

Экономика

УДК 519.872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТОКОВ ПОКУПАТЕЛЕЙ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ТОРГОВОЙ КОМПАНИИ В ВИДЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ К БЛОКАМ

Л.А. Жидкова, С.П. Моисеева

Томский государственный университет
E-mail: zhidkova@mail.ru; smoiseeva@mail.ru

Построена математическая модель формирования потока покупателей торговой компании в виде системы параллельного обслуживания кратных заявок с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов, получено выражение для математического ожидания капитала торговой компании, а также найдено условие для существования максимума этой функции. Для конкретного примера определено оптимальное отношение стоимости подарка к средней стоимости покупки, обеспечивающее максимальную прибыль компании.

Ключевые слова:

Немарковские системы с неограниченным числом обслуживающих приборов, пуассоновский поток кратных заявок, повторное обслуживание заявок.

Key words:

Non-Markov system with an unlimited number of servers, Poisson process of multiple orders, repeated service of orders.

Введение

В настоящее время большинство торговых компаний столкнулось с падением спроса и замедлением темпов сбыта товаров. Особенно явно эта тенденция начала проявляться с 2008 г., одновременно с переориентацией конечных потребителей на экономию и рост сбережений.

Западные компании успешно используют методы уменьшения товарных запасов, увеличения их оборачиваемости, оптимизации заказа товаров, изучения потребностей покупателей, широко применяют информационные технологии (сканирование, внутрифирменные сети и др.). Использование подобного инструментария позволяет существенно повышать эффективность торговых компаний, снижать уровень розничных цен, издержек и торговой наценки.

В результате усложнения экономических процессов и возрастания конкуренции в торговой отрасли проблема разработки и внедрения научно-обоснованных методов принятия решений для управления торговыми компаниями является весьма актуальной. Особую актуальность представляет исследование процесса принятия решений в сложноорганизованных торговых компаниях. В 1970–80 гг. был нако-

плен значительный научный и практический потенциал моделирования торгово-экономических процессов. Отечественная экономико-математическая школа внесла значительный вклад в мировую науку. Можно отметить работы по математическому моделированию деятельности торговых компаний [1].

Практически каждый вид коммерческой деятельности содержит в качестве своего элемента совокупность распределенных во времени деловых сделок. Это заставляет уделять должное внимание математическому описанию потоков коммерческих сделок, характер и свойства которых определяются содержанием коммерческих операций [2–4]. В моделях массового обслуживания последовательность сделок рассматривается как случайный поток событий, что позволяет применить к ее описанию методов теории случайных процессов [5, 6].

Для привлечения клиентов торговые компании используют различные методы стимулирования сбыта продукции. К ним относятся различные акции, распродажи, предоставление клиентам различных видов скидок и другие. В настоящей работе предлагается рассмотреть процесс влияния маркетинговой программы («Подарок за покупку») на прибыль торговой компании.

Постановка задачи

Рассмотрим торговую компанию (магазин), в которой продаются две группы товаров (продовольственные и непродовольственные). Будем считать, что каждый покупатель при первом посещении приобретает товары обоих типов. После совершения покупки клиент в течение некоторого случайного времени не нуждается в товарах того или иного типа, а при необходимости выбирает возвратиться ему в ту же торговую компанию или выбрать другую. Число клиентов, обращающихся в магазин практически неограниченно. Кроме этого, предоставляемые компанией подарки при совершении покупки обеспечивают возможное повторное обращение клиента в эту компанию (магазин). Для таких компаний определяющее значение имеет процесс изменения числа клиентов с учетом повторных обращений [7, 8].

Поток клиентов, впервые обращающихся в торговую компанию, будем считать простейшим потоком с параметром λ [9], интервалы времени между потребностями посещения магазина являются независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно для каждого блока. Клиент при возникновении новой потребности приобрести товар с вероятностью r_k обращается в ту же торговую компанию, а с вероятностью $1-r_k$ выбирает другую, $k=1,2$ – номер блока. Очевидно, что вероятность возвращения клиента в компанию зависит от маркетинговой политики.

Ставится задача определения условий проведения акции для обеспечения наибольшей прибыли рассматриваемой торговой компании.

Математическая модель

В качестве математической модели поставленной задачи будем рассматривать систему массового обслуживания с двумя блоками обслуживания и повторным обращением (рис. 1). Данная система массового обслуживания (СМО) состоит из двух блоков обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число обслуживающих устройств. На вход системы поступает простейший с параметром λ поток сдвоенных заявок, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки [10–12].

Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, а другая во второй блоки обслуживания и занимает любое из свободных устройств, на котором выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно [13]. Закончив обслуживание, заявка k -го блока с вероятностью $1-r_k$ покидает систему, а с вероятностью r_k возвращается обратно на прибор для повторного обслуживания.

Обозначим $i_k(t)$ число занятых приборов в k -м блоке обслуживания в момент времени t , $m_k(t)$ – суммарное число заявок, обратившихся k -му блоку

за время t , как из внешнего источника, так и для повторного обслуживания.

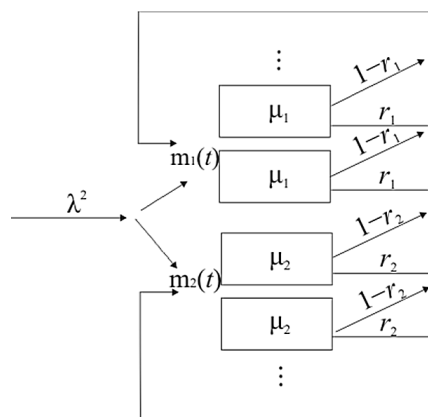


Рис. 1. СМО с параллельным обслуживанием сдвоенных заявок и повторными обращениями к блокам

Полученный четырехмерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t), m_1(t), m_2(t)\}$ является марковским [14, 15]. Определим для данного процесса вероятности $P(i_1, i_2, m_1, m_2, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, m_1(t) = m_1, m_2(t) = m_2\}$, тогда система дифференциальных уравнений Колмогорова [5] имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(i_1, i_2, m_1, m_2, t)}{\partial t} = & -(\lambda + i_1\mu_1 + i_2\mu_2)P(i_1, i_2, m_1, m_2, t) + \\ & + i_1\mu_1 r_1 P(i_1, i_2, m_1 - 1, m_2, t) + \\ & + (i_2 + 1)\mu_2 (1 - r_2) P(i_1, i_2 + 1, m_1, m_2, t) + \\ & + i_2\mu_2 r_2 P(i_1, i_2, m_1, m_2 - 1, t) + \mu_1 (i_1 + 1)(1 - r_1) \times \\ & \times P(i_1 + 1, i_2, m_1, m_2, t) + \\ & + \lambda P(i_1 - 1, i_2 - 1, m_1 - 1, m_2 - 1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Определим производящую функцию четырехмерного распределения $P(i_1, i_2, m_1, m_2, t)$ в виде [9, 16]:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = & \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} x_1^{i_1} x_2^{i_2} y_1^{m_1} y_2^{m_2} P(i_1, i_2, m_1, m_2, t). \end{aligned}$$

Из системы дифференциальных уравнений Колмогорова (1) получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции $F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)}{\partial x_1} \times & (\mu_1 x_1 (1 - r_1 y_1) - \mu_1 (1 - r_1)) + \frac{\partial F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)}{\partial x_2} \times \\ & (\mu_2 x_2 (1 - r_2 y_2) - \mu_2 (1 - r_2)) = \\ = & \lambda (x_1 x_2 y_1 y_2 - 1) F(x_1, x_2, y_1, y_2, t). \end{aligned}$$

Решая данное уравнение, находим производящую функцию числа занятых приборов и суммарного числа заявок в блоках, из которой получаем вид производящей функции суммарного числа обращений в рассматриваемой системе:

$$\begin{aligned}
 F(y_1, y_2, t) = & \\
 = \exp & \left\{ \lambda \left(\frac{r_1 r_2 (y_1 - 1)(y_2 - 1)}{(1 - r_1 y_1)(1 - r_2 y_2)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{r_1 (y_1 - 1)}{1 - r_1 y_1} + \frac{r_2 (y_2 - 1)}{1 - r_2 y_2} \right) y_1 y_2 t + \right. \\
 & + \lambda \frac{r_1 r_2 (1 - y_1)(1 - y_2)}{(1 - r_1 y_1)(1 - r_2 y_2)} \frac{(1 - e^{-[\mu_1(1 - r_1 y_1) + \mu_2(1 - r_2 y_2)]t})}{(\mu_1(1 - r_1 y_1) + \mu_2(1 - r_2 y_2))} - \\
 & - \lambda \frac{r_1 (1 - y_1)}{(1 - r_1 y_1)} \frac{(1 - e^{-\mu_1(1 - r_1 y_1)t})}{\mu_1(1 - r_1 y_1)} \left(\frac{r_2 (y_2 - 1)}{1 - r_2 y_2} + y_1 y_2 \right) + \\
 & + \lambda \frac{\left(\frac{r_1 r_2 (1 - y_1)(1 - y_2)}{(1 - r_1 y_1)(1 - r_2 y_2)} \times \right.}{\left. \times (1 + e^{-\mu_1(1 - r_1 y_1)t}) (1 + e^{-\mu_2(1 - r_2 y_2)t}) \right)}{\mu_1(1 - r_1) + \mu_2(1 - r_2)} - \\
 & - \frac{\lambda \left(\frac{r_1 (1 - y_1)}{(1 - r_1 y_1)} (1 + e^{-\mu_1(1 - r_1 y_1)t}) \right)}{\mu_1(1 - r_1)} - \\
 & - \frac{\lambda \left(\frac{r_2 (1 - y_2)}{(1 - r_2 y_2)} (1 + e^{-\mu_2(1 - r_2 y_2)t}) \right)}{\mu_2(1 - r_2)} - \\
 & \left. - \lambda \frac{r_2 (1 - y_2)}{(1 - r_2 y_2)} \frac{(1 - e^{-\mu_2(1 - r_2 y_2)t})}{\mu_2(1 - r_2 y_2)} \left(\frac{r_1 (y_1 - 1)}{1 - r_1 y_1} + y_1 y_2 \right) \right\}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Определение основных характеристик дохода компании

Пусть компания при каждом первичном обращении и совершении покупки первого типа получает доход в размере значения случайной величины ξ_1 с функцией распределения $A_1(x)$, $M\xi_1 = a_1$, а при совершении покупки второго типа получает доход в размере значения случайной величины ξ_2 с функцией распределения $A_2(x)$, $M\xi_2 = a_2$, при повторном обращении ее доход составляет долю δ_i от величины ξ_i . Здесь $1 - \delta_i$ – отношение стоимости подарка к средней стоимости покупки в каждом блоке.

Рассмотрим функцию $H(\alpha, t) = Me^{-\alpha S(t)}$, здесь $S(t)$ – суммарный доход, полученный компанией за время t , очевидно,

$$S(t) = \sum_{k=1}^{m_1(t)} \xi_1 \delta_1 + \sum_{l=1}^{m_2(t)} \xi_2 \delta_2,$$

тогда

$$\begin{aligned}
 H(\alpha, t) = & \\
 = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} & (Me^{-\alpha \xi_1 \delta_1})^{m_1} \times (Me^{-\alpha \xi_2 \delta_2})^{m_2} P(m_1, m_2, t).
 \end{aligned}$$

Обозначив

$$Me^{\alpha \xi_1 \delta_1} = \varphi_1(\delta_1 \alpha) \text{ и } Me^{\alpha \xi_2 \delta_2} = \varphi_2(\delta_2 \alpha)$$

получаем

$$H(\alpha, t) = M \{ \varphi_1(\delta_1 \alpha)^{m_1(t)} \varphi_2(\delta_2 \alpha)^{m_2(t)} \}.$$

Учитывая (2), имеем:

$$\begin{aligned}
 H(\alpha, t) = F(\varphi_1(\delta_1 \alpha), \varphi_2(\delta_2 \alpha), t) = & \\
 = \exp & \left\{ \lambda \left(\frac{r_1 r_2 (\varphi_1(\delta_1 \alpha) - 1)(\varphi_2(\delta_2 \alpha) - 1)}{(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{r_1 (\varphi_1(\delta_1 \alpha) - 1)}{1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha)} + \frac{r_2 (\varphi_2(\delta_2 \alpha) - 1)}{1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha)} \right) \times \right. \\
 & \times \varphi_1(\delta_1 \alpha) \varphi_2(\delta_2 \alpha) t + \\
 & + \lambda \frac{\left[r_1 r_2 (1 - \varphi_1(\delta_1 \alpha))(1 - \varphi_2(\delta_2 \alpha)) \times \right.}{\left. \times (1 - \exp^{-[\mu_1(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha)) + \mu_2(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))]t}) \right]}{\left((1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha)) \times \right.} \\
 & \left. \times (\mu_1(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha)) + \mu_2(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))) \right)} + \\
 & + \lambda \frac{\left[r_1 r_2 (\varphi_1(\delta_1 \alpha) - 1)(\varphi_2(\delta_2 \alpha) - 1) \times \right.}{\left. \times (1 + e^{-\mu_1(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))t}) (1 + e^{-\mu_2(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))t}) \right]}{\left((1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha)) \times \right.} \\
 & \left. \times (\mu_1(1 - r_1) + \mu_2(1 - r_2)) \right)} + \\
 & + \lambda \frac{r_1 (1 - \varphi_1(\delta_1 \alpha))(1 - e^{-\mu_1(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))t})}{\mu_1(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))^2} \times \\
 & \times \left(\frac{r_2 (\varphi_2(\delta_2 \alpha) - 1)}{(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))} + \varphi_1(\delta_1 \alpha) \varphi_2(\delta_2 \alpha) \right) + \\
 & + \lambda \frac{r_2 (1 - \varphi_2(\delta_2 \alpha))(1 - e^{-\mu_2(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))t})}{\mu_2(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))^2} \times \\
 & \times \left(\frac{r_1 (\varphi_1(\delta_1 \alpha) - 1)}{(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))} + \varphi_1(\delta_1 \alpha) \varphi_2(\delta_2 \alpha) \right) + \\
 & + \lambda \frac{r_1 (1 - \varphi_1(\delta_1 \alpha))(1 + e^{-\mu_1(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))t})}{\mu_1(1 - r_1)(1 - r_1 \varphi_1(\delta_1 \alpha))} + \\
 & + \lambda \frac{r_2 (1 - \varphi_2(\delta_2 \alpha))(1 + e^{-\mu_2(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))t})}{\mu_2(1 - r_2)(1 - r_2 \varphi_2(\delta_2 \alpha))} + \\
 & \left. + \lambda (\varphi_1(\delta_1 \alpha) \varphi_2(\delta_2 \alpha) - 1) t \right\}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя (3) по α и учитывая условия $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1'(0) = a_1$, $\varphi_2(0) = 1$, $\varphi_2'(0) = a_2$, имеем:

$$\frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \lambda t \left(\frac{r_1 \delta_1 a_1}{1 - r_1} + \frac{r_2 \delta_2 a_2}{1 - r_2} + a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 \right).$$

Откуда получаем выражение для математического ожидания капитала торговой компании

$$MS(t) = \lambda t \left(a_1 \delta_1 \left(\frac{r_1}{1 - r_1} + 1 \right) + a_2 \delta_2 \left(\frac{r_2}{1 - r_2} + 1 \right) \right). \quad (4)$$

Исследование влияния наличия маркетинговой программы (предоставление подарка) на капитал торговой компании

Определим оптимальную стоимость подарка для получения максимальной прибыли.

Очевидно, вероятность возвращения в магазин зависит от предоставляемых премий, т. е. $r_1 = r_1(\delta_1)$ и $r_2 = r_2(\delta_2)$. Тогда для определения оптимальной стоимости подарка необходимо найти максимальное значение функции (4).

Таблица. Изменение капитала торговой компании при разной стоимости подарков

$\delta_1 \backslash \delta_2$	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97
0,84	4921,12	4925,80	4928,65	4929,39	4927,62	4922,79	4914,04	4899,95
0,85	4929,81	4934,49	4937,34	4938,08	4936,31	4931,47	4922,73	4908,63
0,86	4937,74	4942,42	4945,27	4946,01	4944,24	4939,41	4930,66	4916,57
0,87	4944,85	4949,53	4952,38	4953,11	4951,34	4946,51	4937,76	4923,67
0,88	4951,03	4955,71	4958,56	4959,29	4957,52	4952,69	4943,94	4929,85
0,89	4956,17	4960,85	4963,70	4964,44	4962,67	4957,83	4949,08	4934,99
0,9	4960,13	4964,81	4967,67	4968,40	4966,63	4961,80	4953,05	4938,96
0,91	4962,74	4967,42	4970,27	4971,01	4969,24	4964,41	4955,66	4941,56
0,92	4963,75	4968,43	4971,28	4972,02	4970,25	4965,42	4956,67	4942,58
0,93	4962,86	4967,54	4970,39	4971,12	4969,35	4964,52	4955,77	4941,68
0,94	4959,61	4964,29	4967,14	4967,87	4966,10	4961,27	4952,52	4938,43
0,95	4953,34	4958,02	4960,87	4961,61	4959,84	4955,01	4946,26	4932,17
0,96	4943,04	4947,72	4950,57	4951,30	4949,53	4944,70	4935,95	4921,86
0,97	4926,87	4931,55	4934,40	4935,13	4933,36	4928,53	4919,78	4905,69
0,98	4901,09	4905,77	4908,62	4909,36	4907,59	4902,75	4894,01	4879,91
0,99	4855,13	4859,82	4862,67	4863,40	4861,63	4856,80	4848,05	4833,96
1	4540,42	4545,10	4547,95	4548,68	4546,92	4542,08	4533,33	4519,24

Рассмотрим функцию:

$$f(\delta_1, \delta_2) = a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \frac{a_1\delta_1 r_1(\delta_1)}{1-r_1(\delta_1)} + \frac{a_2\delta_2 r_2(\delta_2)}{1-r_2(\delta_2)}.$$

Используя необходимое условие экстремума, получаем систему дифференциальных уравнений для нахождения δ_1 и δ_2

$$\begin{cases} r_1'(\delta_1) = \frac{r_1(\delta_1)-1}{\delta_1}; \\ r_2'(\delta_2) = \frac{r_2(\delta_2)-1}{\delta_2}. \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда $\delta_1 \neq \delta_2$, то есть стоимость подарков в первом и втором блоках различна.

Предположим, что вероятности возвращения клиентов в каждый блок имеют вид соответственно:

$$r_1(\delta_1) = r_0^{(1)} + (r_1^{(1)} - r_0^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{n_1}},$$

$$r_2(\delta_2) = r_0^{(2)} + (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{n_2}}.$$

где r_0 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta=1$, r_1 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta=0$.

Учитывая (5), находим δ_1 и δ_2 :

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{n_1(r_1^{(1)} - 1)}{r_0^{(1)} - r_1^{(1)} + n_1(r_1^{(1)} - r_0^{(1)})}; \\ \delta_2 = \frac{n_2(r_1^{(2)} - 1)}{r_0^{(2)} - r_1^{(2)} + n_2(r_1^{(2)} - r_0^{(2)})}. \end{cases}$$

Очевидно, что при $n_1=n_2=1$ критических точек нет, следовательно, функция $f(\delta_1, \delta_2)$ при $\delta_1 \in (0;1)$ и $\delta_2 \in (0;1)$ не достигает своего максимального значения.

При $n_1 \neq 1$ и $n_2 \neq 1$ функция $f(\delta_1, \delta_2)$ достигает своего максимального значения.

Пример.

Рассмотрим случай, когда вероятности возвращения клиентов в каждый блок имеют вид соответственно $n_1=2, n_2=5$:

$$r_1(\delta_1) = r_0^{(1)} + (r_1^{(1)} - r_0^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{2}},$$

$$r_2(\delta_2) = r_0^{(2)} + (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{5}}.$$

Пусть $r_0^{(1)}=0,6, r_1^{(1)}=0,8, r_0^{(2)}=0,4, r_1^{(2)}=0,7, a_1=1200, a_2=800$, тогда $f(\delta_1, \delta_2)$ достигает своего максимального значения 4972,02 при $\delta_1=0,93$ и $\delta_2=0,92$ (таблица), тогда стоимость подарка в первом блоке составляет 7 % от средней стоимости покупки, а во втором – 8 %.

Поведение функции $f(\delta_1, \delta_2)$ можно увидеть на рис. 2. и в таблице изменения капитала компании при различной стоимости подарков.

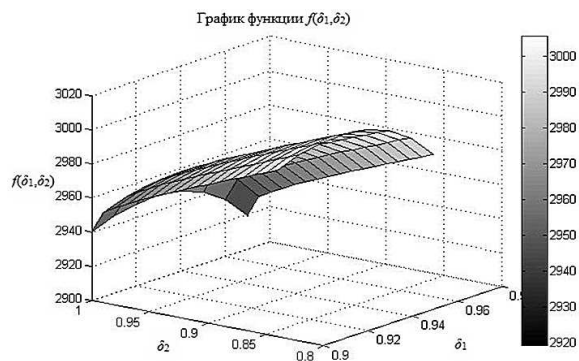


Рис. 2. График изменения капитала торговой компании при различной стоимости подарков

Выводы

В работе построена математическая модель торговой компании в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов с повторным обращением, построена и исследована экономико-математическая модель влияния наличия стимулирования натурой на прибыль торговой компании. Проведено исследование этих моделей методами теории случайных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калашникова Т.В., Извеков Н.Ю. Интеграция метода ориентации на спрос в систему ценообразования сети розничной торговли // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 6. – С. 9–13.
2. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.
3. Натан А.А. Стохастический модельный анализ простых коммерческих операций. – М.: МЗ Пресс, 2005. – 120 с.
4. Натан А.А. Стохастические модели в микроэкономике. – М.: МФТИ, 2001. – 172 с.
5. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
6. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.
7. Морозова А.С., Моисеева С.П., Одинцов К.М. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов // Научное творчество молодежи: Матер. XI Всеросс. научно-практ. конф. Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – С. 37–39.
8. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 49–52.
9. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.
10. Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2005. – № 287. – С. 46–51.
11. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 173–175.
12. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Распределение вероятностей двумерного потока обращений в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с повторным обращением // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2006. – № 16. – С. 125–128.
13. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Исследование систем параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17). – С. 49–55.
14. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения. – М.: Изд-во «Наука», 1969. – 512 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 662 с.
16. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.

Поступила 23.04.2013 г.

УДК 519.865

**ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ КАПИТАЛА
В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ**

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*, А.В. Цитко

Томский государственный университет
*Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Получены дифференциальные уравнения, определяющие изменение во времени среднего значения и дисперсии капитала, а также точные формулы для среднего значения и дисперсии капитала.

Ключевые слова:

Финансовый рынок, капитал, портфель, ценные бумаги.

Key words:

Financial market, capital, portfolio, securities.

1. Постановка задачи

В [1] решена задача формирования портфеля ценных бумаг на основе динамического программирования, допускающая точное решение. Данная работа посвящена теоретическому исследованию свойств капитала портфеля при использовании оптимального управления, полученного в [1]. Система обозначений та же, что и в [1].

2. Основные результаты

Утверждение.

При оптимальном управлении капитал $X(t)$ определяется уравнением

$$dX(t) = \frac{1}{\sigma^2 b_2(t)} \left[-(a-r)^2 b_1(t) + (r\sigma^2 - (a-r)^2) b_2(t) X(t) \right] dt - \frac{(a-r)}{\sigma b_2(t)} [b_1(t) + b_2(t) X(t)] dW(t), \quad (1)$$

где

$$b_1(t) = [b_1^1 e^{(\mu-\beta)t} - b_1^2] e^{\beta t}, \quad (2)$$

$$b_2(t) = b_2^1 e^{-(r-\beta)t} - b_2^2, \quad (3)$$

$$\beta = \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} - r,$$