УДК 519.866

АНАЛИЗ МОДЕЛИ ЭФФЕКТИВНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ СИСТЕМЫ «ПРОИЗВОДИТЕЛЬ – НАЛОГОВЫЙ ЦЕНТР» НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА НЕТРИВИАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

П.Н. Победаш

Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск
E-mail: pobed_pnp@mail.ru

На основе принципа нетривиальности решения найдено Парето-оптимальное значение свертки критериев в модели эффективного экономического развития системы «производитель – налоговый центр» на бесконечном временном интервале с двумя экономическими агентами – производителем и налоговым центром. Это позволяет оценивать эффективность инвестиционного проекта, описываемого данной моделью, и разрабатывать инвестиционные стратегии, принимая во внимание интересы каждого из его участников.

Ключевые слова:
Многошаговая задача линейного программирования, z-преобразование, свертка критериев, инвестиционный проект, горизонт планирования.

Key words:
Sequential linear programming problem, z-transformation, criteria compression, investment project, planning horizon.

В данной статье рассматривается следующая задача экономической динамики, обобщающая задачу из работы [1] на случай двух критериев, которую назовем моделью эффективного экономического развития системы «производитель – налоговый центр», или, согласно [2], моделью *A*. Производитель (предприятие) имеет начальный капитал (свободные денежные средства). У него существует возможность организовать производство *n* видов продукции, пользующейся спросом, купив или арендовав активные основные производственные фонды (ОПФ) – станки, оборудование и т. п. *n* производственных подразделений (направлений экономической деятельности). Необходимо определить оптимальные суммы, выделяемые на приобретение ОПФ, а также выручку от реализации продукции каждого вида в заданные моменты времени и объем инвестиций, при которых чистые дисконтированные денежные потоки производителя и налогового центра за горизонт планирования *T* являются наибольшими.

Предполагается, что выполнены следующие основные предпосылки: 1) учитываются налоги, составляющие большую часть затрат предприятия: налог на добавленную стоимость (НДС), налог на прибыль (НП), налог на имущество (НИ) и отчисления в фонд оплаты труда (ФОТ); 2) предприятие имеет достаточные запасы сырья; 3) срок *T* действия инвестиционного проекта (ИП) меньше сроков T_k службы единицы ОПФ каждого типа: $T<T_k$ (k=1,...,n); 4) на ОПФ каждого типа производится лишь один вид продукции. С учетом приведенных предпосылок математическая постановка сформулированной задачи описывается в классе многокритериальных многошаговых задач линейного программирования (ММЗЛП): найти такие векторы $u(t)$ и $x(t)$, что справедливы условия

$$\begin{gathered} x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t)-s(t);\quad x(0)=a; \\ C(t)x(t)+D(t)u(t)\le h(t); \\ u(t)\ge 0\ \ (t=0,...,T-1); \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} J_i=\sum_{t=0}^{T-1}[(a_i(t),x(t))+(b_i(t),u(t))]+ \\ +(a_i(T),x(T))\to\max\ (i=1,...,N). \end{gathered} \tag{2}$$

В дальнейшем для описания многошаговых задач используются обозначения, предлложенные в работе [3]. Здесь $u(t)$ и $x(t)$ – фазовый вектор и вектор управляющих переменных, где $u_k(t)$, $u_{n+k}(t)$ (k=1,...,n), $u_{2n+1}(t)$, $u_{2n+2}(t)$ – соответственно стоимость приобретаемых ОПФ k-ого вида, выручка от реализации по k-ому виду продукции, внешние и внутренние инвестиции, а $x_k(t)$ (k=1,...,n), $x_{n+1}(t)$, $x_{n+2}(t)$, $x_{n+3}(t)$ – накопленная стоимость всех ОПФ k-ого вида, остаточная стоимость всех ОПФ, текущие денежные средства предприятия и накопленные суммы внешних инвестиций в момент t=0,...,T, n – количество видов продукции; a – вектор начального состояния; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ – матрицы коэффициентов уравнений движения и ограничений; $a_i(t)$, $b_i(t)$, $s(t)$, $h(t)$ – векторы коэффициентов целевых функций, уравнений движения и ограничений; T, N – количество шагов и критериев соответственно, t – номер шага (дискретное время). Конкретный вид перечисленных исходных матриц и векторов задачи (1), (2) для модели *A* представлен в отмеченной выше работе [2].

Рассмотрим далее ряды $U_j(z)=\sum_{t=0}^{\infty}u_j(t)z^{-t}$; $X_k(z)=\sum_{t=0}^{\infty}x_k(t)z^{-t}$ (j=1,...,2n+2;k=1,...,n+3); $U_j(z)$, $X_k(z)$ – z-изображения, которые содержательно трактуются аналогично соответствующим переменным исходной модели A с добавлением словосочетания «дисконтированная сумма» при $z=1+r$, где r – ставка дисконтирования. Как указано в работе [4], нахождение управляющего и фазового векторов, соответствующих Парето-оптимуму ММЗЛП (1), (2), равносильно решению однокритериальной задачи (1) с условием

$$\overline{J}(\mu)=\sum_{\nu=1}^{N}\mu_\nu J_\nu \to \max, \qquad (3)$$

где вектор параметров

$$\mu\in M=\{(\mu_1,...,\mu_N)\in$$
$$\in E^N:\mu_\nu>0(\nu=1,...,N);\sum_{\nu=1}^{N}\mu_\nu=1\}.$$

Поскольку для модели A число критериев $N=2$, то обозначим $\mu_1=\mu$; $\mu_2=1-\mu$. Рассмотрим вариант этой модели, когда момент начала производства $T^2=1$. Тогда, полагая $T\to\infty$ и учитывая, что $T_k\to\infty$ ($k=1,...,n$) в силу предпосылки 3), применим к задаче (1), (3) (эквивалентной модели A в смысле Парето-оптимальности) z-преобразование. Принимая во внимание свойство $z(x(t+1))=z(X(z)-x(0))$, получим, согласно [2], однокритериальную статическую задачу линейного программирования (ЗЛП):

$$zX_k(z)=X_k(z)+U_k(z)\ (k=1,...,n),$$
$$zX_{n+1}(z)=X_{n+1}(z)+\sum_{k=1}^{n}U_k(z),$$
$$zX_{n+2}(z)=-\theta X_{n+1}(z)+X_{n+2}(z)-\sum_{k=1}^{n}U_k(z)+$$
$$+\gamma\sum_{k=1}^{n}U_{n+k}(z)+U_{2n+1}(z)+U_{2n+2}(z),$$
$$zX_{n+3}(z)=X_{n+3}(z)+U_{2n+1}(z),\ X_{n+2}(z)\ge 0,$$
$$-\alpha_2X_{n+1}(z)+(1-\beta)\sum_{k=1}^{n}U_{n+k}(z)\ge 0,$$
$$U_{n+k}(z)\le Q_k(z),\ U_{n+k}(z)\le\delta_kX_k(z)(k=1,...,n),$$
$$X_{n+3}(z)\le I_0/(z-1),\ U_{2n+2}(z)\le K_0; \qquad (4)$$
$$U_k(z)\ge 0(k=1,...,2n+2);$$
$$\overline{J}(\mu,z)=\mu\overline{J}_1(z)+(1-\mu)\overline{J}_2(z)\to\max\ (\mu\in(0;1)),$$

где

$$\overline{J}_1(z)=-\theta X_{n+1}(z)+$$
$$+\gamma\sum_{k=1}^{n}U_{n+k}(z)-[U_{2n+1}(z)+U_{2n+2}(z)],$$
$$\overline{J}_2(z)=\theta X_{n+1}(z)+\rho\sum_{k=1}^{n}U_{n+k}(z),$$

$\mu_1=\mu$; $\mu_2=1-\mu$. В задаче (4) $\theta=(1-\alpha_3)\alpha_2$, $\gamma=(1-\alpha_3)(1-\beta)$, $\delta_k=P_kV_k/c_k$, $Q_k(z)=\sum_{t=1}^{\infty}q_k(t+1)z^{-t}$ ($k=1,...,n$), $\rho=(1-\beta)\alpha_3$, где α_i ($i=1,...,3$) – ставки НДС, НИ и НП соответственно; β – доля выручки от реализации, выделяемая на ФОТ; $q_k(t+1)$ ($t=1,...,T-1$), V_k, T_k, c_k и P_k – соответственно прогнозный спрос в стоимостном выражении для момента $t+1$, производительность, срок службы, стоимость единицы ОПФ и стоимость единицы продукции k-го типа; I_0, K_0 – суммы внешних и внутренних инвестиций, выделяемых на весь срок действия ИП. Полагаем для простоты, что $\alpha_1=0$, так как НДС включается в цену продукции и фактически выплачивается потребителем. При $\alpha_1>0$ модели A и ZA анализируются аналогично.

Отметим, что в силу (3) однокритериальная статическая задача (4) равносильна двухкритериальной ЗЛП при тех же ограничениях и условии $\overline{J}(z)=\{\overline{J}_1(z),\overline{J}_2(z)\}\to\max$, которую, следуя [2], назовем агрегированной моделью эффективного экономического развития (системы «производитель – налоговый центр») на бесконечном интервале, или моделью ZA.

Дадим содержательную трактовку ограничений и целевых критериев задачи (4). Ее равенства, в отличие от уравнений динамики в задаче (1), (2), представляют собой балансовые (статические!) уравнения соответственно дисконтированных сумм стоимостей ОПФ всех производственных подразделений, суммарной остаточной стоимости ОПФ, всех денежных средств и накопленных внешних инвестиций предприятия за весь бесконечный срок действия ИП. 1-е и 2-е неравенства означают неотрицательность дисконтированных сумм денежных средств и чистой прибыли всех производственных подразделений на всем бесконечном горизонте планирования. 3-е и 4-е неравенства в ZA задают ограничения на дисконтированную сумму объема продаж продукции, произведенной k-м ОПФ (подразделением), соответственно суммарным дисконтированным спросом и дисконтированной суммой выпуска по k-му виду продукции. 5-е неравенство в (4) является ограничением на дисконтированные суммы внешних, а 6-е – внутренних инвестиций, выделяемых на реализацию ИП; 7-е условие означает неотрицательность дисконтированных сумм соответствующих переменных модели A.

Обозначим «*» оптимальные значения сверток критериев. Для модели A справедливы теоремы 1–3, доказанные в [2], и используемые в дальнейшем.

Теорема 1. В задаче A существует решение на конечном интервале времени.

Теорема 2. Если выполняются условия:

$$\overline{q}_k<+\infty(k=1,...,n);\ T\to\infty;\ r>0;\ T^2=1, \qquad (5)$$

где $\overline{q}_k$ – максимальный спрос за весь период производства по k-ому виду продукции, то задача A имеет решение. При этом оптимальные значения сверток критериев

$$J_T^*(\mu)=\mu J_1^*+(1-\mu)J_2^* \text{ и } J^*(\mu)=\lim_{T\to\infty}J_T^*(\mu)$$

на конечном и бесконечном интервалах в проекте, описываемом указанной задачей, неотрицательны:

$$J_T^*(\mu) \ge 0 \; (T \in \{1, 2, ...\}); \;\; J^*(\mu) \ge 0 \; (\mu \in [0;1]).$$

Теорема 3. Свертка $J_T^*(\mu)$ в проекте, описываемом моделью A, есть неубывающая функция от параметров $T,n,T^1,\gamma,\delta,\delta_k,q_k(t+1)$ $(k\in\{1,...,n\};t\in\{T^2+1,...T-1\})$; I_0,K_0 и невозрастающая от показателей T^2,θ и r $(T,n,T^1,T^2\in\{1,2,...\})$ при неизменных значениях остальных параметров и $\mu\in[0;1]$.

Из теоремы 2 следует: ИП с отрицательной сверткой заведомо неоптимален. Кроме того, так как свертка критериев $J_T^*(\mu)$ в задаче A является невозрастающей функцией по параметру T^2, то из теоремы 3 следует справедливость теоремы 2 для произвольных значений этого параметра.

Исключая $X_k(z)$ $(k=1,...,n+3)$ из статической задачи (4), получим статическую ЗЛП:

$$-(\theta + z - 1)\sum_{k=1}^{n} U_k(z) + \gamma(z-1) \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) + (z-1)(U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z)) \ge 0,$$
$$-\alpha_2 \sum_{k=1}^{n} U_k(z)/(z-1) + (1-\beta)\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) \ge 0,$$
$$U_{n+k}(z) \le Q_k(z),$$
$$U_{n+k}(z) \le \delta_k U_k(z)/(z-1) \; (k = 1,...,n),$$
$$U_{2n+1}(z) \le I_0, \; U_{2n+2}(z) \le K_0,$$
$$U_k(z) \ge 0 \; (k = 1,...,2n+2),$$
$$\bar{\bar{J}}(\mu, z) = [1-2\mu]\theta \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{n} U_k(z)/(z-1) + [\mu\gamma + (1-\mu)\rho] \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) - \mu[U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z)] \to$$
$$\to \max(\mu \in (0;1)), \qquad (6)$$

где $\bar{\bar{J}}(\mu, z) = \bar{J}(\mu, z)$.

В силу соотношения (3) однокритериальная ЗЛП (6) эквивалентна двухкритериальной с теми же ограничениями и условием

$$\bar{\bar{J}}(z) = \{\bar{\bar{J}}_1(z), \bar{\bar{J}}_2(z)\} \to \max,$$

где

$$\bar{\bar{J}}_1(z) = -\theta\sum_{k=1}^{n} U_k(z)/(z-1) +$$
$$+\gamma\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z) - [U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z)],$$
$$\bar{\bar{J}}_2(z) = \theta\sum_{k=1}^{n} U_k(z)/(z-1) + \rho\sum_{k=1}^{n} U_{n+k}(z),$$
$$\bar{\bar{J}}(\mu, z) = \mu\bar{\bar{J}}_1(z) + (1-\mu)\bar{\bar{J}}_2(z).$$

Из 4-го и 7-го неравенств (для $k=n+1,...,2n$) задачи (6) следует 7-ое условие для $k=1,...,n$, которое исключим как избыточное. Рассматривая пока $U_{2n+1}(z)\in[0;I_0]$, $U_{2n+2}(z)\in[0;K_0]$ как параметры, опуская для краткости z и переставив 1-е и 2-е условия на 3-е и 4-е место соответственно, запишем задачу, двойственную к указанной ЗЛП (при этом неограниченным по знаку переменным в прямой задаче соответствуют равенства в двойственной):

$$-\frac{\delta_k\lambda_{n+k}}{r} + (\theta + r)\lambda_{2n+1} + \theta\lambda_{2n+2} =$$
$$= \frac{\theta(1-2\mu)}{r} \; (k = 1,...,n),$$
$$\lambda_k + \lambda_{n+k} - \gamma r[\lambda_{2n+1} + \lambda_{2n+2}] \ge$$
$$\ge \mu\gamma + (1-\mu)\rho \; (k = 1,...,n),$$
$$\lambda_k \ge 0 \; (k = 1,...,2n+2),$$
$$\mathop{J}^{\approx}{}_D(\mu, z) = \sum_{k=1}^{n} Q_k\lambda_k + r[U_{2n+1} + U_{2n+2}]\lambda_{2n+1} \to$$
$$\to \min \; (\mu \in (0;1)), \qquad (7)$$

где

$$\bar{\bar{J}}_D(\mu, z) =$$
$$= \mathop{J}^{\approx}{}_D(\mu, z) - \mu[U_{2n+1}(z) + U_{2n+2}(z)] \; (\mu \in (0;1)).$$

Выражая λ_{n+k} $(k=1,...,n)$ из равенств задачи (7), применяя принцип нетривиальности решения, т. е. находя ненулевые компоненты ее решения

$$\lambda_k^* > 0 \; (k = 1,...,n_1), \;\; \lambda_k^* = 0 \; (k = n_1+1,...,n), \qquad (8)$$

где «*» обозначены оптимальные значения переменных и критериев, $n_1\in\{0,...,n\}$ – количество таких компонент, и учитывая, что в ЗЛП оптимум достигается лишь на границе, перейдем к следующей задаче:

$$(\theta + r - \gamma\delta_k)\bar{\lambda}_{2n+1} + (\theta - \gamma\delta_k)\bar{\lambda}_{2n+2} \ge$$
$$\ge \varphi_k \; (k = n_1+1,...,n),$$
$$(\theta + r)\bar{\lambda}_{2n+1} + \theta\bar{\lambda}_{2n+2} \ge [1-2\mu]\theta,$$
$$\bar{\lambda}_k \ge 0 \; (k = 2n+1, 2n+2),$$
$$\tilde{\tilde{\tilde{J}}}_D(\mu, z) = \eta_1\bar{\lambda}_{2n+1} + \eta_2\bar{\lambda}_{2n+2} \to \min \; (\mu \in (0;1)). \qquad (9)$$

Здесь

$$\eta_1 = U_{2n+1} + U_{2n+2} - \sum_{k=1}^{n_1} Q_k(\theta + r - \gamma\delta_k)/\delta_k,$$
$$\eta_2 = -\sum_{k=1}^{n_1} Q_k(\theta - \gamma\delta_k)/\delta_k,$$
$$\mathop{J}^{\approx}{}_D(\mu, z) = \tilde{\tilde{\tilde{J}}}_D(\mu, z) + \sum_{k=1}^{n_1} Q_k\varphi_k/\delta_k \; (\mu \in (0;1)),$$
$$\bar{\lambda}_j = r\lambda_j \; (j = 2n+1, 2n+2),$$

$\varphi_k=[1-2\mu]\theta+[\mu\gamma+(1-\mu)\rho]\delta_k$ $(k=1,...,n)$, а символ «*» для простоты опущен.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. Неравенство

$$\varphi_k \le 0\ (k \in \{1,...,n\}) \qquad (10)$$

равносильно условиям

$$\left[\begin{array}{l} \delta_k < \theta/\gamma,\ \mu \in (0{,}5;1) \\ \delta_k \le \theta/\gamma,\ \mu = 1 \end{array}\right. \quad (k \in \{1,...,n\}).$$

Лемма 2. Если $\varphi_k>0$ ($k\in\{n_1+1,...,n\}$), то справедливо условие:

$$\theta + r - \gamma\delta_k > 0\ (k \in \{n_1+1,...,n\};\ \mu \in (0;1)).$$

Заметим, что условие (10) возможно лишь при $\mu\in(0{,}5;1]$, поскольку иначе $\varphi_k>0$ ($k=1,...,n$).

Легко видеть, что если $\delta_{k_1}=\delta_{k_2}$ при $k_1\neq k_2$, т. е. в модели *ZA* существуют *различные* виды ОПФ с *одинаковыми* максимальными фондоотдачами, то соответствующие им первые неравенства в (9) совпадают, а значит, одно из них (любое!) можно исключить как избыточное, уменьшив соответственно *n* и n_1. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности анализа, полагаем, что

$$\delta_{k_1} \neq \delta_{k_2}\ \ (k_1 \neq k_2 \in \{n_1+1,...,n\}). \qquad (11)$$

Обозначим l_j ($j=0,...,n-n_1$) – прямые, задаваемые на плоскости переменных $\lambda-m$ ($m=2n+1,2n+2$) уравнениями

$$(\theta + r - \gamma\delta_{j+n_1})\bar{\lambda}_{2n+1} + (\theta - \gamma\delta_{j+n_1})\bar{\lambda}_{2n+2} = \\ = \varphi_{j+n_1}\ \ (j=1,...,n-n_1), \qquad (12)$$

$$(\theta + r)\bar{\lambda}_{2n+1} + \theta\bar{\lambda}_{2n+2} = [1-2\mu]\theta\ \ (j=0),$$

соответствующие 1-му ($j=k-n_1$) и 2-му ($j=0;\delta_0$) неравенству (9). Решив систему из двух неэквивалентных (по условию (11)) уравнений относительно двух неизвестных $\bar{\lambda}_{2n+1}$, $\bar{\lambda}_{2n+2}$ вида (12) для $j=j_1,j_2\in\{0,...,n-n_1\}$; $j_1\neq j_2$, найдем *единственную* точку пересечения прямых l_j с координатами

$$\bar{\lambda}^0_{2n+1} = \frac{\theta(\gamma+\rho)(1-\mu)}{r\gamma};\ \ \bar{\lambda}^0_{2n+1} = -\frac{\chi_0}{r\gamma},$$

где $\chi_0=\mu\gamma r+(1-\mu)[(\theta+r)\rho+\gamma\theta]$. Отметим, что

$$\bar{\lambda}^0_{2n+1} > 0;\ \bar{\lambda}^0_{2n+2} < 0\ (\mu \in (0;1)).$$

Уравнения (11) представим *формально* как уравнение в отрезках $\dfrac{\lambda_{2n+1}}{\alpha_0(\delta)} + \dfrac{\lambda_{2n+2}}{\beta_0(\delta)} = 1$ ($j=0,...,n-n_1$), где функции $\alpha_0(\delta)=\varphi(\delta)/(\theta r-\gamma\delta)$; $\beta_0(\delta)=\varphi(\delta)/(\theta-\gamma\delta)$, причем $\delta=\delta_{j+n_1}$ ($j=1,...,n-n_1$) и $\delta=0$ ($j=0$). Учитывая, что эти функции возрастают по δ, сведем анализ задачи (9) к двум вариантам:

$$\bar{\delta} < \theta/\gamma, \qquad (13)$$

$$\bar{\delta} \ge \theta/\gamma, \qquad (14)$$

где $\bar{\delta} = \max\limits_{k=n_1+1,...,n} \delta_k = \delta_{k_0}\ \ (k_0 \in \{n_1+1,...,n\})$.

В частности, при $k=k_0$ из леммы 2 получим:

$$\theta + r - \gamma\delta_{k_0} > 0\ (k_0 \in \{n_1+1,...,n\}). \qquad (15)$$

В силу леммы 1 при $\mu\in(0{,}5;1]$ 1-е и 2-е ограничения ЗЛП (9) можно убрать как избыточные, т. е. ее решение тривиально. Поэтому полагаем $\varphi_k>0$ ($k=n_1+1,...,n$), что равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \mu \in [0;0{,}5] \\ \delta_k \ge \theta/\gamma,\ \mu \in (0{,}5;1)\ (k \in \{n_1+1,...,n\}), \\ \delta_k > \theta/\gamma,\ \mu = 1 \end{array}\right.$$

из последних двух соотношений которой получим условие (14).

Рассмотрим далее, в соответствии с условиями (13) и (14), 2 альтернативы.

1) Если справедливо соотношение (13), то ЗЛП (9) равносильна задаче

$$(\theta + r - \gamma\bar{\delta})\bar{\lambda}_{2n+1} + (\theta - \gamma\bar{\delta})\bar{\lambda}_{2n+2} \ge \bar{\varphi},$$

$$\bar{\lambda}_k \ge 0\ (k = 2n+1, 2n+2),$$

$$\tilde{\tilde{J}}_D(\mu,z) = \eta_1\bar{\lambda}_{2n+1} + \eta_2\bar{\lambda}_{2n+2} \to \min\ (\mu \in (0;1)).$$

Здесь $\bar{\varphi}=\bar{\varphi}(\bar{\delta})$.

2) Если верно условие (14), то ЗЛП (9) эквивалентна задаче, отличающейся от последней ЗЛП отсутствием избыточного условия $\bar{\lambda}_{2n+1}\ge0$.

Будем искать *однозначное* решение *ZA*, а, следовательно, и ЗЛП (9) в критериальном пространстве, т. е. с точностью до *угловых* оптимальных точек, в которых достигаются *различные* оптимальные значения критерия. При этом угловые точки оптимума в задачах, отмеченных в пунктах 1) и 2), принадлежат прямой l_{k_0}, т. е. справедливо равенство

$$(\theta + r - \gamma\bar{\delta})\bar{\lambda}_{2n+1} + (\theta - \gamma\bar{\delta})\bar{\lambda}_{2n+2} = \bar{\varphi},$$

с учетом которого имеем:

$$\lambda_k = \frac{(\chi_0 + r\gamma\bar{\lambda}_{2n+2})(\delta_k - \delta_{k_0})}{(\theta + r - \gamma\delta_{k_0})\delta_k}\ (k=1,...,n_1).$$

Поскольку справедливо неравенство в (8), условие (15), $\bar{\lambda}_{2n+2}\ge0$, $r>0$, $\gamma>0$, $\chi_0>0\ \forall\mu\in(0;1)$, $\delta_k>0\ \forall k=1,...,n$ по содержательному смыслу, то из последней формулы следует лемма.

Лемма 3. В задаче (7) выполняется условие:

$$\delta_k > \delta_{k_0}\ \ (k=1,...,n_1).$$

Учитывая, что

$$\bar{\bar{J}}^*(\mu,z) = \bar{\bar{J}}^*_D(\mu,z),$$

а также леммы 1–3, и, упорядочивая δ_k ($k=1,...,n$) по возрастанию, после анализа ЗЛП из пунктов 1) и 2) получим теорему.

Теорема 4. Значение свертки критериев $\bar{J}^*(\mu,z)$ в задаче *ZA* определяется формулами:

$$\overline{J}^*(\mu,z)=$$
$$=\begin{bmatrix} \sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{Q_k\varphi_k}{\delta_k}-\mu\rho_1, & \begin{cases}\eta_2\ge 0\\ 0\le\rho_1\le I_0+K_0\end{cases}\\ \left(\frac{\theta(\gamma+\rho)(1-\mu)-\mu r\gamma}{\theta-\gamma\overline{\delta}}\right)\rho_3, & \begin{cases}\eta_2>0\\ \rho_3\le I_0+K_0\end{cases}\\ \frac{\chi_0\rho_3+\overline{\psi}\rho_2}{\theta+r-\gamma\overline{\delta}}, & \begin{cases}\overline{\psi}\le 0\\ \rho_1\le\rho_4\end{cases}\\ \frac{\chi_0\rho_3+\overline{\psi}\rho_4}{\theta+r-\gamma\overline{\delta}}, & \begin{cases}\overline{\psi}>0\\ \rho_1\le\rho_4\end{cases}\end{bmatrix}$$
$$\left(\mu\in(0;0{,}5];\overline{\delta}<\frac{\theta}{\gamma}\right);$$
$$\overline{J}^*(\mu,z)=$$
$$=\begin{bmatrix} \frac{\chi_0\rho_3+\overline{\psi}\rho_2}{\theta+r-\gamma\overline{\delta}}, & \begin{cases}\overline{\psi}\le 0\\ \rho_1\le I_0+K_0\end{cases}\\ \frac{\chi_0\rho_3+\overline{\psi}(I_0+K_0)}{\theta+r-\gamma\overline{\delta}}, & \begin{cases}\overline{\psi}>0\\ \rho_1\le I_0+K_0\end{cases}\end{bmatrix}$$
$$\left(\mu\in(0;1);\overline{\delta}\ge\frac{\theta}{\gamma}\right), \qquad (16)$$

где

$$\rho_1=\sum_{k=k_0+1}^{n}Q_k(\theta+r-\gamma\delta_k)/\delta_k,\ \rho_2=\max(\rho_1;0),$$
$$\rho_3=\sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{Q_k}{\delta_k}(\delta_k-\overline{\delta}),$$
$$\rho_4=\min(r\gamma\rho_3/(\theta-\gamma\overline{\delta});I_0+K_0),$$
$$\eta_2=-\sum_{k=k_0+1}^{n}\frac{Q_k(\theta-\gamma\delta_k)}{\delta_k},\ \overline{\psi}=\overline{\varphi}-\mu(\theta+r-\gamma\overline{\delta}).$$

В частности, при $k_0=n$, так как $\rho_i=0$ ($i=1,...,4$); $\eta_2=0$, из формул (16) имеем:

$$\overline{J}^*(\mu,z)=0,\mu\in(0;0{,}5];\ \overline{\delta}<\frac{\theta}{\gamma};$$
$$\overline{J}^*(\mu,z)=\begin{bmatrix}0,\overline{\psi}\le 0\\ \frac{\overline{\psi}(I_0+K_0)}{\theta+r-\gamma\overline{\delta}},\overline{\psi}>0\end{bmatrix}\left(\mu\in(0;1);\overline{\delta}\ge\frac{\theta}{\gamma}\right).$$

Это совпадает с результатами анализа модели *ZB*1 (частного случая задачи *ZA,* когда спрос на продукцию неограничен, т. е. 1-е условие (5) нарушено), полученных из условий Куна–Таккера (см. [2], гл. 3). Справедливость формул (16) также подтверждена численно.

Так как по построению и теореме 3 для сверток критериев $J_T(\mu)$ и $\overline{J}^*(\mu,z)$ задач *A* и *ZA* справедливо неравенство (см. [2]):

$$J_T(\mu)\le J(\mu)\le\overline{J}(\mu,z), \qquad (17)$$

то из теоремы 4 следует теорема 5.

Теорема 5. Свертка критериев $J_T(\mu)$ в ИП, описываемом моделью *A*, не превосходит значений функции $\overline{J}^*(\mu,z)$, заданной формулами (16), где последовательность δ_k ($k=1,...,n$) возрастает.

Заметим, что по теореме 4 (либо теореме 5), выбирая в качестве δ_{k_0} текущее δ_k, удовлетворяющее условию (15), не более, чем за $n+1$ шагов (поскольку $k_0\in\{0,...,n\}$) найдем такой номер k_0, при котором выполняется система неравенств в указанных формулах, задающих область определения функции $\overline{J}^*(\mu,z)$, а значит, получим и соответствующее им значение этой функции в модели *ZA* (его оценку сверху для модели *A*). При этом по формулам (16) упомянутая функция определяется однозначно в силу единственности показателя, $\overline{\delta}$. При численной реализации расчетов по указанным формулам удобно выразить ρ_i ($i=1,...,4$) и η_2 через вспомогательные суммы $s_1(k_0)=\sum_{k=k_0+1}^{n}Q_k/\delta_k$ и $s_2(k_0)=\sum_{k=k_0+1}^{n}Q_k$, для которых имеют место рекуррентные соотношения: $s_1(j)=s_1(j+1)+Q_{j+1}/\delta_{j+1}$; $s_2(j)=s_2(j+1)+Q_{j+1}$ ($j=n-1,...,0$), причем $s_i(n)=0$ ($i=1;2$).

Отметим, что если верно 1-ое из условий (5), то $Q_k(z)$ ($k=1,...,n$), а значит, ρ_i ($i=1,...,4$) и η_2 конечны, откуда в силу (16) имеем: $\overline{J}(\mu,z)<\infty$. Тогда из (17) следует, что $\overline{J}(\mu)$ ограничена сверху. Поскольку нулевое управление в задаче *A* допустимо, т. е. множество управлений непусто, то из (5) вытекает разрешимость указанной ММЗЛП на бесконечном интервале времени, или 1-ое утверждение теоремы 2.

Так как свертка критериев $J_T^*(\mu)$ в задаче *A* является неубывающей по параметру *T* и невозрастающей по T^2 в силу теоремы 3, то теорема 5 имеет место не только на бесконечном, но и на конечном горизонте планирования, причем для любых значений T^2.

Выводы

На основе принципа нетривиальности решения модели эффективного экономического развития системы «производитель – налоговый центр» на бесконечном интервале времени найдены выражения оптимального значения свертки критериев ее экономических агентов, что позволяет оценивать фронт ее Парето-множества в критериальном пространстве. Показано, что эти выражения справедливы как на бесконечном, так и на конечном временном интервале. Полученные формулы дают возможность оценить инвестиционную привлекательность реализуемого по указанной модели проекта с учетом целей каждого участника (производителя и налогового центра) для выработки компромиссных инвестиционных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (НИР 2.1.1/2710).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведев А.В., Победаш П.Н. Применение z-преобразования и дискретного принципа максимума к анализу модели реальных инвестиций // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. – 2006. – № 4 (11). – С. 32–37.
2. Медведев А.В. Применение *z*-преобразования к исследованию многокритериальных линейных моделей регионального экономического развития. – Красноярск: Изд-во СибГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева, 2008. – 228 с.
3. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. – М.: Наука, 1973. – 256 с.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

Поступила 24.11.2009 г.

УДК 519.865

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛА НЕКОММЕРЧЕСКОГО ФОНДА ПРИ ГИСТЕРЕЗИСНОМ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ

К.И. Лившиц, Я.С. Бублик*

Томский государственный университет
*Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске
E-mail: kim47@mail.ru

Получены уравнения, определяющие плотность распределения капитала некоммерческого фонда при гистерезисном управлении капиталом. Найдено решение уравнений при экспоненциальном распределении поступающих в фонд премий и в случае малой нагрузки премии.

Ключевые слова:
Некоммерческий фонд, гистерезисное управление, плотность распределения капитала, малая нагрузка премии.
Key words:
Uncommercial fund, hysteresis control, distribution density of funds capital, small premium load.

Математическая модель изменения капитала фонда

Под некоммерческим фондом понимается организация, созданная для сбора и распределения денежных средств без получения прибыли. К некоммерческим фондам могут быть отнесены, в частности, все государственные внебюджетные фонды РФ. Построению и исследованию моделей некоммерческих фондов посвящены, например, работы [1–4]. В упомянутых работах исследование характеристик деятельности фонда проводилось в предположении, что управление капиталом фонда является релейным. В настоящей работе рассматривается более общий случай, когда управление капиталом фонда является гистерезисным.

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени t. В работе предполагается, что с капиталом $S(t)$ могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Будем считать, что моменты поступления денежных средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ. Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми одинаково распределенными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\}=a$ и вторым моментом $M\{x^2\}=a_2$.
2. Фонд расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что расходование денежных средств происходит непрерывно во времени со скоростью $b(s)$, так что за время Δt выплата составляет $b(s)\Delta t$. Предполагается, что управление расходованием денежных средств определяется следующим образом. Устанавливаются два пороговых значения капитала S_1 и S_2, причем $S_1<S_2$. В области $S(t)<S_1$ $b(s)=b_0$, в области $S(t)>S_2$ $b(s)=b_1$. Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то естественно считать, что

$$b_0 < \lambda a, \quad b_1 > \lambda a. \tag{1}$$

Таким образом, при $S<S_0$ фонд расходует в среднем меньше средств, чем собирает, а при $S>S_0$ расходует в среднем больше средств, чем него поступает.

Что касается области $S_1 \le S \le S_2$, то здесь устанавливается $b(s)=b_0$ или $b(s)=b_1$ в зависимости от того, как процесс $S(t)$ вошел в эту область. Если он вошел в нее через порог S_1 снизу вверх, то остается $b(s)=b_0$; если же он вошел в эту область через порог S_2 сверху вниз, то остается $b(s)=b_1$. Таким образом, значение $b(s)=b_1$ устанавливается при достижении капиталом $S(t)$ значения S_2 и оканчивается при уменьшении капитала до значения S_1. Область $S_1 \le S \le S_2$ и представляет собой область гистерезиса в управлении капиталом.

Наконец, будем считать, что при $S<0$ фонд не прекращает своей деятельности, но наступает период неплатежеспособности фонда, обязательства фонда выполняются по мере поступления денежных средств.