

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ГЕНЕРАТОРА С КАТОДНОЙ СВЯЗЬЮ

И. А. СУСЛОВ

(Представлено научным семинаром радиотехнического факультета)

Введение

Генератор с катодной связью [13, рис. 1] находит все более широкое применение в измерительной, испытательной и другой радиотехнической аппаратуре [1, 2, 3, 4, 5]. Он отличается хорошей стабильностью, малым содержанием гармоник и не имеет критичных по величине элементов обратной связи. При наличии нескольких диапазонов переход от одного диапазона к другому не связан здесь с необходимостью переключения элементов обратной связи, что позволяет обойтись более простым переключателем. По сравнению с транзитронным генератором, который отличается той же особенностью, рассматриваемая схема обладает большим постоянством амплитуды в пределах диапазона и не нуждается в специальном подборе режима. Отрицательное сопротивление, развиваемое генератором с катодной связью, в зависимости от использованной лампы и параметров схемы, находится в пределах 300 ом—3 ком. Это делает возможным применение контуров с малым резонансным сопротивлением и обеспечивает хорошую работу генератора вплоть до частот порядка 200—300 мггц.

Вопросы нелинейной теории генератора с катодной связью в имеющейся литературе не получили достаточного развития. Известны две работы, посвященные этому предмету. Одна из них принадлежит П. Г. Сульцеру [6], другая — Г. А. Хавкину [7].

Основой работы П. Г. Сульцера являются использованная им аппроксимация вольтамперной характеристики (рис. 1) двухполюсника с катодной связью [13, рис. 2] с помощью полинома третьей степени

$$i = \alpha u + \beta u^3 \quad (1)$$

и отвечающее этой аппроксимации дифференциальное уравнение генератора в форме

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon \left(1 - y^2 \right) \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad (2)$$

Поскольку аппроксимация (1) и уравнение (2) лежат в основе классической нелинейной теории ламповых генераторов [8, 9], полученные П. Г. Сульцером формулы и выводы представляют собой простое повторение того, что давно известно из указанной теории. Эти формулы и выводы относятся к генераторам вообще, не учитывают особенностей рассматриваемой схемы и не могут дать рекомендаций для выбора ее параметров.

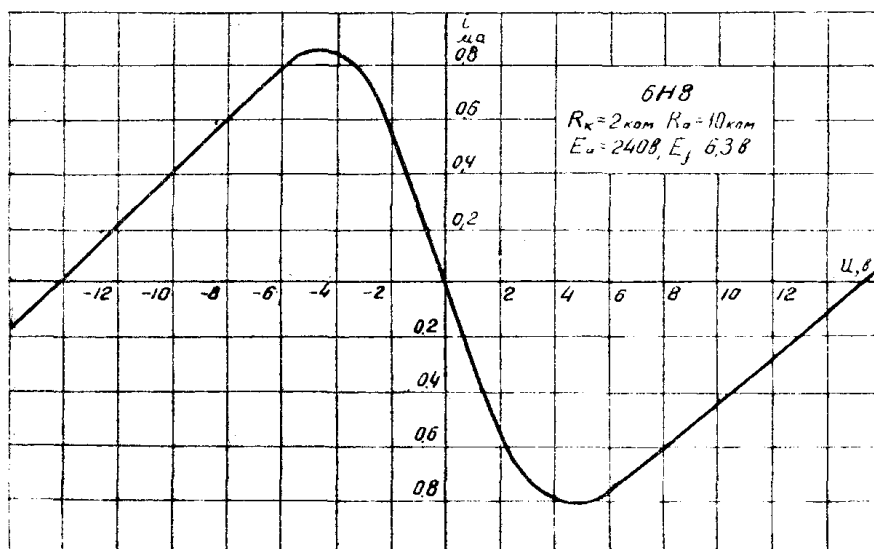


Рис. 1

Работа Г. А. Хавкина [7] также представляет собой попытку применить к новой схеме готовую теорию, в данном случае теорию генераторов с инерционной нелинейностью. Автор даже пытается приспособить рассматриваемый генератор к названной теории. С этой целью он рекомендует использовать малые катодные сопротивления R_k (порядка 20—30 ом). Мотивируется такая рекомендация стремлением повысить стабильность частоты генератора за счет ожидаемого уменьшения нелинейной поправки на период. Таким образом, преувеличивается влияние изменений нелинейной поправки, которые, как известно [10, 11], вызывают гораздо меньшие уходы частоты по сравнению с уходами от других причин (изменения температуры, емкости пространственного заряда, режима питания, сеточных токов и т. д.). Резкое уменьшение R_k против обычно употребляемых значений усилит действие всех этих причин (так же, как и нелинейной поправки), почти полностью устранив отрицательные обратные связи, которым схема обязана своей высокой стабильностью.

Выбор малого R_k заставляет Г. А. Хавкина сделать еще одну ошибку—включить термистор в анод первой лампы. Такое включение ослабляет стабилизирующее действие термистора.

В своем стремлении приспособить рассматриваемый генератор к теории генераторов с инерционной нелинейностью Г. А. Хавкин полностью игнорирует имеющийся в его распоряжении литературный материал [3], не обращает внимания на то, что в реальных схемах применяется достаточно большие R_k , а в случае использования термистора последний включается в качестве катодного сопротивления.

Экспериментальная проверка показывает, что при параметрах схемы, выбранных по Г. А. Хавкину, генератор с катодной связью работает исключительно нестабильно.

Таким образом, из двух работ, посвященных нелинейной теории генератора с катодной связью, одна [6] фактически к этому генератору не имеет прямого отношения, так как не учитывает его особенностей, а другая [7] является ошибочной. В настоящей статье сделана попытка построить нелинейную теорию генератора с катодной связью, которая позволила бы учесть характерные особенности рассматриваемой схемы и могла бы служить основой для выбора ее параметров и для расчета генератора.

Вольтамперная характеристика двухполюсника с катодной связью

Основной нелинейной зависимостью для рассматриваемого генератора является вольтамперная характеристика двухполюсника с катодной связью¹⁾. Эта характеристика имеет „падающий“ средний участок и две прямолинейные ветви с положительным наклоном (рис. 1). Наклоны отдельных участков вольтамперной характеристики определяются соответствующими этим участкам значениями проводимости

$\frac{di}{du}$ двухполюсника с катодной связью. Эту проводимость можно

следующим образом выразить через коэффициент усиления K усилителя с катодной связью (при отключенном конденсаторе C_1) и его выходное сопротивление $Z_{вых}$. Обозначим через Δu приращение напряжения u , приложенного на входе усилителя. Тогда приращение напряжения на выходе усилителя будет $K \Delta u$, а напряжение холостого хода между входом и выходом усилителя изменится на величину

$$\Delta u_{xx} = \Delta u - K \Delta u.$$

Если теперь соединить выход со входом при помощи конденсатора C_1 (рис. 2) достаточно большой емкости, то через этот конденсатор за счет Δu будет протекать ток

$$\Delta i = \frac{\Delta u_{xx}}{Z_{вых}} = \frac{\Delta u(1 - K)}{Z_{вых}}. \quad (3)$$

Из (3) можно найти проводимость двухполюсника с катодной связью

$$\frac{\Delta i}{\Delta u} = \sigma = \frac{1 - K}{Z_{вых}}.$$

При $u=0$ K максимально (или близко к максимуму) и σ получает максимальное по абсолютной величине отрицательное значение²⁾, соответствующее середине падающего участка вольтамперной характеристики. При значениях u (положительном и отрицательном), которые делают K равным единице, $\sigma=0$. Этому соответствуют горизонтальные участки в области загибов вольтамперной характеристики. При положительных и отрицательных u , запирающих вторую или первую лам-

¹⁾ Так будем называть ту часть схемы генератора, к которой подключен колебательный контур [13, рис. 2]

²⁾ Обычно при $u=0$ $K \ll 1$.

пу, $K=0$ и $\tau = \frac{1}{Z_{вых}}$. Так получаются прямолинейные ветви характеристики с положительным наклоном.

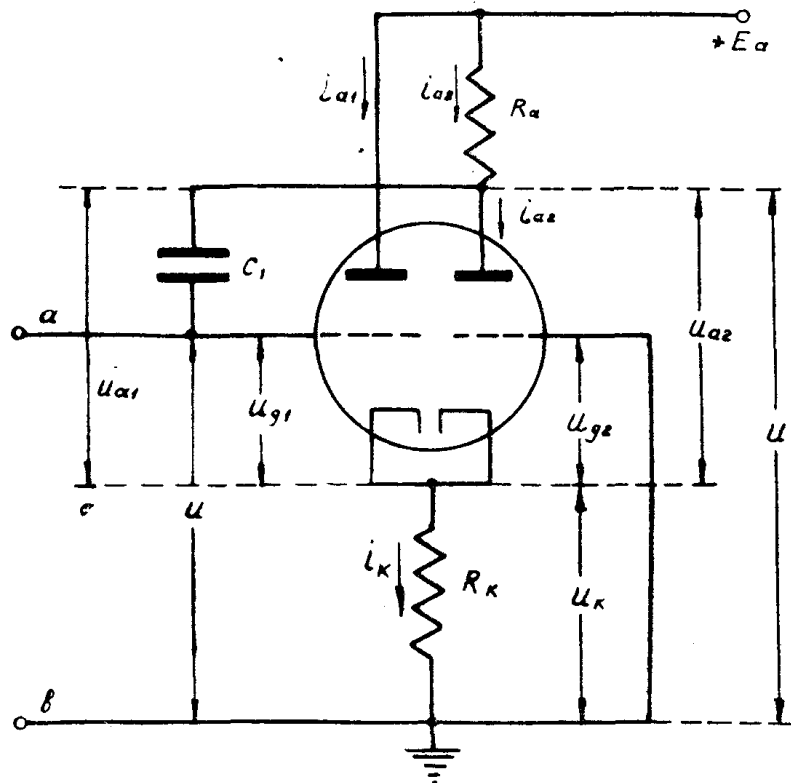


Рис. 2

Экспериментальное определение вольтамперной характеристики можно выполнить с помощью схемы, работающей на постоянном токе. Для этого вместо конденсатора C_1 нужно включить постоянное разделительное напряжение, заменяющее ту разность потенциалов, которая имеется на обкладках конденсатора. Величину необходимого напряжения можно подобрать добиваясь, чтобы при входном напряжении $u=0$ ток i получившейся схемы был равен нулю. Недостатком такого метода является его чувствительность к изменениям питающих напряжений и напряжения разделительного источника.

Очень удобно получать вольтамперные характеристики двухполюсника с катодной связью осциллографическим путем. Для этого на усилитель горизонтального отклонения осциллографа необходимо подать напряжение с контура генератора, а на усилитель вертикального отклонения — с небольшого сопротивления, включенного последовательно с контуром.

Контур следует брать с большим резонансным сопротивлением, чтобы генератор давал большую амплитуду колебаний, позволяющую снять характеристику в достаточно широких пределах изменения u .

Аппроксимация вольтамперной характеристики

Характерной особенностью основной для рассматриваемого генератора нелинейной зависимости — вольтамперной характеристики двухполюсника с катодной связью является наличие у нее прямолинейных

ветвей с положительным наклоном. Функция $i = \varphi(u)$, аппроксимирующая указанную зависимость, должна поэтому хорошо воспроизводить эти ветви. Она, кроме того, должна быть достаточно простой, чтобы при выводе формул для амплитуды колебаний, нелинейной поправки на период и для гармоник можно было выполнить необходимые квадратуры. Аппроксимирующая функция должна быть такой, чтобы коэффициенты аппроксимации находились в простой зависимости от параметров схемы и режима и позволяли бы, таким образом, использовать формулы нелинейной теории для рационального выбора элементов генератора.

В дифференциальное уравнение генератора, как увидим далее, входит не только функция $i = \varphi(u)$, но и ее производная, причем последняя играет основную роль. Поэтому мы займемся аппроксимацией зависимости $\frac{di}{du} = \varphi'(u)$. Выражение же для самой вольтамперной характеристики найдется путем интегрирования.

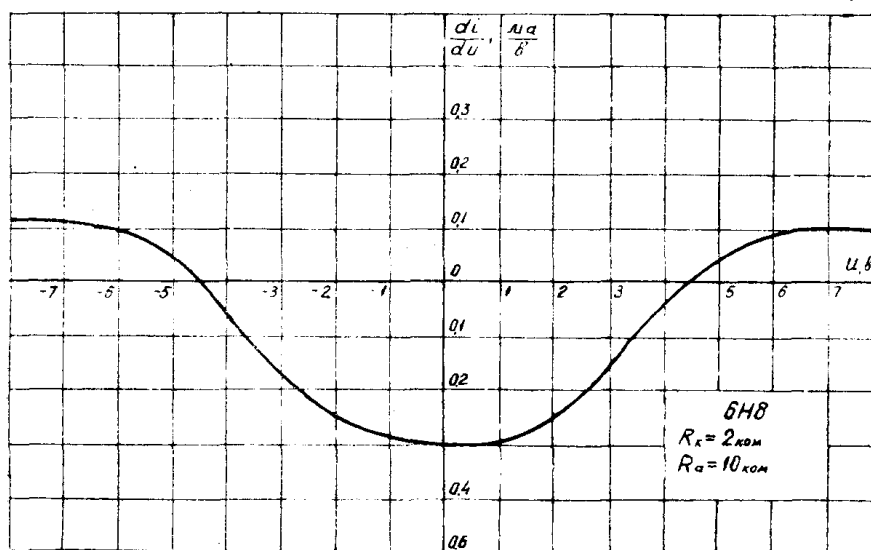


Рис. 3

На рис. 3 показана кривая $\frac{di}{du} = \varphi'(u)$ для двухполюсника с катод-

ной связью на лампе 6Н8, у которого $R_k = 2 \text{ ком}$, $R_a = 10 \text{ ком}$.

Вид кривых рис. 1 и 3 подсказывает аппроксимацию ломаными линиями. Однако подобные кусочные аппроксимации оказываются неудобными. Дело в том, что „углы отсечки“, определяющие положение изломов аппроксимирующей линии, будут зависеть от амплитуды колебаний, которую еще требуется найти. Исключение этих углов приводит к трансцендентным уравнениям для амплитуды, которые в общем случае можно решить только графически.

Распространенная аппроксимация с помощью степенных полиномов в нашем случае не является наилучшей. Такая аппроксимация хорошо воспроизводит лишь падающий участок вольтамперной характеристики и плохо — ее прямолинейные ветви. С увеличением числа

членов трудности определения коэффициентов степенного полинома быстро возрастают. Одновременно усложняются формулы нелинейной теории, которые делаются неудобными для расчетов и непрозрачными для анализа. Коэффициенты аппроксимации оказываются при этом не связанными непосредственно (кроме коэффициента при 1-й степени u) с параметрами схемы. Это не позволяет при анализе получающихся формул проследить влияние параметров схемы на амплитуду колебаний, гармоники и т. д.

Мы будем пользоваться аппроксимацией крутизны вольтамперной характеристики с помощью выражения

$$\frac{di}{du} = \varphi'(u) = \alpha \frac{\beta}{(1+\gamma u^2)^2}. \quad (4)$$

При этом сама вольтамперная характеристика будет определяться формулой

$$i = \varphi(u) = \alpha u - \frac{\beta u}{2(1+\gamma u^2)} - \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}} \arctg \sqrt{\gamma} u. \quad (5)$$

Чтобы воспользоваться принятой аппроксимацией, нужно определить коэффициенты α , β и γ .

Для этого положим в (4) $|u| = \infty$; получим $\frac{di}{du}_{|u| \rightarrow \infty} = \alpha$. Следова-

тельно, α определяется наклоном ветвей. С другой стороны, из (3)

получаем $\frac{di}{du}_{|u| \rightarrow \infty} = \frac{1}{Z_{вых}}$. Таким образом, $\alpha = \frac{1}{Z_{вых}}$. Наклоны вет-

вей реальной характеристики $\frac{di}{du} = \frac{1}{Z_{вых}}$ неодинаковы, так как для

левой ветви, соответствующей запертой левой лампе L_1 ,

$$\frac{1}{Z_{вых}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_i + R_k(1+\mu)},$$

а для правой, получающейся при запертой лампе L_2 , $\frac{1}{Z_{вых}} = \frac{1}{R_a}$.

Выбранная аппроксимация не позволяет учесть разницу в наклоне ветвей. При достаточно больших R_i , R_k и μ и не очень большом R_a , когда можно считать, что $R_a \ll R_i + R_k(1+\mu)$, эта разница может быть небольшой. Мы поэтому будем пренебрегать ею и будем полагать

$$\alpha = \frac{1}{R_a}. \quad (6)$$

При $u = 0$ формула (4) дает $\left(\frac{di}{du}\right)_{u=0} = \alpha - \beta$. С другой стороны,

в этом случае $\left(\frac{di}{du}\right)_{u=0} = -\frac{1}{\rho}$, где ρ — абсолютная величина отрицательного сопротивления для середины „падающего“ участка. Таким

$$\text{образом, } \alpha - \beta = -\frac{1}{\rho} \text{ или } \beta = \alpha + \frac{1}{\rho}. \quad (6')$$

Величину ρ всегда можно вычислить, используя формулы для проводимости двухполюсника с катодной связью [13].

Коэффициент γ определяет кривизну вольтамперной характеристики. От него зависит положение ее загибов и, следовательно, положение ветвей. Мы будем подбирать величину коэффициента γ таким образом, чтобы добиться совмещения асимптот аппроксимирующей функции (5) с прямолинейными ветвями вольтамперной характеристики. Для этого найдем уравнение правой ветви вольтамперной характеристики, соответствующей запертому второму триоду ($i_{a2} = 0$). Из схемы рис. 2 при $i_{a2} = 0$ непосредственно получаем

$$i'_{a2} = -i \text{ и } u + u_c = i R_a + E_a. \quad (7)$$

Если емкость C_1 достаточно велика и представляет малое сопротивление для токов генерируемой частоты, то можно считать, что в случае симметричной вольтамперной характеристики напряжение u_c остается постоянным и равным напряжению на выходе усилителя с катодной связью¹⁾ при $u = 0$.

$$u_c = E_a - i_{a20} R_a, \quad (8)$$

где i_{a20} — постоянная составляющая анодного тока правого триода в усилителе с катодной связью.

Подставляя (8) в (7), найдем уравнение правой ветви

$$i = \frac{u}{R_a} - i_{a20}. \quad (9)$$

Уравнение соответствующей асимптоты функции (5) будет

$$i = \frac{u}{R_a} - \frac{\pi \beta}{4 \sqrt{\gamma}}. \quad (10)$$

Приравнявая свободные члены (7) и (8), получаем

$$\gamma = \left(\frac{\pi \beta}{4 i_{a20}} \right)^2. \quad (11)$$

Величину i_{a20} при выбранных R_k и R_a можно найти графическим путем [14]. На рис. 4 показан пример описанной аппроксимации.

Дифференциальное уравнение генератора

При составлении дифференциального уравнения генератора будем исходить из его эквивалентной схемы, изображенной на рис. 5. Здесь двухполюсник с катодной связью заменен нелинейным активным сопротивлением ρ , имеющим точно такую же, как у двухполюсника, вольтамперную характеристику. Мы не будем учитывать изменения формы этой характеристики за счет действия паразитных емкостей на

¹⁾ Т. е. когда C_1 отключено.

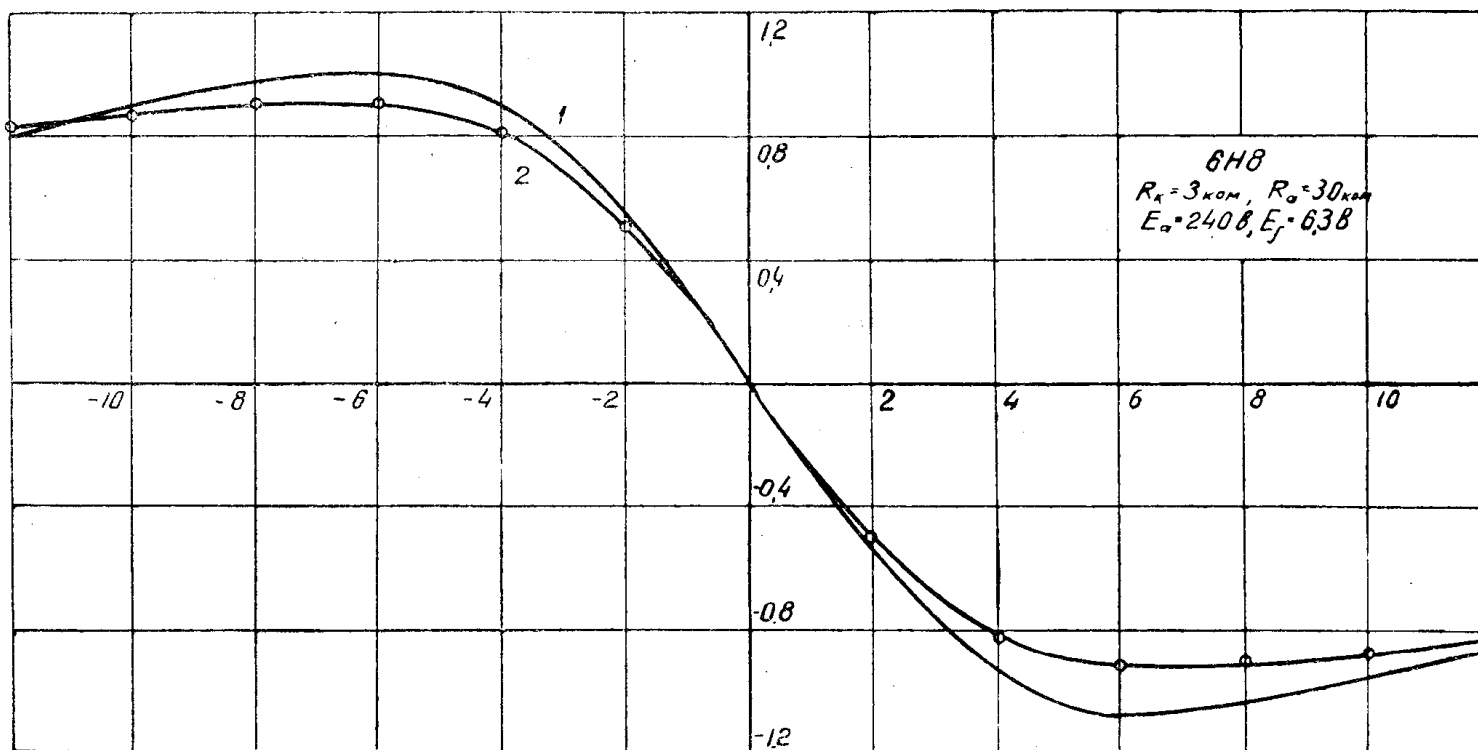


Рис. 4. Аппроксимация вольтамперной характеристики генератора с катодной связью. 1—вольтамперная характеристика; 2—график аппроксимирующей функции.

высоких частотах. Вид ее будем считать одинаковым для всех частот. На основании второго закона Кирхгофа для колебательного контура схемы рис. 5 можно написать:

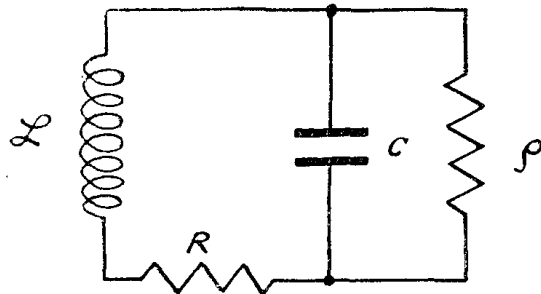


Рис. 5

$$\frac{1}{C} \int i_k dt + L \frac{di_k}{dt} + Ri_k = L \frac{di}{dt} + Ri. \quad (12)$$

Так как $\frac{1}{C} \int i_k dt = u$,
а $i = \varphi(u)$ и, следовательно,
 $i_k = C \frac{du}{dt}$, $\frac{di}{dt} = \varphi'(u)$,

то уравнение (12) можно переписать еще так

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left[\frac{R}{L} + \frac{1}{C} \varphi'(u) \right] \frac{du}{dt} + \frac{R}{LC} \varphi(u) + \frac{1}{LC} u = 0. \quad (12')$$

Обозначая $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ и $\omega_0 t = x$, можно привести последнее уравнение к виду

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + d \left[1 + Z_p \varphi'(u) \right] \frac{du}{dx} + d^2 Z_p \varphi(u) + u = 0, \quad (12'')$$

где $d = \frac{R}{\omega_0 L}$ — затухание контура, а Z_p — его резонансное сопротивление. Предпоследний член в (12'') мал по сравнению с рядом стоящими $[d^2 Z_p \varphi(u) = d^2 Z_p i \approx d^2 u \ll u]$. Пренебрегая им, можно получить уравнение генератора в более простой форме

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + d \left[1 + Z_p \varphi'(u) \right] \frac{du}{dx} + u = 0. \quad (13)$$

Законность указанного пренебрежения вызывает, однако, сомнения, так как другой нелинейный член (12''), $d \left[1 + Z_p \varphi'(u) \right] \frac{du}{dx}$, при ко-

лебаниях, близких к синусоидальным, также мал по сравнению с u и заранее нельзя сказать, что отбрасывание $d^2 Z_p \varphi(u)$ не приведет к заметным ошибкам в формулах нелинейной теории. Поэтому вычисления амплитуды U_m , нелинейной поправки на период τ и коэффициентов гармоник k_{fn} были выполнены на основе уравнения генератора в форме (12''). Оказалось, что сохранение члена $d^2 Z_p \varphi(u)$ не отражается на результатах вычисления амплитуды нулевого приближения. При вычислении же нелинейной поправки и гармоник пренебрежение

$d^2 Z_p \varphi(u)$ недопустимо, так как означало бы отбрасывание членов одинакового порядка с сохраняемыми. Учитывая сказанное, мы будем при вычислении амплитуды в настоящей статье исходить из упрощенного уравнения (13), а при вычислении τ и k_{fn} будем пользоваться полным уравнением (12'').¹⁾

Амплитуда колебаний

При вычислении амплитуды колебаний и нелинейной поправки на период мы будем пользоваться методом малого параметра в том виде, как он изложен в известной работе А. А. Андропова и С. Э. Хайкина „Теория колебаний“ [12]. Чтобы воспользоваться указанным методом, представим уравнение генератора (13) в виде

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = -d \left[1 + Z_p \varphi'(u) \right] \frac{du}{dx} = df \left(u, \frac{du}{dx} \right). \quad (13')$$

В качестве малого параметра примем затухание контура d . Вследствие малости этой величины решение уравнения (13') будет близким к так называемому порождающему решению (получающемуся при $d=0$). Последнее можно представить в виде:

$$u = U_m \cos x = \psi_0(x), \quad (14)$$

так как начальная фаза вследствие автономности системы произвольна. Решение полного уравнения (13') при пользовании методом малого параметра отыскивается в виде ряда:

$$u = \psi_0(x) + A \beta_1 + B \beta_2 + C d + D \beta_1 d + E \beta_2 d + F d^2 + \dots, \quad (15)$$

где A, B, C, D, \dots являются периодическими функциями x , а малые параметры β_1 и β_2 определяются начальными условиями при $d \neq 0$:

$$u(0) = \psi_0(0) + \beta_1 \quad \text{и} \quad u'(0) = \psi_0'(0) + \beta_2. \quad (16)$$

Функции A и B оказываются чисто гармоническими: $A = \cos x$, $B = \sin x$. Остальные коэффициенты ряда выражаются, как известно, интегралами вида:

$$y = \int_0^x \Phi(v) \sin(x-v) dv. \quad (17)$$

Амплитуда колебаний основной частоты — так называемая „амплитуда первого приближения“ при пользовании методом малого параметра определяется из уравнения $C(2\pi) = 0$, которое вытекает из требования периодичности решения (15).

Поскольку для дальнейшего нужно знать $C(x)$, мы начнем с вычисления этой функции, а требуемое $C(2\pi)$ найдем потом как частное значение. Как известно [12], $C(x)$ определяется интегралом

¹⁾ П. Г. Сульцер всюду пользуется упрощенным уравнением (13), что приводит к ошибке при вычислении τ и k_{fn} .

$$C(x) = \int_0^x f\left(u, \frac{du}{dx}\right) \sin(x-v) dv.$$

В нашем случае

$$f\left(u, \frac{du}{dx}\right) = -\left[1 + Z_p \varphi'(u)\right] \cdot \frac{du}{dx}, \quad (18)$$

причем $\varphi'(u)$ определяется формулой (4). Принимая во внимание (11), (4) и (15), находим

$$C(x) = \int_0^x \left[1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2}\right] U_m \sin v \sin(x-v) dv.$$

Для вычисления этого интеграла разобьем его на четыре более простых

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) + C_3(x) + C_4(x).$$

$$C_1(x) = (1 + \alpha Z_p) U_m \sin x \int_0^x \sin v \cos v dv = (1 + \alpha Z_p) \frac{U_m}{2} \sin^3 x. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= -(1 + \alpha Z_p) U_m \cos x \int_0^x \sin^2 v dv = \\ &= (1 + \alpha Z_p) \frac{U_m}{2} (\sin x \cos^2 x - x \cos x). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C_3(x) &= -\beta Z_p U_m \sin x \int_0^x \frac{\sin v \cos v dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} = \\ &= \frac{\beta Z_p \sin x}{2\gamma U_m (1 + \gamma U_m^2)} - \frac{\beta Z_p \sin x}{2\gamma U_m (1 + \gamma U_m^2 \cos^2 x)}. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} C_4(x) &= \beta Z_p U_m \cos x \int_0^x \frac{\sin^2 v dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} = \\ &= -\frac{\beta Z_p U_m \sin x \cos^2 x}{2(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 x)} + \frac{\beta Z_p U_m \cos x}{2\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Складывая (19), (20), (21) и (22), получаем

$$C(x) = (1 + \alpha Z_p) \frac{U_m}{2} (\sin x - x \cos x) - \frac{\beta Z_p U_m \sin x}{2(1 + \gamma U_m^2)} +$$

$$+ \frac{\beta Z_p U_m \cos x}{2 \sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}}. \quad (23)$$

Подставляя в (23) $x = 2\pi$ и приравнявая получившееся выражение нулю, находим уравнение для амплитуд

$$U_m \left(1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \right) = 0. \quad (24)$$

Это уравнение имеет корни

$$U_{m1} = 0, \quad U_{m2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\beta Z_p}{1 + \alpha Z_p} \right)^2 - 1}{\gamma}} \quad \text{и}$$

$$U_{m3} = - \sqrt{\frac{\left(\frac{\beta Z_p}{1 + \alpha Z_p} \right)^2 - 1}{\gamma}}. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{Z_{\text{ан}}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_i + R_x(1+M)} \\ L - \beta &= -\frac{1}{\rho} \\ \rho &= \text{абс. в. на контуре} \\ &\text{контр-д} \end{aligned}$$

Третий корень (25) не имеет физического смысла, так как амплитуда колебаний не может быть отрицательной.

Устойчивость полученного решения

Чтобы решить задачу о колебаниях, создаваемых генератором, нужно не только определить периодическое решение дифференциального уравнения генератора, но и исследовать также устойчивость полученного решения. Режим колебаний будет устойчивым, если колебательная система обладает способностью восстанавливать режим при нарушениях его в результате действия внешних возмущений. В противном случае исследуемый режим будет неустойчивым и не может продолжаться длительное время.

Условие устойчивости решения (15) имеет вид [12]:

$$\int_0^{2\pi} f'_{u'}(\psi, \psi') dx < 0. \quad (26)$$

В нашем случае

$$f'_{u'}(\psi, \psi') = - \left[1 + Z_p \varphi'(\psi) \right] = - \left[1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 x)^2} \right]$$

и условие (26) запишется следующим образом:

$$-(1 + \alpha Z_p) \cdot 2\pi + \beta Z_p \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 x)^2} < 0. \quad (26')$$

Вычислим входящий в последнее неравенство интеграл, полагая сначала верхний предел равным x .

$$\int_0^x \frac{dx}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 x)^2} = \frac{1 + \frac{\gamma U_m^2}{2}}{(1 + \gamma U_m^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} - \frac{\gamma U_m^2}{1 + \gamma U_m^2} \cdot \frac{\cos x \sin x}{2(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 x)}.$$

Полагая здесь $x = 2\pi$ и подставляя в (26'), получим условие устойчивости в виде:

$$\frac{\beta Z_p \left(1 + \frac{1}{2} \gamma U_m^2 \right)}{(1 + \gamma U_m^2)^{3/2}} < 1 + \alpha Z_p.$$

Для первого корня уравнения (13') $U_{m1} = 0$ будем иметь:

$$\beta Z_p < 1 + \alpha Z_p.$$

Для второго корня U_{m2} , принимая во внимание выражение (25), получаем

$$\beta Z_p > 1 + \alpha Z_p. \quad (27)$$

Это неравенство представляет собой условие самовозбуждения, так как при невыполнении его амплитуда колебаний равна нулю и отлична от нуля, когда условие (27) выполняется.

Разделив обе части неравенства (27) на Z_p и используя соотношение (6), получим условие самовозбуждения в виде

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{Z_p}.$$

Для существования колебаний мы имеем, таким образом, очевидное условие: проводимость двухполюсника с катодной связью должна быть больше проводимости подключенного к нему параллельного контура.

Нелинейная поправка на период

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии нелинейности вольтамперной характеристики двухполюсника с катодной связью на частоту генератора. Метод малого параметра, которым мы здесь пользуемся, позволяет определить нелинейную поправку из условия периодичности решения (15) и его производной.

Выражение первого приближения для нелинейной поправки на период имеет, как известно [12], следующий вид:

$$\tau = d \cdot \frac{C'(2\pi)}{U_m}, \quad (28)$$

где d —затухание контура, U_m —амплитуда колебаний, а

$$C'(2\pi) = \int_0^{2\pi} f[\psi_0(v), \psi'_0(v)] \cos v \, dv. \quad (29)$$

Входящее в (29) $f(\psi_0, \psi'_0)$ согласно уравнению (12'') равно

$$f(\psi_0, \psi'_0) = -[1 + Z_p \varphi'(\psi_0)] \psi'_0 - d Z_p \varphi(\psi_0). \quad (30)$$

Членом $d^2 Z_p \varphi(\psi_0)$ при отыскании малой нелинейной поправки пренебрегать уже нельзя. Подставляя (30), (4), (5) и (14) в (29), получим

$$\begin{aligned} C'(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[1 + \alpha Z_p \frac{\beta Z_p}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} \right] U_m \sin v - d Z_p \left[\alpha U_m \cos v - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta U_m \cos v}{2(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)} - \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\gamma} U_m \cos v) \right] \right\} \cos v \, dv = \\ &= C'_1(2\pi) + C'_2(2\pi) + C'_3(2\pi) + C'_4(2\pi). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} C'_1(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + Z_p \left[\alpha - \frac{\beta}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} \right] \right\} U_m \sin v \cos v \, dv = 0 \\ C'_2(2\pi) &= -d Z_p \alpha U_m \int_0^{2\pi} \cos^2 v \, dv = -d Z_p \alpha U_m \pi, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'_3(2\pi) &= \frac{d Z_p \beta U_m}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 v \, dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)} = \\ &= \frac{d Z_p \beta \pi}{\gamma U_m} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma U_m^2}} \right), \quad (32) \end{aligned}$$

$$C'_4(2\pi) = \frac{dZ_p \beta}{2\sqrt{\gamma}} \int_0^{2\pi} \cos v \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\gamma} U_m \cos v) dv = - \frac{dZ_p \beta \pi}{\gamma U_m} \cdot \left(1 - \sqrt{1 + \gamma U_m^2}\right). \quad (33)$$

Складывая (31), (32) и (33) и принимая во внимание (24), находим

$$C'(2\pi) = \pi d U_m. \quad (34)$$

Коэффициент $C'(2\pi)$ оказывается, таким образом, величиной первого порядка малости. А это означает, что формулой (28) в данном случае пользоваться нельзя. Действительно, она получена отбрасыванием членов второго и более высоких порядков малости в условиях

$$-U_m \frac{\tau^2}{2} + C(2\pi)d + C'(2\pi)\tau d + D(2\pi)\beta_1 d + F(2\pi)d^2 + \dots \quad (35)$$

и

$$-U_m \tau + C'(2\pi)d + C''(2\pi)\tau d + D'(2\pi)\beta_1 d + F'(2\pi)d^2 + \dots \quad (36)$$

периодичности решения (15).

В нашем случае нужно отбросить и член $C'(2\pi)d = \pi U_m d^2$. В результате вместо (28) получается уравнение $U_m \tau = 0$. Последнее говорит о том, что нелинейная поправка имеет второй порядок малости. Отбрасывая в (35) и (36) члены третьего и более высоких порядков малости и подставляя $C(2\pi) = 0$, получаем

$$\beta_1 = - \frac{F(2\pi)}{D(2\pi)} d, \quad (37)$$

$$\tau = d \cdot \frac{C'(2\pi) - \frac{D'(2\pi)}{D(2\pi)} F(2\pi) d + F'(2\pi) d}{U_m}. \quad (38)$$

Коэффициент $D(2\pi)$ при $C(2\pi) = 0$ выражается [12] формулой

$$D(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \psi'_0} dv.$$

В нашем случае он равен:

$$D(2\pi) = - \int_0^{2\pi} \left[1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} \right] dv =$$

$$= -\frac{\pi \beta \gamma Z_p U_m^2}{(1 + \gamma U_m^2)^{3/2}}. \quad (39)$$

Найдем теперь $D'(2\pi)$. Этот коэффициент можно определить [12] по формуле:

$$D'(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \psi_0} dv - \frac{C'(2\pi)}{U_m}.$$

Для нашего случая:

$$\begin{aligned} D'(2\pi) &= 2\beta Z_p \gamma U_m^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos v \sin v dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^3} - \\ &- d Z_p \int_0^{2\pi} \left[\alpha - \frac{\beta}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} \right] dv - \\ &- \pi d = \pi d \left[1 - \frac{\beta \gamma Z_p U_m^2}{(1 + \gamma U_m^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Коэффициент $F(2\pi)$ определяется [12] интегралом:

$$F(2\pi) = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial \psi_0} C(v) + \frac{\partial f}{\partial \psi'_0} C'(v) \right] \sin v dv. \quad (41)$$

Входящая сюда функция $f(\psi_0, \psi'_0)$ выражается формулой (30), а $C(v)$ должно быть вычислено с учетом члена $d Z_p \varphi(\psi_0)$ в функции $f(\psi_0, \psi'_0)$.

Обозначим $C(v) = C_1(v) + d C_2(v)$.

Здесь $C_1(v)$ — приближенное значение $C(v)$, получающееся при отбрасывании слагаемого $d Z_p \varphi(\psi_0)$ в (30), а $d C_2(v)$ добавляется при учете этого члена. $C_1(v)$ было вычислено ранее [формула (23)].

Обозначим далее

$$g(v) = g_1[\psi_0(v)] = -\{1 + Z_p \varphi'[\psi_0(v)]\}$$

и

$$g_2[\psi_0(v)] = -Z_p \varphi[\psi_0(v)]. \quad (42)$$

Тогда $f[\psi_0(v), \psi'_0(v)] = g_1(\psi_0) \psi'_0(v) + d g_2(\psi_0)$.

Формулу (41) можно теперь записать в виде

$$F(2\pi) = - \int_0^{2\pi} \frac{d}{dv} [g(v) C_1(v)] \sin v dv - d \int_0^{2\pi} \frac{d}{dv} [g(v) C_2(v)].$$

$$\sin v dv - d \int_0^{2\pi} g'_2 [\psi_0(v)] C_1(v) \sin v dv - d^2 \int_0^{2\pi} g_2 [\psi_0(v)]$$

$$C_2(v) \sin v dv = F_1(2\pi) + d F_2(2\pi) + d F_3(2\pi) + d^2 F_4(2\pi).$$

Так как $\frac{D'(2\pi)}{D(2\pi)}$ согласно (39) и (40) — первого порядка малости

относительно d , то в формуле (38) $F_2(2\pi)$, $F_3(2\pi)$ и $F_4(2\pi)$ образуют члены третьего порядка малости, которыми мы с самого начала пренебрегали. Таким образом,

$$F(2\pi) \approx F_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dv} [g(v) C_1(v)] \sin v dv. \quad (43)$$

Полученная форма выражения для $F(2\pi)$ позволяет применить интегрирование по частям и избежать, таким образом, дифференцирования $C_1(v)$, которое привело бы к значительному усложнению под-интегральной функции в (41).

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} g(v) C_1(v) \cos v dv. \quad (43')$$

Подставляя сюда развернутые выражения для $C_1(v)$ и $g(v)$ из (23), (41), (4) и (14), получим:

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_v}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} \right] \left[(1 + \alpha Z_p) \frac{U_m}{2} (\sin v - v \cos v) - \frac{\beta Z_v U_m}{2(1 + \gamma U_m^2)} \sin v + \frac{\beta Z_v U_m}{2\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \cos v \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \right] \cos v dv. \quad (44)$$

Интеграл (44) можно разбить на 5 более простых

$$F(2\pi) \approx F_1(2\pi) = F_{11}(2\pi) + F_{12}(2\pi) + F_{13}(2\pi) + F_{14}(2\pi) + F_{15}(2\pi).$$

Здесь $F_{11}(2\pi) = -\frac{U_m}{2} \int_0^{2\pi} \left[(1 + \alpha Z_p) - \frac{\beta Z_p}{(1 + \gamma U_m^2)} \right] \left[1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} \right] \sin v \cos v dv = 0,$

$$F_{12}(2\pi) = (1 + \alpha Z_p)^2 \frac{U_m}{2} \int_0^{2\pi} v \cos^2 v dv = \frac{\pi^2 U_m}{2} (1 + \alpha Z_p)^2, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} F_{13}(2\pi) &= - (1 + \alpha Z_p) \frac{\beta Z_p U_m}{2} \int_0^{2\pi} \frac{v \cos^2 v dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} = \\ &= - \frac{\pi^2 \beta Z_p (1 + \alpha Z_p) U_m}{2 (1 + \gamma U_m^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} F_{14}(2\pi) &= - \frac{(1 + \alpha Z_p) \beta Z_p U_m}{2 \sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 v \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} dv = \\ &= - \frac{\pi^2 (1 + \alpha Z_p) \beta Z_p U_m}{2 \sqrt{1 + \gamma U_m^2}}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} F_{15}(2\pi) &= \frac{\beta^2 Z_p^2 U_m}{2 \sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \cdot \frac{\cos^2 v dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} = \\ &= \frac{\pi^2 \beta^2 Z_p^2 U_m}{2 (1 + \gamma U_m^2)^2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Складывая (45), (46), (47) и (48) и принимая во внимание (24), получаем

$$F(2\pi) = 0.$$

Нелинейная поправка на период будет теперь определяться формулой

$$\tau = \frac{C'(2\pi)d + F'(2\pi)d^2}{U_m}. \quad (49)$$

Коэффициент $F'(2\pi)$ достаточно вычислить с точностью до членов порядка d . Этот коэффициент, как известно [12], определяется формулой

$$F'(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial \psi_0} C(v) + \frac{\partial f}{\partial \psi'_0} C'(v) \right] \cos v \, dv. \quad (50)$$

Часть подинтегрального выражения, заключенная в квадратные скобки, здесь совершенно такая же, как в (41). Мы можем поэтому аналогично предыдущему записать наш интеграл в виде

$$F'(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dv} [g(v) C_1(v)] \cos v \, dv = \int_0^{2\pi} g(v) C_1(v) \sin v \, dv.$$

Подставляя сюда развернутые выражения для функций $g(v)$ и $C_1(v)$, будем иметь

$$F'(2\pi) = - \int_0^{2\pi} \left[1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} \right] \left[(1 + \alpha Z_p) \frac{U_m}{2} (\sin v - v \cos v) - \frac{\beta Z_p U_m}{2(1 + \gamma U_m^2)} \sin v - \frac{\beta Z_p U_m}{2\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \cos v \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \right] \sin v \, dv.$$

Этот интеграл можно представить в виде суммы шести более простых интегралов

$$F'(2\pi) = F'_{11}(2\pi) + F'_{12}(2\pi) + F'_{13}(2\pi) + F'_{14}(2\pi) + F'_{15}(2\pi) + F'_{16}(2\pi).$$

Здесь

$$\begin{aligned} F'_{11}(2\pi) &= - (1 + \alpha Z_p) \left(1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{1 + \gamma U_m^2} \right) \frac{U_m}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 v \, dv = \\ &= - (1 + \alpha Z_p) \left(1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{1 + \gamma U_m^2} \right) \frac{U_m \pi}{2}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$F'_{12}(2\pi) = \beta Z_p \frac{U_m}{2} \left(1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{1 + \gamma U_m^2} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 v \, dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} =$$

$$= \frac{\beta Z_p U_m}{2} \left(1 + \alpha Z_p - \frac{\beta Z_p}{1 + \gamma U_m^2} \right) \frac{\pi}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} F'_{13}(2\pi) &= (1 + \alpha Z_p)^2 \frac{U_m}{2} \int_0^{2\pi} v \cos v \sin v \, dv = \\ &= - (1 + \alpha Z_p)^2 \frac{\pi U_m}{4}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} F'_{14}(2\pi) &= - (1 + \alpha Z_p) \frac{\beta Z_p U_m}{2} \int_0^{2\pi} \frac{v \cos v \sin v \, dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)^2} = \\ &= - \frac{(1 + \alpha Z_p) \beta Z_p}{2(1 + \gamma U_m^2) \gamma U_m} (1 - \sqrt{1 + \gamma U_m^2}), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} F'_{15}(2\pi) &= - \frac{(1 + \alpha Z_p) \beta Z_p U_m}{2\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \int_0^{\pi} \sin v \cos v \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \, dv = \\ &= - (1 + \alpha Z_p) \frac{\beta Z_p \pi}{2\gamma U_m} (\sqrt{1 + \gamma U_m^2} - 1), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} F'_{16}(2\pi) &= \frac{\beta^2 Z_p^2 U_m}{2\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \cdot \frac{\sin v \cos v \, dv}{(1 + \gamma U_m^2 \cos^2 v)} = \\ &= - \frac{\pi \beta^2 Z_p}{4(1 + \gamma U_m^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Складывая (51), (52), (53), (54), (55) и (56), получим

$$\begin{aligned} F'(2\pi) &= (1 + \alpha Z_p)^2 \frac{\pi U_m}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} + \frac{4}{\gamma U_m^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\gamma U_m^2 \sqrt{1 + \gamma U_m^2}} - \frac{2}{\gamma U_m^2 \sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Обозначим теперь

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} = \frac{(1 + \alpha Z_p)}{\beta Z_p} = \varepsilon. \quad (58)$$

Тогда

$$F'(2\pi) = (1 + \alpha Z_p)^2 \frac{\pi U_m}{4} \cdot \frac{(1 - \epsilon)^2}{(1 + \epsilon)}. \quad (59)$$

Подставляя (34) и (59) в (49), получим

$$\tau = \pi d^2 \left[1 + \frac{(1 + \alpha Z_p)^2 (1 - \epsilon)^2}{4(1 + \epsilon)} \right]. \quad (60)$$

Отсюда относительное изменение частоты равно:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\tau}{2\pi} = -\frac{d^2}{2} \left[1 + \frac{(1 + \alpha Z_p)^2 (1 - \epsilon)^2}{4(1 + \epsilon)} \right]. \quad (61)$$

Здесь первый член $-\frac{d^2}{2}$, не связанный с коэффициентами аппроксимации, представляет собой „линейную поправку“, обусловленную наличием активного сопротивления в индуктивной ветви контура. Действительно, точная частота контура, изображенного на рис. 5, определяется формулой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\omega_0 L} \right)^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{d^2}{2} \right).$$

Отбрасывая $-\frac{d^2}{2}$, для собственно нелинейной поправки находим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= -\frac{d^2}{8} \frac{(1 + \alpha Z_p)^2 (1 - \epsilon)^2}{(1 + \epsilon)} = \\ &= \frac{\omega_0^2 \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{Z_p} \right)^2 (1 - \epsilon)^2}{8(1 + \epsilon)}, \end{aligned} \quad (62)$$

где ω_0 — волновое сопротивление контура.

Из формулы (62) видно, что нелинейная поправка получается тем меньшей, чем меньше затухание контура и его волновое сопротивление. Она стремится к нулю при приближении схемы к порогу самовозбуждения и уменьшается с увеличением R_a .

Гармоники генератора

Коэффициенты нелинейности по отдельным гармоникам мы будем вычислять пользуясь нулевым приближением для амплитуды основного колебания и первым приближением для амплитуд гармоник. Решение первого приближения получается при отбрасывании членов

порядка d^2 и членов более высоких порядков малости. Оно в соответствии с (15) и (37) равно

$$u = U_m \cos v + d C(v) \approx U_m \cos v + d C_1(v) = U_m \cos v + \\ + d \left[(1 + \alpha Z_p) \frac{U_m}{2} (\sin v - v \cos v) - \frac{\beta Z_p U_m}{2(1 + \gamma U_m^2)} \sin v + \right. \\ \left. + \frac{\beta Z_p U_m}{2\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \cos v \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \right].$$

Чтобы воспользоваться этим решением для определения коэффициентов нелинейности по отдельным гармоникам, необходимо разложить периодическую функцию $C_1(v)$ в ряд Фурье:

$$C_1(v) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \sin nv).$$

Постоянный член этого разложения, очевидно, равен нулю.

Непосредственным интегрированием можно убедиться, что коэффициент

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C_1(v) \cos nv \, dv$ также равен нулю при $n \neq 1$. Коэффициент

a_1 и b_1 вычислять не будем, так как небольшая поправка $\Delta U_m = d \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ к амплитуде основного колебания, даваемая первым приближением, практически не отражается на величине коэффициентов нелинейности.

Перейдем теперь к определению b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C_1(v) \sin nv \, dv = b_{n1} + b_{n2} + b_{n3}.$$

Здесь

$$b_{n1} = \frac{1}{\pi} \left[(1 + \alpha Z_p) - \frac{\beta Z_p}{1 + \gamma U_m^2} \right] \frac{U_m}{2} \int_0^{2\pi} \sin v \sin nv \, dv = 0,$$

$$b_{n2} = - (1 + \alpha Z_p) \frac{U_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} v \cos v \sin nv \, dv = (1 + \alpha Z_p) U_m \frac{n}{n^2 - 1}, \quad (63)$$

$$b_{n3} = \frac{\beta Z_p U_m}{2\pi \sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \int_0^{2\pi} \cos v \sin nv \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{1 + \gamma U_m^2}} \, dv =$$

$$= -\frac{\beta Z_v U_m}{\sqrt{1+\gamma U_m^2}} \cdot \frac{n}{n^2-1} + \frac{\beta Z_v U_m}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(n+1)v}{(n+1)} + \frac{\cos(n-1)v}{(n-1)} \right] \cdot \frac{dv}{1+\gamma U_m^2 \cos^2 v} \quad (64)$$

Складывая (63) и (64) и используя равенство (24), получаем

$$b_n = -\frac{\beta Z_v U_m}{4\pi} \left[\frac{1}{n+1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n+1)v}{1+\gamma U_m^2 \cos^2 v} dv + \frac{1}{n-1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n-1)v}{1+\gamma U_m^2 \cos^2 v} dv \right] \quad (65)$$

В случае четных n интегралы (65) равны нулю. При нечетных n коэффициенты $(n+1)$ и $(n-1)$ оказываются четными, и интегралы (65) получают вид

$$h_k = \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2k v dv}{1+\gamma U_m^2 \cos^2 v} = \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2k v dv}{1 + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \cos^2 v} \quad (66)$$

Для таких интегралов нетрудно получить рекуррентную формулу

$$(k+1) h_{k+1} = -2k \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} h_k - (k-1) h_{k-1} \quad (67)$$

Пользуясь этой формулой, находим

$$h_k = (-1)^k \frac{\pi \varepsilon (1-\varepsilon)^k}{k(1+\varepsilon)^k} \quad (68)$$

На основании (65) и (68) при нечетных n имеем

$$b_n = \frac{\beta Z_v U_m \varepsilon}{2} \left[\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right]$$

Отсюда коэффициент нелинейности по n -ой гармонике равен

$$k_{fn} = \frac{d b_n}{U_m} = \frac{d \beta Z_p \epsilon}{2} \left[\frac{1}{n+1} \left(-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \right)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{n-1} \left(-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right]. \quad (69)$$

Обозначив

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = \frac{\frac{1}{\rho} \frac{1}{Z_p}}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{Z_p} + \frac{2}{R_a}} = \xi,$$

ему можно придать еще более простую форму

$$k_{fn} = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{1}{Z_p} + \frac{1}{R_a} \right) \left[\frac{(-\xi)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} + \frac{(-\xi)^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \right]. \quad (70)$$

Для отдельных гармоник получаем:

$$k_{f_3} = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{1}{Z_p} + \frac{1}{R_a} \right) \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi \right),$$

$$k_{f_5} = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{1}{Z_p} + \frac{1}{R_a} \right) \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) \quad \text{и т. д.}$$

Формулы для коэффициентов нелинейности по отдельным гармоникам показывают, что нелинейные искажения уменьшаются с уменьшением волнового сопротивления контура и при подходе к порогу генерации, а при работе далеко за порогом — при увеличении резонансного сопротивления и добротности контура. Далее, из этих формул видно, что относительная доля той или иной гармоники оказывается тем меньшей, чем выше ее номер. Для более высоких номеров эта доля при приближении к порогу генерации убывает быстрее, чем для более низких.

Анализ и экспериментальная проверка полученных формул

Проанализируем полученную в параграфе 5 формулу для амплитуды колебаний. Подставим в нее для этого значения (6), (61) и (14) коэффициентов аппроксимации. Получим:

$$U_m = \frac{4}{\pi} i_{a20} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{Z_p} + \frac{1}{R_a} \right)^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_a} \right)^2}}. \quad (71)$$

Из формулы (71) следует, что колебания появляются (U_m вещественно) при $Z_p > \rho$. Постепенное увеличение Z_p приводит к плав-

ному нарастанию амплитуды. Пока Z_p остается меньше или сравнимым с R_a , амплитуда растет быстро. Этот рост постепенно замедляется и при $Z_p \gg R_a$ дальнейшее увеличение резонансного сопротивления контура почти не меняет амплитуды. Сказанное подтверждается кривыми рис. 6. Аналогично влияет на амплитуду колебаний величина R_a . Обычно R_a в несколько или даже во много раз больше, чем ρ . Поэтому под корнем в (71) второй член при возрастании R_a почти не меняется. Первый же член увеличивается и приводит к заметному возрастанию амплитуды лишь до тех пор, пока R_a не окажется в несколько раз больше резонансного сопротивления контура Z_p .

Входящий в (71) ток i_{a20} определяется при графическом расчете усилителя с катодной связью ординатой точки характеристики $i_{a2} = f(-u_k)$, лежащей на одной вертикали с точкой пересечения кривой $i_k = f_1(-u_k)$ и прямой $i_k = -\frac{u_g}{R_k}$ (рис. 7). Этот ток и амплитуда

U_m , как видно из рисунка, уменьшаются при возрастании R_k .

Увеличение R_a приводит к некоторому уменьшению i_{a20} . Это в случае $R_a \gg Z_p$ является одной из причин наблюдаемого на опыте уменьшения амплитуды с ростом R_a (рис. 8).

Лампа в формуле (71) представлена через посредство i_{a20} и ρ . Величина i_{a20} тем больше, чем больше крутизны динамических характеристик $i_k = f_1(-u_k)$ и $i_{a2} = f(-u_k)$ и чем больше их растворы. Сопротивление ρ приблизительно равно $\rho \approx \frac{2}{S}$. Таким образом, амплитуда будет больше в случае использования лампы с малым ρ и с большой крутизной.

При изменении напряжения анодного питания E_a пропорционально изменяется i_{a20} , так как характеристики $i_k = f_1(-u_k)$ и $i_{a2} = f(-u_k)$

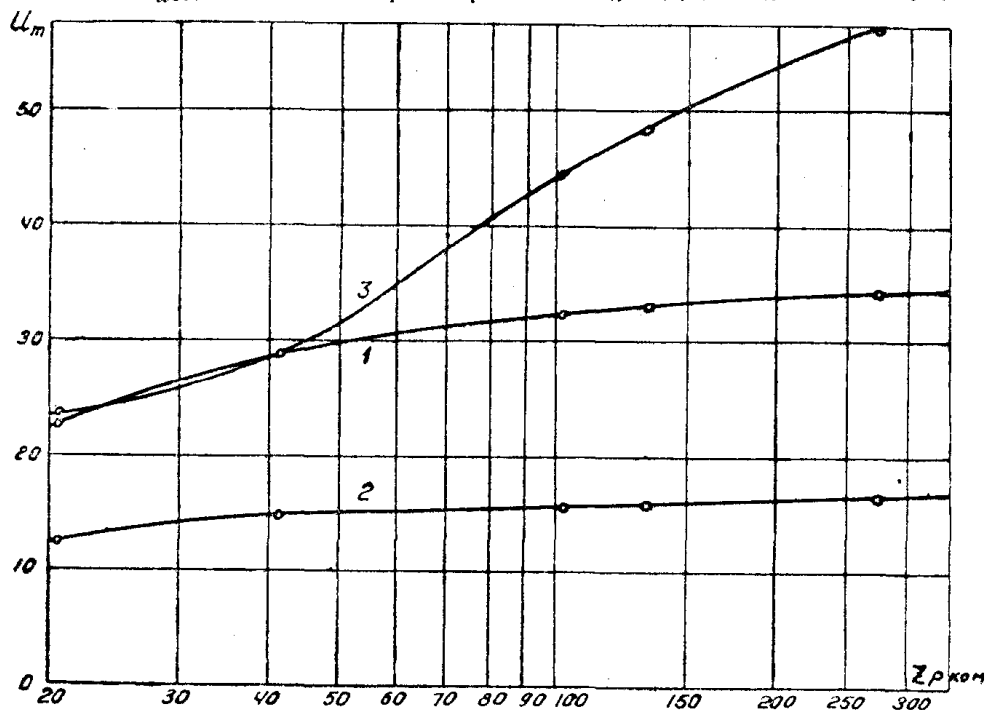


Рис. 6

Зависимость амплитуды колебаний от резонансного сопротивления контура.
 1. $R_a = 10$ ком, $R_k = 1$ ком; 2. $R_a = 10$ ком., $R_k = 3$ ком.; 3. $R_a = 100$ ком, $R_k = 3$ ком.

смещаются при этом, оставаясь приблизительно параллельными своим прежним положениям. Это означает, что изменение E_a должно при-

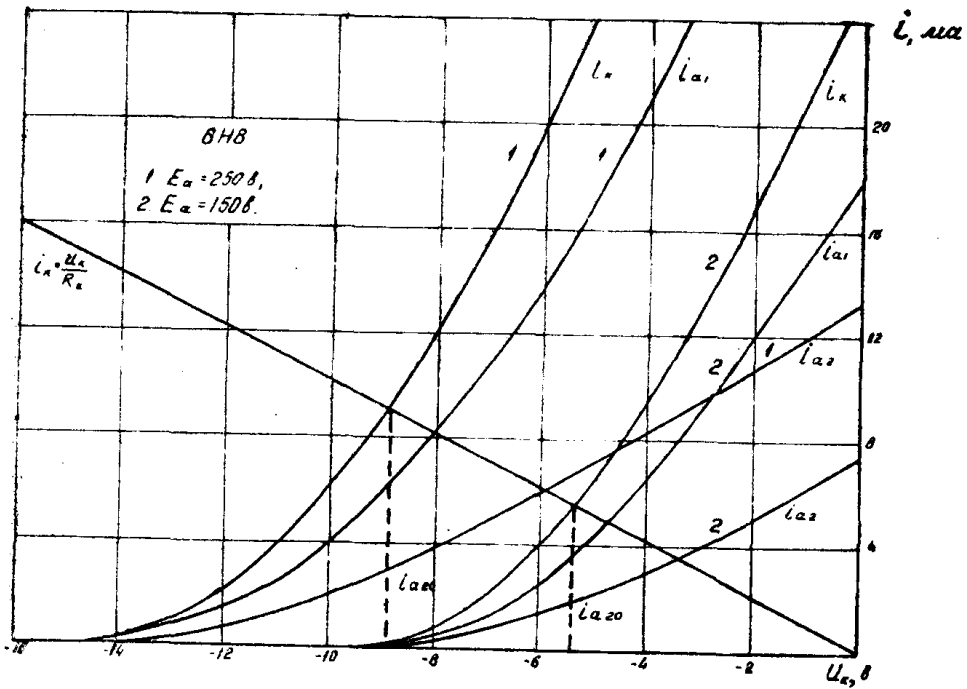


Рис. 7

водить к пропорциональным изменениям амплитуды. Рис. 9, на котором приведены экспериментальные кривые $U_m(E_a)$, показывает, что такая

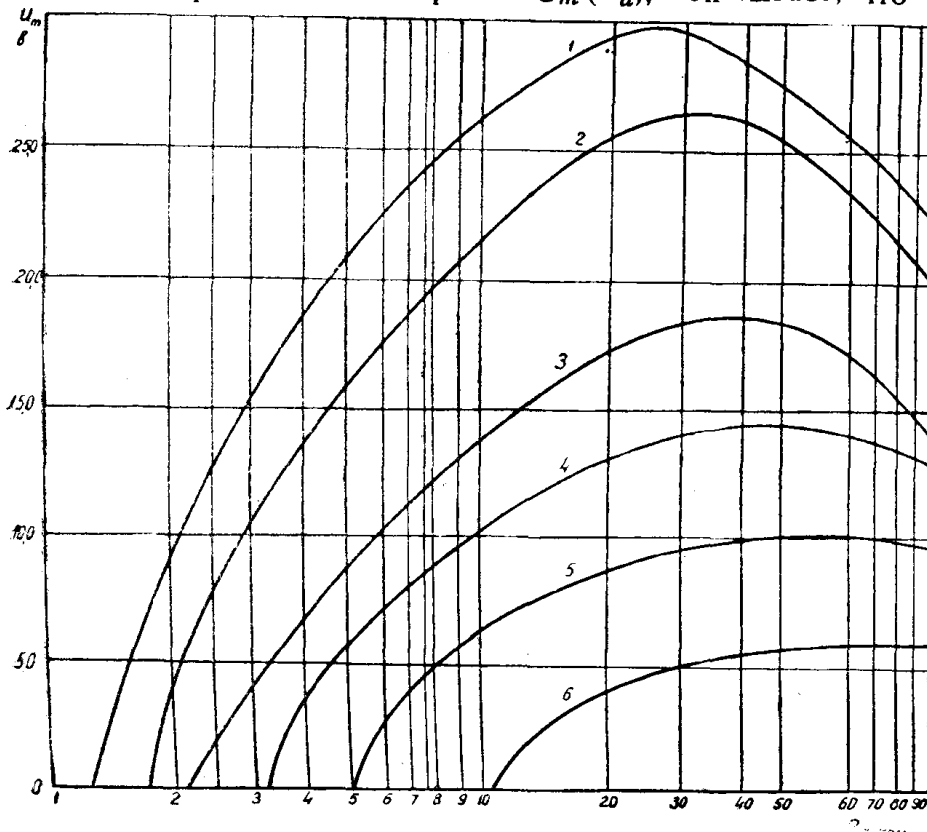


Рис. 8. Зависимость амплитуды колебаний от сопротивлений R_a и R_k . 1. $R_k = 0.5 \text{ КОМ}$, 2. $R_k = 1 \text{ КОМ}$, 3. $R_k = 2 \text{ КОМ}$, 4. $R_k = 3 \text{ КОМ}$, 5. $R_k = 5 \text{ КОМ}$, 6. $R_k = 10 \text{ КОМ}$, 7. $E_a = 240 \text{ В}$, $E_f = 6.3 \text{ В}$, $Z_p = 14.7 \text{ КОМ}$, лампа 6Н8

пропорциональность действительно имеет место. Только при значительном уменьшении E_a , когда ρ возрастает настолько, что второй член под корнем в (71) делается сравнимым с первым, наблюдается более быстрое падение амплитуды, чем по закону прямой пропорциональности.

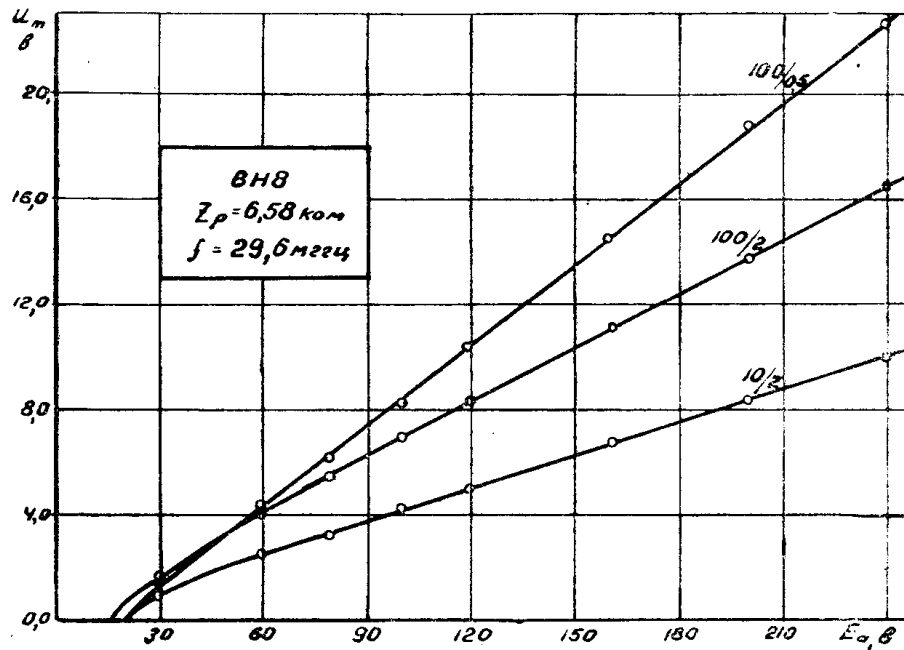


Рис. 9

При изменении напряжения накала E_f амплитуда будет меняться также за счет изменений i_{a20} и ρ . Кривые $U_m(E_f)$ представлены на рис. 10. Примерно такой же вид имеют кривые $i_{a20}(E_f)$. Сопротивление ρ при изменении E_f в пределах 4—8 вольт меняется мало. Лишь пони-

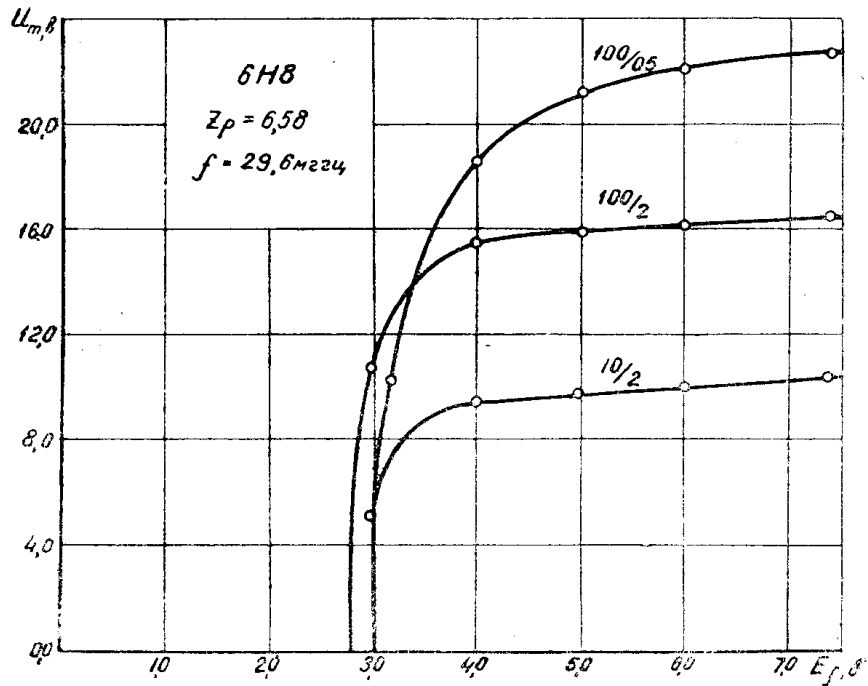


Рис. 10

жение E_f до 3—4 вольт приводит к заметному возрастанию ρ , что ускоряет падение амплитуды. Цифры около кривых рис. 9 и 10 означают: верхняя — величину R_a , нижняя — величину R_k (обе в килоомах). Характер кривых $U_m(E_a)$ и $U_m(E_f)$ на более низких частотах, а также при других значениях резонансного сопротивления контура ($Z_p > \rho$) сохраняется таким же, как на рис. 9 и 10.

Приведенные данные говорят о том, что формула (71) правильно отражает влияние лампы, параметров схемы и питающих напряжений на величину амплитуды колебаний.

В таблице 1 помещены данные расчета U_m по формуле (71) и данные экспериментальной проверки для генератора на лампе 6Н8.

Из таблицы видно, что при выполнении условий изложенной здесь теории (симметричная вольтамперная характеристика) формула (71) дает хорошее количественное совпадение с экспериментальными результатами. Расхождение с экспериментом увеличивается при больших R_a , когда рабочая точка смещена относительно середины „падающего“ участка вольтамперной характеристики.

При экспериментальной проверке формул для нелинейной поправки измерялись уходы частоты генератора, получающиеся от изменения сопротивлений R_a и Z_p . На рис. 11 представлены результаты исследования влияния величины сопротивления R_a на поправку

Таблица 1

Данные экспериментальной проверки формулы (71) для амплитуды колебаний

Параметры контура			Анодное сопротивление R_a , ком	Амплитуда колебаний	
L , мкгн	C , пф	Z_p , ком		рассчит.	экспер.
1,93	140	5,37	10	19,9	20,3
1,93	140	5,37	20	17,62	22,4
1,93	140	5,37	40	12,5	21,5
1,93	140	5,37	50	11,22	20,5
6,8	140	10,6	10	31,0	22,6
6,8	140	10,6	20	30,0	26,4
6,8	140	10,6	40	23,3	26,1
6,8	140	10,6	50	21,4	24,7
1,93	520	4,16	10	15,6	13,5
1,93	830	3,3	10	12,0	10,6
1,93	1160	2,78	10	9,45	8,05

$R_k = 1$ ком,

$E_a = 250$ в

$E_f = 6,3$ в

$\frac{\Delta f}{f}$. В качестве исходного значения величины R_a было взято $R_a =$

≈ 100 ком. Соответствующая ему поправка $\frac{\Delta f}{f}$ вычислялась по формуле (60). Для других значений R_a к этой поправке добавлялись наблюдаемые на опыте уходы частоты. Так были получены сплошные кривые рис. 11. Пунктирные кривые построены по точкам, рассчитанным с помощью формулы (60).

Для исследования зависимости нелинейной поправки от резонансного сопротивления контура Z_p в контур вводились активные сопротивления и измерялись соответствующие им величины Z_p и изменения частоты $\frac{\Delta f}{f}$. Результаты такого эксперимента и выполненного парал-

лельно ему расчета представлены на рис. 12. Здесь для сплошных кривых, соответствующих экспериментальным данным, исходные значения поправки так же, как в предыдущем случае, были вычислены, а остальные были получены добавлением наблюдаемых на опыте отклонений частоты. В описываемом эксперименте менялась как нелинейная, так и линейная поправка. Поэтому использование полной формулы (60) является совершенно обязательным. Сравнение рассчитанных кривых с экспериментальными (у которых одна точка фактически также получена расчетом) свидетельствует о том, что формула (60) и непосредственно вытекающие из нее формулы дают хорошее приближение к действительности.

Изменение нелинейной поправки при изменении питающих напряжений является одной из причин нестабильности частоты генератора. Поскольку в формуле (61) от питающих напряжений зависит только ρ , изменение нелинейной поправки будет равно

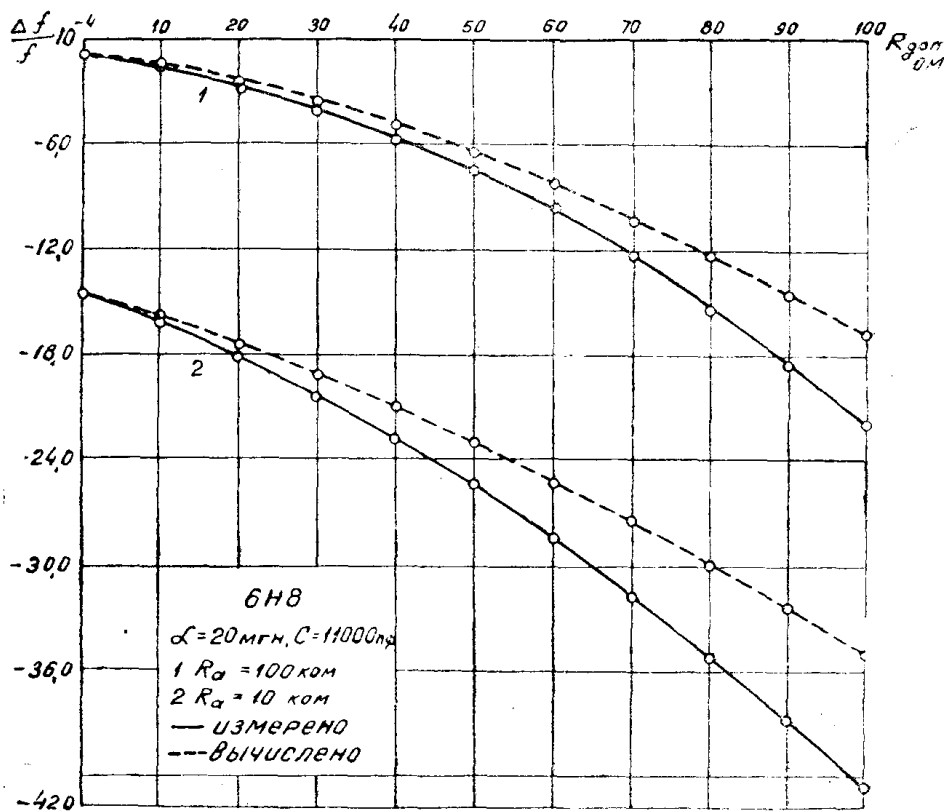


Рис. 11

$$\Delta \frac{\Delta}{f} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\Delta f}{f} \right) \frac{d\varepsilon}{d\rho} \Delta\rho.$$

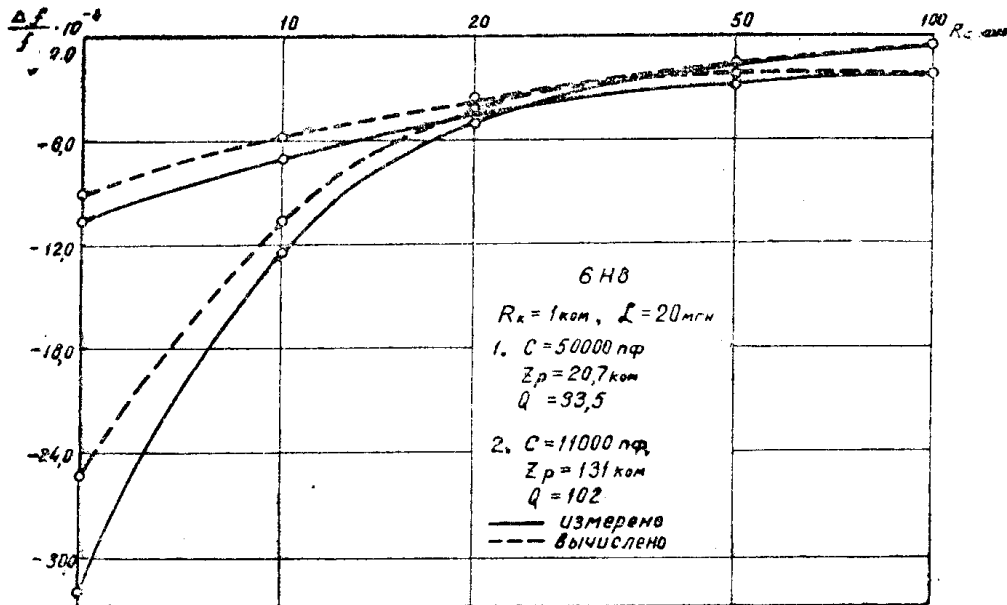


Рис. 12

Выполняя дифференцирование и опуская второй значок Δ в $\Delta \frac{\Delta f}{f}$, получим для ухода частоты выражение

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\omega_0^2}{8} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{Z_p} \right) \cdot \frac{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon) (3 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2} \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho^2}.$$

Вычисления по этой формуле показывают, что уход частоты, получающийся за счет изменения нелинейной поправки, оказывается на 1—2 порядка меньше уходов, наблюдаемых на опыте и связанных с действием других причин, вызывающих нестабильность частоты генератора.

Выводы

1. Предложенная аппроксимация вольтамперной характеристики двухполюсника с катодной связью хорошо воспроизводит характерные особенности этой основной для рассматриваемого генератора нелинейной зависимости и в то же время позволяет выполнить необходимые для решения нелинейных задач квадратуры.

2. Полученные формулы имеют простой вид, хорошо передают влияние лампы, параметров схемы, а также питающих напряжений и позволяют рассчитать амплитуду колебаний, содержание гармоник и нелинейную поправку на период с достаточной для практических целей точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. А. Новое в технике радиоприема, Госэнергоиздат, 1951.
2. Ратбон Р. Генератор импульсов с перемен. частотой повторения, Вопр. радиолек. техн., № 3 (9), изд. ин. литер., 1952.

3. Pullen K. A. The Cathode-Coupled Amplifier, Proc. Inst. Radio Eng., v. 34, Nb. 6, 1946.
4. Grosby M. G. The Terminal Oscillator, Electronics, Nb. 5, 1946.
5. Watts H. M., Television Front-End Design, Electronics, Nb. 4—5, 1949.
6. Sulzer P. G., Frequency and Amplitude Stability of the Cathode-Coupled Oscillator, Proc. Inst. Radio Eng., v. 38, Nb. 5, 1950.
7. Хавкин Г. А. Теория генераторов на усилителе с катодной связью, ЖТФ, т. 18, вып. 11, 1948.
8. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электронных генераторов, ГТТИ, 1934.
9. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. Связьиздат, 1935.
10. Анцелиович Е. С. Вопросы стабильности генераторных схем, ИЭСТ № 6, 1935.
11. Аршинов С. С. Температурная стабильность частоты ламповых генераторов, Госэнергоиздат, 1952.
12. Андронов А. А. и Хайкин С. Э., — Теория колебаний, ОНТИ, 1937.
13. Суслов И. А. Проводимость активного двухполюсника в схеме генератора с катодной связью, Известия ТПИ, т. 86, 1958
14. Суслов И. А. Графический расчет усилителей с катодной связью, Изв. ТПИ, т. 73, 1952.