УДК 517.98

ЗГОРТКИ З НЕПЕРЕРВНИМИ ВЕКТОРНИМИ МІРАМИ

В. О. Романов

Доводяться теореми неперервності згорток для кожної з основних топологій в просторі векторних мір.

The theorems of continuity of convolutions for every of the basic topologies in a space of vector measures are proved.

Відомо [1, 2] , що для скалярних мір в топологічних лінійних просторах операція згортки має суттєве значення при побудові теорії розподілів та теорії наближень. У зв'язку з подальшим розвитком функціонального аналізу виникає потреба в дослідженні векторних мір, в тому числі неперервних [3, 4]. Згортки з такими мірами можуть бути використані при побудові розв'язків задачі Коші [5,6]. Тому дослідження згорток з неперервними векторними мірами є актуальними як для розвитку самої теорії міри, так і до застосувань до теорії розподілів, диференціальних рівнянь та теорії наближень. Метою даної статті є одержання результатів про неперервність згорток в основних топологіях простору векторних мір.

1. Згортки з векторними шрами. Під векторними мірами розуміємо зчисленно адитивні функції множини, які визначені на сигма-алгебрі борелевських підшюжин повного сепарабельного метризовного топологічного лінійного простору X , приймають значення в сепарабельному банаховому просторі Y та мають скінченну повну варіацію.

Нехай m є векторною мірою. Тоді для кожного функціоналу f із спряженого до Y простору композиція f m цього функціоналу з m є скалярною мірою на X. Оскільки простір X є сепарабельним та метризовним, то з результатів роботи [7, с.62-63] випливає, шо для кожної борелевської множини E функція f m (E – x) аргументу x є вимірною на цьому просторі. Таким чином, векторна функція m (E – x) аргументу x є слабко вимірною на X. Оскільки простір У , в якому вона приймає значення, є сепарабельним, то за теоремою Пеггіса [8, с. 187] ця векторна функція є також сильно вимірною. Оскільки для кожного x норма вектора m (E – x) не перевищує повної напівваріації цієї векторної міри m , то ця норма є інтегровною відносно кожної цілком скінченної скалярної міри на X з невід'ємними значеннями. Тому за теоремою Бохнера [8, с. 190] векторна функція m (E – x) є інтегровною за Бохнером відносно вказаної міри з невід’ємними значеннями. Це дає змогу ввести наступне означення.

Означення 1. *Згорткою* векторної міри m та скалярної знакозмінної міри p скінченної повної варіації називається така векторна міра m * p , значення якої на кожній борелевській множині E дорівнює різниці інтегралів Бохнера від векторної функції m(E – x) аргументу x простору X відносно компонент розкладання Жордана знакозмінної міри p .

Зауваження 1. Дане означення є узагальненням означення згортки двох скалярних мір на X . Згортка скалярних мір на X розглядається в роботах [1, с. 150], [2, с. 44], [7, с.62-63].

Нехай H є лінійним підпростором простору X . Нагадаємо [4], що векторна міра називається H-неперервною в даній топології, якщо для кожного напряму h з H нескінченно малі зсуви вздовж h приводять до нескінченно малої стосовно даної топології зміни векторної міри.

Нагадаємо також, що в просторі векторних мір основними є топології збіжності на системі вимірних множин, збіжності за иапівваріацією та збіжності за варіацією [9].

2. Випадок топології збіжності на системі вимірних множин. Спочатку нагадаємо , що варіація v(m) векторної міри m має як функція множини властивість зчисленної адитивності [7, с.104], а тому вона є мірою, причому скалярною та невід'ємною.

Нагадаємо також, що верхня грань даної сім'ї скалярних мір – це така міра, яка мажорує кожну з мір цієї сім'ї і яка не перевищує кожної з інших мажорантних мір даної сім'ї.

Позначимо через B одиничну кулю спяженого до Y простору.

Лема 1.*Варіація v(m) векторної міри m співпадає з верхнею гранню сім'ї невід'ємних мір v(f m), що є варіаціями композицій даної векторної міри з функціоналами f які належать множині B.*

Доведення. Із теореми Гана – Банаха випливає, що для кожної борелєвської підмножини E простору X норма в просторі Y вектора m(E) дорівнює sup{ f m(E), f є B } .Оскільки f m (E) не перевищує V(f m) (E), то звідси легко одержати, що v(m) не перевищує верхньої грані сім’ї мір v(f m) . З іншого боку, кожна з таких мір V (f m) мажорується мірою V(m) , а тому верхня грань сім'ї цих мір не перевищує міри V(m).

Теорема 1. *Нехай B знову є одиничною кулею спряженого до Y простору. Тоді для H-неперервності векторної міри m в топології збіжності на системі вимірних множин необхідно і досить, щоб для всіх функціоналів f З множини B скалярні міри f m були H-неперервними.*

Доведення. Необхідність випливає з того факту, що композиція H-неперервної векторної міри та лінійного неперервного функціоналу є скалярною H-неперервною мірою. Обгрунтуємо достатність. Згідно з пропозицією 2 роботи [10, с. 770]» варіація H-неперервної скалярної міри теж H-неперервна. Тому з леми 1 даної статті випливає, що варіація нашої векторної міри співпадає з верхнею гранню деякої сім'ї H-неперервних невід'ємних мір. Але тоді з леми 1 роботи [11, с.105] випливає, що варіація H-неперервна. Згідно з теоремою 1 роботи [11, с. 105-106], цього досить для H-неперервності самої векторної міри в топології збіжності на системі вимірних множин. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай векторна міра m є H-неперервною в топології збіжності на системі вимірних множин. Тоді її згортка з довільною* *скалярною знакозмінною мірою p скінченної повної варіації теж H-неперервна в топології збіжності на системі вимірних множин.*

Доведення. Позначимо нашу згортку через Q . Тоді для кожної борелевської множини E простору X , довільної збіжної до нуля числової послідовності (*t n*) , кожного вектора h з підпростору H та довільного функціоналу f Із спряженого до Y простору величина f Q (E +tn h) дорівнює інтегралу від функції (fm)(E + tn h - x) аргументу x простору X відносно міри p .

Послідовність підінтегральних функцій е рівномірно обмеженою (вона обмежується повною варіаціїю міри f m) і збігається иа просторі X до функції f m (E – x) аргументу x . Тому можна застосувати теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, звідки випливає H-неперервність скалярної міри f Q . Для завершення доведення залишається застосувати теорему 1.

3.Випадок топології збіжності за напівваріацією. Спочатку нагадаємо, що через mth позначається зсунута векторна міра, значення якої на довільній борелевській множині E дорівнює m (E +t h) .

Теорема 3. *Згортка H-неперервної за напівваріацією векторної міри m та довільної скалярної міри p скінченної повної варіації теж H-неперервна за напівваріацією.*

Доведення. Знову позначимо нашу згортку через Q. Тоді для довільного вектора h з підпростору H, кожного дійсного числа t та довільних неперерізних борелевських множин A та E величина [(Q th - Q) (A) - (Q th – Q)(E)] дорівнює інтегралу відносно p від функції [(m th -m)(A – x) – (m th -m)(E-x)] аргументу x простору X.

Підінтегральна функція мажорується повною напівваріацією векторної міри (m th - m).Звідси випливає, що норма інтеграла не перевищує добутку повної напівваріації векторної міри (mth - m) на константу, яка дорівнює повній варіації міри p . Але тоді норма величини [(Q th - Q) (A) – (Q th -Q) (E)] теж не перевищує згаданого добутку. Оскільки неперервні борелевські множини A та E можна змінювати, то з урахуванням пропозиції 1 роботи [12, с. З IO] одержуємо, що і повна напівваріація векторної міри (Q th - Q) не перевищує згаданого добутку. Звідси і випливає твердження теореми.

4. Випадок топології збіжності за варіацією.

Теорема 4. *Згортка H-неперервної за варіацією векторної міри m та довільної скалярної міри p скінченної повної варіації теж H-неперервна за варіацією.*

Доведення. Знову позначимо нашу згортку через Q. Тоді для довільного вектора h з підпростору H, кожного дійсного числа t та довільної борелевської множини E величина (Q th -Q) (E) дорівнює інтегралу відносно міри p від функції (mth -m) (E - x) аргументу x простору X.

Тому для довільної системи із скінченного числа неперерізних борелевських множин En сума норм величин (Qth -Q)(En) не перевищує інтеграла відносно варіації v (p) скалярної міри p від суми норм величин (mth - m)(En-x), а ця остання не перевищує повної варіації векторної міри (mth - m) . Тому після переходу в лівій частині нерівності до верхньої грані по множині всіх систем із скінченної кількості непереоізних бооелевських множин E п одержуємо, що повна варіація векторної міри (Qth - Q) не перевищує добутку повної варіації векторної міри (mth - m) на константу, яка дорівнює повній варіації скалярної міри p .Звідси і випливає твердження теореми 4.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщённые функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах // Тр. Моск. Матем. О-ва. –1971.–т. 24.–С. 133–174.
2. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. Романов В.А. Пределы аналитических векторных мер // Укр. Матем. Журн. – 1992. – т. 44, № 8. – С. 1133 – 1135.
4. Романов В.А. Векторные меры различных классов гладкости и их пределы // Там же. – 1995. – т. 47, № 4. – С. 512 – 516.
5. Романов В.А. Применение мер к дифференциальным уравнениям. Кировоград: Редакционно–издательский центр Кировоградского Гос. Педаг. Ун – та, 2000.–24с.
6. Романов В. О. Різні види неперервності початкової умови в задачі Коші для векторних мір // Наук. Зал. Кіров. Держ. Педаг. Ун – ту. Сер. Фіз.-матєм.наук. –2002. – вип.43. – С. 79 – 82.
7. Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А, Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
8. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962.–895 с.
10. Романов В. А. Интегральные операторы, порождаемые Н-непрерывными мерами//Укр. Матем. Журн.– 1989. –т, 41, №6.–С. 769–773.
11. Романов В. О. Напрями неперервності та границі векторних мір // Наук. Зап. Кіровогр. Держ. Педаг. Ін-ту. – 1995. –т. 10. – С. 104 –108.
12. Романов ВА. О неэквивалентности трёх определений непрерывных направлений для векторных мер//Матем. Заметки.– 1995. –т, 57, №2.– С. 310 –312.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 6 квітня 2004р.