

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВЫРАВНЕННЫЕ ЛУЧЕВЫЕ СЕТИ И ОБЩИЙ СПОСОБ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлено научным семинаром кафедр маркшейдерского дела и геодезии)

Способ угловых (лучевых) засечек применяется сейчас только для построения сетей весьма частного вида — из треугольных ячеек (триангуляция). Цель статьи — показать, что этим способом могут быть построены сети значительно более общего вида, которые мы назовем лучевыми. В геодезии такая задача ставится и решается впервые [1].

### 1. Общие свойства лучевых сетей

Основная особенность лучевой сети заключается в следующем. Если в такой сети задать весьма ограниченное количество твердых вершин, боков и лучей, то положение остальных вершин, определяемых, найдется в лучевой сети посредством ряда прямых лучевых засечек, выполняемых с соседних твердых и ранее построенных определяемых вершин сети. Отсюда следует, что основная часть исходных данных лучевой сети состоит из лучевых пучков, лучевиков, истоки которых совмещены с большинством или всеми вершинами, а их лучи направлены в соседние вершины сети.

В дальнейшем мы будем рассматривать только поверхностные выравненные лучевые сети. Так мы будем называть лучевые сети, построенные на какой-нибудь гладкой поверхности, например, на плоскости или сферонде, посредством поверхностных лучевиков с выравненными лучами. Выравненными же будем называть такие поверхностные лучи, которые обладают тем свойством, что они будут кратчайшими между всякими двумя соседними точками поверхности, лежащими на этих лучах. Отсюда следует, что боками (сторонами) указанных сетей будут отрезки выравненных поверхностных нитей<sup>1)</sup> между соответствующими вершинами.

Из самого способа построения лучевых сетей последовательными прямыми засечками вытекает, что если в поверхностной выравненной лучевой сети имеется  $k$  определяемых вершин, то соответствующая совокупность лучевиков должна обеспечивать образование из нее ровно  $2k$  независимых углов.

Высказанное требование является только необходимым условием построимости выравненных лучевых сетей на поверхности. Достаточное условие их построимости устанавливается ниже (разд. 5, п. 7).

<sup>1)</sup> Нить — одномерное непрерывное множество точек (линия).

Ясно, что необходимое условие построимости поверхностных выравненных лучевых сетей никак не ограничивает вида их ячеек. Поэтому ячейки поверхностной выравненной лучевой сети могут быть какими угодно: треугольными, четырехугольными, пятиугольными и т. п., лишь бы соблюдалось указанное необходимое условие построимости. Однако более желательным будет построение поверхностных выравненных лучевых сетей из смешанных, треугольных и четырехугольных ячеек, так как в этом случае более равномерно осуществляется проверка наблюдений.

## 2. Некоторые вспомогательные понятия

Рассмотрим некоторые вспомогательные понятия, необходимые для дальнейшего. В первую очередь уточним и разовьем понятие поверхностного луча.

Назовем поверхностным лучом  $L_{cn}$  нить данной поверхности, выходящую из некоторой точки  $C$  этой поверхности, проходящую через другую точку  $H$  той же поверхности и неограниченно продолжающуюся далее на поверхности. Точку  $C$  назовем вершиной (точкой стояния), а точку  $H$  — точкой наводки данного поверхностного луча  $L_{cn}$ . В соответствии с нашими целями мы ограничимся рассмотрением только выравненных поверхностных лучей, образованных выравненными нитями поверхности.

Поверхностный луч  $L_{cn}$  назовем свободным и обозначим по-прежнему через  $L_{cn}$ , если известно только, что точки  $C, H$  лежат на данной поверхности, но положение этих точек на поверхности не указано.

Поверхностный свободный луч  $L_{cn}$  назовем направленным и обозначим через  $\uparrow L_{cn}$ , если положение точек  $C, H$  на поверхности не указано, но дана направленность  $\uparrow_{cn}$  этого луча. При этом под направленностью  $\uparrow_{cn}$  луча  $\uparrow L_{cn}$  понимаем положение этого луча относительно некоторого заданного на поверхности и проходящего через его вершину  $C$  осевого луча  $oL_c$ .

Поверхностный свободный луч  $L_{cn}$  назовем подвижно-приколотым и обозначим через  $\updownarrow L_{cn}$ , если задана только его точка наводки  $H$ ; при заданной только вершине  $C$  свободный луч  $L_{cn}$  назовем неподвижно-приколотым и обозначим через  $\downarrow L_{cn}$ .

Наконец, поверхностные приколотые лучи  $\updownarrow L_{cn}$  и  $\downarrow L_{cn}$ , для которых указаны их направленности  $\uparrow_{cn}$  и  $\downarrow_{cn}$ , назовем соответственно подвижно-закрепленным лучом  $\updownarrow L_{cn}$  и неподвижно-закрепленным лучом  $\downarrow L_{cn}$ . Заметим, что луч  $\updownarrow L_{cn}$  в отличие от луча  $\downarrow L_{cn}$  не является вполне определенным на поверхности, так как неизвестно положение его вершины  $C$ .

Уточним теперь состав исходных данных в поверхностной лучевой сети. Состав исходных данных назовем необходимым, если при этом составе положение всех определяемых вершин сети получается однозначным независимо от величины возможных ошибок в этих исходных данных. Состав исходных данных назовем расширенным, если из этого состава может быть выделен ряд необходимых совокупностей исходных данных. Построение поверхностной лучевой сети по исходным данным расширенного состава получается всегда из-за их ошибочности многозначным. Отсюда возникает задача взаимного согласования, уравнивания, исходных данных в лучевой сети при их расширенном составе.

В заключение назовем подстилающей ту поверхность, на которой расположена данная поверхностная лучевая сеть.

### 3. Основные виды поверхностных выравненных лучевых сетей

Рассмотрим теперь основные виды поверхностных выравненных лучевых сетей, разбиение на которые может быть выполнено несколькими способами — в зависимости от выбора обобщающих признаков.

Первый способ разбиения. Среди ряда обобщающих признаков можно прежде всего выбрать наиболее существенный: наличие или отсутствие в поверхностной выравненной лучевой сети направленных лучей  $\uparrow L_{cm}$ . В зависимости от этого основного признака мы

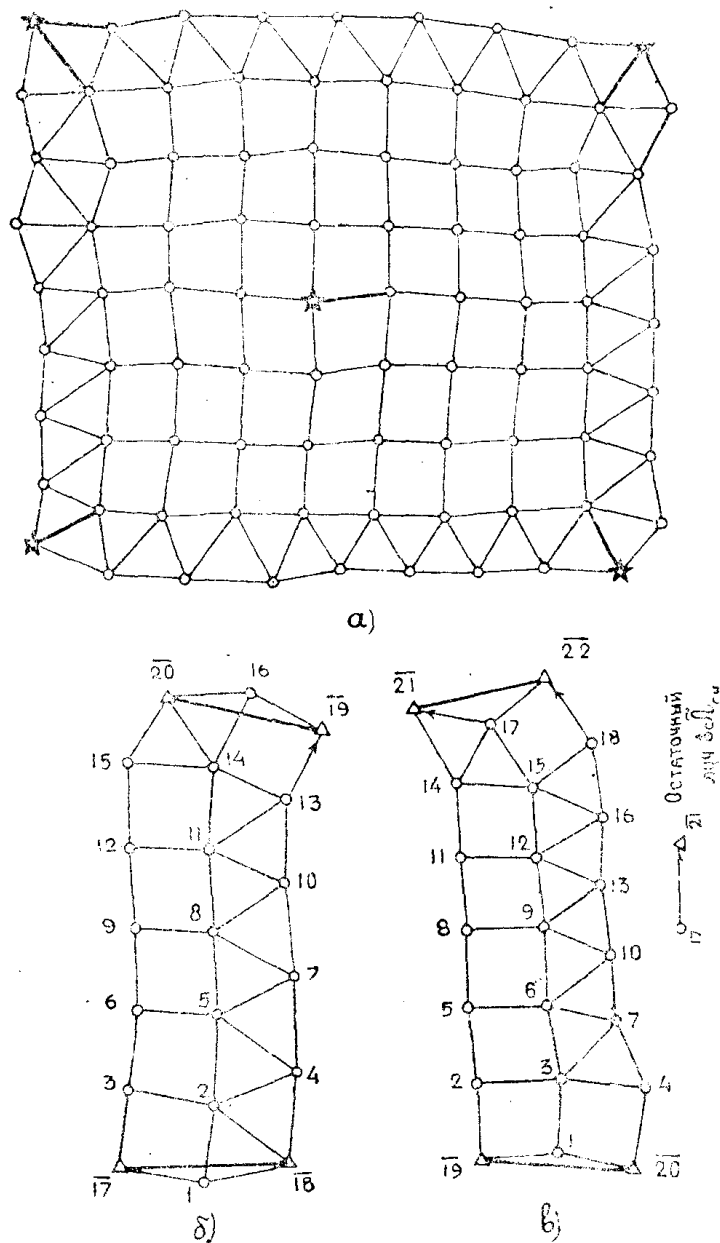


Рис. 1. Прямо связанные направленные лучевые сети

будем различать следующие два подмножества указанных сетей: а) направленные (рис. 1), б) ненаправленные (рис. 2,3). Из дальнейшего будет видно, что построение направленных лучевых сетей выполняется проще, чем сетей ненаправленных.

Второй способ разбиения. Итак, наличие или отсутствие направленности у поверхностных выравненных лучевых сетей является их первым и самым главным обобщающим признаком, согласно которому они могут быть разбиты на два указанных выше подмножества. Но легко убедиться, что эти сети даже более естественно разбивать по другому обобщающему признаку: в зависимости от спо-

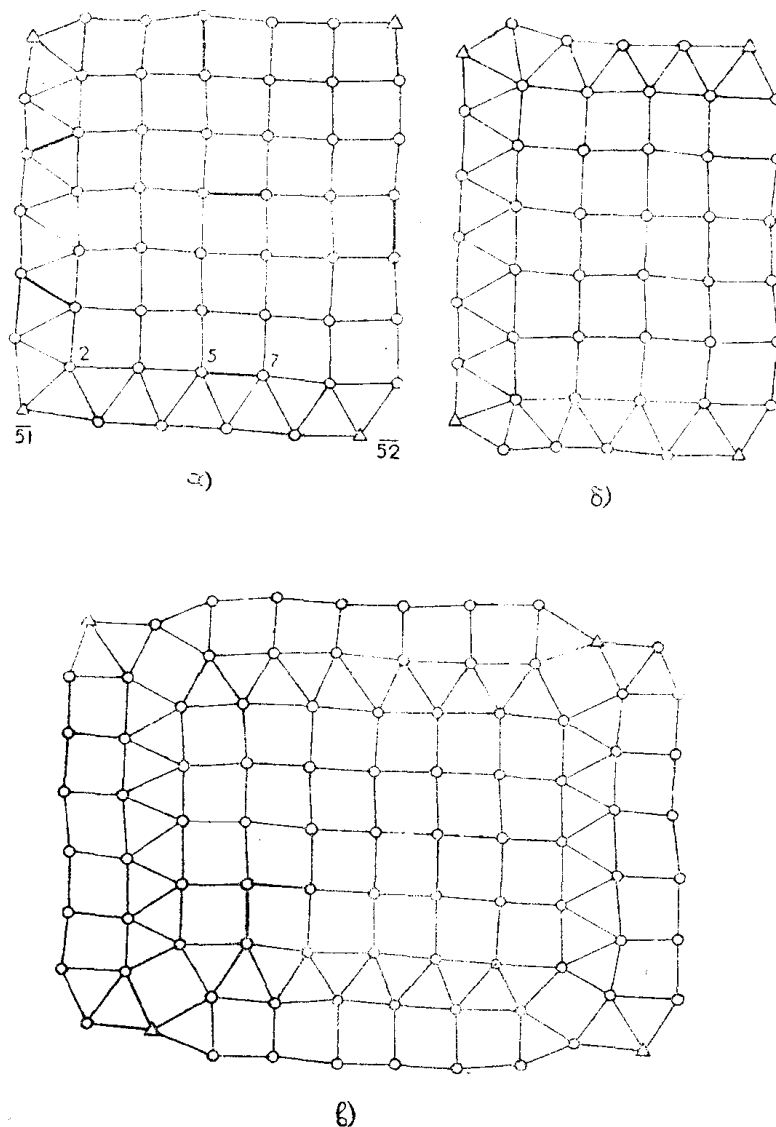


Рис. 2. Прямосвязные ненаправленные лучевые сети

соба связи в них определяемой части с твердыми вершинами. Согласно этому, менее существенному все-таки, признаку мы будем различать следующие три подразделения поверхностных выравненных лучевых сетей: а) прямосвязные, б) обратносвязные, в) смешанносвязные.

Ниже дается определение каждого из этих подразделений и приводятся примеры соответствующих сетей, принадлежащие к обоим разобранным выше подмножествам.

Прямосвязными назовем такие поверхностные лучевые сети, в которых необходимые для их построения лучевики  $L_c$  заданы не только на определяемых, но и на всех твердых вершинах (рис. 1,2). К этому подразделению относится большинство предложенных до

сих пор частных разновидностей поверхностных лучевых сетей — с треугольными ячейками. На рисунке 1 даны примеры направленных, а на рисунке 2 — ненаправленных лучевых сетей прямого подразделения.

Обратносвязными будем называть те поверхностные лучевые сети, в которых соответствующая совокупность лучевиков  $L_c$  задана только на определяемых вершинах (рис. 3). К настоящему времени

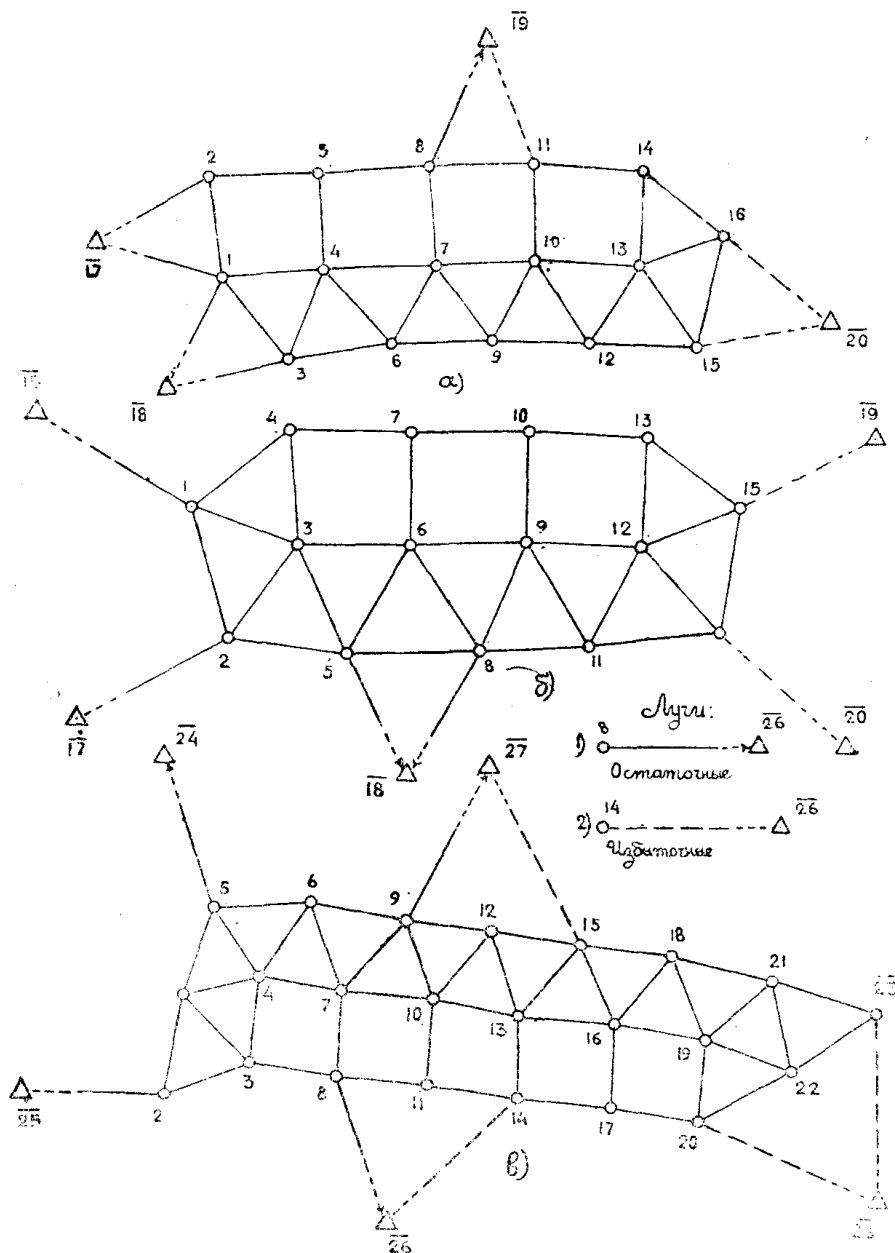


Рис. 3. Обратносвязные ненаправленные лучевые сети

были найдены лишь два весьма частных случая сетей этого подразделения: одиночная обратная засечка (задача Потенота) и двойная обратная засечка (задача Ганзена). На рис. 3 даны примеры только ненаправленных обратносвязных лучевых сетей, так как направленные обратносвязные сети отличаются лишь заданием направленности  $\uparrow_{сн}$  для одного из их свободных лучей  $L_{сн}$ .

Наконец, к смешанносвязным отнесем те промежуточного строения поверхностные лучевые сети, в которых лучевики  $L_c$  заданы на определяемой части и на некоторых из твердых вершин (рисунком не представлены). Из предложенных пока разновидностей поверхностных лучевых сетей сюда относятся одиночная смешанная засечка и редкие случаи сетей треугольников со смешанной привязкой определяемой части к твердым вершинам.

Третий способ разбиения. Кроме описанного выше разбиения поверхностных выравненных лучевых сетей на подмножества и подразделения, возможен еще один способ деления этих сетей на основные виды — в зависимости от состава исходных данных, по которым производится их построение. Согласно последнему обобщающему признаку мы будем различать следующие два объединения поверхностных выравненных лучевых сетей: а) свободные, б) несвободные.

Если в состав исходных данных поверхностной лучевой сети входят, кроме лучевиков, только такие твердые лучи, стороны и вершины, без задания которых невозможно построение всех определяемых вершин сети, то такую лучевую сеть назовем свободной.

Если же в состав исходных данных поверхностной лучевой сети, кроме лучевиков и необходимых твердых лучей, сторон и вершин, входят также избыточные твердые лучи, стороны и вершины, то такую лучевую сеть назовем несвободной.

Нетрудно видеть, что все поверхностные лучевые сети, изображенные на рисунках 1—3, являются несвободными.

Деление поверхностных лучевых сетей на свободные и несвободные необходимо для суждения о степени накопления в них ошибок наблюдений, а также при уравнивании лучевых сетей по расширенным (разд. 2) исходным данным.

#### 4. Последующее разбиение направленных и ненаправленных поверхностных выравненных лучевых сетей на соответствующие роды

Разбиение поверхностных выравненных лучевых сетей на 2 подмножества — направленных и ненаправленных — является, как отмечено выше, основным, так как наличие или отсутствие направленности определяет до некоторой степени большую или меньшую сложность построения этих сетей.

Однако дальнейшее изучение вопроса обнаруживает ряд дополнительных особенностей в построении различных лучевых сетей, принадлежащих к одному и тому же направленному или ненаправленному подмножеству. Это дает повод к разбиению каждого из указанных двух подмножеств поверхностных выравненных лучевых сетей на 3 промежуточных рода. Непосредственным основанием к такому добавочному разбиению двух основных подмножеств на роды является следующая примечательная особенность поверхностных выравненных лучевых сетей.

Хотя поверхностные выравненные лучевые сети вполне определяются соответствующими совокупностями необходимых (разд. 2) исходных данных, но в большинстве случаев эти сети не могут быть сразу построены прямыми засечками по указанным исходным данным. Чтобы осуществить такое построение, требуется найти предварительно некоторые дополнительные данные, вычисляемые по тем же необходимым исходным данным. Такими дополнительными данными могут быть, например, направленность  $\uparrow_{CN}$  или  $\downarrow_{CN}$  одного из приколотых лучей  $\circlearrowleft L_{CN}$  или  $\circlearrowright L_{CN}$ , проходящих через вершины  $C$ ,  $H$  сети; поло-

жение одной из определяемых,  $C$  или  $H$ , вершин сети на закрепленных лучах  $\delta L_{cn}$ ,  $\varphi L_{cn}$  или на подстилающей поверхности и т. п.

В зависимости от указанного признака, т. е. в зависимости от числа  $s$  и состава дополнительных данных, мы будем различать нижеследующие роды поверхностных выравненных лучевых сетей в каждом из указанных выше двух основных подмножеств.

#### ПОДМНОЖЕСТВО I. НАПРАВЛЕННЫЕ СЕТИ (рис. 1).

Род 0 (рис. 1а):  $s = 0$ . Дополнительные данные не нужны.

Род 1 (рис. 1б):  $s = 1$ . Дополнительные данные — положение одной из определяемых вершин  $H$  сети на закрепленном луче  $\delta L_{cn}$ ; например, на рис. 1 б положение определяемой вершины 3 на закрепленном луче  $\delta L_{18.3}$ .

Род 2 (рис. 1в):  $s = 2$ . Дополнительные данные — двумерное положение на подстилающей поверхности той из определяемых вершин сети, с помощью которой может быть начато построение прямыми засечками остальных определяемых вершин сети. Например, на рис. 1 в двумерное положение определяемой вершины 3 на подстилающей поверхности.

#### ПОДМНОЖЕСТВО II. НЕНАПРАВЛЕННЫЕ СЕТИ (рис. 2,3).

Род 1 (рис. 2 а, 3 а):  $s = 1$ . Дополнительное данное — направленность  $\downarrow_{cn}$  или  $\uparrow_{cn}$  одного из приколотых  $\varphi L_{cn}$  или  $\delta L_{cn}$  лучей сети. Например, на рис. 3 а — обратная направленность  $\downarrow_{17.2}$  подвижно-приколотого луча  $\varphi L_{1.17}$ ; на рис. 2 а — прямая направленность  $\uparrow_{51.2}$  неподвижно-приколотого луча  $\delta L_{51.2}$ .

Род 2 (рис. 2 б, 3 б):  $s = 2$ . Дополнительные данные — направленность одного из приколотых лучей сети и положение исходной определяемой вершины на этом луче. Например, на рис. 3 б — направленность  $\downarrow_{1.16}$  приколотого луча  $\varphi L_{1.16}$  и положение определяемой вершины 1 на этом луче.

Род 3 (рис. 2 в, 3 в):  $s = 3$ . Дополнительные данные — направленность одного из приколотых лучей сети и двумерное положение на подстилающей поверхности той из определяемых вершин сети, с помощью которой может быть начато построение остальных определяемых вершин сети. Например на рис. 3 в — направленность  $\downarrow_{2.25}$  приколотого луча  $\varphi L_{2.25}$  и двумерное положение определяемой вершины 1 на подстилающей поверхности.

Из сказанного, таким образом, следует, что в сетях подмножества II сравнительно с сетями подмножества I требуется указать во всех трех родах лишнее дополнительное данное — направленность  $\uparrow_{cn}$  или  $\downarrow_{cn}$  одного из приколотых  $\delta L_{cn}$  или  $\varphi L_{cn}$  лучей сети.

#### 5. Общий способ нахождения дополнительных данных в поверхностных лучевых сетях и условие определенного решения этой задачи

В разд. 1 было отмечено, что построение лучевых сетей, в том числе и поверхностных, производится последовательными прямыми засечками. Однако уже в разд. 4 было указано, что таким способом поверхностную лучевую сеть можно сразу построить только при  $s = 0$ . Если же  $s > 0$  (мы установили, что  $0 \leq s \leq 3$ ), то в этом случае нужно, пользуясь исходными данными лучевой сети, найти сначала  $s$  её дополнительных данных, а затем уже строить эту сеть последовательными прямыми засечками при помощи всей совокупности исходных и дополнительных данных.

Вторая задача очень проста по существу и распадается на ряд однообразных действий. Поэтому мы займемся решением **только** первой, значительно более трудной задачи. Одновременно с этим постараемся установить те условия, при которых указанная первая задача будет иметь определенное решение, если исходные данные — необходимого состава.

Итак, мы пришли к постановке следующей важной задачи.

По заданной совокупности необходимых исходных данных определить  $s$  дополнительных данных для произвольной поверхностной выравненной лучевой сети  $s$ -го рода, а также выяснить условие определенного решения этой задачи.

Ценой длительных и настойчивых поисков мне удалось разыскать очень простое по замыслу и вместе с тем совершенно общее решение указанной задачи при  $s > 0$  (при  $s = 0$  такая задача не возникает). Это общее решение получается путем последовательных рассуждений и вытекающих из них умозаключений, на которых сейчас и остановимся.

1. Допустим, что в поверхностной лучевой сети  $s$ -го рода мы установили каким-нибудь образом значения  $v_1, v_2, \dots, v_s$  дополнительных данных, согласованные с принятой совокупностью необходимых исходных данных. Тогда мы можем, пользуясь указанными необходимыми и дополнительными данными, построить последовательными прямыми засечками соответствующие положения всех определяемых вершин сети. Так как при этом построении кроме необходимых исходных данных было использовано также  $s$  дополнительных данных, а общее количество данных, потребных для построения взятой сети, должно остаться неизменным, то мы обнаружим, что  $s$  каких-то необходимых данных окажутся как бы избыточными, не нужными для указанного построения. Внешне это обстоятельство проявится в кажущейся избыточности  $s$  каких-то необходимых лучей  $L_{cn}$  сети. Такие мнимо-избыточные, но в действительности совершенно необходимые для построения сети лучи мы назовем остаточными и обозначим через  $\delta \tilde{L}_{cn}$ . Эти остаточные лучи  $\delta \tilde{L}_{cn}$  при согласованных значениях необходимых и дополнительных данных пройдут совершенно точно через соответствующие концевые вершины  $\tilde{H}$ .

Вопрос о том, какие лучи в сети окажутся остаточными  $\delta \tilde{L}_{cn}$ , зависит всецело от принятого нами порядка построения этой сети. Поэтому всегда можно добиться того, что остаточными будут любые наперед заданные лучи сети, внутренние или примыкающие к твердым вершинам. Однако определение дополнительных данных выполняется обычно несколько проще, если в качестве остаточных взять примычные лучи. Пример такого выбора остаточных лучей представлен на рис. 1 в. Если в изображенной на этом рисунке лучевой сети 2 рода принять в качестве дополнительных данных  $v_1, v_2$  пару координат  $x_3, y_3$  вершины 3 в какой-нибудь поверхностной отсчетной опоре, то остаточными в этом случае желательно получить лучи  $\delta \tilde{L}_{18.22}$  и  $\delta \tilde{L}_{17.21}$ .

2. Предположим теперь, что вместо точных дополнительных данных  $v_1, v_2, \dots, v_s$  мы взяли в лучевой сети  $s$ -рода какие-нибудь приближенные, ошибочные значения  $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}$  этих величин, плохо согласованные с принятыми необходимыми данными. Ошибоч-



ность использованных дополнительных данных  $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}$  приведет к тому, что приближенные остаточные лучи  $\mathcal{L}_{cn}^{(0)}$ , построенные по  $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}$  и принятой совокупности необходимых исходных данных, не пройдут вообще через соответствующие заданные положения  $\tilde{H}$  своих концевых вершин  $H$ . Легко видеть, что в зависимости от рода остаточных лучей, такими заданными концевыми вершинами  $\tilde{H}$  для лучей  $\mathcal{L}_{cn}^{(0)}$  будут:

а) твердые вершины  $H = T$  сети, если остаточный луч — примычный  $\mathcal{L}_{\Pi T}$ , идущий с примычной определяемой вершины  $\Pi$  на твердую вершину  $T$  (на рис. 4 — твердые вершины  $\bar{22}$  и  $\bar{21}$  для лучей  $\mathcal{L}_{18.22}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}_{17.21}^{(0)}$ );

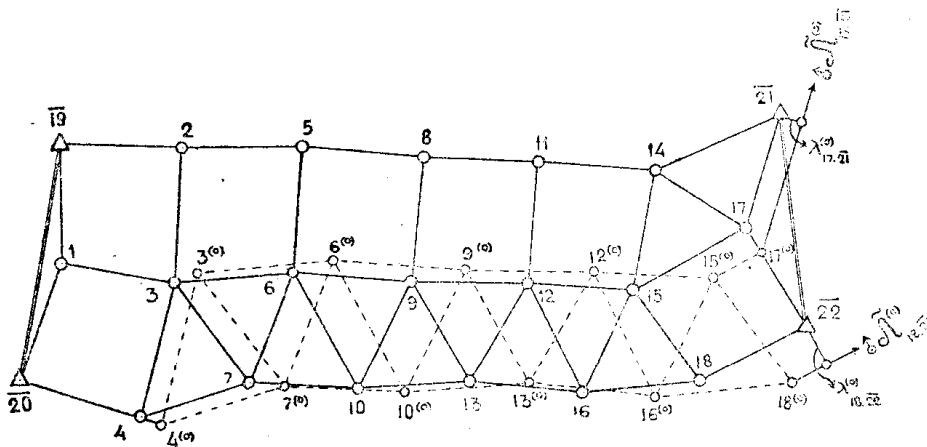


Рис. 4. Построение приближенных остаточных лучей  $\mathcal{L}_{cn}^{(0)}$  в направленной лучевой сети 2-го рода

б) ранее построенные приближенные положения  $\tilde{H}^{(0)}$  определяемых вершин  $H$  сети, если остаточный луч — внутренний  $\mathcal{L}_{cn}$ , идущий с определяемой вершины  $C$  сети на соседнюю с ней определяемую же вершину  $H$  (на рис. 5 — приближенно построенная определяемая вершина  $\tilde{1}^{(0)}$  для луча  $\mathcal{L}_{19.1}^{(0)}$ ).

3. Уклонение приближенного остаточного луча  $\mathcal{L}_{cn}^{(0)}$  относительно его заданной концевой вершины  $\tilde{H}$  будем определять поперечным к  $\mathcal{L}_{cn}^{(0)}$  направленным отрезком (стрелкой)  $\uparrow \lambda_{cn}^{(0)}$  поверхностной выравненной нити от вершины  $\tilde{H}$  до луча  $\mathcal{L}_{cn}^{(0)}$  (рис. 6, а также рис. 4 и 5). Указанный направленный отрезок  $\uparrow \lambda_{cn}^{(0)}$  назовем поперечным смещением луча  $\mathcal{L}_{cn}^{(0)}$  относительно соответственной концевой вершины  $\tilde{H}$ .

Длины  $\lambda_{cn}^{(0)}$  поперечных смещений  $\uparrow \lambda_{cn}^{(0)}$  будем считать также направленными величинами и с этой целью условимся (рис. 6), что

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{CH}^{(0)} > 0, \text{ если луч } \delta \tilde{L}_{CH}^{(0)} \text{ правее луча } C^{(0)} \tilde{H} \\ \lambda_{CH}^{(0)} < 0, \text{ если луч } \delta \tilde{L}_{CH}^{(0)} \text{ левее луча } C^{(0)} \tilde{H} \end{array} \right.$$

Эти направленные длины  $\lambda_{CH}^{(0)}$  стрелок  $\uparrow \lambda_{CH}^{(0)}$  при начертательном

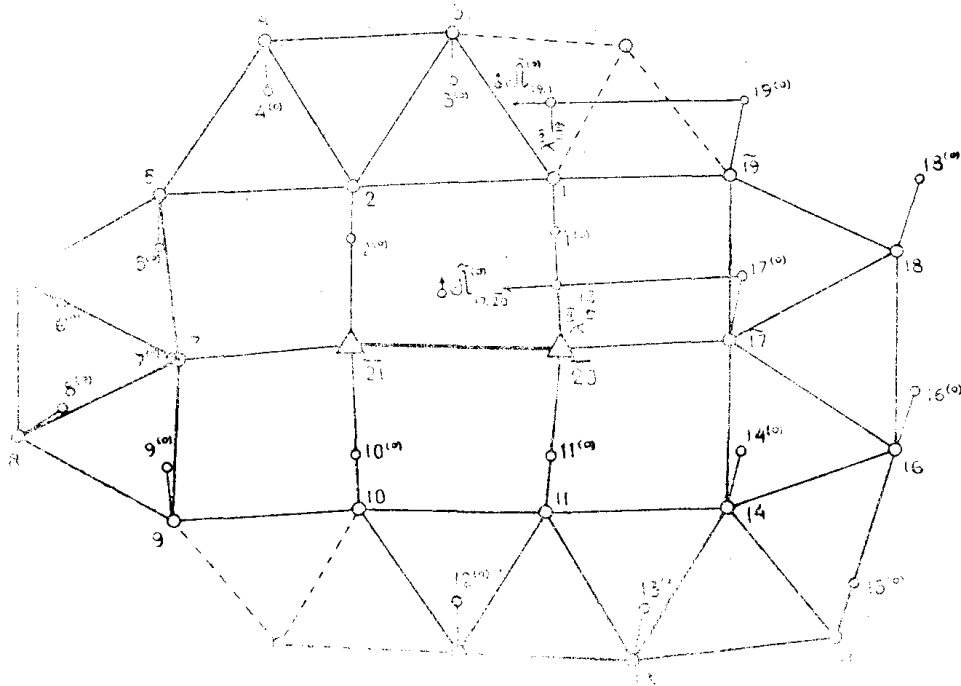


Рис. 5. Построение приближенных остаточных лучей  $\delta \tilde{L}_{CH}^{(0)}$ , примычных и внутренних, в направленной лучевой сети I-го рода

построении поверхностной лучевой сети находятся, с их знаком согласно (1), непосредственно по чертежу сети, составленному по при-

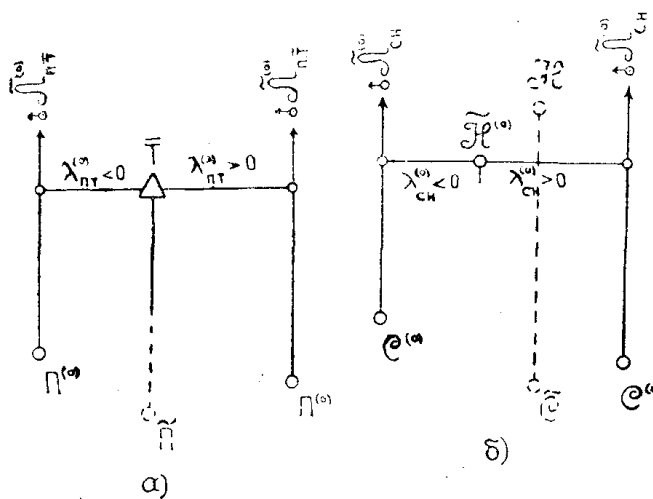


Рис. 6. Определение направленных длин  $\lambda_{CH}^{(0)}$  у стрелок  $\uparrow \lambda_{CH}^{(0)}$

лиженным  $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}$  дополнительным данным и принятым необходимым исходным данным. В случае же численного способа или смешанного, начертательно-численного, способа построения лучевой сети

величины  $\lambda_{сн}^{(0)}$ , со знаком согласно (1), находятся по их малости с достаточной степенью точности следующим образом (рис. 7):

$$\lambda_{сн}^{(0)} = D_{сн}^{(0)} \sin l_{сн}^{(0)} \approx D_{сн}^{(0)} \frac{l_{сн}^{(0)''}}{\rho''}, \quad (2)$$

где  $\rho = 206265$ ,  $D_{сн}^{(0)} = C^{(0)} \tilde{H}^{(0)}$ ,  $l_{сн}^{(0)} = \tilde{\uparrow}_{сн}^{(0)} - \tilde{\uparrow}'_{сн}$ , причем  $\tilde{\uparrow}_{сн}^{(0)}$  и  $\tilde{\uparrow}'_{сн}$  суть соответственно направленности луча  $\tilde{\mathcal{L}}_{сн}^{(0)}$  и опорного отрезка  $C^{(0)}\tilde{H}^{(0)}$

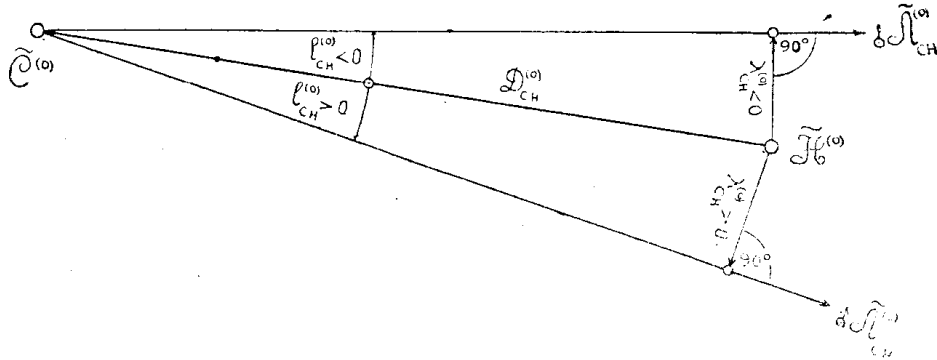


Рис. 7. Вычисление направленных длин  $\lambda_{сн}^{(0)}$  у  $\tilde{\uparrow}_{сн}^{(0)}$

4. Из сказанного выше следует, что поперечные смещения  $\tilde{\uparrow}_{сн}^{(0)}$  остаточных лучей  $\tilde{\mathcal{L}}_{сн}^{(0)}$  относительно своих концевых вершин  $\tilde{H}$  являются в поверхностной лучевой сети  $s$ -го рода функциями соответствующих приближенных дополнительных данных  $\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \dots, \nu_j^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)}$  и той части  $\sigma'$  принятых необходимых данных, которая участвует в определении величин  $\nu_j^{(0)}$ . Поэтому, если обозначить через  $\lambda_i^{(0)}$  — направленную длину поперечного смещения  $\tilde{\uparrow}_{сн}^{(0)} = \tilde{\uparrow}_{сн}^{(0)}$  для некоторого  $i$ -го остаточного луча  $\tilde{\mathcal{L}}_{сн}^{(0)} = \tilde{\mathcal{L}}_{сн}^{(0)}$ , то мы можем написать, что

$$\lambda_i^{(0)} = F_i(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \dots, \nu_j^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)}; \sigma') \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (3)$$

При этом очевидно, что для точных дополнительных данных  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ ,

$$\lambda_i = F_i(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_j, \dots, \nu_s; \sigma') = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (4)$$

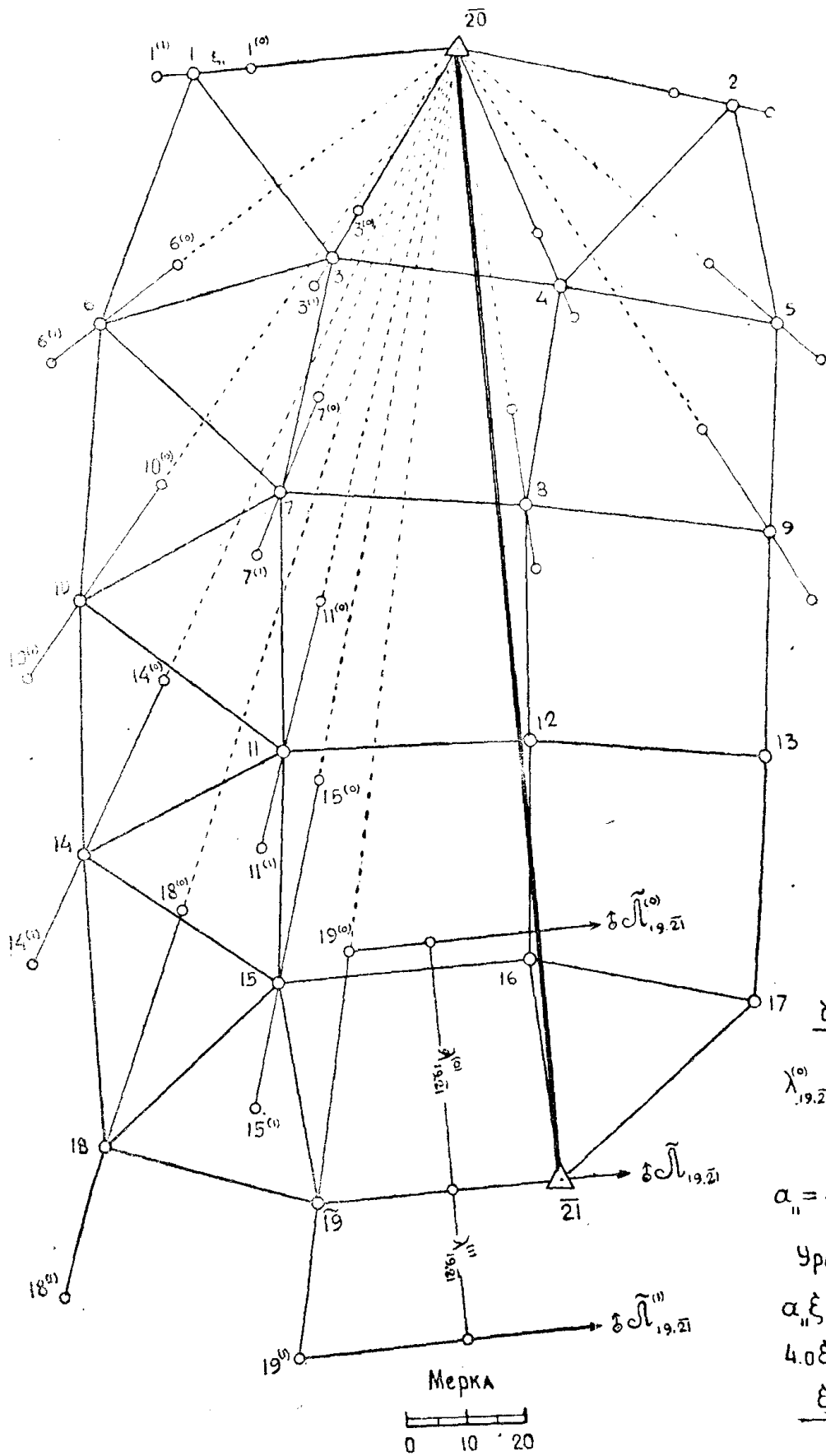
Пусть

$$\nu_j = \nu_j^{(0)} + \varepsilon_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5)$$

Полагая поправки  $\varepsilon_j$  достаточно малыми, разложим (4) по строке Тейлора. Тогда вместо (4) будем иметь более развернуто

1) В ненаправленных лучевых сетях для подсчета  $\lambda_{сн}^{(0)}$  можно дать более точное выражение, которое здесь не приводится.

2) В частности,  $\sigma' = \sigma$ , где  $\sigma$  — полная совокупность необходимых исходных данных поверхностной лучевой сети.



Определение  
дополнит. данного  $\xi_1$

$$\chi_{19,21}^{(0)} = -41; \chi_{19,21}^{(1)} = +25$$

$$l_{19,21}^{(0)} = +16$$

$$\alpha_{11} = \frac{\chi_{19,21}^{(1)} - \chi_{19,21}^{(0)}}{l_{19,21}^{(1)}} = +4.0$$

Уравнение (8):

$$\alpha_{11} \xi_1 + \chi_{19,21}^{(0)} = 0$$

$$4.0 \xi_1 + 41 = 0$$

$$\xi_1 = l_{19,21}^{(0)} = +10$$

Рис. 8. Построение направленной лучевой сети I-го рода

1) Определение дополнит. данных

$\xi_1, \xi_2$  из свода (8)

$$\begin{aligned} \lambda_{14,20}^{(1)} &= +7.5 & \lambda_{17,21}^{(1)} &= +2.0 \\ \lambda_{14,20}^{(2)} &= -6.0 & \lambda_{17,21}^{(2)} &= +7.0 \\ \lambda_{14,20}^{(3)} &= +5.0 & \lambda_{17,21}^{(3)} &= -4.5 \\ 3^{(1)}3^{(1)} &= +11.0 & 3^{(2)}3^{(2)} &= +11.0 \end{aligned}$$

$$\alpha_{1,1} = \frac{\lambda_{14,20}^{(1)} - \lambda_{14,20}^{(2)}}{3^{(1)}3^{(1)}} = -1.2$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\lambda_{14,20}^{(2)} - \lambda_{14,20}^{(3)}}{3^{(2)}3^{(2)}} = -0.2$$

$$\alpha_{2,1} = \frac{\lambda_{17,21}^{(1)} - \lambda_{17,21}^{(2)}}{3^{(1)}3^{(1)}} = +0.5$$

$$\alpha_{2,2} = \frac{\lambda_{17,21}^{(2)} - \lambda_{17,21}^{(3)}}{3^{(2)}3^{(2)}} = -0.6$$

Свод (8)

$$\begin{aligned} -1.2\xi_1 - 0.2\xi_2 + 7.5 &= 0 \\ +0.5\xi_1 - 0.6\xi_2 + 2.0 &= 0 \end{aligned}$$

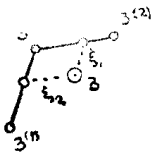
$$D = +0.82$$

$$\xi_1 = +5.0 \quad \xi_2 = +7.6$$

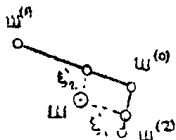
2) Определение  $\xi_1, \xi_2$

собственным отображением

а) Отображение



б) Отображение



$$\xi_1 = \frac{3^{(1)}3^{(1)}}{W^{(1)}W^{(1)}} = +4.5$$

$$\xi_2 = \frac{3^{(2)}3^{(2)}}{W^{(2)}W^{(2)}} = +7.5$$

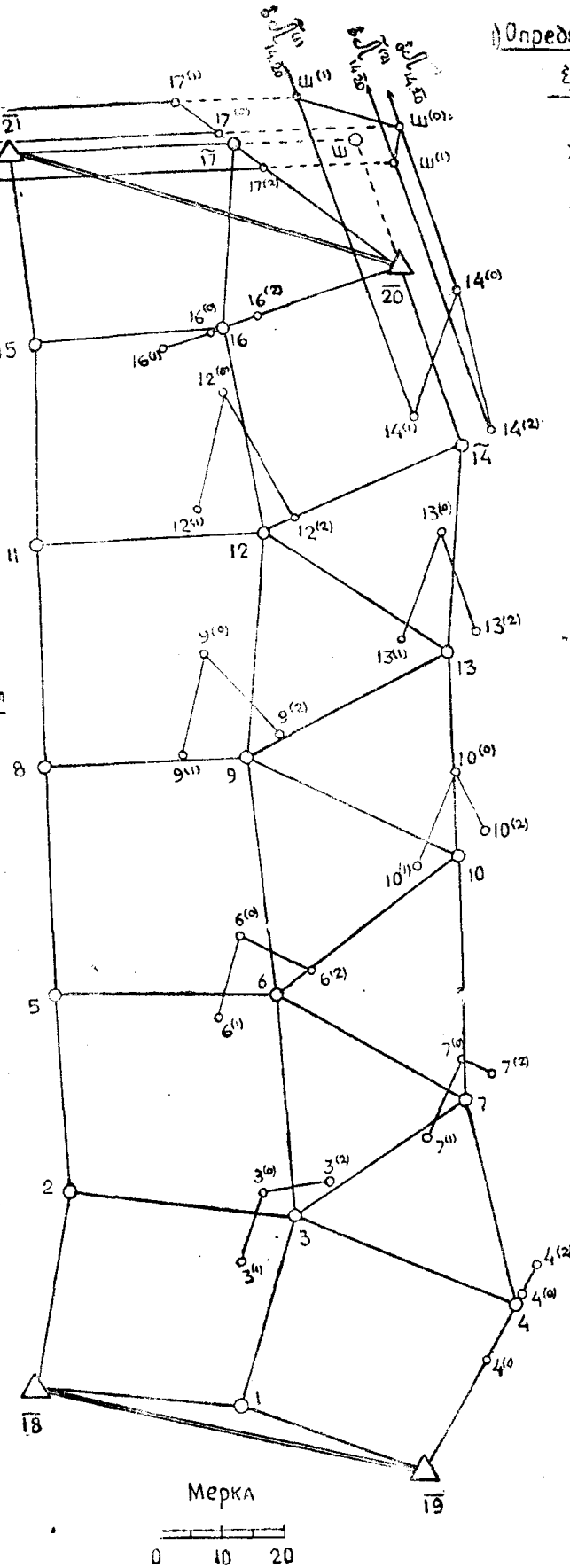
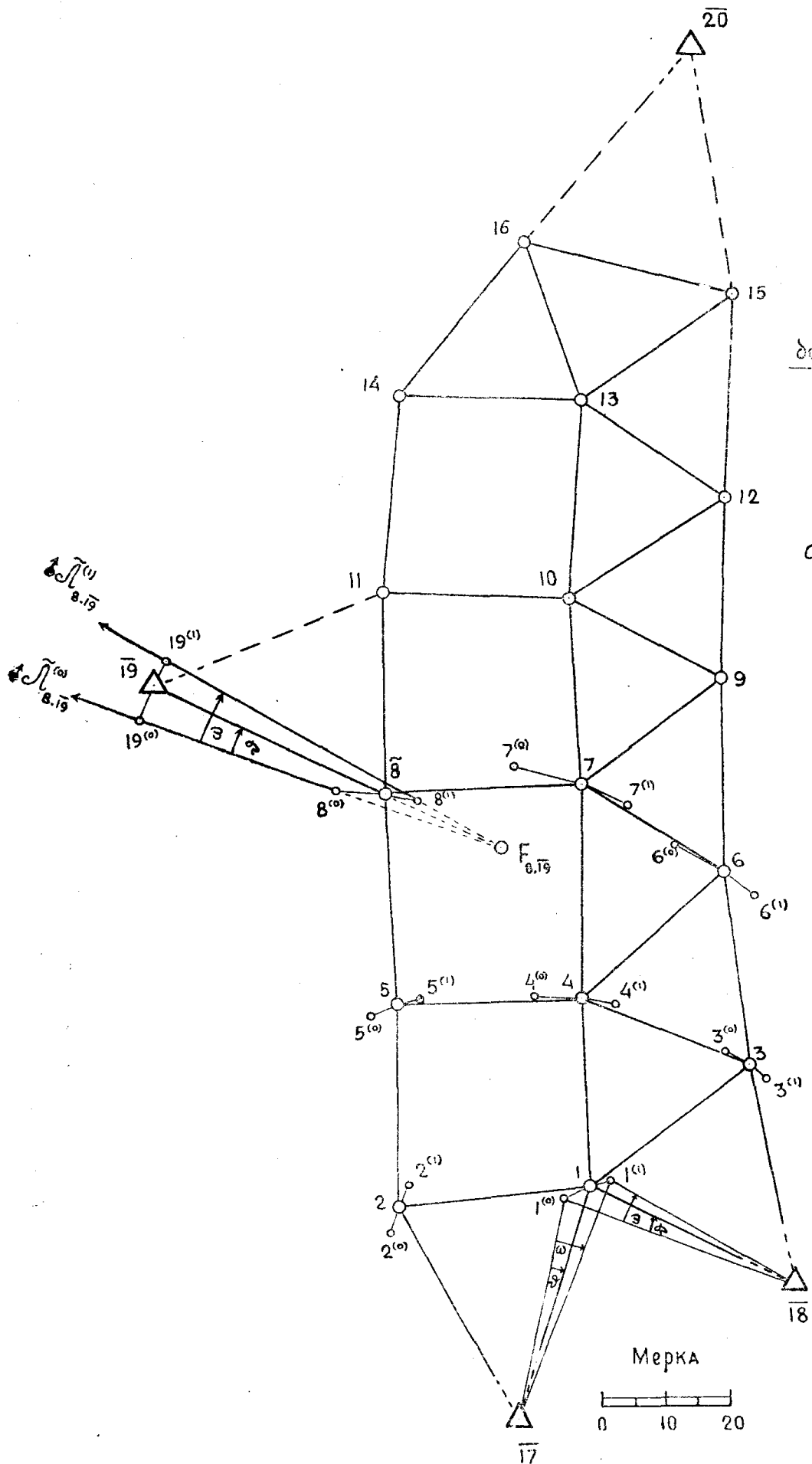


Рис. 9. Построение направленной лучевой сети 2-го рода



1) Определение

дополнител. данного  $\xi_1$

$$\lambda_{8.19}^{(0)} = -6 \quad \lambda_{8.19}^{(1)} = +4$$

$$\varepsilon_1 = |1^{(0)} 1^{(1)}| = +8$$

$$a_{11} = \frac{\lambda_{8.19}^{(1)} - \lambda_{8.19}^{(0)}}{\varepsilon_1} = +1.3$$

Уравнение (8):

$$a_{11} \xi_1 + \lambda_{8.19}^{(0)} = 0$$

$$+1.3 \xi_1 - 6 = 0$$

$$\xi_1 = |1^{(0)}| = +4.6$$

2) Поворот сети  $\vartheta$

$$\omega = \angle 1^{(0)} \bar{1} 1^{(1)} - \text{дано}$$

$$\vartheta = \angle 1^{(0)} \bar{1} 1 = \frac{\xi_1}{\varepsilon_1} \omega$$

Рис. 10. Построение ненаправленной лучевой сети 1-го рода

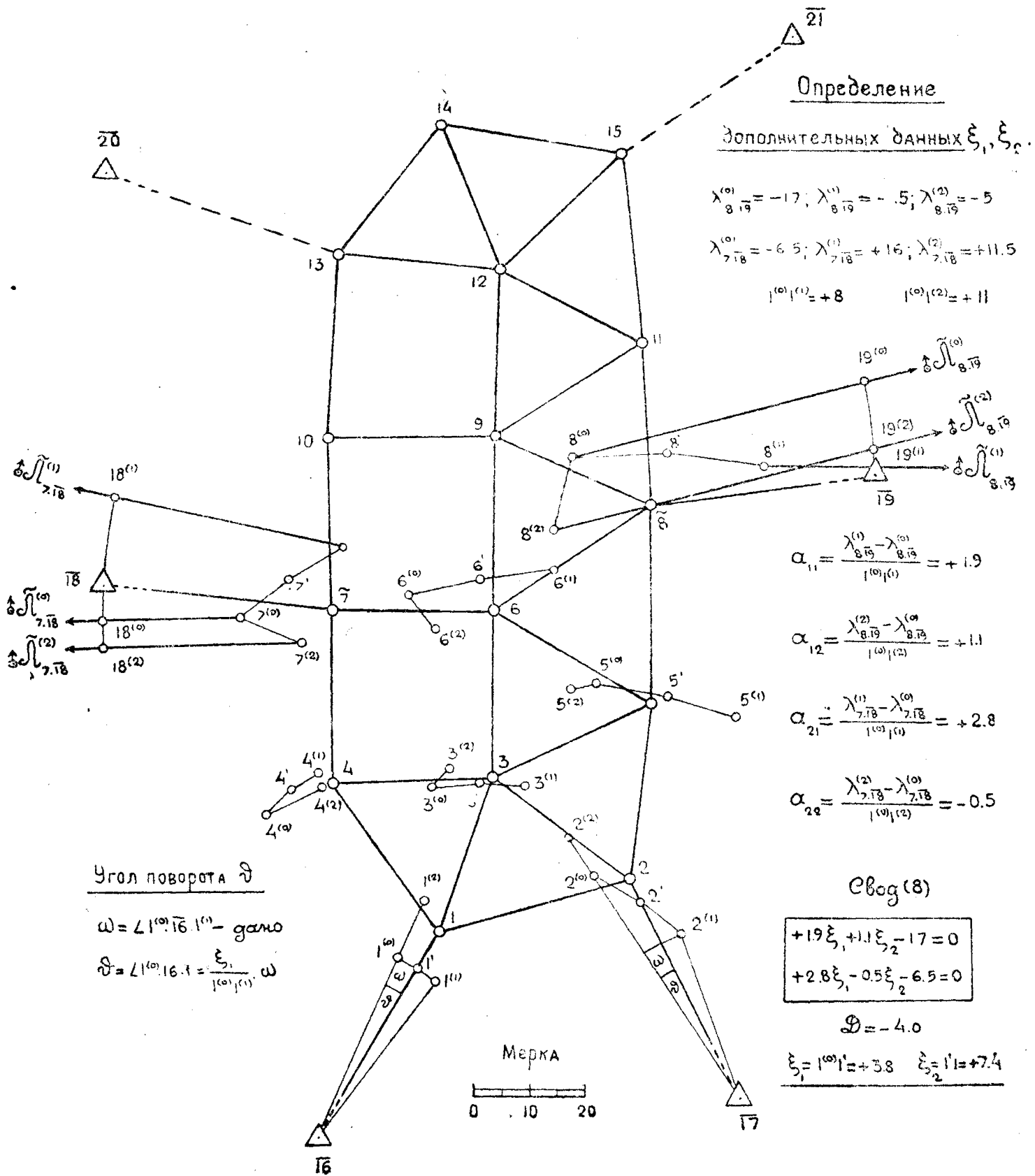


Рис. 11. Построение ненаправленной лучевой сети 2-го рода

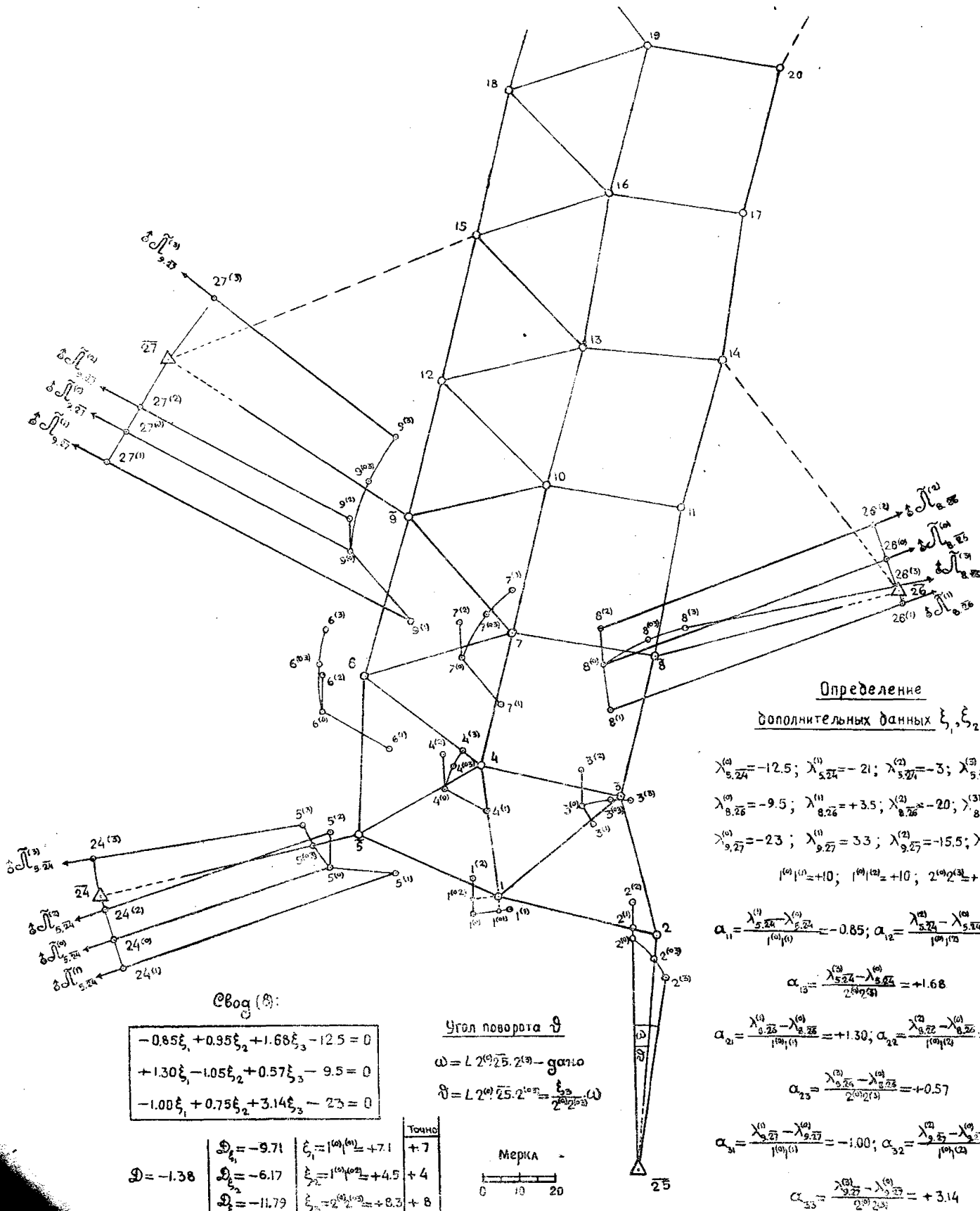


Рис. 12. Построение неаправленной лучевой сети 3-го рода



$$F_i(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_j^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}; \sigma') + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial F_i}{\partial v_j} \right)_0 \cdot \epsilon_j = 0, \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s),$$

где частные производные  $\frac{\partial F_i}{\partial v_j}$  подсчитываются для  $(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_j^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}; \sigma')$ . Учитывая теперь (3) и вводя обозначение

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial v_j} \right)_0 = a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, s) \quad (7)$$

приведем (6) к следующему окончательному виду:

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} \xi_j + \lambda_i^{(0)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (8)$$

где мы обозначили искомые поправки  $\epsilon_j$  (постоянные величины) через  $\xi_j$ .

Выражение (8) есть свод  $s$  плоскостных<sup>1)</sup> уравнений с  $s$  неизвестными поправками  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_s$  приближенных дополнительных данных  $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_j^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}$ . Таким образом мы установили, что отыскание

для поверхностной выравненной лучевой сети  $s$ -го рода дополнительных данных  $v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_s$ , согласованных с принятыми исходными данными этой сети, приводится к решению свода (8) и подсчетам согласно (5).

5. Заметим теперь, что вычисление  $s^2$  коэффициентов  $a_{ij}$  свода (8) с помощью соотношений (7) не приемлемо с производственной точки зрения, так как требует составления и дифференцирования функций  $F_i$ , имеющих очень сложный и запутанный вид, особенно для сфероидических лучевых сетей. Кроме того, все эти вычисления не имеют проверок, что недопустимо. По этим же причинам совершенно нелепо применение указанного способа подсчета коэффициентов  $a_{ij}$  при начертательном построении лучевой сети, когда требуются в первую очередь быстрота и простота работы.

Приведенные соображения побудили меня придумать другой способ отыскания в своде (8) коэффициентов  $a_{ij}$ , который состоит из ряда однообразных, хорошо проверяемых действий, и при начертательном построении поверхностной лучевой сети выполняется также начертательно. Этот способ излагается ниже.

6. Отыскание коэффициентов  $a_{ij}$  в своде (8) предложенным мною способом основано на том соображении, что вообще

1) Плоскостной--употреблено вместо неудачного слова „линейный“.

$$a_{ij} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial v_j} \right)_0 =$$

$$= \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \frac{F_i(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_j^{(0)} + \varepsilon_j, \dots, v_s^{(0)}; \sigma') - F_i(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_j^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}; \sigma')}{\varepsilon_j},$$

или более сокращенно

$$a_{ij} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial v_j} \right)_0 = \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \frac{F_i^{(j)} - F_i^{(0)}}{\varepsilon_j} = \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \frac{\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(0)}}{\varepsilon_j}, \quad (9)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, s),$$

где в соответствии с (3) положено

$$F_i^{(0)} = F_i(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_j^{(0)}, \dots, v_s^{(0)}; \sigma') = \lambda_i^{(0)}$$

$$F_i^{(j)} = F_i(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_j^{(0)} + \varepsilon_j, \dots, v_s^{(0)}; \sigma') = \lambda_i^{(j)}. \quad (10)$$

При этом  $\lambda_i^{(j)}$  — направленная длина поперечного смещения  $\uparrow \lambda_{(сн)i}^{(j)} =$   
 $= \uparrow \lambda_i^{(j)}$  у  $i$ -го остаточного луча  $\delta \tilde{H}_{(сн)i}^{(j)} = \delta \tilde{H}_i^{(j)}$   
относительно соответствующей концевой вершины  $\tilde{H}_i^{(j)}$  для того слу-  
чая, когда построение поверхностной лучевой сети  $s$ -го рода произ-  
водится по исходным данным  $(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_j^{(0)} + \varepsilon_j, \dots, v_s^{(0)}; \sigma')$ .

Но стрелки  $\uparrow \lambda_i^{(j)}$  при достаточно малых  $\varepsilon_j$  почти совмещаются с ис-  
ходными стрелками  $\uparrow \lambda_i^{(0)}$  и меняют свою направленную длину  $\lambda_i^{(j)}$  почти  
пропорционально поправкам  $\varepsilon_j$ . Отсюда следует, что при малых  $\varepsilon_j$  все  
 $s^2$  коэффициентов  $a_{ij}$  в сводке (8) можно находить с достаточной  
степенью точности из соотношения, близкого к (9)

$$a_{ij} = \frac{\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(0)}}{\varepsilon_j} = \frac{\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(0)}}{v_j^{(1)} - v_j^{(0)}}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, s), \quad (11)$$

где положено

$$v_j^{(1)} = v_j^{(0)} + \varepsilon_j. \quad (12)$$

Выражение (11) является искомым. Заметим, что для направлен-  
ных лучевых сетей, в особенности—для плоских, это выражение будет  
не приближенным, а совершенно точным.

7. Чтобы довести до конца нашу задачу об определении  $s$  до-  
полнительных данных  $v_1, v_2, \dots, v_s$  в поверхностной выравненной лу-

чевой сети  $s$ -го рода, мы должны еще установить условие определенности решения этой задачи. Таким условием является, очевидно, требование

$$|a_{ij}| \neq 0, \quad (13)$$

где  $|a_{ij}|$  - определитель свода (8). Если же  $|a_{ij}| = 0$ , или если  $|a_{ij}|$  близко к 0, то в этом случае дополнительные данные поверхностной лучевой сети или вовсе не могут быть определены из (8) и (5), или же определяются отсюда весьма ненадежно. Тогда нужно несколько изменить внутреннее строение намеченной лучевой сети или же взять другие остаточные лучи.

Нетрудно понять, что неравенство (13) можно рассматривать и как искомое достаточное условие построимости лучевой сети рода  $s > 0$  (разд. 1).

## 6. Примеры нахождения общим способом дополнительных данных в поверхностных выравненных лучевых сетях

На рисунках 8, 9 и 10, 11, 12 даны примеры определения дополнительных данных в поверхностных лучевых сетях предложенным мною способом. Эти определения выполнены начертательным путем, который позволяет наиболее наглядно и просто представить сущность указанного способа и его особенности для поверхностных лучевых сетей различного вида. Вспомогательные вычисления и побочные построения также помещены на этих рисунках.

Рисунки 8, 9 показывают нахождение дополнительных данных в направленных поверхностных лучевых сетях первого и второго рода. Отыскание дополнительных данных в таких сетях выполняется особенно просто, так как в этом случае направленности  $\uparrow_{cn}^{(h)}$  засекающих

лучей  $\uparrow L_{cn}^{(h)}$  при данных  $C, H$  остаются неизменными для всех  $h=0, 1, \dots, s$ , т. е. во всех  $s+1$  перестроениях сети. В качестве остаточ-

ных  $\mathcal{L}_{(cn)_i}$  в этих примерах взяты только примычные лучи  $\mathcal{L}_{(n\bar{t})_i}$ . Нетрудно сообразить, что перестроения сетей, выполняемые на рис. 8, 9, являются соответственно их одномерным и двумерным параллельными родственными преобразованиями.

Рисунки 10, 11, 12 поясняют определение дополнительных данных в ненаправленных поверхностных лучевых сетях 1—3 рода. Дополнительные данные в этих сетях находятся более трудоемко, так как при одном из сетевых перестроений берется иная направленность исходного примычного луча, чем в остальных  $s$  перестроениях. Во всех трех примерах остаточными взяты только примычные лучи  $\mathcal{L}_{(n\bar{t})_i}$ .

Легко усмотреть, что сетевые перестроения, выполняемые на указанных чертежах, являются родственными преобразованиями следующих видов: а) расчлененного поворота (рис. 10), б) расчлененного поворота и одномерным параллельным (рис. 11), в) расчлененного поворота и двумерным параллельным (рис. 12).

## 7. Сравнение поверхностных выравненных лучевых сетей общего вида с триангуляцией

Проведенное нами исследование поверхностных выравненных лучевых сетей общего вида позволяет установить следующие замеча-

тельные особенности этих сетей по сравнению с частным их видом — триангуляцией.

1. Среднее число наблюдаемых лучей на вершинах триангуляции равно 6—7, а в лучевой сети общего вида оно легко может быть сокращено до 3—5 (рис. 1—3). Это облегчает и удешевляет существенным образом полевые работы в таких лучевых сетях.

2. Свободные направленные лучевые сети общего вида, построенные на длинной твердой стороне, дают возможность очень просто переходить от длинной стороны основной сети к сколь угодно малым сторонам заполняющей сети.

Несвободные направленные лучевые сети общего вида, построенные в виде двойной, тройной и т. д. цепи ячеек между твердыми сторонами, позволяют уменьшать сразу в нужное число раз длину промежуточных сторон. Этим обеспечивается легкий переход от основной сети к заполняющей сети со сторонами потребной длины.

Упомянутые качества направленных лучевых сетей общего вида, свободных и несвободных, делают их удобным и гибким средством построения заполняющей сети любой густоты, позволяя осуществить переход от основной сети с наименьшим числом ступеней развития.

3. В отличие от триангуляции поверхностные лучевые сети общего вида могут быть построены таким образом, чтобы в них не возникало других условий, кроме угловых и дополнительных; или же было только весьма ограниченное количество боковых и вершинных условий (рис. 1—3). Это позволяет довольно просто уравнивать такие упрощеннолучевые сети по условным наблюдениям, а еще лучше — по анеровским условно-косвенным наблюдениям [2].

4. Ввиду меньшего количества наблюдаемых лучей в упрощеннолучевых сетях по сравнению с триангуляцией, их вершины определяются с несколько меньшей точностью, чем в триангуляции. Однако сопоставление для сравниваемых сетей соответствующих  $n$ -мерных единичных эллипсоидов ошибок вида

$$a_{(nn)} x_{(n)} x_{(n)} = 1, \quad (14)$$

где  $a_{(nn)}$  — матрица косвенных нормальных уравнений, показывает, что различие в размерах одноименных осей у триангуляционного и упрощеннолучевого эллипсоидов (14) не превышает в среднем 10—20%. Поэтому при достаточно высокой точности угловых наблюдений имеются все основания заменять триангуляцию более дешевыми упрощеннолучевыми сетями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berichte zur X. Generalversammlung der J. U. G. G.—Assoziation für Geodäsie—in September 1954 in Rom 1955, Stuttgart.

2. Aner. Ausgleichung durch Anwendung des arithmetischen Mittels. Z. f. Vermessungswesen, H. 3, 1926, Stuttgart.