

О РАСЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Г. Е. ПУХОВ, С. П. АМОСОВА

Ниже рассматривается вопрос о расчете электрических цепей с такими нелинейными элементами, присутствие которых не ведет к заметному отклонению режима работы цепи от синусоидального, и показывается, что при наличии вольт-и фазовоамперных характеристик элементов расчет может быть произведен по методу итерации.

В отличие от способов расчета, предлагаемых в [1—5], метод итерации позволяет, в случае сходимости процесса, рассчитать цепь со сколь угодно сложной конфигурацией и содержащей любое число нелинейных элементов.

1. Пусть цепь содержит n нелинейных элементов, свойства каждого из которых заданы вольт-и фазовоамперными характеристиками:

$$\begin{aligned} U_k &= U_k(I_k), \\ \varphi_k &= \varphi_k(I_k), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где U_k и I_k — действующие значения напряжения и тока k -того нелинейного элемента, а φ_k — угол сдвига фаз между синусоидами u_k и i_k .

Характеристики (1.1) для данного значения тока $I_{k(s)}$ определяют комплекс сопротивления нелинейного элемента:

$$z_{k(s)} = z_{k(s)} e^{j\varphi_{k(s)}}, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} z_{k(s)} &= \frac{U_{k(s)}}{I_{k(s)}} = z_{k(s)}(I_{k(s)}), \\ \varphi_{k(s)} &= \varphi_{k(s)}(I_{k(s)}). \end{aligned}$$

Режим цепи, соответствующий токам $I_{k(s)}$, может быть описан системой уравнений.

$$\dot{I}_{k(s)} = \sum_{l=1}^m Y_{kl(s)} \dot{\mathcal{E}}_l, \quad (1.3)$$

где m — число источников с э.д.с. $\dot{\mathcal{E}}_l$ ($l=1, 2, \dots, m$).

Коэффициенты уравнений (1.3) зависят от токов $I_{k(s)}$, т.е.

$$Y_{kl(s)} = Y_{kl(s)}(Z_{1(s)}, Z_{2(s)}, \dots, Z_{n(s)}). \quad (1.4)$$

Поэтому определение токов I_k по методу итерации можно вести на основе расчётных уравнений:

$$\dot{I}_{k,s+1} = \sum_{l=1}^m Y_{kl(s)} \dot{\mathcal{E}}_l, \quad \begin{aligned} (k &= 1, 2, \dots, n) \\ (s &= 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Задаваясь абсолютными значениями токов $I_{k(0)}$, по характеристикам (1.1) и выражениям (1.2) находят комплексы сопротивлений $Z_{k(0)}$ нелинейных

элементов. Подставляя последние в уравнения (1.5), находят токи $I_{k(1)}$. По абсолютным величинам этих токов определяют новые значения комплексов сопротивлений $Z_{k(1)}$ и т. д.

Расчет ведется до тех пор, пока токи $I_{k(s+1)}$ и $I_{k(s)}$ не окажутся почти одинаковыми, т. е. $I_{k(s+1)} \approx I_{k(s)}$. Как показывают расчёты, процесс итерации хорошо сходится для таких нелинейных элементов, сопротивления которых с увеличением проходящего через них тока уменьшаются. Когда же сопротивления увеличиваются, целесообразно выражения (1.5) преобразовать в уравнения

$$\dot{U}_{k(s+1)} = \sum_{l=1}^m a_{kl(s)} \dot{I}_l, \quad \begin{matrix} (k = 1, 2, \dots, n) \\ (s = 0, 1, 2, \dots), \end{matrix} \quad (1.6)$$

в которых \dot{U}_k — напряжения на нелинейных элементах.

В тех случаях, когда часть элементов имеет характеристики первого рода, а другая второго, расчетные уравнения следует преобразовать к виду:

$$\begin{array}{|c|} \hline \dot{U}_{1(s+1)} \\ \hline \dot{U}_{2(s+1)} \\ \hline \cdot \\ \hline \dot{U}_{q(s+1)} \\ \hline \dot{I}_{(q+1)(s+1)} \\ \hline \cdot \\ \hline \dot{I}_{n(s+1)} \\ \hline \end{array} = \zeta_{(s)} \begin{array}{|c|} \hline \dot{\mathcal{E}}_1 \\ \hline \dot{\mathcal{E}}_2 \\ \hline \cdot \\ \hline \dot{\mathcal{E}}_m \\ \hline \end{array}$$

Первые q строк относятся к нелинейным элементам с увеличивающимися при возрастании токов сопротивлениями, а остальные $n-q$ строк — уменьшающимися сопротивлениями.

Число расчетных уравнений, разумеется, можно уменьшить, если заданную цепь предварительно преобразовать в более простую, как это указано в [5].

2. Приведем примеры расчетов некоторых цепей.

Пример 1. Цепь, представленная на фиг. 1 и включенная на переменное напряжение $\dot{U} = 120$ в, состоит из активного сопротивления $R = 25$ ом, катушки индуктивности с $Z_0 = 20 + j 45$ ом и нелинейного элемента R_n , вольтамперная характеристика которого изображена на фиг. 2. ¹⁾

Требуется определить ток в нелинейном элементе I_n . Так как сопротивление нелинейного элемента с увеличением тока растет, целесообразно находить напряжение на нем. Это напряжение, очевидно, равно:

$$\dot{U}_n = \frac{\dot{U} Z_0 R_n}{R_n R + R Z_0 + R_n Z_0}. \quad (2.1)$$

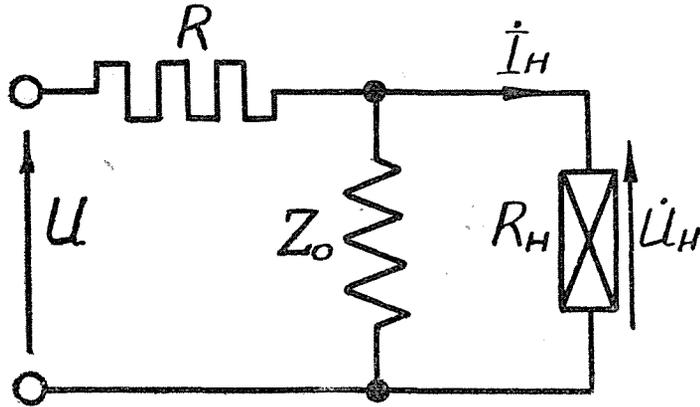
Следовательно, расчетное уравнение для U_n имеет вид:

$$\dot{U}_{n(s+1)} = \frac{\dot{U} Z_0 R_{n(s)}}{R R_{n(s)} + R Z_0 + R_{n(s)} Z_0}. \quad (2.2)$$

¹⁾ Данные примера 1 заимствованы из работы Р. А. Воронова [3].

Подставляя численные значения величин, получаем:¹⁾

$$\dot{U}_{H(s+1)} = \frac{120(20 + j45)R_{H(s)}}{25R_{H(s)} + 25(20 + j45) + R_{H(s)}(20 + j45)} \text{ в.} \quad (2.3)$$

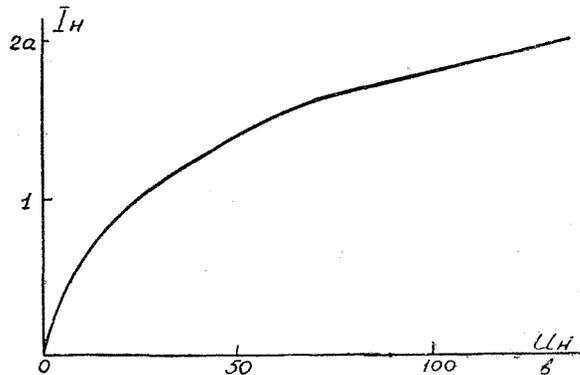


Фиг. 1

Расчет по этой формуле приведен в табл. 1.

Таблица 1.

№ приближения <i>s</i>	$U_{H(s)}$	$I_{H(s)}$	$Z_{SH(s)}$	$\dot{U}_{H(s+1)}$
	<i>в</i>	<i>а</i>	<i>ом</i>	<i>в</i>
0	50	1,4	35,7	61,25 / $13^{\circ}40'$
1	61,25	1,53	40,1	63,7 / $14^{\circ}12'$
2	63,7	1,55	41,15	64,3 / $14^{\circ}20'$
3	64,3	1,555	41,3	64,3 / $14^{\circ}20'$



Фиг. 2

Таким образом, в результате получены

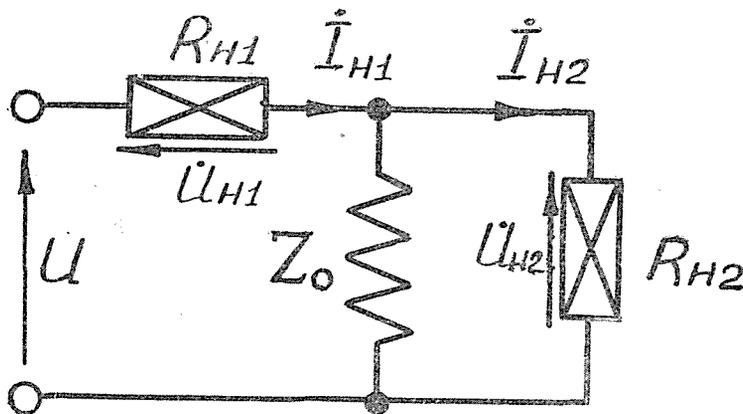
$$\dot{U}_H = 64,3 / 14^{\circ}20' \text{ в,}$$

$$\dot{I}_H = 1,555 / 14^{\circ}20' \text{ а.}$$

¹⁾ Вычисления производились на логарифмической линейке.

Пример 2. Рассмотрим расчёт цепи, содержащей два нелинейных элемента (фиг. 3) ¹⁾.

Оба нелинейных элемента имеют одинаковые вольтамперные характеристики (фиг. 2). Напряжение сети $\dot{U} = 120$ в, сопротивление $Z_0 = 20 + j45$ ом.



Фиг. 3

Определим токи I_1 и I_2 .

Полагая $|R_1| = \frac{|U_1|}{|I_1|}$ и $|R_2| = \frac{|U_2|}{|I_2|}$, получим выражения для напряжений на нелинейных элементах:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}(R_2 + Z_0)R_1}{R_1R_2 + Z_0(R_1 + R_2)}, \quad (2.4)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}R_2Z_0}{R_1R_2 + Z_0(R_1 + R_2)}. \quad (2.5)$$

Расчетными уравнениями служат следующие выражения:

$$\dot{U}_{1(s+1)} = \frac{120[R_{2(s)} + (20 + j45)]R_{1(s)}}{R_{1(s)}R_{2(s)} + (20 + j45)(R_{1(s)} + R_{2(s)})}. \quad (2.6)$$

$$\dot{U}_{2(s+1)} = \frac{120(20 + j45)R_{2(s)}}{R_{1(s)}R_{2(s)} + (20 + j45)(R_{1(s)} + R_{2(s)})}. \quad (2.7)$$

Расчет по этим формулам приведен в табл. 2.

Таблица 2

№ прил. s	$U_{1(s)}$	$I_{1(s)}$	$R_{1(s)}$	$U_{2(s)}$	$I_{2(s)}$	$R_{2(s)}$	$\dot{U}_{1(s+1)}$	$\dot{U}_{2(s+1)}$
	в	а	ом	в	а	ом	в	в
0	75	1,64	45,7	45	1,35	33,35	81,2 / $-8^\circ 40'$	41,65 / $24^\circ 50'$
1	81,2	1,68	48,4	41,65	1,3	32,1	83 / -8°	39,3 / $21^\circ 10'$
2	83	1,7	49	39,3	1,28	30,7	84,3 / $-7^\circ 30'$	38 / $16^\circ 40'$
3	84,3	1,71	49,3	38	1,27	29,9	84,8 / $-7^\circ 20'$	37,6 / $16^\circ 40'$
4	84,8	1,72	49,35	37,6	1,26	29,85	84,8 / $-7^\circ 20'$	37,6 / $16^\circ 40'$

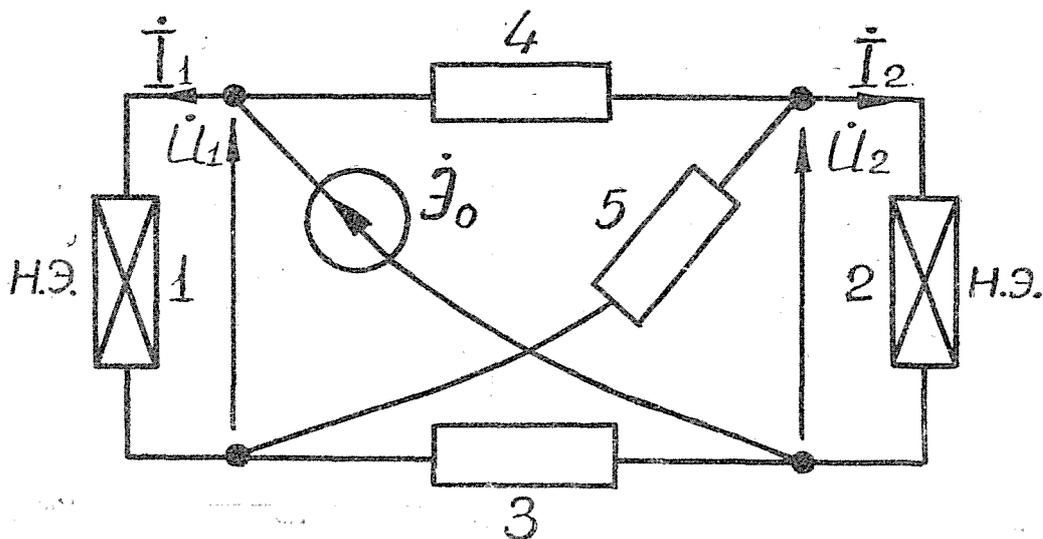
¹⁾ Данные примера заимствованы из работы Р. А. Воронова [3].

Из таблицы видим, что искомые напряжения и токи могут быть приняты равными:

$$\dot{U}_1 = 84,8 \angle -7^\circ 20' \text{ в} , \quad \dot{I}_1 = 1,72 \angle -7^\circ 20' \text{ а}$$

$$\dot{U}_2 = 37,6 \angle 16^\circ 40' \text{ в} , \quad \dot{I}_2 = 1,26 \angle 16^\circ 40' \text{ а}$$

Пример 3. Схема, показанная на фиг. 4, содержит источник переменного напряжения $\dot{\mathcal{E}}_0 = 140 \text{ в}$, активные сопротивления $r_3 = 191 \text{ ом}$, $r_4 = 224 \text{ ом}$, $r_5 = 490 \text{ ом}$ и два нелинейных элемента, вольт- и фазово-



Фиг. 4

амперные характеристики которых представлены на фиг. 5 и 6. Характеристики сняты при синусоидальных напряжениях.

Состояние цепи может быть описано системой уравнений:

$$\dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2 + Y_{10} ,$$

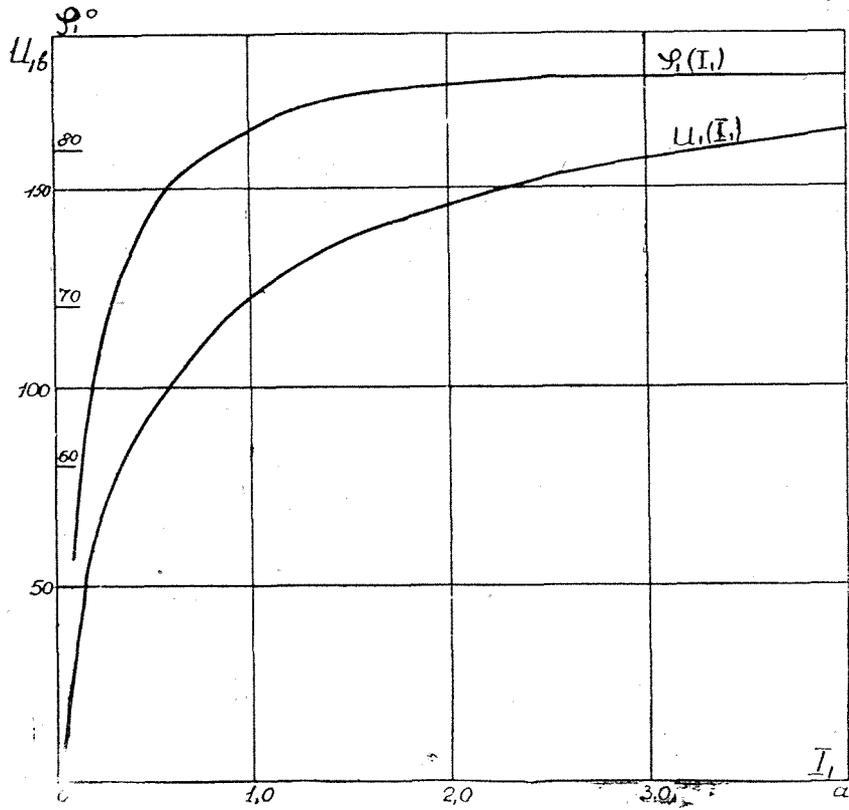
$$\dot{I}_2 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2 + Y_{20} . \quad (2.8)$$

Для линейной части цепи обычным путем определяются коэффициенты:

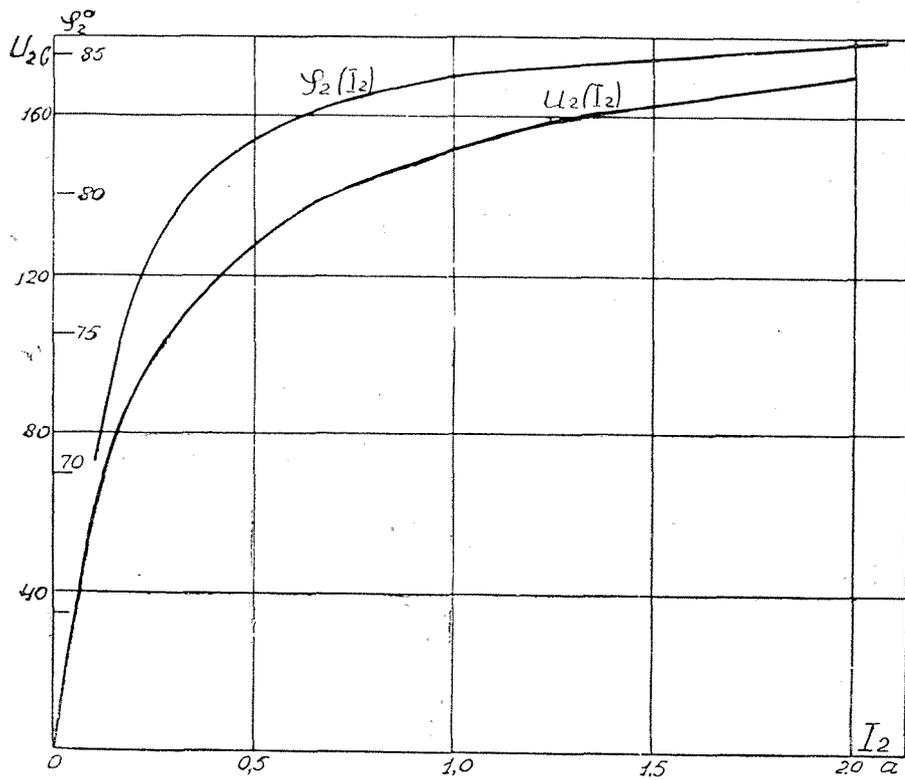
$$\begin{aligned} Y_{11} &= -0,00651 \text{ ом}^{-1}, & Y_{21} &= -0,00204 \text{ ом}^{-1}, \\ Y_{12} &= -0,0021 \text{ ом}^{-1}, & Y_{22} &= -0,00729 \text{ ом}^{-1}, \\ Y_{10} &= -0,00655 \dot{\mathcal{E}}_0 \text{ а}, & Y_{20} &= 0,00729 \dot{\mathcal{E}}_0 \text{ а} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя выражения

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_1 \dot{I}_1, \\ \dot{U}_2 &= Z_2 \dot{I}_2, \end{aligned} \quad (2.10)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

решаем систему уравнений (2.8) относительно токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2

$$\dot{I}_1 = \frac{(1 - Y_{22}Z_2)Y_{10} + Y_{12}Z_2Y_{20}}{(1 - Y_{11}Z_1)(1 - Y_{22}Z_2) - Y_{12}Z_2Y_{21}Z_1}, \quad (2.11)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{(1 - Y_{11}Z_1)Y_{20} + Y_{21}Z_1Y_{10}}{(1 - Y_{11}Z_1)(1 - Y_{22}Z_2) - Y_{12}Z_2Y_{21}Z_1}. \quad (2.12)$$

Расчетными являются уравнения (2.13, 2.14)

$$\dot{I}_{1(s+1)} = \frac{140(0,00655 + Z_{2(s)} \cdot 3,24 \cdot 10^{-5})}{1 + 0,00729Z_{2(s)} + 0,00651Z_{1(s)} + 4,312 \cdot 10^{-5}Z_{1(s)}Z_{2(s)}} a \quad (2.13)$$

$$\dot{I}_{2(s+1)} = \frac{140(0,00729 + 3,404 \cdot 10^{-5}Z_{1(s)})}{1 + 0,00729Z_{2(s)} + 0,00651Z_{1(s)} + 4,312 \cdot 10^{-5}Z_{1(s)}Z_{2(s)}} a. \quad (2.14)$$

Расчет по этим формулам приведен в табл. 3.

Таблица 3

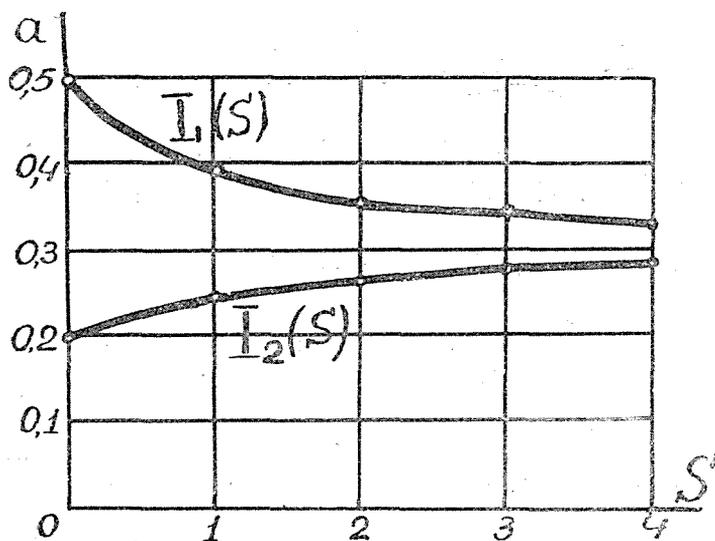
№ приб. <i>s</i>	$I_1(s)$	$U_1(s)$	$\varphi_1(s)$	$Z_1(s)$	$I_2(s)$
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>гр</i>	<i>ом</i>	<i>a</i>
0	0,5	94	76°	188 / $\overline{76}$	0,2
1	0,394	84,5	73°40'	214,5 / $\overline{73^\circ 40'}$	0,247
2	0,36	81,5	72°40'	226,6 / $\overline{72^\circ 40'}$	0,269
4	0,348	80,5	72°25'	231,5 / $\overline{72^\circ 25'}$	0,2805

№ приб. <i>s</i>	$U_2(s)$	$\varphi_2(s)$	$Z_2(s)$	$\dot{I}_{1(s+1)}$	$\dot{I}_{2(s+1)}$
	<i>b</i>	<i>гр</i>	<i>ом</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
0	89,5	76°20'	447,5 / $\overline{76^\circ 20'}$	0,394 / $\overline{-45^\circ 50'}$	0,247 / $\overline{-65^\circ 18'}$
1	99	78°10'	401 / $\overline{78^\circ 10'}$	0,36 / $\overline{-48^\circ}$	0,269 / $\overline{-65^\circ 10'}$
2	102	78°40'	379,3 / $\overline{78^\circ 40'}$	0,348 / $\overline{-48^\circ 40'}$	0,2805 / $\overline{-64^\circ 35'}$
4	103	78°50'	367,5 / $\overline{78^\circ 50'}$	0,3445 / $\overline{-49^\circ}$	0,288 / $\overline{-64^\circ}$

Сходимость процесса наглядно иллюстрирует график зависимости токов I_1 и I_2 от числа приближений s , представленный на фиг. 7.

Можно принять, что токи равны: $\dot{I}_1 = 0,344 \angle -49^\circ a$ и $\dot{I}_2 = 0,288 \angle -64^\circ a$.

Эти результаты были проверены опытным путем. Данные опыта:
 $I_1 = 0,33 \text{ а}$; $I_2 = 0,28 \text{ а}$.



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов Р. А., Пономарева Г. Ф. Круговые диаграммы при исследовании нелинейных цепей. Электричество, № 12, 1951.
2. Воронов Р. А. Графоаналитический метод построения характеристик нелинейных цепей переменного и постоянного токов. Труды ТЭМИИТа, вып. XVI, 1950.
3. Воронов Р. А. Расчет цепей с нелинейными элементами методом поправок. Электричество, № 11, 1952.
4. Пухов Г. Е. К вопросу расчета электрической цепи с одним нелинейным элементом при установившемся синусоидальном режиме. Изв. ТПИ, т. 72, 1952.
5. Пухов Г. Е., Амосова С. П. Преобразования нелинейных цепей при установившемся синусоидальном режиме. Изв. ТПИ, т. 72, 1952.