УДК 517.91

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ПЕРІОДИЧНИМИ ВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ

В.А. Кушнір, Г.А.Кушнір, А.І. Петюренко

У статті досліджуються умови існування T-періодичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами і T-періодичними вільними членами у випадку простих коренів характеристичного рівняння системи.

Дослідженню умов існування Т-періодичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами присвячено чимало робіт [1,2]. Як відомо [3,4], точний розв'язок серед названих систем мають системи зі сталими коефіцієнтами і Т-періодичними змінними членами. Такими системами описуються коливання в різних механічних і фізичних системах. Отже, відшукання умов існування Т-періодичних розв'язків цих систем є нагальною задачею, чому й присвячена дана стаття.

Система

$$\begin{cases} y_1' = P_{11}y_1 + P_{12}y_2 + \ldots + P_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' = P_{21}y_1 + P_{22}y_2 + \ldots + P_{2n}y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = P_{n1}y_1 + P_{n2}y_2 + \ldots + P_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

називається неоднорідною системою диференціальних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Будемо записувати систему (1) у матрично-векторній формі

$$\vec{y}' = P\vec{y} + \vec{f}(x) \tag{2}$$

де

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} \vec{y}_1' \\ \vec{y}_2' \\ \ldots' \\ \vec{y}_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

n-вимірні вектори.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ . & . & . & . \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

$(n \times n)$ числова матриця.

Якщо матриця P системи (2) має прості характеристичні числа, то таку систему, як відомо з теорії матриць [5], можна записати так

$$\vec{y}' = T\Lambda T^{-1}\vec{y} + \vec{f}(x) \tag{3}$$

де Λ-діагональна матриця

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Матриця T-має своїми стовпцями власні вектори матриці P.

Помножимо зліва всі частини рівняння на T^{-1}, одержимо

$$\left(T^{-1}\vec{y}\right)' = \Lambda\left(T^{-1}\vec{y}\right) + T^{-1}\vec{f}(x)$$

Або після заміни

$$\begin{aligned} &\vec{z} = T^{-1}\vec{y} \\ &\vec{z}' = \Lambda\vec{z} + T^{-1}\vec{f}(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Нехай $\vec{f}(x)$ - T-періодична вектор-функція. Тобто

$$\vec{f}(x+T) = \vec{f}(x)$$

Система (4) у розгорнутому вигляді буде такою

$$\begin{aligned} &z_1' = \lambda_1 z_1 + \varphi_1(x) \\ &z_2' = \lambda_2 z_2 + \varphi_2(x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &z_1' = \lambda_n z_n + \varphi_n(x) \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}' f_k(x); \quad i = \overline{1,n} \tag{6}$$

а t_{ik}; $(i=\overline{1,n}; k=\overline{1,n})$ елементи матриці T^{-1}. Оскільки функції $\vec{f_i}(x)$; $(i=\overline{1,n})$ T-періодичні, то згідно (6), будуть T-періодичні і функції $\varphi_i(x)$; $(i=\overline{1,n})$.

Проблема відшукання T-періодичних розв'язків неоднорідної системи (1) з T-періодичними вільними членами звелася до відшукання T-періодичних розв'язків окремих диференціальних рівнянь (5)

$$z_i' = \lambda_i z_i + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,n} \tag{7}$$

Спочатку розглянемо однорідні рівняння

$$z_i' = \lambda_i z_i, \quad i = \overline{1,n}$$

Їх розв'язками будуть функції

$$z_i' = C_i e^{\lambda_i x}, \quad i = \overline{1,n} \tag{8}$$

де $C_i - const$.

Методом варіації довільної сталої знаходимо загальний розв'язок неоднорідних рівнянь

$$z_i' = C_i'(x)e^{\lambda_i x} + C_i\lambda_i e^{\lambda_i x}; \quad i = \overline{1,n} \tag{9}$$

Підставимо (8), (9) в (7), маємо

$$C_i'(x)e^{\lambda_i x} + C_i(x)\lambda_i e^{\lambda_i x} = C_i(x)\lambda_i e^{\lambda_i x} + \varphi_i(x)$$

Звідки маємо

$$C_1'(x)e^{\lambda_i x} = \varphi_i(x)$$

$$C_i'(x) = e^{-\lambda_i x}\varphi_i(x)$$

$$C_i(x) = \int_0^x e^{-\lambda_i x}\varphi_i(x)dx + C_i; \quad C_i - const, i = \overline{1,n}$$

Тоді загальні розв'язки диференціальних рівнянь (7) матимуть вигляд

$$z_i = C_i e^{\lambda_i x} + e^{\lambda_i x}\int_0^x e^{-\lambda_i x}\varphi_i(x)dx \tag{10}$$

Розв'язок системи (1) матиме вигляд

$$\vec{y} = T\vec{z} = T\overrightarrow{z_0} + T\overrightarrow{z_H}$$

де $\overrightarrow{y_1} = T\overrightarrow{z_0}$ - загальний розв'язок однорідної системи, $\overrightarrow{y_2} = T\overrightarrow{z_H}$ - частковий розв'язок неоднорідної системи, вектор-функція $\vec{z}$ має своїми компонентами z_i, що виражаються формулою (10).

Умова існування T-періодичних розв'язків [2]

$$\vec{y}(0) = \vec{y}(T)$$

набуде вигляду

$$T\overrightarrow{z_0}(0) + T\overrightarrow{z_H}(0) = T\overrightarrow{z_0}(T) + T\overrightarrow{z_H}(T) \tag{11}$$

Згідно (11) $\overrightarrow{z_H}(0) = 0$. Тоді (11) набуде вигляду

$$T\left(\overrightarrow{z_0}(0) - \overrightarrow{z_0}(T)\right) = T\overrightarrow{z_H}(T)$$

Помноживши на T^{-1} зліва, маємо

$$\overrightarrow{z_0}(0) - \overrightarrow{z_0}(T) = \overrightarrow{z_H}(T)$$

Або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}
&C_1(1 - e^{\lambda_1 T}) = e^{\lambda_1 T}\int_0^T e^{-\lambda_1 x}\varphi_1(x)dx \\
&C_2(1 - e^{\lambda_2 T}) = e^{\lambda_2 T}\int_0^T e^{-\lambda_2 x}\varphi_2(x)dx \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&C_n(1 - e^{\lambda_n T}) = e^{\lambda_n T}\int_0^T e^{-\lambda_n x}\varphi_n(x)dx
\end{aligned} \tag{12}$$

Кожне із лінійних алгебраїчних рівнянь (12) матиме єдиний розв'язок відносно C_i, якщо $1 - e^{\lambda_i T} \neq 0$. Отже, якщо серед $\lambda_i; \quad (i = \overline{1,n})$ немає нульових, то система (1) із T-періодичними вільними членами буде мати єдиний T-періодичний розв'язок.

Приклад.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 0{,}5y_2 + 0{,}5y_3 + 2\sin x \\ y_2' = y_1 + 2{,}5y_2 - 0{,}5y_3 + \cos x \\ y_3' = y_1 + 0{,}5y_2 + 1{,}5y_3 - \sin 2x \end{cases} \qquad (13)$$

Вільні члени системи (13) є 2π-періодичними функціями.

Матриця системи (13)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 2{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

має ненульові характеристичні корені $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$. Отже система (13) матиме єдиний 2π-періодичний розв'язок. Знайдемо його.

Спочатку запишемо матрицю P у вигляді

$$P = T\Lambda T^{-1} \qquad (14)$$

де

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix};\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

У векторно-матричній формі (13) матиме вигляд

$$\vec{y}' = P\vec{y} + \vec{f}(x) \qquad (15)$$

де

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};\quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix};\quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 2\sin x \\ \cos x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}$$

Враховуючи (14), (13) можна записати так

$$\vec{z}' = \Lambda\vec{z} + \varphi(x) \qquad (16)$$

де

$$\vec{z}' = (T^{-1}\vec{y})';\quad \vec{z} = (T^{-1}\vec{y});\quad \varphi(x) = T^{-1}\vec{f}(x)$$

Запишемо (16) у скалярній формі

$$z_1' = z_1 + (-0{,}5\cdot 2\sin x + 0\cdot\cos x - 0{,}5\sin 2x)$$

$$z_2' = 2z_2 + (0\cdot 2\sin x - 0{,}5\cdot\cos x + 0{,}5(-\sin 2x))$$

$$z_3' = 3z_3 + (0{,}5\cdot 2\sin x + 0{,}5\cdot\cos x + 0\cdot\sin 2x)$$

Або після перетворень

$$z_1' = z_1 + -\sin x - 0{,}5\sin 2x$$
$$z_2' = 2z_2 - 0{,}5\cdot\cos x - 0{,}5\sin 2x \qquad (17)$$
$$z_3' = 3z_3 + \sin x + 0{,}5\cos x$$

Розв'яжемо перше рівняння із (17)

$$z_1' - z_1 = -\sin x - 0{,}5\sin 2x \qquad (18)$$

Відповідне однорідне рівняння має загальний розв'язок

$$z_1 = C_1 e^x;\ C_1 - const$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння знаходимо методом невизначених коефіцієнтів

$$z = a_1\sin x + b_1\cos x + a_2\sin 2x + b_2\cos 2x \qquad (19)$$
$$z' = a_1\cos x - b_1\sin x + 2a_2\cos 2x - 2b_2\sin 2x \qquad (20)$$

Підставимо вирази для z, z' у (18), маємо

$$a_1\cos x - b_1\sin x + 2a_2\cos 2x - 2b_2\sin 2x - a_1\sin x -$$
$$-b_1\cos x - a_2\sin 2x - b_2\cos 2x = -\sin x - 0{,}5\sin 2x$$

Звідки знаходимо

$$a_1 = \frac{1}{2};\ b_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = 0{,}1;\ b_2 = 0{,}2$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (18) має вигляд

$$z_1 = C_1 e^x + 0{,}5\sin x + 0{,}5\cos x + 0{,}1\sin 2x + 0{,}2\cos 2x$$

Умова існування 2π-періодичного розв'язку $y(0) = y(2\pi)$ набуде вигляду

$$C_1 e^0 + 0{,}5\sin 0 + 0{,}5\cos 0 + 0{,}1\sin 0 + 0{,}2\cos 0 =$$
$$C_1 e^{2\pi} + 0{,}5\sin 2\pi + 0{,}5\cos 2\pi + 0{,}1\sin 4\pi + 0{,}2\cos 4\pi$$
$$C_1 - 0{,}5 + 0{,}2 = C_1 e^{2\pi} - 0{,}5 + 0{,}2$$
$$C_1(1 - e^{2\pi}) = 0;$$
$$C_1 = 0$$

Отже

$$z_1 = 0{,}5\sin x + 0{,}5\cos x + 0{,}1\sin 2x + 0{,}2\cos 2x$$

2π-періодичний розв'язок і він єдиний.

Розв'яжемо друге рівняння із (17) аналогічно до попереднього

$$z_2' = 2z_2 - 0{,}5\cos x - 0{,}5\sin 2x \qquad (21)$$

Відповідне однорідне рівняння

$$z_2' = 2z_2$$

має загальний розв'язок

$$z_2 = C_2 e^{2x};\ C_2 - const$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (21) шукаємо у вигляді (19). Підставляючи (19) і (20) у (21) маємо

$$a_1\cos x - b_1\sin x + 2a_2\cos 2x - b_2\sin 2x - 2a_1\sin x -$$
$$-2b_1\cos x - 2a_2\sin 2x - 2b_2\cos 2x = -0{,}5\sin x - 0{,}5\sin 2x$$

Звідки

$$\begin{cases} a_1 - 2b_1 = -0{,}5 \\ -2a_1 - b_1 = 0 \end{cases}$$

$$b_1 = -2a_1$$
$$a_1 - 4a_1 = -0{,}5$$
$$-3a_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6}; b_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} a_2 - b_2 = 0 \\ 2a_2 + 2b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_2 = b_2$$
$$2a_2 + 2a_2 = \frac{1}{2}$$
$$4a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{8}; b_2 = \frac{1}{8}$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (21) має вигляд

$$z_2 = C_2 e^{2x} + \frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x \qquad (22)$$

Умова періодичності

$$z_2(0) = z_2(2\pi);$$

Або із (22)

$$C_2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = C_2 e^{2\pi} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$$
$$C_2(1 - e^{2\pi}) = 0$$
$$C_2 = 0$$

Тоді

$$z_2 = \frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x$$

буде 2π-періодичним розв'язком другого рівняння із (17)

Третє рівняння із (17)

$$z_3' = 3z_3 + \sin x + 0{,}5\cos x \qquad (23)$$

Частковий розв'язок шукаємо у вигляді

$$z_{3H} = a\sin x + b\cos x$$
$$z_{3H}' = a\cos x - b\sin x$$

Підставимо ці значення в (23), маємо

$$a\cos x - b\sin x - 3a\sin x - 3b\cos x = \sin x + 0{,}5\cos x$$

$$\begin{cases} a-3b=0{,}5 \\ -3a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0{,}5+3b \\ -1{,}5-9b-b=1 \end{cases}$$

$$-10b=2{,}5 \Rightarrow b=-\frac{1}{4}; a=-\frac{1}{4}$$

Отже,

$$z_3=C_3e^{3x}-\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{4}\cos x \tag{24}$$

$$z_3(0)=z_3(2\pi)$$

$$C_3-\frac{1}{4}=C_3e^{6\pi}-\frac{1}{4}$$

$$C_3=0$$

Тоді 2π-періодичним розв'язком третього рівняння із (17) буде

$$z_3=-\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{4}\cos x$$

Зауваження. Із вигляду загальних розв'язків рівнянь (17) (наприклад із (24)), очевидно, що при $C_3=0$ матимемо частковий 2π-періодичний розв'язок. Однак, далеко не завжди можна скористатися методом невизначених коефіцієнтів, який допомагає уникнути відшукання інтегралів, які в скінченому вигляді взагалі можуть не братися. Тоді розв'язок буде доведено тільки до квадратур. Якщо при цьому виконується умова існування *T*-періодичного розв'язку, то ми його зможемо знайти в квадратурах, а потім наближеними методами, чисельними чи за допомогою рядів, знайти відповідні інтеграли.

Таким чином, вектор $\vec{z}$ знайдено

$$\vec{z}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{10}\sin 2x+\frac{1}{5}\cos 2x \\ \frac{1}{6}\sin x-\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x \\ -\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{4}\cos x \end{pmatrix}$$

Вектор $\vec{y}=T\vec{z}$. Або

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{10}\sin 2x+\frac{1}{5}\cos 2x \\ \frac{1}{6}\sin x-\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x \\ -\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{4}\cos x \end{pmatrix}$$

Звідки

$$y_1 = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x -$$
$$-\frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x =$$
$$= -\frac{11}{12}\sin x - \frac{13}{12}\cos x + \frac{1}{40}\sin 2x - \frac{3}{40}\cos 2x$$
$$y_2 = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x +$$
$$+\frac{1}{6}\sin x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x =$$
$$= \frac{2}{3}\sin x + \frac{5}{6}\cos x - \frac{1}{40}\sin 2x + \frac{3}{40}\cos 2x$$
$$y_3 = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x -$$
$$-\frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x =$$
$$= \frac{1}{12}\sin x - \frac{1}{12}\cos x + \frac{9}{40}\sin 2x + \frac{13}{40}\cos 2x$$

Функції y_1, y_2, y_3, є єдиним 2π-періодичним розв'язком системи (13).

Розглянемо випадок, коли відповідна системі (1) однорідна система має T-періодичний розв'язок. Це можливо, коли одне з характеристичних чисел рівне нулю. Нехай $\lambda_1 = 0$. Тоді перше рівняння із (12) набуде вигляду

$$C_1 \cdot 0 = \int_0^T \varphi_1(x)dx$$

Зрозуміло, що це рівняння відносно C_1 буде мати ненульовий розв'язок тільки при умові

$$\int_0^T \varphi_1(x)dx = 0$$

У противному разі T-періодичних розв'язків не існує.

Приклад.

$$\begin{cases} y_1' = y_3 + 1 \\ y_2' = -1{,}5y_1 + 1{,}5y_2 + 1{,}25y_3 - \cos x \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 1{,}5y_3 + 2\sin x \end{cases} \tag{25}$$

Відповідна однорідна система буде мати вигляд

$$\begin{cases} y_1' = y_3 + 1 \\ y_2' = -1{,}5y_1 + 1{,}5y_2 + 1{,}25y_3 \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 1{,}5y_3 \end{cases}$$

Матриця перетворення має вигляд

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix};\quad T^{-1}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5 & -0,75\\ 0,5 & -0,5 & 0,25\\ -0,5 & 0,5 & 0,25\end{pmatrix} \qquad (26)$$

Систему (25) у матрично-векторній формі можна записати так

$$\vec{y}=P\vec{y}+\vec{f}$$

де

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix};\quad \vec{y}'=\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{pmatrix};\quad \vec{f}(x)=\begin{pmatrix}1\\ -\cos x\\ 2\sin x\end{pmatrix}$$

Або враховуючи (26)

$$\vec{y}'=T\Lambda T^{-1}\vec{y}+\vec{f}(x)$$

Звідки

$$\vec{z}'=\Lambda\vec{z}+\vec{\varphi}(x),\quad \vec{\varphi}(x)=T^{-1}\vec{f}(x)$$

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \varphi_3(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5 & -0,75\\ 0,5 & -0,5 & 0,25\\ -0,5 & 0,5 & 0,25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\cos x\\ 2\sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5-0,5\cos x-1,5\sin x\\ 0,5+0,5\cos x+0,5\sin x\\ -0,5-0,5\cos x+0,5\sin x\end{pmatrix}$$

У розгорнутому вигляді система запишеться так

$$\begin{pmatrix}z_1'\\ z_2'\\ z_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,5-0,5\cos x-1,5\sin x\\ 0,5+0,5\cos x+0,5\sin x\\ -0,5-0,5\cos x+0,5\sin x\end{pmatrix} \qquad (27)$$

Із (27) маємо скалярні рівняння

$$\begin{cases} z_1'=0,5x-0,5\cos x-1,5\sin x\\ z_2'=z_2+0,5+0,5\cos x+0,5\sin x\\ z_3'=2z_3-0,5-0,5\cos x+0,5\sin x\end{cases} \qquad (28)$$

Із першого рівняння маємо

$$z_1=0,5x+1,5\cos x-0,5\sin x+C_1$$

Умова $z_1(0)=z_1(2\pi)$ не виконується ні при якому значенні C_1. Отже, перше рівняння із (28) не має 2π-періодичних розв'язків. Значить не має 2π-періодичних розв'язків і система (25).

Приклад.

$$\begin{cases} y_1'=y_3-\sin x\\ y_2'=-1,5y_1+1,5y_2+1,25y_3-\cos x\\ y_3'=-y_1+y_2+1,5y_3+2\sin x\end{cases} \qquad (29)$$

Після перетворень будемо мати систему

$$\begin{cases} z_1' = -0{,}5\cos x - 2\sin x \\ z_2' = z_2 0{,}5\cos x \\ z_3' = z_3 - 0{,}5\cos x + \sin x \end{cases} \quad (30)$$

Із першого рівняння системи (30) маємо

$$z_1 = 2\cos x - 0{,}5\sin x + C_1$$

Умова $z_1(0) = z_1(2\pi)$ виконується при будь-якому значенні C_1. Тобто, всі часткові розв'язки першого рівняння є 2π-періодичними.

Загальний розв'язок другого однорідного рівняння

$$z_2 = C_2 e^x; \quad C_2 - const$$

Частковий розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді

$$z_{2H} = a\sin x + b\cos x$$

$$z_{2H}' = a\cos x - b\sin x$$

Підставляємо значення z_{2H}, z_{2H}' у друге рівняння системи (30)

$$a\sin x + b\cos x - a\cos x + b\sin x = 0{,}5\cos x$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 0{,}5 \end{cases}$$

$$2b = 0{,}5 \Rightarrow b = \frac{1}{4}; a = \frac{1}{4}$$

Загальний розв'язок другого рівняння системи (30) буде

$$z_2 = C_2 e^x - \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x$$

Умова $z_2(0) = z_2(2\pi)$ перетворюється у рівність

$$C_2 + \frac{1}{4} = C_2 e^x + \frac{1}{4}$$

$$C_2 = 0$$

Отже,

$$z_2 = -\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x$$

2π-періодичний розв'язок другого рівняння системи (30).

Частковий розв'язок третього неоднорідного рівняння також будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів

$$z_{3H} = a\sin x + b\cos x$$

$$z_{3H}' = a\cos x - b\sin x$$

$$a\sin x + b\cos x - a\cos x + b\sin x = \sin x - 0{,}5$$

$$\begin{cases} a + b = \\ -a + b = -0{,}5 \end{cases}$$

$$2b = 0{,}5 \Rightarrow b = \frac{1}{4}; a = \frac{3}{4}$$

$$z_3 = C_3 e^{2x} + \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x$$

Умова періодичності $z_3(0) = z_3(2\pi)$ приводить до того, що C_3=0.

$$z_3 = \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x$$

буде 2π-періодичним розв'язком третього рівняння системи (30).

Знайдемо 2π-періодичний розв'язок системи (29)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}75 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}25 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}5\sin x + 2\cos x + C_1 \\ -\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x \\ \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\cos x \end{pmatrix}$$

Звідки

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{15}{16}\sin x + \frac{15}{16}\cos x + 0{,}5C_1 \\ y_2 = -\frac{1}{16}\sin x + \frac{15}{16}\cos x + 0{,}5C_1 \\ y_3 = -\frac{5}{16}\sin x - \frac{13}{16}\cos x - 0{,}5C_1 \end{cases}$$

Це і будуть 2π-періодичні розв'язки системи (29).

Отже, якщо серед коренів характеристичного рівняння системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і періодичними вільними членами немає нульових, то неоднорідна система буде мати єдиний T-періодичний розв'язок. Якщо одне з характеристичних чисел рівне нулю $(\lambda_i = 0)$, то неоднорідна система диференціальних рівнянь матиме T-періодичний розв'язок лише при умові $\int_0^T \varphi_i(x)dx = 0$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Шкиль Н.И., Вороной А.Н., Лейфура В.Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. – К.: Вища школа, 1986. – 248 с.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
4. Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1992. – 303 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка,
Кіровоградський національний технічний університет

Надійшло 14 вересня 2004р.