

ОБ АНАЛИЗЕ НЕКОТОРЫХ ВИБРОГРАММ

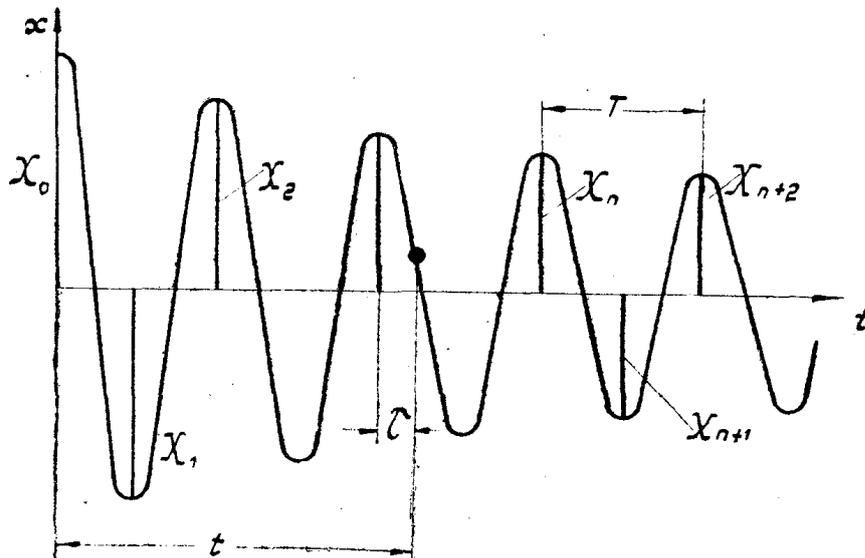
В. К. НЕЧАЕВ

Характер кривых свободных затухающих колебаний механических систем зависит от характера и закономерностей имеющих в системе заглушающих (демпфирующих) сил.

В ряде случаев виброграмма свободных затухающих колебаний, снятая опытным путем (в обычных координатах: перемещение x — время t), позволяет вскрыть имеющиеся в системе сопротивления, знание которых крайне необходимо при исследовании ряда динамических вопросов. Соответствующей обработкой виброграммы может быть установлен характер и величина этих сопротивлений.

Ниже излагается подобная методика обработки виброграмм применительно, в первую очередь, к простейшей механической колебательной системе с одной степенью свободы (фиг. 1).

При этом предполагается, что в системе имеются лишь силы сухого трения R_c (трение Кулона) и жидкостного трения R_k (пропорционального



Фиг. 1

скорости колебательного движения массы m рассматриваемой системы), дающие суммарную демпфирующую силу R , являющуюся причиной затухания свободных колебаний. Таким образом здесь:

$$R = R_c + R_k, \quad (1)$$

$$R_c = \text{const},$$

$$R_k = -k \frac{dx}{dt}, \quad (2)$$

где k — так называемый коэффициент скоростного демпфирования.

Как показано ниже, величины R_c и k могут быть однозначно определены соответствующей обработкой виброграммы свободных колебаний.

Дифференциальное уравнение движения массы m рассматриваемой системы имеет (в условиях линейной характеристики пружины, обладающей постоянной жесткостью c кг/см) обычный вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - R \pm cx = 0,$$

где согласно (1) и (2):

$$R = -k \frac{dx}{dt} \pm R_c,$$

причем знак (+) относится к периодам движения массы вниз, а знак (—) к периодам движения вверх; направление же силы R_x учитывается автома-

тически знаком производной $\frac{dx}{dt}$.

Теперь для периодов движения массы вниз:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} - R_c + cx = 0$$

или

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + c(x - a) = 0, \quad (3)$$

где обозначено:

$$a = \frac{R_c}{c}. \quad (4)$$

Аналогично для периодов движения массы вверх:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + c(x + a) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (3) заменой

$$x - a = y$$

приводится к элементарному виду

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

и имеет общее решение:

$$y = e^{-pt} (A \sin \omega t + B \cos \omega t),$$

где

$$p = \frac{k}{2m} \quad (6)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - p^2} \quad (7)$$

Входящая сюда угловая частота ω связана соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (8)$$

с периодом T свободных колебаний, который может быть найден непосредственно по виброграмме при известном масштабе времени по ее оси абсцисс.

Теперь для хода массы вниз:

$$x = a + e^{-pt} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (9)$$

и аналогично для хода массы вверх:

$$x = -a + e^{-pt} (A \sin \omega t + B \cos \omega t). \quad (10)$$

Постоянные интегрирования A и B различны для каждого последовательного полупериода движения колеблющейся массы (от одного крайнего положения X_n до другого крайнего положения X_{n+1}) и должны определяться каждый раз особо по начальным условиям для данного полупериода.

Ниже приняты обозначения:

$X_0, X_1, X_2 \dots X_n, X_{n+1} \dots$ — последовательные амплитуды колебаний массы m , взятые с их знаком (то-есть $X_0, X_2, X_4 \dots$ — положительны, $X_1, X_3 \dots$ — отрицательны);

t — время, измеряемое от начала колебательного процесса (точка O на фиг. 1);

τ — время, измеряемое от момента предшествующего амплитудного отклонения массы ($\tau = 0 \div \frac{T}{2}$).

Для первого хода массы вниз (от X_0 до X_1) справедливо уравнение (9), которое может быть записано в виде:

$$x = a + e^{-pt} (A_{01} \sin \omega t + B_{01} \cos \omega t), \quad (11)$$

где при $t=0$

$$x = X_0; \quad \frac{dx}{dt} = 0. \quad (12)$$

При этих начальных условиях из (11):

$$B_{01} = X_0 - a, \quad (13)$$

$$A_{01} = \frac{p}{\omega} (X_0 - a). \quad (14)$$

Теперь уравнение движения массы вниз на участке $X_0 \div X_1$:

$$x = a + e^{-pt} (X_0 - a) \left(\frac{p}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right).$$

Отклонение x достигнет своего максимального отрицательного значения:

$$X_1 = a + e^{-pt} (X_0 - a) \left(\frac{p}{\omega} \sin \omega t_1 + \cos \omega t_1 \right)$$

в момент времени t_1 , при котором вновь

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Но легко показать, что

$$e^{-pt} \left(\frac{p}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) = \max$$

при

$$t = t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

Следовательно,

$$X_1 = a + e^{-p \frac{\pi}{\omega}} (X_0 - a) \cos \pi$$

или

$$X_1 = -e^{-p \frac{\pi}{\omega}} X_0 + (1 + e^{-p \frac{\pi}{\omega}}) a. \quad (15)$$

Для второго хода массы (вверх, от X_1 до X_2) согласно (10) справедливо уравнение:

$$x = -a + e^{-pt} (A_{12} \sin \omega t + B_{12} \cos \omega t)$$

с начальными условиями:

$$\text{при } t = t_1 = \frac{\pi}{2} \quad \begin{aligned} x &= X_1, \\ \frac{dx}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Это уравнение, очевидно, может быть переписано в виде:

$$x = -a + e^{-p\tau} (A_{12} \sin \omega \tau + B_{12} \cos \omega \tau) \quad (16)$$

с начальными условиями:

$$\text{при } \tau = 0 \quad \begin{aligned} x &= X_1 \\ \frac{dx}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

При этих условиях из (16) получаем:

$$\begin{aligned} B_{12} &= X_1 + a, \\ A_{12} &= \frac{p}{\omega} (X_1 + a). \end{aligned}$$

Следовательно, для хода массы вверх (от X_1 до X_2) будет справедливым уравнение:

$$x = -a + e^{-p\tau} (X_1 + a) \left(\frac{p}{\omega} \sin \omega \tau + \cos \omega \tau \right).$$

Но, как отмечено выше, выражение

$$e^{-p\tau} \left(\frac{p}{\omega} \sin \omega \tau + \cos \omega \tau \right)$$

достигает своего максимума при

$$\tau = \frac{\pi}{\omega},$$

поэтому

$$X_2 = -a + e^{-p \frac{\pi}{\omega}} (X_1 + a) \cos \pi$$

или

$$X_2 = -e^{-p \frac{\pi}{\omega}} X_1 - (1 + e^{-p \frac{\pi}{\omega}}) a. \quad (17)$$

Теперь, учитывая соотношение (8), вместо (15) и (17) можно написать:

$$X_1 = -e^{-p \frac{T}{2}} X_0 + (1 + e^{-p \frac{T}{2}}) a, \quad (18)$$

$$X_2 = -e^{-p \frac{T}{2}} X_1 - (1 + e^{-p \frac{T}{2}}) a \quad (19)$$

и аналогично далее:

$$X_3 = -e^{-p \frac{T}{2}} X_2 + (1 + e^{-p \frac{T}{2}}) a, \quad (20)$$

$$X_4 = -e^{-p \frac{T}{2}} X_3 - (1 + e^{-p \frac{T}{2}}) a.$$

В общем случае при n четном (то-есть X_n — положительно): (21)

$$X_n = -e^{-\beta} X_{n-1} - (1 + e^{-\beta}) a, \quad (22)$$

$$X_{n+1} = -e^{-\beta} X_n + (1 + e^{-\beta}) a, \quad (23)$$

$$X_{n+2} = -e^{-\beta} X_{n+1} - (1 + e^{-\beta}) a, \quad (24)$$

$$X_{n+3} = -e^{-\beta} X_{n+2} + (1 - e^{-\beta}) a. \quad (24a)$$

где введено обозначение:

$$\beta = p \frac{T}{2} = \frac{kT}{4m}. \quad (25)$$

Соотношения (18) — (24) и могут быть использованы для определения величин k и R_c в данной колебательной системе по снятой виброграмме свободных затухающих колебаний.

Так, например, суммируем (23) и (24):

$$X_{n+1} + X_{n+2} = -e^{-\beta} (X_n + X_{n+1}).$$

Отсюда

$$\beta = \frac{kT}{4m} = \ln \left(-\frac{X_n + X_{n+1}}{X_{n+1} + X_{n+2}} \right) \quad (26)$$

и искомый коэффициент скоростного демпфирования:

$$k = \frac{4m}{T} \ln \left(-\frac{X_n + X_{n+1}}{X_{n+1} + X_{n+2}} \right). \quad (27)$$

Далее из (23):

$$a = \frac{X_{n+1} + e^{-\beta} X_n}{1 + e^{-\beta}}$$

или на основании (26):

$$a = \frac{X_{n+1} (X_n + X_{n+1}) - X_n (X_{n+1} + X_{n+2})}{X_n - X_{n+2}}.$$

Таким образом, согласно (4):

$$\frac{R_c}{c} = a = \frac{X_{n+1}^2 - X_n X_{n+2}}{X_n - X_{n+2}},$$

и отсюда величина искомой силы сухого трения R_c :

$$R_c = c \frac{X_{n+1}^2 - X_n X_{n+2}}{X_n - X_{n+2}}. \quad (28)$$

Формулами (27) и (28) поставленная выше задача определения характеристик демпфирующих сил в системе по виброграмме затухающих свободных колебаний решается, по существу, полностью. Для определения величин R_c и k достаточно знать три соседних амплитуды свободных колебаний X_n , X_{n+1} и X_{n+2} (первая и третья из которых положительны).

При наличии виброграммы с достаточно длительной записью процесса затухания колебаний (то есть с достаточно большим числом записанных циклов колебаний) методика определения величин R_c и k может быть сделана более точной за счет расширения интервала охватываемых расчетом циклов затухающих колебаний.

Так, например, вычитая (24а) из (23), получаем (при n —четном):

$$X_{n+1} - X_{n+3} = -e^{-\beta} (X_n - X_{n+2}),$$

отсюда

$$k = \frac{4m}{T} \ln \left(-\frac{X_n - X_{n+2}}{X_{n+1} - X_{n+3}} \right) \quad (29)$$

Суммируем (23) и (24а):

$$X_{n+1} + X_{n+3} = e^{-\beta} (X_n + X_{n+2}) + 2(1 + e^{-\beta})a,$$

$$2a = \frac{(X_{n+1} + X_{n+3}) + e^{-\beta} (X_n + X_{n+2})}{1 + e^{-\beta}}$$

или на основании (26):

$$a = \frac{X_n X_{n+3} - X_{n+1} X_{n+2}}{(X_n - X_{n+2}) - (X_{n+1} - X_{n+3})},$$

отсюда

$$R = c \frac{X_n X_{n+3} - X_{n+1} X_{n+2}}{(X_n - X_{n+2}) - (X_{n+1} - X_{n+3})}. \quad (30)$$

Пределы расчетного интервала (распространяющиеся для формул (29) и (30) на $1\frac{1}{2}$ периода колебаний) могут быть расширены еще более.

В общем случае, при использовании на виброграмме интервала амплитуд от X_n до X_q (где n и q —четные, то есть X_n и X_q положительные и $q > n$) и, соответственно, отрицательных амплитуд от X_{n+1} до X_{q+1} , аналогично (22) — (24), можно записать:

$$X_{n+1} = -e^{-\beta} X_n + (1 + e^{-\beta})a, \quad (31)$$

$$X_{q+1} = -e^{-\beta} X_q + (1 + e^{-\beta})a. \quad (32)$$

Вычитание (31) из (32) дает:

$$e^{-\beta} = -\frac{X_{n+1} - X_{q+1}}{X_n - X_q}, \quad (33)$$

откуда

$$k = \frac{4m}{T} \ln \left(-\frac{X_n - X_q}{X_{n+1} - X_{q+1}} \right). \quad (34)$$

Суммируем (31) и (32):

$$X_{n+1} + X_{q+1} = -e^{-\beta} (X_n + X_q) + 2(1 + e^{-\beta})a,$$

отсюда

$$2a = \frac{(X_{n+1} + X_{q+1}) + e^{-\beta} (X_n + X_q)}{1 + e^{-\beta}}$$

и на основании (33) и (4):

$$R_c = c \frac{X_n X_{q+1} - X_{n+1} X_q}{(X_n - X_q) - (X_{n+1} - X_{q+1})} \quad (35)$$

Формулы (34) и (35) дают, очевидно, некоторые средние значения величин k и R_c на всем интервале от n до q . В случае справедливости для рассматриваемой колеблющейся системы принятой выше основной предпосылки о наличии в системе лишь сухого и жидкостного („вязкого“) сопротивления, найденные по (34) и (35) значения k и R_c будут независимыми от величины и положения на виброграмме избранного расчетного интервала $X_n \div X_q$. Изменение величин k и R при ином выборе номеров n и q (например, при сужении этого интервала) будет свидетельствовать о наличии в системе демпфирующих сил (сопротивлений) более сложного, чем предполагалось в формулах (1) и (2), характера.

Очевидно, наконец, что изложенная выше методика может быть использована и для обработки кривых свободных затухающих колебаний более сложных (чем предполагалось выше, на стр. 253) колебательных систем. В этих случаях величины m и c будут означать, соответственно, массу и жесткость колебательной системы, приведенные к той точке системы, колебания которой записаны на исследуемой виброграмме. К этой же точке окажутся приведенными и величины k и R_c , вычисленные по формулам (34) и (35).
