УДК 519.8

ПОКАЗАТЕЛЬ СОГЛАСОВАННОСТИ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В МАТРИЦЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

И.С. Киселёв

Петербургский государственный университет путей сообщения
E-mail: igor@kiselev.spb.ru

Анализируется показатель количественной согласованности матрицы кратности предпочтений. Показано, что индекс согласованности, предложенный Т. Саати, выходит за диапазон нормирования для плохо согласованных матриц. Предложен показатель согласованности матриц кратности предпочтений на основе количественной согласованности троек сущностей.

Ключевые слова:
Матрица парных сравнений, кратность предпочтений, порядковая согласованность, количественная согласованность.
Key words:
Pairwise comparison matrix, multiplicative matrix, consistency, eigenvalue method.

Введение

Одной из проблем, возникающих при формировании экспертами матрицы парных сравнений, является анализ согласованности предпочтений. Для матрицы кратности предпочтений в работе [1] был предложен показатель количественной согласованности, названный Томасом Саати индексом согласованности (ИС):

$$\text{ИС} = \frac{\lambda_{\max} - N}{N-1}. \qquad (1)$$

Здесь $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное число матрицы **A**; N – её размерность. Для сопоставления матриц различной размерности по показателю согласованности вводится нормированный показатель – отношение согласованности: ОС=ИС/СС. В качестве нормирующей величины вводится случайная согласованность предпочтений (СС). Фактически показатели ИС и СС определяют меру *несогласованности* предпочтений. Количественной оценкой *согласованности* кратности предпочтений является величина КС=1–ИС/СС.

Определение индекса согласованности ИС через соотношение максимального положительного собственного числа матрицы с её размерностью имеет искусственный характер, что подтверждается ограниченной областью использования порождаемого на его основе показателя ОС. Для плохо согласованной матрицы значение показателей ОС выходит за рамки шкалы [0, 1], что свидетельствует о нераспространении нормирования на случаи плохо согласованных матриц. Отсюда возникает задача нахождения такого показателя рассогласованности предпочтений, который отражал бы физическую суть несогласованности предпочтений и был бы действителен для любых вариантов матрицы парных сравнений.

1. Анализ показателя количественной согласованности Т. Саати

Трактовка индекса согласованности ИС как показателя рассогласованности предпочтений позволяет принять его нормировку величиной случайной согласованности СС, интерпретируемой максимальной энтропией, т. е. максимальной неопределённостью предпочтений. Статистической характеристикой максимальной неопределённости предпочтений является их *равномерное* распределение.

Однако само определение индекса согласованности ИС через соотношение максимального положительного собственного числа матрицы с её размерностью имеет искусственный характер, что подтверждается ограниченной областью использования порождаемого на его основе показателя ОС. Проиллюстрируем это на примере плохо согласованной матрицы **M**:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ A & 1 & 1/6 & 6 \\ B & 6 & 1 & 1/5 \\ C & 1/6 & 5 & 1 \end{array}$$

Полученное для этой матрицы отношение согласованности, вычисленное на основе

ИС=(6,8–3)/(3–1)=1,912,

равно ОС=1,912/0,58=3,296,

т. е. ОС>1. Как следует из этого примера значение показателей ОС выходит за рамки шкалы [0, 1], что свидетельствует о нераспространении нормирования на случаи плохо согласованных матриц. А это означает, что либо нормировочный множитель СС не отражает максимальную рассогласованность предпочтений, либо значение показателя ИС может превышать её. Отсюда возникает задача нахождения такого показателя рассогласованности предпочтений, который с одной стороны отражал физическую суть несогласованности предпочтений, а с другой стороны был действителен для любых вариантов матрицы парных сравнений.

Если считать, что максимальной рассогласованности предпочтений соответствует максимальная неопределённость предпочтений эксперта, то согласно энтропийной природе информации функция рассогласованности должна иметь одно максимальное значение.

2. Условия согласованности и несогласованности предпочтений

Условием согласованности является транзитивность предпочтений. Она определяется на тройках сущностей x_i, x_j, $x_k \in X$ следующим образом: $x_i \succ x_j$, $x_j \succ x_k$, $x_i \succ x_k$. Это условие описывается логической функцией элементов булевой матрицы парных сравнений, отражающей факты предпочтений (лучше – 1, хуже – 0): $(a_{ij} \vee a_{jk} \vee \overline{a}_{ik}) \cdot (\overline{a}_{ij} \vee \overline{a}_{jk} \vee a_{ik})=1$.

Невыполнение условия согласованности предпочтений ($x_i \succ x_j$, $x_j \succ x_k$, $x_k \succ x_i$) определяется логическим выражением $(a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot \overline{a}_{ik}) \vee (\overline{a}_{ij} \cdot \overline{a}_{jk} \cdot a_{ik})=1$ [2]. В графе предпочтений, отражающем матрицу фактов предпочтений, нетранзитивности предпочтений соответствует цикл на тройке вершин x_i, x_j, $x_k \in X$.

Поскольку подсчёт циклов на всех тройках вершин не вызывает затруднений, наиболее просто определить показатель порядковой (ординальной) несогласованности предпочтений через количество циклов d в ориентированном графе. Не вызывает затруднений и нахождение нормирующего множителя $1/d_{\max}$. Формулы расчёта значений d и $d_{\max}$ для матрицы фактов предпочтений приведены в [3]. Максимальное число циклов $d_{\max}$ в ориентированном графе зависит от чётности числа вершин N (чётности размерности матрицы) [3].

Показатель несогласованности предпочтений определяется как отношение числа циклов d в ориентированном графе, соответствующем матрице фактов предпочтений, к максимальному числу циклов в этом графе: $d/d_{\max}$. Этот показатель имеет очевидную физическую интерпретацию и единственный максимум при $d=d_{\max}$. Порядковая согласованность предпочтений выражается дополнением относительной несогласованности $d/d_{\max}$ до единицы: $\eta=1-d/d_{\max}$ и называется коэффициентом порядковой согласованности.

При использовании в матрице парных сравнений отношения равноценности $x_i \equiv x_j$ она отображается смешанным графом. В этом случае нормирующий множитель $1/d_{\max}$ рассчитывается через число циклов на всех тройках сущностей. Оно составляет C_N^3.

В силу симметричности отношения равноценности на тройке сущностей $x_i, x_j, x_k \equiv X$: $x_i \equiv x_j$, $x_j \equiv x_k$, $x_k \equiv x_i$ образуются два цикла – в прямом и обратном направлениях. Это отношение транзитивно в обоих направлениях. К нему неприменима нетранзитивность отношения превосходства. Поэтому при подсчёте числа циклов в смешанном графе учитываются только ориентированные циклы (орциклы), направленность которых задаётся хотя бы одной дугой.

Количественная переменная в матрице кратности предпочтений измеряется в разах: $a_{ij} \in [1,9]$. При переходе от фактов к кратности предпочтений инверсия логической переменной $\overline{a}_{ik}$ заменяется обратным значением количественной переменной: $1/a_{ik}=a_{ik}^{-1}$, т. е. значением элемента матрицы, симметричного относительно главной диагонали. Связь между количественной и порядковой несогласованностью наглядно демонстрируется графом предпочтений. Исходный и преобразованный граф приведённой выше плохо согласованной матрицы **M** представлен на рисунке.

При замене элементов матрицы с дробными значениями переменных (рис. 1, *а*) на симметричные относительно главной диагонали целочисленные значения (рис. 1, *б*) орграф, не содержавший цикла, преобразовался в циклический граф. Это означает, что при условии порядковой несогласованности предпочтений обязательна количественная несогласованность предпочтений. Обратное утверждение неверно. Количественная несогласованность возможна даже при полной порядковой согласованности.

3. Функции согласованности и несогласованности предпочтений

В случае количественных предпочтений для получения оценки их несогласованности недостаточно подсчитать число циклов, т. к. каждая тройка сущностей содержит не только факт согласованности, но и ее меру. Для получения соответствующего показателя s матрицы парных сравнений будем суммировать меру согласованности всех троек сущностей:

$$s=\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} f(a_{ij},a_{jk},a_{ki}). \qquad (2)$$

За меру согласованности предпочтений тройки сущностей примем отклонение предпочтений от условия идеальной согласованности предпочтений $a_{ij}a_{jk}a_{ik}^{-1}=a_{ij}a_{jk}a_{ki}=1$. Для перехода от мультипли-

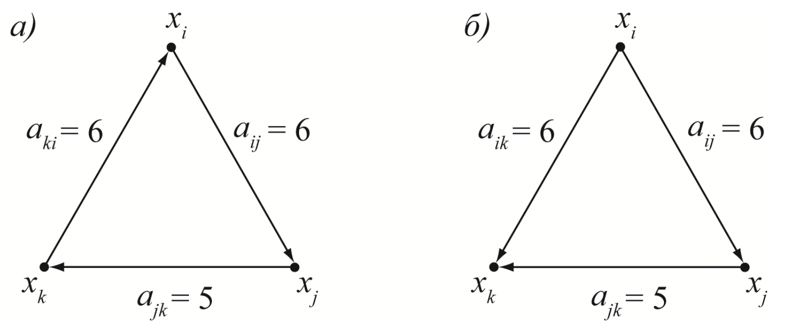

Рисунок. *Исходный и преобразованный орграф для матрицы* ***M***

кативной к аддитивной форме представления условия согласованности воспользуемся логарифмической шкалой, а для получения неотрицательного значения меры согласованности возьмём квадрат от логарифма произведения. В результате функция (2) примет следующий вид:

$$s=\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N}\ln^2(a_{ij}a_{jk}a_{ki}). \qquad (3)$$

Для нормирования величины s рассчитаем ее максимальное значение $s_{\max}$ при заданной максимальной кратности предпочтений $a_н$ [4]. Для этого возьмем матрицу соответствующую полному орграфу, содержащему максимально возможное число циклов. Примером такой матрицы является матрица, состоящая из двух треугольных матриц с чередующимися нулями и единицами (шахматного типа). Заменим в этой матрице все единицы на максимальное предпочтение $a_н$, а нули на противоположное значение $a_н^{-1}$. Матрица размерности 3 будет иметь вид:

	A	B	C
A	1	$a_н$	$1/a_н$
B	$1/a_н$	1	$a_н$
C	$a_н$	$1/a_н$	1

Согласно формуле (3) для единственного цикла получаем:

$$s=\ln^2(a_н\cdot a_н\cdot a_н)=\ln^2 a_н^3=(3\ln a_н)^2=9\ln^2 a_н,$$

где множитель 9 является функцией размерности матрицы. По значениям этого множителя, рассчитанного для матриц размерности до 18, построены два полинома (для нечётного и чётного числа N). Отсюда значение $s_{\max}$ рассчитывается по следующей формуле:

$$S_{\max}(a_н,N)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{N^3-N^2}{2}\cdot\ln^2 a_н, & \text{если } N-\text{ нечётно,}\\ \left(\dfrac{N^3-N^2}{2}-N\right)\cdot\ln^2 a_н, & \text{если } N-\text{ чётно.}\end{cases} \qquad (4)$$

Коэффициент количественной согласованности C определяется как дополнение нормированного показателя s до единицы:

$$C=1-s/s_{\max}. \qquad (5)$$

Проиллюстрируем справедливость формул (3)–(5) на примере сверхтранзитивной матрицы размерности 3 с $a_н$=10:

	A	B	C
A	1	2	3
B	1/2	1	6
C	1/3	1/6	1

Количественная согласованность C=1, поскольку $s=\ln^2(2\cdot3\cdot1/6)=\ln^2 1=0$.

Матрица размерности 3 с наихудшей согласованностью $a_н$=10 имеет вид:

	A	B	C
A	1	1/10	10
B	10	1	1/10
C	1/10	10	1

Эта матрица имеет нулевую количественную согласованность C=0 в силу равенства числителя и знаменателя дроби $s/s_{\max}$:

$$s=\ln^2(1/10\cdot1/10\cdot1/10)=\ln^2(1/10)^3=9\cdot\ln^2 10,$$

$$s_{\max}=\frac{3^3-3^2}{2}\cdot\ln^2 10=9\cdot\ln^2 10.$$

Количественная согласованность плохо согласованной матрицы **M**, рассчитанная по формулам (3)–(5), составляет менее 50 % (C=0,43), поскольку

$$s=\ln^2(1/6\cdot1/5\cdot1/6)=\ln^2(1/180)=26{,}97,$$
$$\text{а } s_{\max}(10{,}3)=9\cdot\ln^2 10=47{,}72.$$

При замене a_{AB} или a_{CA} с 1/6 на 6 количественная согласованность матрицы возрастает с 0,43 до 0,95.

Заключение

Предложенный в работе показатель количественной согласованности можно применять как для согласованных, так и для плохо согласованных матриц парных сравнений кратности предпочтений. Он имеет более широкие границы применения, чем показатель количественной согласованности Т. Саати, который, как показал анализ, не применим для оценивания плохо согласованных матриц парных сравнений. Используемый в работе метод расчета несогласованности матрицы опирается на определение понятия несогласованности, в отличие от имеющего искусственный характер и напрямую не связанного с условиями несогласованности *индекса согласованности* Т. Саати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
2. Микони С.В. Теория и практика рационального выбора. – М.: Маршрут, 2004. – 462 с.
3. Кенделл М. Ранговые корреляции. – М.: Статистика, 1975. – 216 с.
4. Микони С.В., Киселёв И.С. Универсальный алгоритм расчёта приоритета сущностей для разных типов предпочтений // Сб. докл. Междунар. конф. SCM'2005. – СПб.: СПбГЭТУ, 2005. – Т. 1. – С. 291–296.

Поступила 21.01.2011 г.