Rr+r^2}\right) \tag{10}$$

Определим величину $\frac{r^2}{R^2}$ через пористость.

Так как в зону действия поры входит 8 полуокружностей и сама пора, то:

$$m = 5\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \alpha\frac{R^2}{r^2}\,; \tag{11}$$

$$\frac{r^2}{R^2}=\frac{\alpha}{m}\,; \qquad \frac{r}{R}=\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,. \tag{12}$$

Подставив значения (11) и (12) в (10), имеем:

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{AA}=v\left(3+\frac{2}{\frac{a}{m}+\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}+1}-\right.$$

$$-\frac{2}{\frac{m}{\alpha}+4+\frac{\alpha}{m}+4\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}+4\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}}+\frac{2}{\frac{\alpha}{m}+1}-\frac{4}{\frac{\alpha}{m}+2+\frac{m}{\alpha}}-$$

$$-\frac{2}{\frac{\alpha}{m}-\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}+1}+\frac{2}{\frac{\alpha}{m}+4+\frac{m}{\alpha}-4\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}-4\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}}-$$

$$\left.-\frac{1}{\frac{a}{m}-2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}+1}\right)=v\left(3+m\cdot f(m)\right). \tag{13}$$

где $f(m)\neq\infty$ при $m=0$.

Определим количество передаваемого тепла при единичном градиенте для фиктивного тела:

$$q=S\lambda_{м}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)_{AA}=\lambda_{эф}\cdot S_{полн.}\cdot 1 \tag{15}$$

Величина v определяется из условия:

$$\frac{\lambda_{эф}}{\lambda_{м}}=1 \qquad \text{при } m=0\,. \tag{16}$$

Отсюда

$$v=\frac{1}{3}\,. \tag{17}$$

Тогда

$$\frac{\lambda_{эф}}{\lambda_{м}}=\left(1-\sqrt{m}\right)\left[1+\frac{1}{3}\,m\cdot f(m)\right]. \tag{18}$$

Оценим функцию при $\alpha\approx 5$, $m\approx 0{,}8$, т. к. одна пора при этом экранируется от влияния основной порой, т. е. находится в зоне тени (фиг. 2):

$$\frac{1}{3}\,(m)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\alpha+m\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}+m}-\frac{2}{\frac{m^2}{\alpha}+4m+\alpha+4\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\,m+4\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}\,m}+\right.$$

$$+\frac{2}{\alpha+m}-\frac{4}{\alpha+2m+\frac{m^2}{\alpha}}-\frac{2}{\alpha-2m\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}+m}+$$

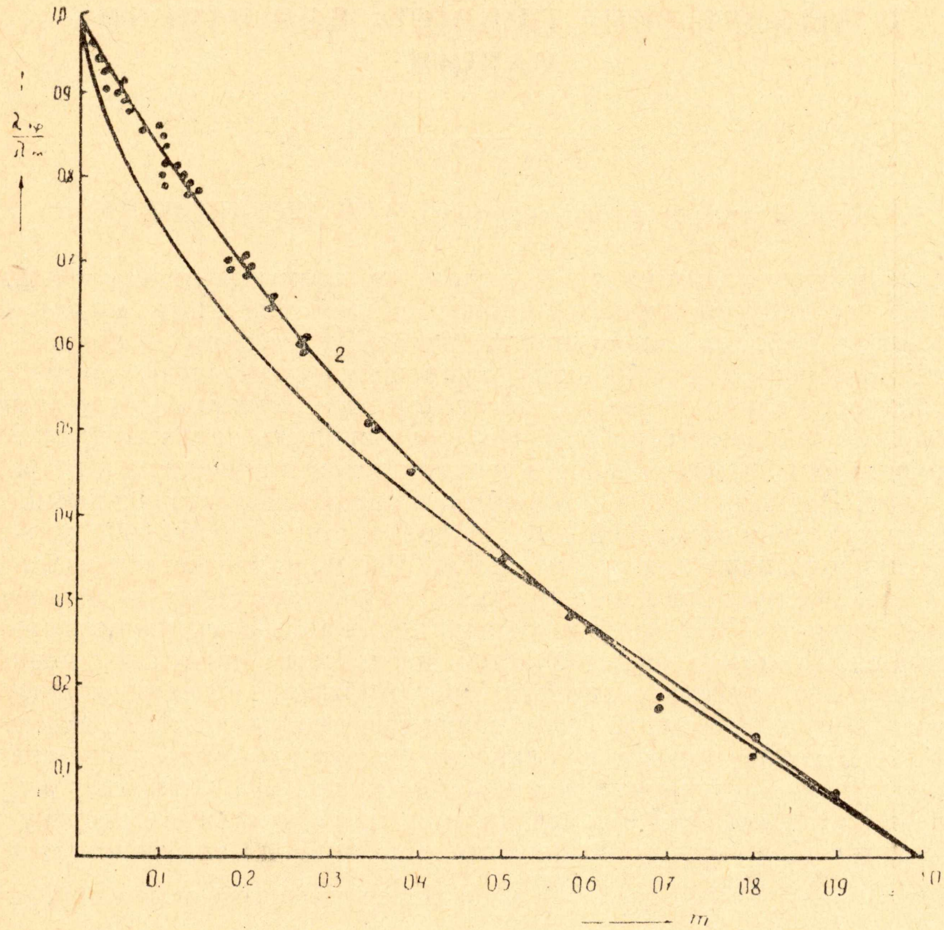
$$\left.+\frac{2}{\alpha+4m+\frac{m^2}{\alpha}-4m\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}-4m\sqrt{\frac{\alpha}{2m}}}-\frac{1}{\alpha-2m\sqrt{\frac{\alpha}{m}}+m}\right), \tag{19}$$

$$\frac{1}{3} f(m) \cdot m = \frac{m}{3} (0{,}4 - 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}5 - 0{,}6 + 2 - 0{,}5) =$$

$$\frac{1}{3} f(m) \cdot m \approx 0{,}35\ m. \tag{20}$$

Тогда выражение (18) для приближенного расчета примет вид:

$$\lambda_{эф} = \lambda_м \left(1 - \sqrt{m}\right)(1 + 0{,}35m). \tag{21}$$



На фиг. 3 дана зависимость $\frac{\lambda_{эф}}{\lambda_м} = f(m)$. Кривая 2 получена экспериментально на электрической модели. Кривая 1 получена по формуле (21). Как видно из фиг. 3, приближенная формула дает совпадающие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе,— Теоретическая гидромеханика, ч. I—II, ГИТТЛ, 1955.
2. В. И. Смирнов — Курс высшей математики, том III, часть II, ГИТТЛ, 1953.
3. Б. А. Фукс и Б. В. Шабат — Функция комплексного переменного. ГИТТЛ, 1949.
4. М. А. Михеев — Основы теплопередачи, ГЭИ, 1949.
5. Г. М. Серых — К вопросу о теплопроводности пористых материалов. Известия ТПИ, том 101.