УДК 519.53 + 517.987

ПРЕДЕЛЫ ВЕКТОРНЫХ МЕР В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

В.А. Романов

Розв'язане питання про те, які міри в просторах Фреше можуть бути зображені як границі аналітичних векторних мір в топологіях збіжності за варіацією, відносно напівваріації та збіжності на системі вимірних множин.

It is solved a problem: Which measures in Frechet spaces could be represented as limits of analytic vector measures in topologies of variational convergence, semi-variational convergence and convergence on every measurable set.

Введение. Известно, что класс локально выпуклых пространств, в отличие от более узкого класса банаховых пространств, имеет то преимущество, что он замкнут относительно операций индуктивных и проективных пределов, используемых во многих конструкциях функционального анализа, в том числе при построении различных вариантов теории обобщенных функций. Среди локально выпуклых пространств наибольшее значение имеют пространства Фреше, то есть полные метризуемые локально выпуклые пространства. Именно такими являются важные для применений пространства финитных и быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, а также сопряженные к ним. При этом для сходящейся последовательности мер, сосредоточенных на монотонно возрастающих по включению банаховых пространствах, индуктивный предел которых совпадает с пространством финитных функций, предельная мера уже не помещается, вообще говоря, ни в какое из банаховых пространств. Таким образом, становится актуальным исследование предельных переходов с мерами, в том числе с векторными, заданными в пространствах Фреше.

2. Постановка задачи. Пусть X – сепарабельное пространство Фреше, Y – банахово пространство. Под Y-значной мерой в пространстве X понимаем сигма-аддитивную функцию множества конечной полной вариации, которая определена на всех борелевских подмножествах пространства X и принимает значения в пространстве Y.

Пусть L – линейное подпространство пространства X. В соответствии с работой [1] меру называем L-аналитической, если для любого элемента h из L и каждого борелевского подмножества E пространства X функция действительного аргумента, значение которой в точке t равно значению меры на множестве E + th , может быть аналитически продолжена в некоторую окрестность нуля комплексной плоскости, не зависящую от E.

Напомним, что векторная мера называется L-непрерывной в данной топологии, если для каждого направления h из L бесконечно малые сдвиги вдоль h приводят к бесконечно малому относительно этой же топологии изменению векторной меры.

Напомним также, что в пространстве векторных мер основными являются топологии сходимости по вариации, относительно полувариации и сходимости на системе измеримых множеств.

Цель статьи состоит в том, чтобы для указанных трех топологий установить критерии представимости векторной меры , заданной в пространстве Фреше, в виде предела последовательности аналитических векторных мер.

3. Результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – сепарабельное пространство Фреше, L – линейная оболочка последовательности его линейно независимых элементов, Y – банахово пространство. Тогда для представимости Y-значной меры m в пространстве X в виде вариационного предела последовательности L – аналитических мер необходимо и достаточно,. чтобы она была вариационно L-непрерывной.

Доказательство. Сначала отметим, что множество вариационно непрерывных мер замкнуто относительно операции предельного перехода по вариации. Для заданных в пространстве Фреше мер этот факт доказывается аналогично теореме 2 работы [3]. Отсюда и из вариационной непрерывности каждой аналитической меры вытекает необходимость.

Остается доказать достаточность. Из результатов [4, с.63-68] и [5, с.57] следует существование такого включающего L линейного подпространства H пространства X и такого скалярного произведения на H, что H становится сепарабельным гильбертовым пространством с компактным каноническим вложением в X , а L - всюду плотным в H линейным подпространством. Это подпространство можно рассматривать как линейную оболочку некоторого ортонормированного базиса. Поскольку мера m непрерывна по всем базисным направлениям, то можно применить рассуждения, приведенные в ходе доказательства теоремы 20 работы [3] , а потому мера является операторно-вариационно непрерывной в том смысле, что найдется оператор A с ядерным квадратом, действующий из H снова в H , для которого все векторы упомянутого базиса суть собственные и для которого полная вариация разности между исходной мерой и ее сдвигом на образ вектора относительно оператора A имеет нулевой предел, когда норма вектора стремится к нулю.

Пусть p – гауссова мера в H с нулевым средним, корреляционный оператор которой совпадает с квадратом оператора A, и пусть p (n)- последовательность гауссовских мер, задаваемых на борелевских множествах B из H формулой

$$p(n)(B) = p(nB).$$

Рассмотрим последовательность векторных мер, значения которых на борелевских подмножествах E пространства Фреше X задаются как интегралы Бохнера по гильбертовому пространству H относительно указанных гауссовских мер p (n) от одной и той же векторнозначной функции, ставящей в соответствие каждому элементу h из H векторную величину m (E + A (h)) .

При этом олераторно-вариационная непрерывность меры m обеспечивает непрерывность подынтегральной функции и, следовательно, соответствующие интегралы Бохнера существуют.

Поскольку гауссовские меры p (n) , относительно которых ведется интегрирование, L-аналитичны, то получающиеся векторные меры тоже L-аналитичны.

Наконец, по соображениям, которые аналогичны рассуждениям, приведенным в ходе доказательства теоремы 70 работы [3], построенная последовательность L-аналитических векторных мер вариационно сходится к данной векторной мере, чем и завершается доказательство.

ТЕОРЕМА 2. Пусть пространства X , Y и подпространство L - такие же, как в теореме 1. Тогда для представимости Y-значной меры m в пространстве X в виде полувариационного предела последовательности L-аналитических мер необходимо и достаточно, чтобы она была полувариационно L-непрерывной.

Доказательство. Необходимость вытекает из замкнутости множества полувариационно непрерывных мер относительно операции полувариационного предельного перехода и полувариационной непрерывности аналитических мер.

Для доказательства достаточности рассмотрим такое же, как в доказательстве теоремы 1, сепарабельное гильбертово пространство H с компактным каноническим вложением в X . На этот раз в соответствии с теоремой 68 работы [3] из полувариационной L-непрерывности меры следует ее операторно-полувариационная непрерывность, которая отличается от операторно-вариационной непрерывности тем, что вместо полной вариации приращения меры в соответствующем предельном выражении фигурирует ее полная полувариация.

Далее зададим последовательность L-аналитических векторных мер с помощью интегралов Бохнера относительно тех же самых гауссовских мер и от той же векторнозначной функции, что и при доказательстве теоремы 1. На этот раз непрерывность подынтегральной функции обеспечивается операторно-полувариационной непрерывностью меры.

Наконец, по соображениям, которые аналогичны рассуждениям, приведенным в ходе доказательства теоремы 69 работы [3] . построенная последовательность аналитических векторных мер сходится к данной векторной мере полувариационно, чем и завершается доказательство.

ТЕОРЕМА 3. Пусть пространства X , Y и подпространство L – такие же, как в теореме 1. Тогда для представимости Y-значной меры m в пространстве X в виде предела относительно сходимости на системе измеримых множеств последовательности L-аналитических мер необходимо и достаточно, чтобы она была L-непрерывной относительно этой же сходимости.

Доказательство. Сначала отметим, что для пространства Фреше замкнутость совокупности непрерывных в смысле сходимости на системе измеримых множеств мер относительно этой же сходимости доказывается аналогично теореме 51 работы [3] . Отсюда и из непрерывности аналитических мер вытекает необходимость.

Остается доказать достаточность. Отметим, что вариация v (m) L-непрерывной в указанном смысле меры m L-непрерывна. Для пространств Фреше этот факт доказывается аналогично теореме 49 работы [3] . Далее рассмотрим такое же, как в доказательстве теоремы 1, сепарабельное гильбертово пространство H с компактным каноническим вложением в X . После этого выберем оператор A с учетом операторной непрерывности не самой меры (которая ничем не гарантируется) , а ее вариации v (m) (что гарантируется теоремой 20 работы [3]).

Далее зададим последовательность аналитических векторных мер с помощью таких же интегралов Бохнера относительно гауссовских мер p (n), как и в доказательстве теоремы 1. На этот раз непрерывность подынтегральной функции можно обеспечить с помощью аппроксимации компактами относительно v (m) борелевского подмножества E пространства X и его дополнения до всего X .

Далее отметим, что норма разности значений n-й меры построенной последовательности и данной меры m на борелевском множестве E не превосходит интеграла относительно гауссовской меры p (n) от нормы векторнозначной величины

$$m (E + A (h)) - m (E) .$$

Разбив последний упомянутый интеграл в сумму интегралов по шару малого радиуса пространства H и по его дополнению до H и учитывая непрерывность подынтегрального выражения, убеждаемся, что построенная последовательность аналитических векторных мер сходится к данной векторной мере на системе измеримых множеств, чем и завершается доказательство.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Бенткус В.Ю. Аналитичность гауссовских мер // Теор. вероятн. и ее примен. – 1982. – 27, № 1. – С. 147–154.
2. Романов В.А. О неэквивалентности трех определений непрерывных направлений для векторных мер // Матем. Заметки. – 1995. – 57, № 2. – С. 310–312.
3. Романов В.О. Неперервні міри. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім.. В. Винниченка, 2004.–64 с.
4. Го Х. Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
5. Богачев В.И. Пренебрежимые множества в локально выпуклых пространствах // Матем. Заметки. – 1984. – 36, № 1. – С. 51–64.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 13 січня 2006 р.