УДК 511

ДЕЯКІ ПИТАННЯ СТРУКТУРНОЇ ТЕОРІЇ ДОДАВАННЯ МНОЖИН

В.М. Євладенко, Ю.П. Пігарьов

Доведено теорему про існування множин, для яких $\overline{R} > C \cdot T$, де С – як завгодно велике дійсне число, а також знайдені значення $\frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$ у вершинах критичних трикутників.

Generalization of theorem on the existence for which $\overline{R} > C \cdot T$, where C – any big real number. The meanings $\frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$ at the axis of critical triangles have been found.

Вважалось /повідомлено в 1966 р. угорським математиком П.Ердешем/, що $T \le 2 \cdot R + 1 = \overline{R}$. Здавалось правдоподібним, що $T \ge R + k$, тобто

$$R + k \le T \le \overline{R}, \qquad (1)$$

де k – кількість елементів скінченної множини K цілих чисел, T – число різних сум елементів цієї множини, а R – число додатніх різниць елементів множини K.

В роботі [1, с.58] ставляться задачі про залежність між інваріантами ізоморфних перетворень, зокрема між інваріантами T і R.

Виявилось, що нерівності (1) не завжди мають місце. Більше того, справедлива наступна теорема. [2, с. 172]:

нехай $\alpha = \underline{\lim}_{K} \frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$ і $\beta = \overline{\lim}_{K} \frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$, тоді

$$\frac{3}{4} \le \alpha \le \frac{\ln 28}{\ln 43} < 0{,}89 \qquad \text{і} \qquad 1{,}017 < \frac{\ln 59}{\ln 55} \le \beta \le \frac{4}{3}.$$

В роботі [3, с. 51-55] побудовано такі множини, для яких як різниця $T - \overline{R}$, так і різниця R-T дорівнюють будь-якому наперед заданому натуральному числу n.

В роботі [4, с. 52-59] побудовано множини, для яких

$$R_n = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{n^2 - n}{2} \qquad \text{і} \qquad T_n = T_1 \cdot \frac{n^2 + n}{2},$$ а також наведено

приклад множини, для якої $\frac{\ln 115}{\ln 103} \approx 1{,}02378$, тобто $1{,}02378 < \beta \le \frac{4}{3}$.

В даній статті доведено теорему про існування множин, для яких $\overline{R} > C \cdot T$, де C – як завгодно велике дійсне число, а також знайдено значення $\frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$ у вершинах критичних трикутників.

<u>Теорема</u>. Існують множини, для яких $\overline{R} > C \cdot T$, де C – як завгодно велике дійсне число.

В роботі [4, с. 54] було доведено існування множин, для яких $T_m = \prod_{i=1}^{m} \frac{k_i^2 + k_i}{2}$, а $\overline{R}_m = \prod_{i=1}^{m} (k_i^2 - k_i + 1)$, тоді $\frac{T_m}{\overline{R}_m} = \prod_{i=1}^{m} \frac{k_i^2 + k_i}{2(k_i^2 - k_i + 1)}$. (2)

Легко показати, що $\frac{k_i^2 + k_i}{2(k_i^2 - k_i + 1)} \le \frac{3}{4}$ при $k_i \ge 5$.

Дійсно, $4 \cdot \frac{k_i^2 + k_i}{2} \le 3(k_i^2 - k_i + 1)$, або $2 \cdot k_i^2 + 2 \cdot k_i \le 3 \cdot k_i^2 - 3k_i + 3$, звідки $k_i^2 - 5k_i + 3 \ge 0$. Одержана нерівність виконується при $k_i \ge 5$. Тоді з (2) слідує, що $\frac{T_m}{\overline{R}_m} \le \prod_{i=1}^{m} \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^m$. Очевидно, що $\lim_{m \to \infty} \frac{T_m}{\overline{R}_m} = 0$. Звідси випливає, що при досить великих m $\frac{T_m}{\overline{R}_m} < \varepsilon$, де ε – як завгодно мале додатне дійсне число. Отже $\overline{R}_m > \frac{1}{\varepsilon} \cdot T_m$ або $\overline{R}_m > C \cdot T_m$, де С – як завгодно велике дійсне число. Теорему доведено.

Зауваження. Як відомо [4, с. 57], праві вершини критичних трикутників мають координати $\left(\frac{k^2 - k}{2}; \frac{k^2 + k}{2}\right)$. Звідси випливає, що для квадрата АВСД(k) маємо:

$$\overline{R} = k^2 - k + 1, \text{ а } T = \frac{k^2 + k}{2}.$$

Складемо таблицю значень $k, \overline{R}, T, \frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$.

k	$\overline{R}$	T	$\frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$	k	$\overline{R}$	T	$\frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$
8	57	36	0,8863	25	601	325	0,9039
9	73	45		30	871	465	0,9073
10	91	55		35	1191	625	0,9089
11	111	66		40	1561	820	0,9124
12	133	78	0,8908	45	1981	1025	0,9131
13	157	91		50	2451	1275	0,9163
14	183	105		60	3541	1830	0,9192
15	211	120		70	4831	2485	0,9216
16	241	136	0,8957	80	6321	3240	0,9236
17	273	153		90	8011	4095	0,9254
18	307	171		100	9901	5050	0,9268
19	343	190		500	249501	125250	0,9445
20	381	210	0,8998	1000	999001	500500	0,9499

Як приклад, побудуємо множину, для якої $\overline{R} \geq 100 \cdot T$. Нехай $K_i = \{2, 2^2, 2^3, ...2^{ki}\}$, $i \in N$. За наслідком 1 теореми 4 /див. [4, с. 54]/ маємо:

$$T(2 \cdot K_i) = \frac{k_i^2 + k_i}{2} \qquad \text{і} \qquad \overline{R}_i = k_i^2 - k_i + 1.$$

При m=16 маємо:

$$T_{16} = \prod_{i=1}^{16} \frac{k_i^2 + k_i}{2} \qquad \text{і} \qquad \overline{R}_{16} = \prod_{i=1}^{16} (k_i^2 - k_i + 1), \text{ а}$$

$$\frac{T_{16}}{\overline{R}_{16}} = \prod_{i=1}^{16} \frac{k_i^2 + k_i}{2(k_i^2 - k_i + 1)} \leq \prod_{i=1}^{16} \frac{3}{4}, \text{ оскільки } \frac{k_i^2 + k_i}{2(k_i^2 - k_i + 1)} \leq \frac{3}{4} \text{ при } k_i \geq 5.$$

$$\text{Тоді } \frac{T_{16}}{\overline{R}_{16}} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{16} \leq \frac{1}{100}, \text{ звідки } \quad \overline{R}_{16} \geq 100 \cdot T_{16}.$$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Фрейман Г.А. Начала структурной теории сложения множеств. – Казань, 1966.–140с.
2. Пигарев Ю.П. и Фрейман Г.А. О зависимости между инвариантами R и T: Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. – М.: Союзполиграфпром при ГК СССР, 1973, –с. 172–174.
3. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Про залежність між інваріантами R і T. //Наукові записки.–Вип. 12. Серія: Фізико-математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 1977. С. 51–55.
4. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Залежність між інваріантами R і T. //Наукові записки. – Вип. 57. Серія: Математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – С. 52–59.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 16 січня 2006 р.