ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 87 1957 г.

О МЕХАНИЗМЕ ЗАХВАТА ЭЛЕКТРОНОВ В УСКОРЕНИЕ В БЕТАТРОНЕ

II

Б. Н. РОДИМОВ

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

Количество захватываемых в ускорение электронов и зависимость его от различных параметров

Механизмом, благодаря которому количество захваченных в ускорение электронов подчиняется определенным закономерностям, является, по нашему мнению, образование равновесного электронного пучка, циркулирующего в камере бетатрона в виде замкнутого устойчивого кольца без каких-либо радиальных или аксиальных колебаний. Делая такое предположение на основании рассмотрения весьма грубой картины взаимодействия ленточных электронных пучков [1], мы постараемся доказать его справедливость следствиями из него получающимися.

Основные условия инжекции

Магнитное поле бетатрона будем считать меняющимся во времени, как это имеет место в реальных бетатронах, без учета, однако, фазовых сдвигов, азимутальной неоднородности и т. д. Магнитное поле будем по-прежнему характеризовать потенциальной функцией $V_м$, меняющейся теперь во времени и определяющей в каждый момент времени силы, действующие на электроны.

Конкретно мы будем рассматривать функцию $V_м$ вида, приведенного в [2]:

$$V_{мс} = \frac{e}{2mc^2}\left[\frac{\frac{r^2H_z}{2}+C}{r}\right]^2 = \left[\sqrt{V_{мо}}+\frac{C}{r}\sqrt{\frac{e}{2mc^2}}\right], \qquad (1)$$

где

$$V_{мо} = \frac{eA_0^2}{2mc^2}\left[aJ_1(kr)+bN_1(kr)\right]^2 ch^2(kz) \qquad (2)$$

есть потенциальная функция „нулевых“ электронов, для которых постоянная $C=0$ (см. в [2] графики этой функции для случая равновесного круга с радиусом $R_0 = 15 см$ и $n_0 = 0{,}5$).

Исходя из определения постоянной $C = \frac{cmr^2\dot{\Theta}}{e} - \frac{r^2 H_z}{2}$, можно написать ее выражение через значения величин для радиуса инжекции R_i

$$C = F\sqrt{U_0 \sin \omega t} \qquad R_i^2 \frac{\overline{H}_{zam}}{2} \cdot \sin \Omega (\tau_0 + t), \tag{3}$$

где $U = U_0 \sin \omega t$ напряжение импульса инжекции в вольтах, ω частота импульса инжекции, $\overline{H}_{zam}$ — амплитудное значение средней напряженности магнитного поля в круге радиуса R_i, Ω — частота магнитного поля, τ_0 момент начала импульса инжекции (за начало отсчета τ_0 берется момент перехода магнитного поля через нуль, t отсчитывается от τ_0), $F = \frac{c.m}{e} \cdot 5{,}93 \cdot 10^7 R_i$, c, m, e соответственно скорость света, масса и заряд электрона.

Так как $\Omega(\tau_0 + t)$ мало, то можно написать

$$C = F\sqrt{U_0 \sin \omega t} - R_i^2 \frac{\overline{H}_{zam}}{2} \Omega (\tau_0 + t). \tag{4}$$

Будем считать по-прежнему, что электронная пушка бетатрона работает в режиме насыщения, т. е. можно написать равенство

$$i = e . 5{,}93 \cdot 10^7 \sqrt{U} \cdot \rho = \text{const}, \tag{5}$$

где ρ — плотность пучка электронов (число электронов в $см^3$).

Движение электронов в равновесном пучке

В [1] рассмотрен случай равновесного пучка электронов с одним значением постоянной C. Равновесный пучок электронов, состоящий из электронов с разными C, можно представить, если электроны с разными C будут занимать зоны на разных радиусах. Только в этом случае возможно равенство сил фокусирующих магнитного поля и сил дефокусирующих электрического поля пучка электронов. Другими словами, только в этом случае возможно выполнение равенства

$$\frac{\partial}{\partial r} \int \frac{e \rho_{рав} \, d V^1}{|\vec{r} - \vec{r}|} = -\frac{\partial V_м}{\partial r}$$

для каждого сорта электронов. Электроны с большими значениями C располагаются и на больших радиусах. Для любого значения C в реальном бетатроне равновесный пучок с электронами только одного C создать нельзя. Однако нельзя создать равновесный пучок и с электронами всех возможных значений C, так как при этом для электронов самого большого C магнитные силы будут равны нулю, значит и электрические силы должны быть равны нулю, что означает, что пучок электронов отсутствует. Таким образом, наиболее вероятно образование равновесного пучка из электронов со значениями C в узком интервале ΔC.

Границы области захвата

Кажется естественным считать областью захвата интервал значений C, для которых имеются потенциальные ямы.

Верхнее значение $C = C_{max}$ можно определить из следующих соображений. Для поля на радиусе r можно написать

$$H_z(r) = H_z(R_0)\, e^{-\int\limits_{R_0}^{r} \frac{n(r)}{r}\, dr} . \qquad (6)$$

В точках минимумов потенциальных ям для различных C

$$H_z = \frac{\bar{H}_z}{2} + \frac{C}{r^2} , \qquad (7)$$

в частности для C_{max}

$$H_z = \frac{\bar{H}_z}{2} + \frac{C_{max}}{R_i^2} , \qquad (8)$$

где R_i — радиус инжекции (на этом радиусе $n = 1$, что соответствует дну последней верхней ямы).

Равенство (8) можно записать как

$$H_z(R_0)\, e^{-\int\limits_{R_0}^{Ri} \frac{n(r)dr}{r}} = \frac{H_z(R_0)}{\left(1 + \frac{x_i}{R_0}\right)^2} \left[1 + \frac{1}{R_0^2} \int\limits_{R_0}^{Ri} r e^{-\int\limits_{R_0}^{r} \frac{n(r)dr}{r}} dr\right] + \frac{C_{max}}{R_i^2} , \qquad (9)$$

так как средняя напряженность поля в круге радиуса r будет

$$H_z(r) = \frac{2 H_z(R_0)}{\left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^2} + \frac{2 H_z(R_0)}{r^2} \int\limits_{R_0}^{r} r e^{-\int\limits_{R_0}^{r} \frac{n(r)dr}{r}} dr , \qquad (10)$$

где $x = r - R_0$, $H_z(R_0)$ — напряженность на равновесном круге радиуса R_0.

Беря для $n(r)$ значения из [2] для рассмотренного там случая $R_0 = 15$ и $n_0 = 0{,}5$, получим $C_{max} = 29{,}9 \cdot H_z(R_0)$.

Выражение (4) для C можно преобразовать так, чтобы в него входили значения величин на основном равновесном радиусе R_0. Пользуясь выражением (8), получим

$$C = F \sqrt{U_0 \sin \omega t} - R^2_i H_{zam}(R_i)\, \Omega(\tau_0 + t) + C_{max}(t) . \qquad (11)$$

Заменим $H_{zam}(R_i)$ через $H_{zam}(R_0)$ из выражения

$$H_{zam}(R_i) = H_{zam}(R_0)\, e^{-\int\limits_{R_0}^{Ri} \frac{n(r)}{r}\, dr} .$$

В нашем конкретном случае

$$H_{zam}(R_i) = H_{zam}(R_0) \cdot 0{,}7584.$$

Таким образом получаем

$$C = 73{,}3 \sqrt{U_0 \sin \omega t} - 4{,}20 \cdot 10^8 (\tau_0 + t) .$$

Набор C со стороны отрицательных значений C в нашем случае ограничивается внутренней стенкой камеры, радиус которой принимаем равным $R_j = 9$ *см*. Минимальное C_{min} находим совершенно аналогично C_{max} из выражения

$$H_z(R_0)e^{+\int\limits_{Rj}^{R_0}\frac{n(r)}{r}dr} = \frac{H_z(R_0)}{\left(1+\frac{x_j}{R_0}\right)^2}\left[1-\frac{1}{R_0^2}\int\limits_{Rj}^{R_0} re^{+\int\limits_{r}^{R_0}\frac{n(r)}{r}dr} dr\right]+\frac{C_{\min}}{R_j^2},(12)$$

где $x_j = R_j - R_0 = -6$ *см*.

Количество захваченных в ускорение электронов и связь его с током инжекции

Количество электронов Q, которое циркулирует в камере в каждый момент времени внутри общего периода захвата, будет определяться фокусирующими силами как на внешней границе полезной зоны (за которую берем радиус пушки R_i), так и на внутренней границе (на радиусе R_j внутренней стенки камеры). Считаем, что в каждый данный момент в камере находятся электроны только узкого интервала C (для простоты можно считать даже просто одного C). Введение новых электронов с новым значением C возможно лишь за счет потери электронов предыдущих C. Поэтому интервал ΔC электронов, имеющихся в камере, будет непрерывно перемещаться по общему интервалу допустимых значений постоянной C [1]).

Если изобразить зависимость количества электронов Q от времени, получим примерно картину, изображенную на рис. 3. До момента t_0 электронные пучки образуются в области нижних ям ($C<0$). Наименьшие фокусирующие силы будут на внутренней стороне камеры, поэтому величина Q будет определяться именно этими силами. По мере перемещения к большим C эти силы растут, растет соответственно и количество движущихся в камере электронов Q (кривая II). При переходе в область $C>0$ наименьшими фокусирующими силами будут силы на наружной границе, ими будет определяться и количество удерживаемого в камере заряда (кривая I). Общий ход изменения Q будет представлен кривой ABC.

Если равновесный пучок не образуется в какой-либо из интервалов времени, то Q продвинется в область самых больших C и в захват практически никакого заряда не пойдет.

Если же в некоторый момент t_1 образуется равновесный пучок, то количество электронов Q_1, имевшееся в этот момент, и пойдет в ускорение. Моменту создания равновесного пучка t_2 будет соответствовать заряд Q_2 и т. д. (рис. 4).

Момент создания равновесного пучка определяется током инжекции i, именно равновесный пучок будет создаваться в тот момент или интервал времени, когда плотность ρ_i пучка электронов, выбрасываемого из пушки, приблизительно равна равновесной плотности $\rho_{рав}$ электронов того C, которые циркулируют в данный момент в камере [2]).

---

[1]) Движение интервала захвата ΔC должно идти в согласии с направлением изменения напряжения вводимых электронов, т. е. на фронте импульса при возрастании U возрастает и C, на хвосте импульса - уменьшению U соответствует уменьшение C (рис. 1). Поэтому Видероэ [3] неправ, когда считает, что кривая импульса 2 (рис. 2) дает захват на фронте. Для такого рода кривой согласование между ростом U и C отсутствует (C уменьшается, U растет) и такой импульс не дает захвата.

[2]) Когда происходит „утруска" в равновесный пучок, происходит некоторая потеря электронов, и пучок сжимается. Новый захват может начаться только, когда вновь будет иметь место равенство $\rho_i = \rho_{рав}$ для электронов того же C.

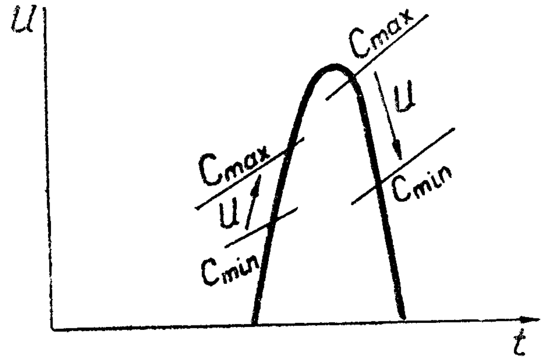

Рис. 1

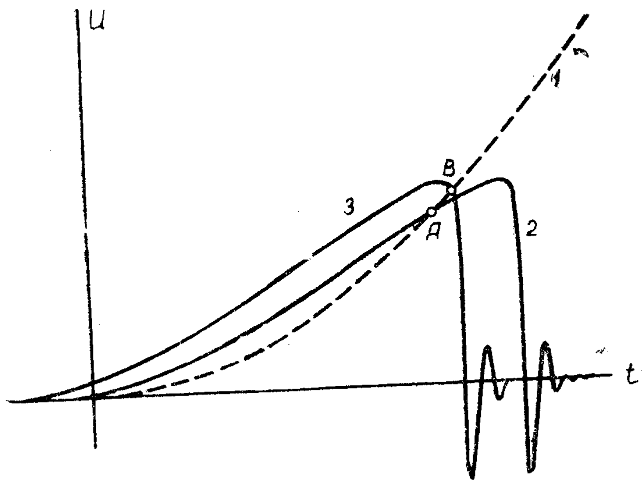

Рис. 2

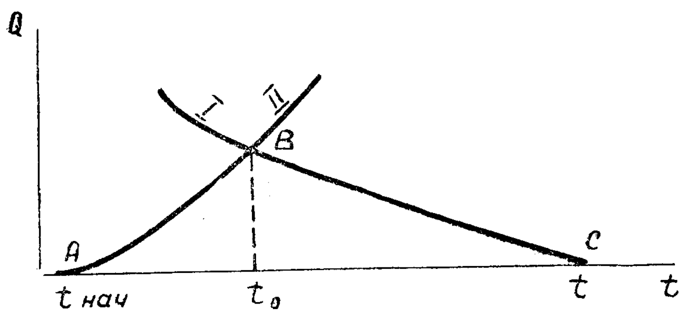

Рис. 3

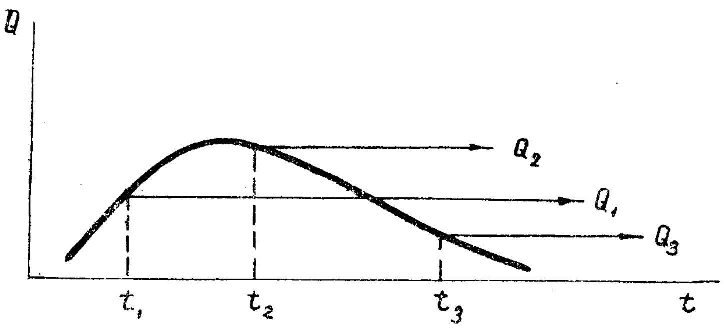

Рис. 4

Поскольку

$$\rho_i = \frac{i_{(амп)}}{(1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5{,}93\cdot 10^{7}\sqrt{U_0 \sin \omega t}} \quad (13)$$

то можно написать

$$\rho_{рав}(t) = \frac{i}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5{,}93\cdot 10^{7}\sqrt{U_0 \sin \omega t}} \quad (14)$$

Так как пучки для разных C создаются в окрестностях разных R_c, где n_c также разные, то эффект взаимодействия пучков, определяющий создание равновесного пучка, будет тем слабее, чем больше n_c, ибо пучок

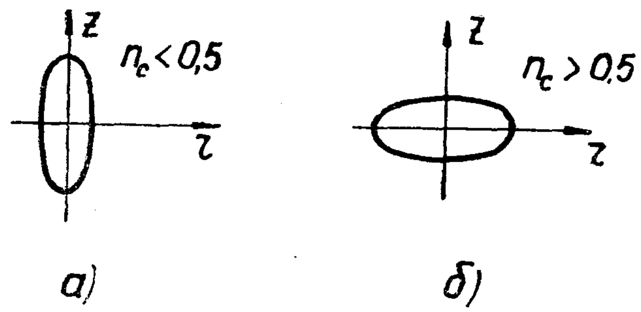

Рис. 5

в этом случае имеет форму, подобную рис. 5-б. Потребуется большая плотность тока, т. е. большая плотность ρ_i для данного момента t, чтобы вызвать нужный эффект[1]).

Поэтому вводим множитель $\dfrac{n_c}{1-n_c}$:

$$\rho_{рав}(t)\cdot\frac{n_c}{1-n_c} = \frac{i}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5{,}93\cdot 10^{7}\sqrt{U_0 \sin \omega t}} \quad (15)$$

$\rho_{рав}(t)$ находится из формулы

$$4\pi e \rho_{рав} = \frac{2V}{R_c^2} = \frac{2}{R_c^2}\left[\sqrt{V_{мо}(R_c)} + \frac{C}{R_c}\sqrt{\frac{e}{2mc^2}}\right]^2, \quad (16)$$

где $V_{мсо}$ — значение потенциальной функции на дне потенциальной ямы электронов сорта C (т. е. на радиусе R_c).

Вводя $V_{мо} = V_0\cdot U'(R_c)$, где $V_0 = \dfrac{eA_0^2}{2mc^2}$ и $U'(R_c)$ определяется (см. [2]) выражением

$$U'(R_c) = [a J_1(kR_0) + b N_1(kR_0)]^2, \quad (17)$$

получим

$$4\pi e \rho_{рав} = \frac{2V_0}{R_c^2}\left[\sqrt{U'(R_c)} + \frac{C}{R_c\sqrt{V_0}}\cdot\sqrt{\frac{e}{2mc^2}}\right]^2. \quad (18)$$

---

1) Механизм утруски пучков в равновесный пучок действует тогда, когда имеются достаточно четко очерченные пучки, вытянутые вдоль оси Z.

Для вычисления величины тока i, требующегося для того, чтобы захват получился в момент t, необходимо найти связь между t и соответствующим значением радиуса R_c. Эта связь находится следующим образом. Для дна ямы электронов сорта C можно написать

$$C = \sqrt{\frac{2\,mc^2}{e}\,V_0} \cdot \frac{R_c^2 \left(\frac{\partial U'}{\partial r}\right)_{R_c}}{2\sqrt{U'(R_c)}} \,. \tag{19}$$

Так как, с другой стороны,

$$C = F\sqrt{U_0 \sin \omega t} - 334\,H_{zo}\,,$$

то

$$F\sqrt{U_0 \sin \omega t} - 334\,H_{zo} = \frac{R_c^2 \left(\frac{\partial U'}{\partial r}\right)_{R_c}}{2\sqrt{U^1(R_c)}} \cdot R_0 H_{zo}. \tag{20}$$

Обозначив через $f(R_c)$ выражение

$$f(R_c) = \frac{R_c^2 \left(\frac{\partial U'}{\partial r}\right)_{R_c}}{2 \cdot \sqrt{U'(R_c)}}\,, \tag{21}$$

получим

$$f(t) = \frac{F\sqrt{U_0 \sin \omega t}}{R_0 H_{zam}\,\Omega\,(\tau_0 + t)} - 22{,}25.$$

Построив графики функции $f(R_c)$ и $f(t)$, мы найдем для каждого момента времени t соответствующее R_c, так как $f(R_c)$ должно равняться $f(t)$. Формула

$$i\,(\text{амп}) = \frac{5{,}93 \cdot 10^7 \sqrt{U_0 \sin \omega t}}{2\pi R_c^2}\, V_0 \left[\sqrt{U'(R_c)} + \right.$$

$$\left. + \frac{C}{R_c\sqrt{V_0}} \sqrt{\frac{e}{2\,mc^2}}\,\right]^2 \frac{n_c}{1 - n_c} \cdot 0{,}33 \cdot 10^{-9} \tag{22}$$

дает ток инжекции, необходимый для создания равновесного пучка в момент t.

Расчет количества захватываемых электронов Q ведем следующим образом. Считаем пучок электронов с некоторым значением C, имеющим форму тороида. На границе пучка силы фокусирующие магнитного поля равны силам дефокусирующим электрического поля

$$\frac{\partial V_м}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,,$$

$$\frac{\partial V_м}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,.$$

На поверхности пучка

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dr+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz=0$$

также

$$dV_{м}=\frac{\partial V_{м}}{\partial r}\,dr+\frac{\partial V_{м}}{\partial z}\,dz=0\,. \tag{23}$$

Отсюда уравнение контура сечения пучка

$$\frac{dz}{dr}=-\frac{\dfrac{\partial V_{м}}{\partial r}}{\dfrac{\partial V_{м}}{\partial z}}\,. \tag{24}$$

Для простоты берем ямы в виде параболоида

$$V_{мс}=V_{мсо}\left(1+\frac{1-n_c}{R_c^2}\,x_c^2+\frac{n_c}{R_c^2}\,z^2\right),$$

где $x_c=r-R_c$. Тогда из

$$\frac{dz}{dr}=-\frac{(1-n_c)}{n_c}\cdot\frac{x_c}{z}$$

получаем

$$\frac{z^2}{\left(\dfrac{1-n_c}{n_c}\right)a^2}+\frac{x_c^2}{a^2}=1\,. \tag{25}$$

Полагая $a=(R_i-R_c)$, будем иметь

$$b=(R_i-R_c)\sqrt{\frac{1-n_c}{n_c}}=a\sqrt{\frac{1-n_c}{n_c}}\,, \tag{26}$$

где R_i — радиус пушки, если пучки располагаются на верхних ямах. Если пучки будут на нижних ямах, то вместо R_i берем R_j — радиус внутренней стенки камеры.

Полное число электронов в равновесном пучке на ямах в окрестности ямы с постоянной C будет приблизительно равно

$$Q=2\pi^2R_c(R_i-R_c)^2\sqrt{\frac{1-n_c}{n_c}}\,\rho_{рав}=$$

$$=\pi(R_i-R_c)^2\sqrt{\frac{1-n_c}{n_c}}\cdot\frac{V_0}{eR_c}\left[\sqrt{U(R_c)}+\frac{C}{R_c\sqrt{V_0}}\sqrt{\frac{e}{2mc^2}}\right]^2. \tag{27}$$

Вычислив для разных моментов времени величины Q, мы можем сопоставить их со значениями тока инжекции для соответствующих моментов времени и построить зависимость Q от i при заданной фазе инжекции τ_0.

Аналогично вычисляется Q по внутренней стенке камеры, только вместо R_i в формуле (27) становится R_j.

Сравнение теоретических кривых с экспериментальными

На рисунках 6 и 7 представлены основные экспериментальные кривые. Кривые рис. 6 дают зависимость интенсивности излучения (которую считаем пропорциональной количеству захваченных в ускорение электронов)

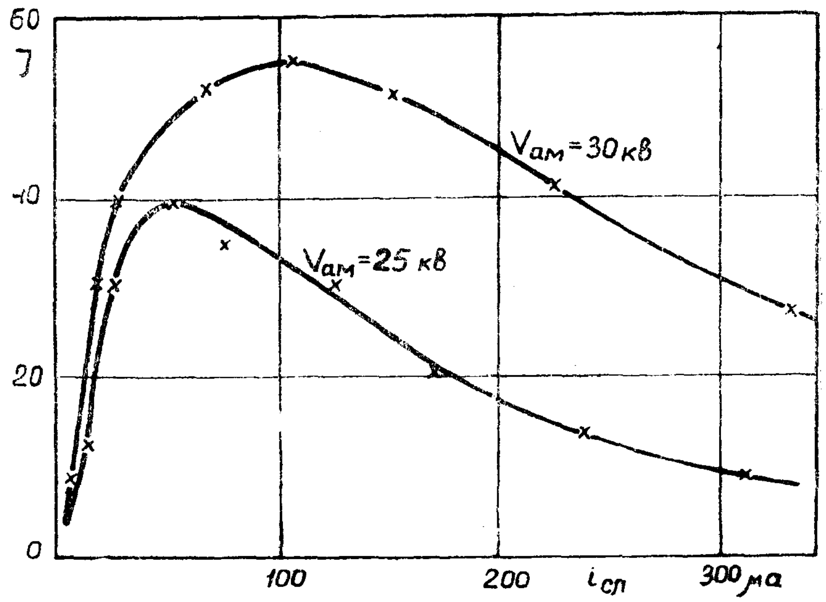

Рис. 6

от тока инжекции при разных напряжениях инжекции (кривые снимались при подгонке фазы импульса при каждом изменении тока инжекции на максимум излучения).

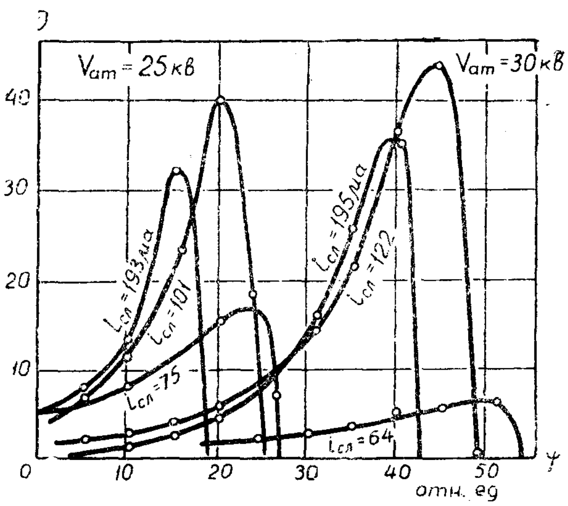

Рис. 7

Рис. 7 дает зависимость интенсивности излучения от фазы импульса τ_0 при разных токах инжекции и при разных напряжениях инжекции. На рис. 8 представлены результаты вычисления Q по нашим формулам. Сплошные линии соответствуют захвату на фронте импульса, пунктирные захвату на хвосте. Характерная особенность кривых при больших фазах ($\tau_0 = 21$ *мксек*): кривые Q, вычисленные по внешней границе, и кривые Q, вычисленные по внутренней границе, не пересекаются. Это означает, что захват в этом случае идет только на нижних ямах.

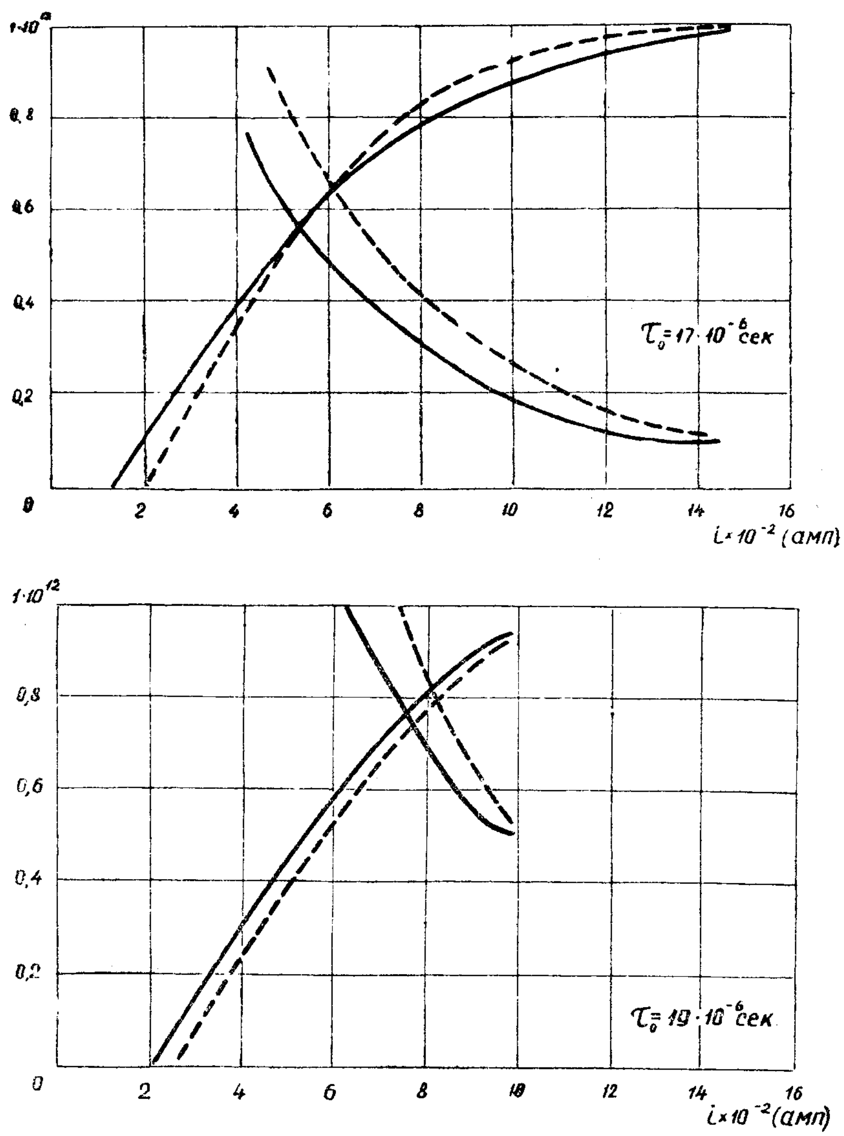

Рис. 8

Схематически система таких кривых для разных фаз инжекции представлена на рис. 9 (для захвата только на фронте или только на хвосте). Крайние правые точки каждой кривой соответствуют максимальному току инжекции, способному вбросить электроны в потенциальную яму (существование точек обрыва интенсивности подтверждается опытом).

Пунктирная линия, проведенная по максимумам кривой и по крайним точкам кривых, дает кривую, соответствующую кривым рис. 6.

Если по кривым рис. 9 построить кривые зависимости Q от фазы инжекции при различных токах инжекции, например, i_1 и i_2, получаются кривые, подобные кривым рис. 7 с характерным для них резким спадом интенсивности при переходе через определенную фазу. Однако при малых токах (напр. i_3) таких кривых не получается. Это может быть связано с тем обстоятельством, что как раз для малых C кривые $n(r)$, рассматриваемые нами, и кривые $n(r)$, имевшие место для бетатрона, на котором были сняты кривые рис. 7, весьма отличны.

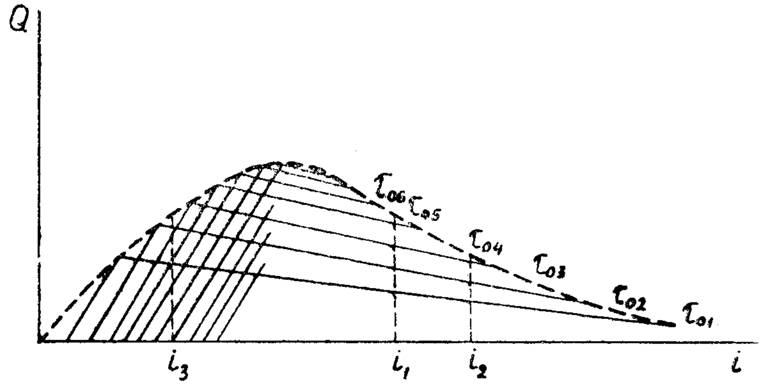

Рис. 9

На схематизированном рис. 10 хорошо видно, почему при перемещении импульса инжекции вправо интенсивность при заданном токе инжекции, соответствующем определенной полосе ΔC области захвата, изображенной на рисунке жирными полосками, сначала растет и затем резко падает, когда импульс выходит из области ΔC.

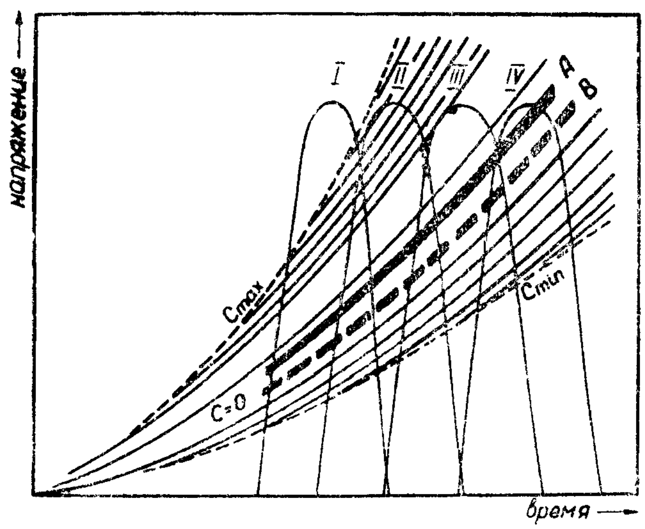

Рис. 10

Таким образом, излагаемая здесь теория дает хорошее качественное и количественное толкование закономерностей захвата и открывает возможность целенаправленной экспериментальной работы по уточнению самих закономерностей и их теоретического толкования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Родимов Б. Н. О механизме захвата электронов в ускорение в бетатроне. Известия ТПИ, т. 87, 1957.

2. Родимов Б. Н. Закономерности магнитного поля бетатрона. Известия ТПИ, т. 87, 1957.

3. R. Widevöe, Jour. Appl. Phys. 22, 362, 1951.