Ю.І. Волков
Н.М. Войналович

ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Міністерство освіти України
Кіровоградський державний педагогічний
університет імені Володимира Винниченка

Ю.І. Волков
Н.М. Войналович

ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти України

Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В.Винниченка
2000

ББК 22.174
В67
УДК 519.1

Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. - Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2000. – 190 с.

ISBN 966-7401-30-8

Викладаються основи таких розділів дискретної математики: комбінаторика, дискретна теорія ймовірностей, різницеве числення, системи числення. Викладання супроводжується великою кількістю прикладів і задач для самостійного розв’язування.

Навчальний посібник призначений для студентів педагогічних вузів, вчителів та учнів шкіл з поглибленим вивченням математики.

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук **А.М.Плічко**,
доктор технічних наук **В.В.Сидоренко**.

Рекомендовано Міністерством освіти України як навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних захладів освіти (Лист 2/88 від 24.01.2000 р.)

ISBN 966-7401-30-8

Передмова

Ще зовсім недавно панівне положення в математиці займало вивчення неперервних функцій, що було основою всіх застосувань математики у фізиці і техніці, та з середини XX ст. почалося відродження інтересу до дискретної математики, яка оперує лише скінченними множинами і функціями, визначеними на таких множинах.

Причиною зміщення акцентів на дискретику є, в першу чергу, поява електронних *цифрових* обчислювальних машин. Особливості цих машин забезпечують їх універсальність, подібну універсальності ,будь-якої числової системи, що дозволяє записувати мовою цифр довільну інформацію. Ще Лейбніц звернув увагу на те, що все у світі можна виразити за допомогою нулів та одиничок, і навіть вбачав в цьому деякий містичний сенс.

Комп'ютери сприяли розширенню галузей застосування математики, "математизації" цілого ряду дисциплін, які раніше були далекими від всякого впливу математичних методів, - лінгвістики і економіки, медицини і біології, психології і теорії мистецтв, педагогіки і археології.

Математика, якою користуються представники гуманітарних спеціальностей, часто не схожа на ту, що вивчають інженери. При розгляді явищ, які мають виключно дискретну природу і не пов'язані з неперервними функціями, – як наприклад, писемна мова, яка складається з послідовності окремих букв, вища нервова діяльність людини, що являє собою дискретні зміни у великій кількості нервових клітин, будова ДНК, потрібно застосовувати методи скінченної математики.

Розвиток дискретної математики, її багатогранні зв'язки з іншими галузями науки і безпосередньо з виробництвом вплинули і на нові підходи до питань викладання математики. Хочемо ми того чи ні, але в співвідношенні розділів математики, які вивчаються в педагогічних вузах та в школі, повинна значно посилитись роль дискретних розділів на противагу неперервним. Більше того, таке посилення буде досить сприятливим для цілей викладання, оскільки дискретна математика, через свій скінченний характер, значно доступніша для початківців, ніж класичний математичний аналіз; вона скоріше може зацікавити тих, хто навчається, викличе менше труднощів і тому більше підходить для викладання навіть на ранніх стадіях навчання.

Якщо проаналізувати програми та зміст математичних дисциплін, які вивчаються в школах та педагогічних вузах, то неважко виявити майже повну відсутність їх зв'язку з бурхливим процесом комп'ютеризації суспільства, розвитком інформаційних мереж різного рівня та призначення, без яких неможливий сучасний прогрес людської цивілізації. Не секрет, що дуже значна доля часу при вивченні математики витрачається на ті її розділи (диференціальне та інтегральне числення), які є математичними моделями механічних і електричних явищ, і в той же час зовсім мало приділяється уваги не менш, а може і більш важливим математичним моделям інформаційних, економічних, біологічних та інших процесів.

Сьогодні всяка інформація апроксимується дискретною і ця дискретна форма представлення інформації стала універсальною, а в неперервному раю, створеному в математичній освіті, стало незатишно і холодно. Цунамі інформації, лавина нових інформаційних технологій затоплює все на своєму шляху і не дає людині ковтнути свіжого повітря, а математика, яка повинна лікувати нас від розумового безсилля пропонує все ті ж вправи, які вже не збільшують розумові мускули.

Наявність знань з дискретної математики у майбутніх вчителів важко переоцінити, бо їх глибоке грунтовне знання грає велику роль у фундаментальній математичній підготовці - як в плані формування у студентів певного рівня математичної культури, так і в плані формування в них наукового світогляду, особливо з таких компонентів, як розуміння сутності прикладної і практичної спрямованості навчання математиці, оволодіння методом математичного моделювання, вмінням здійснювати міжпредметні зв'язки.

Традиційно до дискретної математики (в її вузькому розумінні) відносять такі розділи: математична логіка, алгебраїчні структури, алгоритми та абстрактна теорія автоматів, формальні граматики і мови, теорія кодування, комбінаторика, скінченні графи та мережі. Ми доповнюємо цей перелік розділів такими: числові типи, системи числення, відношення та дискретні функції, різницеве числення, дискретна теорія ймовірностей. Очевидно, що матеріал, який входить у всі ці розділи надзвичайно багатий, а тому в наш час розглядати його у вузах навіть в скороченому вигляді нереально, отже, необхідна певна селекція з цього грандіозного матеріалу.

В даному посібнику розглядаються такі розділи: комбінаторика, дискретна теорія ймовірностей, різницеве числення, системи числення.

Однією з основних причин вибору вищевказаних розділів дискретної математики є їх доступність. Вони не вимагають великої фундаментальної підготовки, не залежать від диференціального та інтегрального числення і зрозумілі учням. Не менш важливим є і те, що ці розділи можуть послужити джерелом для дослідницької діяльності студентів і учнів, дають мотиви для комп'ютерного моделювання реальних процесів.

Даний посібник написано на основі невеликого спеціального курсу дискретної математики, який викладається на 4-5 курсах фізико-математичного факультету Кіровоградського державного педагогічного університету ім. Володимира Винниченка, починаючи з 1995 року. Розділ І, пп. 1-6; розділ ІІ, пп. 1-10; розділ ІІІ, пп. 1-5; розділ IV, пп. 1-6, 9 написані Войналович Н.М. Всі інші пункти вказаних розділів написав Волков Ю.І. Вправи до розділів та відповіді підбиралися та перевірялися авторами посібника разом.

Розділ I. **Комбінаторика**

1. Множини та операції над ними

Для математики поняття множини дуже важливе. Воно є первісним, тобто йому не дається означення. Можна говорити про множину учнів класу, множину коренів рівняння, множину натуральних чисел. Множини позначаються великими літерами (іноді перераховуючи в фігурних дужках елементи цих множин). Наприклад, множина коренів рівняння x^3-$3x^2$+$2x$=0 така {0, 1, 2}. Запис $x\in$A означає: елемент x належить множині A. Якщо елемент x не належить множині A, то пишуть $x\notin$A. Множина A є підмножиною множини B, якщо кожен елемент x, який належить A, належить і множині B; позначається це так A$\subset$B. Множина, яка не містить жодного елемента називається порожньою і позначається $\varnothing$.

У багатьох розділах математики і, зокрема, в теорії ймовірностей розглядаються лише множини, що є підмножинами однієї і тієї ж множини, яку називають універсальною множиною. (В планіметрії, наприклад, в ролі такої множини виступає множина усіх точок площини.) Дотримуючись традиції, прийнятої в теорії ймовірностей, будемо позначати універсальну множину великою грецькою літерою Ω (омега).

Над множинами можна виконувати певні операції. Нехай A і B дві множини.

Означення 1. *Об'єднанням $A\cup B$ множин A і B називається множина всіх тих і тільки тих елементів, які належать принаймні одній з множин A або B:*

$$A\cup B=\{x|\ x\in A \text{ або } x\in B\}.$$

Означення 2. *Перетином $A\cap B$ множин A і B називається множина всіх тих і тільки тих елементів, які належать як A, так і B:*

$$A\cap B=\{x|\ x\in A \text{ і } x\in B\}.$$

Означення 3. *Різницею $A\backslash B$ множин A і B називається множина тих і тільки тих елементів, які належать A і не належать B:*

$$A\backslash B=\{x|\ x\in A \text{ і } x\notin B\}.$$

Означення 4. *Нехай $A\subset\Omega$. Доповненням $\overline{A}$ до множини A називається множина $\Omega\setminus A$:*

$$\overline{A}=\Omega\setminus A=\{x|\ x\in\Omega \text{ і } x\notin A\}.$$

Означення 5. *Симетричною різницею $A\circ B$ множин A і B називається множина тих і тільки тих елементів, які належать A або B і не належать $A\cap B$:*

$$A\circ B=\{x|\ (x\in A \text{ або } x\in B) \text{ і } x\notin A\cap B\}.$$

Корисно мати схематичне зображення універсальної множини і її підмножин. Це можна зробити за допомогою так званих діаграм Венна. Часто універсальну множину зображають прямокутником, а підмножини - кругами.

Проілюструємо операції над множинами за допомогою діаграм Венна (рис.1):

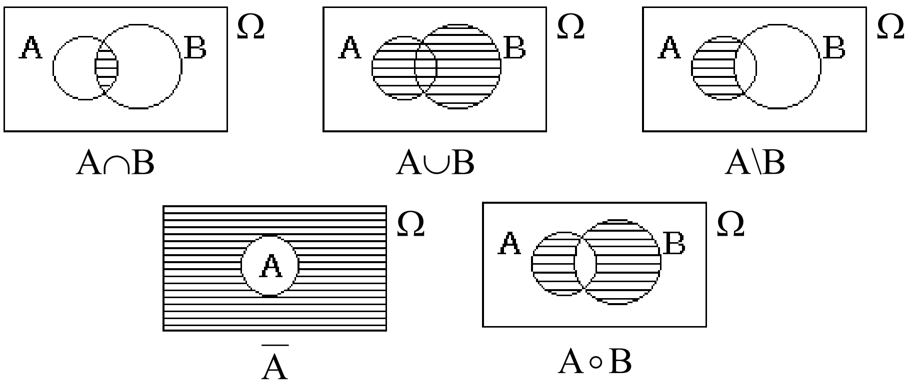


рис. 1

Приклад 1. Нехай Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. A - множина парних чисел з Ω, B - множина тих чисел Ω, які кратні 3. Тоді

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$, $A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $A\cap B=\{6\}$,
$A\setminus B=\{2, 4, 8, 10\}$, $\overline{A}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\overline{B}=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$.

2. Правила комбінаторики

Розпочнемо знайомство з комбінаторикою з двох основних правил, які можна вважати за аксіоми комбінаторики. Спочатку проілюструємо ці правила на прикладах.

Приклад 1. У кімнаті відкрито чотири вікна та двоє дверей. Скількома способами можна потрапити до кімнати?

До кімнати можна потрапити або через вікно (чотирма способами) або через двері (двома способами). Отже, до кімнати можна потрапити 4+2=6 способами.

І взагалі, *якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а другий об'єкт B n способами, причому ніякий вибір A не збігається з жодним з виборів B, то один з об'єктів A або B можна вибрати n+m способами*. Це і є перше правило комбінаторики- **правило суми**.

Приклад 2. З пункту A до пункту B можна дістатися пароплавом, поїздом та літаком; з пункту B до пункту C- автобусом та поїздом.
Скількома способами можна здійснити подорож з пункту A до пункту C через пункт B (рис.2).

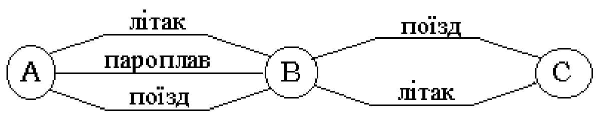


рис.2

Якщо ми оберемо один з трьох можливих способів подорожі з пункту А до пункту В, то будемо мати два можливих способи подорожі з пункту В до пункту С. Отже, різних шляхів з пункту А до пункту С буде 3·2=6.

І взагалі, нехай із множини, яка містить m елементів, вибирається один елемент і незалежно з множини, яка містить n елементів також вибирається один елемент. Питається: скільки різних пар елементів при цьому можна утворити?

Відповідь на поставлене питання дає таблиця:

$$\left.\underbrace{\begin{matrix} a_1b_1; & a_1b_2; & \ldots; & a_1b_n \\ a_2b_1; & a_2b_2; & \ldots; & a_2b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_mb_1; & a_mb_2; & \ldots; & a_mb_n \end{matrix}}_{n \text{ пар у кожному рядку}}\right\} m \text{ рядків}$$

Таким чином, загальне число усіх можливих пар буде дорівнювати $m{\cdot}n$. Це і є **правило добутку**: *якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а деякий другий об'єкт B можна вибрати n способами, то пару об'єктів A і B у вказаному порядку можна вибрати m·n способами.*

Узагальнимо ці правила. Для цього використаємо позначення: якщо X скінченна множина, то символ |X| – кількість елементів множини X.

Правило суми. *Нехай множини* X_1, X_2, ...,X_n *попарно не перетинаються. Тоді* $|X_1+X_2+\ldots+X_n|=|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|$.

Правило добутку. *Нехай* X_1, X_2, ...,X_n *- довільні множини. Тоді* $|X_1\times X_2\times\ldots\times X_n|=|X_1|\times|X_2|\times\ldots\times|X_n|$, де знак × - знак декартового добутку множин.

Ці правила легко доводяться методом математичної індукції, якщо їх вважати правильними для двох множин.

Приклад 3. Скільки різних дільників має число 2310?

Розв'язання. Оскільки 2310=2·3·5·7·11, то число d буде дільником 2310, якщо d - добуток чисел з набору 2, 3, 5, 7, 11. Будемо складати всі можливі добутки з цих чисел такими міркуваннями: перше число може входити до добутку або не входити, друге число також може входити або не входити до добутку, аналогічна ситуація і з іншими числами. Тому різних дільників числа 2310, які є добутком чисел з набору 2, 3, 5, 7, 11, буде 2^5. З цього числа виключимо випадок, коли d=0 (жодне число з вказаного набору чисел не входить до d), і додамо випадок, коли d=1. Отже, число 2310 має 32 різних дільника.

3. Вибірки

Під вибіркою будемо розуміти сукупність деяких елементів, вибраних із заданої множини певним чином. Вдалим прикладом вибірки може бути довільний, в тому числі й беззмістовний, текст, введений до комп'ютера з клавіатури і відображений на екрані. Заданою множиною є множина клавіш клавіатури, вибіркою – довільна послідовність символів, введених з клавіатури. З цього прикладу зрозуміло, що до складу вибірки можуть входити й однакові елементи. Вибірки, які містять однакові елементи, будемо називати вибірками з повтореннями, в іншому випадку – вибірками без повторень. Очевидно, що кількість елементів вибірки з повтореннями може бути більшою від кількості елементів вихідної множини.

Вибірки бувають впорядкованими і невпорядкованими. Наприклад, щоб комп'ютер виконав ту чи іншу дію, ми повинні з клавіатури безпомилково ввести деяку команду. Навіть, якщо поміняти місцями два довільні символи команди, то очікуваного результату ми не отримаємо. Така команда буде прикладом впорядкованої вибірки. А, наприклад, коли беруться книжки для роботи з книжкової полиці, то порядок вибору цих книжок ролі не грає. Ця вибірка з книжок приклад невпорядкованої вибірки.

Отже, маємо:

вибірки
↙ ↘
впорядковані невпорядковані
↙ ↘ ↙ ↘
без повторень з повтореннями без повторень з повтореннями

При розв'язуванні задач потрібно вміти знаходити кількість вибірок того чи іншого виду, найпоширеніші з яких названо розміщеннями, перестановками, комбінаціями.

Нехай є множина B, яка складається з n елементів.

Означення 1. *Впорядковані k-елементні вибірки без повторень з множини B називаються розміщеннями без повторень з n елементів по k елементів.*

Число розміщень без повторень з n елементів по k елементів позначається символом A_n^k, який походить від початкової букви французького слова *arrangement*, що означає "розміщення".

Означення 2. *Впорядковані k-елементні вибірки з повтореннями з множини B називаються розміщеннями з повтореннями з n елементів по k елементів.*

Число розміщень з повтореннями з n елементів по k елементів позначається символом $\overline{A}_n^k$.

Означення 3. *Впорядковані n-елементні вибірки без повторень з множини B називаються перестановками без повторень з n елементів.*

Число перестановок без повторень з n елементів позначається символом P_n, який походить від початкової букви французького слова *pertutation*, що означає "перестановка".

Означення 4. *Невпорядковані k-елементні вибірки без повторень із множини B називаються комбінаціями без повторень з n елементів по k елементів.*

Число комбінацій без повторень з *n* елементів по *k* елементів позначається символом C_n^k, який походить від початкової букви французького слова *combination*, що означає “комбінація”.

Означення 5. *Невпорядковані k-елементні вибірки з повтореннями із множини B називаються комбінаціями з повтореннями з n елементів по k елементів.*

Число комбінацій з повтореннями з *n* елементів по *k* елементів позначається символом $\overline{\mathrm{C}}_n^k$.

Для числа таких вибірок виведені формули, якими користуються при розв’язуванні різних комбінаторних задач.

Приклад 1. Нехай множина B складається з трьох елементів B={*a*, *b*, *c*}. Виписати:
а) двоелементні розміщення без повторень,
б) двоелементні розміщення з повтореннями,
в) двоелементні комбінації без повторень,
г) двоелементні комбінації з повтореннями,
д) перестановки без повторень.
Підрахувати кількість вибірок кожного виду.
Розв’язання.
а) <*a*, *b*>, <*b*, *c*>, <*a*, *c*>, <*b*, *a*>, <*c*, *b*>, <*c*, *a*>. $\mathrm{A}_3^2=6$;
б) <*a*, *b*>, <*b*, *c*>, <*a*, *c*>, <*b*, *a*>, <*c*, *b*>, <*c*, *a*>,<*a*, *a*>, <*b*, *b*>, <*c*, *c*>. $\overline{\mathrm{A}}_3^2=9$;
в) <*a*, *b*>, <*b*, *c*>, <*a*, *c*>. $\mathrm{C}_3^2=3$;
г) <*a*, *b*>, <*b*, *c*>, <*a*, *c*>,<*a*, *a*>, <*b*, *b*>, <*c*, *c*>. $\overline{\mathrm{C}}_3^2=6$;
д) <*a*, *b*, *c*>, <*b*, *c*, *a*>, <*c*, *a*, *b*>, <*a*, *c*, *b*>, <*b*, *a*, *c*>, <*c*, *b*, *a*>. $\mathrm{P}_3=6$.

Як виписати всі вибірки того чи іншого типу, щоб не помилитися? Існує зручний спосіб, при якому виключаються пропуски,- побудова так званого дерева. Наприклад, випишемо всі перестановки без повторень. Початкову точку - вершину дерева - позначимо буквою О. Від неї будемо рухатись вниз всіма можливими шляхами, як показано на рис.3.

```
          0
       /  |  \
    a     b     c
    ^     ^     ^
  b  c  a  c  a  b
  |  |  |  |  |  |
  c  b  c  a  b  a
```

рис. 3

```
          0
       /  |  \
    a     b     c
    ^     ^     ^
  b  c  a  c  a  b
```

рис. 4

Тепер випишемо всі шляхи-гілки нашого дерева. Отримаємо всі перестановки множини B: <*a*, *b*, *c*>, <*b*, *c*, *a*>, <*c*, *a*, *b*>, <*a*, *c*, *b*>, <*b*, *a*, *c*>, <*c*, *b*, *a*>.

На рис.4 наведено приклад дерева для знаходження всіх розміщень без повторень з 3 елементів по 2.

4. Розміщення

Теорема 1. *Має місце рівність*

(1) $$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

Доведення.
Для доведення необхідно визначити скільки різних впорядкованих k-елементних вибірок без повторень можна утворити з n елементів множини В. Нехай $<b_1, b_2,..., b_k>$- довільна k- елементна вибірка з множини В. Елемент b_1 можемо вибрати n способами. Оскільки елемент b_2 повинен бути відмінним від b_1, то b_2 - можна вибрати (n-1) способами. Аналогічно b_3 - (n-2) способами,..., b_k - (n-(k-1)) способами. Тоді за правилом добутку кількість k- елементних вибірок без повторень з множини В дорівнює

$$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

Для обчислення числа розміщень без повторень зручно користуватися іншою формулою. Щоб її отримати помножимо чисельник і знаменник правої частини формули (1) на вираз

$$(n-k)\cdot(n-(k+1))\cdot(n-(k+2))\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Маємо:

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)\cdot(n-(k+1))\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-(k+1))\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

Математики ввели спеціальну назву для добутку

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Такий добуток називається факторіалом числа n і позначається символом n!.

Отже,

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Теорема 2. *Має місце формула*

$$\overline{\mathrm{A}}_n^k = n^k.$$

Доведення.
Аналогічно до попереднього, якщо $<b_1, b_2, ..., b_k>$ довільна впорядкована k-елементна вибірка з повтореннями з множини В, то елемент b_1 можна вибрати n способами, b_2 - теж n способами, ..., b_k - n способами, бо елементи можуть повторюватися. Отже за правилом добутку кількість шуканих вибірок дорівнює добутку k однакових множників, кожен з яких дорівнює n. Тому

$$\overline{\mathrm{A}}_n^k = n^k.$$

Приклад 1. Скількома способами можна з 30 учнів класу обрати старосту, його заступника і редактора стінгазети.
Розв'язання. В цій задачі необхідно знайти число розміщень без повторень з 30 елементів по 3, оскільки тут має значення не лише, хто буде обраний до керуючої трійки, а й те, як будуть розподілені посади між обраними учнями. Тому відповідь знаходиться за формулою

$$A_{30}^{3}=\frac{30!}{(30-3)!}=30\cdot 29\cdot 28=24360.$$

Приклад 2. Скільки різних тризначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,6,8.
Розв'язання. Відповідь знаходимо за формулою

$$\overline{A}_{6}^{3}=6^{3}=216.$$

5. Перестановки

Теорема 1. *Має місце формула*

$$P_n=n!.$$

Доведення.
З означення перестановок зрозуміло, що перестановки з n елементів- це розміщення без повторень з n елементів по n елементів. Отже

$$P_n=A_n^n=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=n!$$

Приклад 1. Одного разу 10 друзів зайшли до кав'ярні. Господар кав'ярні запропонував їм приходити до нього щодня і кожного разу сідати за той самий стіл по-іншому; після того, як усі способи розміщень будуть вичерпані, їх пригощатимуть у кав'ярні безкоштовно. Коли настане цей день?
Розв'язання. Число різних способів розміщення 10 чоловік за столом дорівнює числу перестановок з 10 елементів. Оскільки

$$P_{10}=10!=3628800,$$

то цей день настане через 3628800 дня або через 9942 роки.

Нехай є множина $B=\{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Розглянемо лише ті k-елементні розміщення з повтореннями з множини B, які задовольняють такій умові: кожна вибірка-розміщення містить k_1 елементів b_1, k_2 елементів b_2, ..., k_n елементів b_n, причому $k_1+k_2+...+k_n=k$. Такі вибірки одна від іншої будуть відрізнятися лише порядком слідування елементів. Їх називають перестановками з повтореннями з k елементів і позначають символом $P_k(k_1, k_2,..., k_n)$.

Теорема 2. *Має місце формула*

$$P_k(k_1, k_2,..., k_n)=\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}.$$

Доведення.

Розглянемо довільну k- елементну вибірку-перестановку, яка містить k_1 елементів b_1, k_2 елементів b_2, ..., k_n елементів b_n, причому $k_1+k_2+...+k_n=k$ (наприклад $<\underbrace{b_1b_1...b_1}_{k_1}\underbrace{b_2b_2...b_2}_{k_2}...\underbrace{b_nb_n...b_n}_{k_n}>$).

Підрахуємо скільки нових перестановок з повтореннями з неї можна отримати.

Спочатку знайдемо скількома способами можна переставляти її елементи, щоб перестановка не змінилася. Оскільки елементи b_1 можна переставляти $k_1!$ способами, елементи b_2 - $k_2!$ способами, ..., елементи b_n - $k_n!$ способами, то за правилом добутку в кожній перестановці з повтореннями можна переставляти елементи (не змінюючи перестановку) $k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_n!$ способами.

Всього ж елементи розглядуваної вибірки можна переставляти $k!$ способами.

Отже, число різних перестановок з повтореннями з k елементів менше $k!$ в $k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_n!$ раз. Тому

$$\mathrm{P}_k(k_1, k_2,..., k_n)=\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_n!}.$$

Приклад 2. Скільки різних слів, у тому числі і беззмістовних, можна дістати, якщо переставляти букви в слові «математика».

Розв'язання. Очевидно цим числом є

$$\mathrm{P}_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=151200.$$

6. Комбінації

Розглянемо множину В=$\{a, b, c\}$. Як було встановлено в прикладі 1 п.3, комбінаціями без повторень з 3-х елементів по 2 і розміщеннями без повторень з 3-х елементів по 2 є такі вибірки:

комбінації:	$<a, b>$	$<b, c>$	$<a, c>$
	/ \	/ \	/ \
розміщення:	$<a, b>$ $<b, a>$	$<b, c>$ $<c, b>$	$<a, c>$ $<c, a>$

Неважко помітити, що з кожної комбінації, змінюючи порядок слідування її елементів, ми отримуємо P_2=2 вибірок, які є розміщеннями без повторень з 3-х елементів по 2. Отже , маємо залежність $\mathrm{A}_3^2=\mathrm{C}_3^2\cdot 2$. А звідси, уміючи обчислювати A_3^2, знаходимо $\mathrm{C}_3^2=\frac{\mathrm{A}_3^2}{2}=\frac{6}{2}=3$.

Поширимо наші міркування на загальний випадок.

Теорема 1. *Має місце формула*

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Доведення.

Нехай маємо n-елементну множину B. Ця множина має C_n^k комбінацій. Розглянемо одну з них. Змінюючи порядок слідування елементів цієї комбінації, ми отримаємо $k!$ впорядкованих вибірок, які є розміщеннями з n елементів по k елементів. Аналогічно розглядаючи всі інші комбінації, приходимо до висновку, що число розміщень з n елементів по k для множини B дорівнює $A_n^k = k!\,C_n^k$. Звідси маємо

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Приклад 1. Скількома способами можна з 30 учнів класу обрати делегацію у складі трьох чоловік.

Розв'язання. В цьому випадку, хоча умова задачі дуже схожа з умовою задачі 1 п.4, необхідно знайти число комбінацій без повторень з 30 елементів по 3. Тому що, в даному випадку має значення лише те, кого оберуть до складу делегації. Маємо відповідь

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!\cdot(30-3)!} = 4060.$$

Приклад 2. З дитинства ми пам'ятаємо, що в чарівному мішку Діда Мороза подарунки ніколи не кінчаються. Нехай новорічний мішок містить апельсинки, горішки і цукерки. Кожній дитині Дід Мороз принесе подарунок, який містить чотири гостинці. Скільки різних подарунків може скласти Дід Мороз?

Розв'язання. Переглядаючи різні подарунки, домовимося кожен гостинець подарунку відмічати окремо: спочатку наявність апельсинок, потім горішків, потім цукерок. Щоб не писати назви гостинців, будемо один вид гостинця відділяти від іншого рискою (перегородкою), а наявність гостинця відмічати плюсом. Наприклад,

<+ | + | + +> - цей запис означає, що подарунок складається з однієї апельсинки, одного горішка та двох цукерок,

<+ | | + + +> - цьому ж запису відповідає подарунок, який містить одну апельсинку, жодного горішка та три цукерки.

Отже, кожному подарунку відповідає своя шестиелементна послідовність з 2-х рисок і 4-х плюсів, а кожній такій послідовності - свій подарунок. Тому різних подарунків стільки, скільки існує різних послідовностей з 2-х рисок і 4-х плюсів. А цих послідовностей стільки, скількома способами можна вибрати два элемента (місцеположення рисок) з 4+2=6 елементів, тобто C_{4+2}^2. Легко помітити, що рисок на одну менше ніж видів гостинців, тобто 3-1=2.

Отже, число різних подарунків, які складено з 3-х видів гостинців по 4-ри гостинці, тобто число комбінацій з повторенням з 3-х елементів по 4, ми знаходимо такими міркуваннями

$$\overline{C}_3^4 = C_{4+(3-1)}^{3-1} = C_{4+3-1}^{3-1} = C_6^2 = 15.$$

Ці міркування дозволяють встановити таке твердження.

Теорема 2. *Має місце формула*

$$\overline{\mathrm{C}}_n^k = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1}.$$

Доведення.

Нехай B=$\{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Підрахуємо для цієї множини число $\overline{\mathrm{C}}_n^k$.

Оскільки в комбінаціях з повторенням порядок слідування елементів не береться до уваги, то любу комбінацію з повторенням з n елементів по k можна представити так:

(1) $$<\underbrace{b_1 b_1 \ldots b_1}_{k_1}\underbrace{b_2 b_2 \ldots b_2}_{k_2}\ldots\underbrace{b_n b_n \ldots b_n}_{k_n}>,$$

де $k_1+k_2+...+k_n=k$ (тобто спочатку записати всі елементи b_1, потім всі елементи b_2 і т.д.).

Цей запис можна ще спростити, якщо групи однакових елементів відділяти рисками, а наявність кожного елемента відмічати плюсом. Наприклад, для вибірки (1) матимемо

(2) $$\underbrace{+\,+\ldots+}_{k_1}|\underbrace{+\,+\ldots+}_{k_2}|\ldots|\underbrace{+\,+\ldots+}_{k_n}.$$

Отже, для кожної вибірки виду (1) можна записати свою послідовність з k+(n-1) плюсів і рисок. А кожній послідовності виду (2) відповідає певна вибірка. Тому комбінацій з повтореннями з n елементів по k стільки, скільки існує послідовностей виду (2). Послідовностей же виду (2) стільки, скількома способами можна вибрати (n-1) елемент з k+(n-1) елементів.

Тобто задача звелася до підрахунку числа комбінацій без повторень з k+(n-1) елементів по (n-1) елемент. Отже,

$$\overline{\mathrm{C}}_n^k = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} = \mathrm{C}_{k+n-1}^{\mathrm{k}}.$$

Приклад 4. Скількома способами можна купити 8 тістечок у кондитерській, де є 6 різних їх сортів.

Розв'язання. Відповідь знаходимо за формулою

$$\overline{\mathrm{C}}_6^8 = \mathrm{C}_{13}^5 = 1287.$$

7. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів

Числа C_n^k часто зустрічаються в різних розділах математики. Вони давно відомі і мають багато важливих властивостей. Розглянемо деякі з них.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (1)

2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (2)

Ці властивості можна довести, використовуючи співвідношення для обчислення числа комбінацій без повторень. Але корисно їх довести чисто комбінаторним шляхом. Спочатку доведемо (1).

Доведення.
Розглянемо квадратну сітку розмірами $k \times m$ ("шахове місто", яке складається з $k \times m$ прямокутних кварталів, поділених m-1 "горизонтальними" і k-1 "вертикальними" вулицями (рис.5)). Яке число різних найкоротших доріг на цій сітці, які ведуть з лівого нижнього кута (точки (0,0)) в правий верхній кут (точку (k, m))?

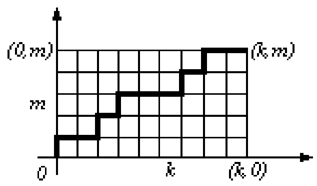


рис. 5

Кожен найкоротший шлях з точки (0, 0) в точку (k, m) складається з $k + m$ відрізків, причому серед них є k горизонтальних і m вертикальних відрізків. Тому загальне число шляхів дорівнює числу способів, якими з $k + m$ відрізків можна вибрати m вертикальних відрізків, тобто C_{k+m}^{m}.

Можна було б розглядати число способів вибору не m вертикальних, а k горизонтальних відрізків, і ми одержали б тоді відповідь C_{k+m}^{k}. Отже ми встановили рівність $C_{k+m}^{k} = C_{k+m}^{m}$. Позначимо $k + m = n$. Тоді

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Доведемо тотожність (2).

Доведення. Число найкоротших шляхів з точки (0, 0) в точку A(k, n-k) дорівнює $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$ (рис. 6). Всі такі шляхи можна поділити на дві групи: шляхи, які проходять через точку A_1(k-1, n-k) (число їх дорівнює $C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$), і шляхи, які проходять через точку A_2(k, n-k-1) (число їх дорівнює $C_{(n-k-1)+k}^{k} = C_{n-1}^{k}$). Тоді за правилом суми

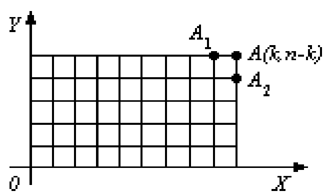


рис. 6

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}.$$

Тотожність (2) дозволяє послідовно виписувати числа C_n^k у вигляді таблиці, яка називається *трикутником Паскаля*:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

При різноманітних перетвореннях, в яких використовують числа C_n^k, вважається що C_n^{-1}:=0, C_n^{n+1}:=0.

Числа C_n^k *в математиці називають біноміальними коефіцієнтами*, бо вони використовуються для запису формули бінома Ньютона, тобто

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\ . \tag{3}$$

В n-му рядку трикутника Паскаля стоять коефіцієнти розкладу $(a + b)^n$, причому кожен коефіцієнт, крім крайніх, дорівнює сумі відповідних коефіцієнтів з попереднього рядка.

Формула бінома Ньютона настільки важлива, що корисно навести декілька її доведень.

Доведення 1 (комбінаторне).
Запишемо ліву частину (3) у вигляді добутку n однакових множників

$$(a+b)^n = \underbrace{(a\ +\ b)\,(a\ +\ b)\ .\ .\ .\ (a\ +\ b)}_{n\ \text{множників}\quad \text{виду}\ \ (\text{a+b})}\ .$$

Розкриємо дужки. Це можна зробити так: виберемо довільний доданок d_1 з першого множника, помножимо його на довільний доданок d_2 з другого множника, . . ., помножимо на довільний доданок d_n з n-го множника. Після розкриття дужок одержимо суму доданків виду $d_1d_2d_3\ ...\ d_n$, де кожен з множників дорівнює або a, або b. Підрахуємо кількість всіх доданків. Кожен з множників d_i (i = 1, 2, ..., n) можна вибрати одним з двох способів, тому застосувавши правило добутку одержимо число доданків рівне 2^n. Кожне d_i (i = 1, 2, ..., n) дорівнює a, або b, тому доданки можна записати і у вигляді

$$a^k b^{n-k}, \tag{4}$$

де k = 0, 1, ..., n. Оскільки k може приймати значення від 0 до n, то виразів виду (4) буде всього n+1. А доданків після розкриття дужок утворилося 2^n. Це означає, що не всі доданки різні. Підрахуємо скільки утворилося доданків виду (4) для конкретного k. Очевидно їх стільки, скількома способами з n множників $d_1d_2d_3\ ...\ d_n$ можна вибрати k множників, які дорівнюють a, тобто C_n^k. А оскільки k може приймати значення від 0 до n, то

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\ .$$

Доведення 2 (методом математичної індукції).
1. Для n=1 формула (3) має місце: $(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b$.
2. Припустимо, що формула (3) справедлива і для n=m, тобто

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}\ .$$

3. Доведемо, що рівність (3) має місце і для n=m +1. Справді

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}\right)(a+b) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}\,(a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m+1-k} = \{\, k+1 = k_1,\ 1 \le k_1 \le m+1 \,\}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{m+1} C_m^{k_1-1} a^{k_1} b^{m+1-k_1} + \sum_{k=0}^{m+1} C_m^k a^k b^{m+1-k} = \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} a^k b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m+1} C_m^k a^k b^{m+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \left(C_m^{k-1} + C_m^k\right) a^k b^{m+1-k} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k}\ .$$

Доведення 3 (аналітичне).

Для такого доведення використовується формула Тейлора для многочленів:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\ ,$$

де $f(x)$ - многочлен n-го степеня.

Застосуємо її до многочлена $f(x) = (1+x)^n$. Маємо

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\ .$$

Знайдемо a_k :

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)...(n-k+1)(1+x)^{n-k},\ f^{(k)}(0) = n(n-1)...(n-k+1),$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = C_n^k\ .$$

Отже,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\ .$$

Покладемо $x = \dfrac{a}{b}$. Тоді

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{a}{b}\right)^k,$$

$$(a+b)^n = b^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\ .$$

8. Відображення: вступні зауваження

В математиці поняття відображення, як і поняття множини, належить до числа основних понять. Тому ми не даємо йому формального означення, а лише пояснюємо зміст цього поняття.

Відображення завжди визначається на деякій множині, яка називається його “областю визначення”. Відображення f ставить кожному елементу x своєї області визначення D_f цілком певний об’єкт

$$y=f(x).$$

Множина всіх об’єктів y, що відповідають всім можливим $x \in D_f$, називається множиною значень відображення і позначається E_f.

Необхідно чітко розрізняти таку термінологію:

“відображення на множину”,
“відображення в множину”.

Відображення множини N на множину M - це відображення з областю визначення N і областю значень M. Поняття відображення множини N в множину M ширше - це відображення з областю визначення N і областю значень, яка є підмножиною множини M (рис.7).

Відображення N на M Відображення N в M

Рис. 7

Кожне відображення “на” можна назвати і відображенням “в”, але не навпаки.

Відображення f множини N в множину M називається оборотним (говорять ще взаємно-однозначним), *якщо різним елементам області визначення N воно ставить у відповідність різні елементи з M* (тобто для довільного y з області значень f існує один єдиний $x \in$M такий, що $f(x) = y$).

Співвідношення між різними видами відображень множини N в множину M схематично зображені на рис.8.

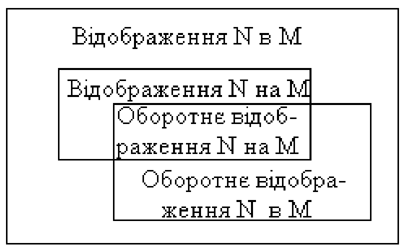


рис.8

В математиці слова “функція” і “відображення” є синонімами, це дві назви одного і того поняття. Функція відображає область визначення M на область значень N (або в множину N).

В школі звикли мати справу лише з числовими функціями, область визначення та область значень яких складаються з чисел. Для таких функцій нескладно вводяться поняття зростання, спадання та монотонності.

В загальному ж випадку, поняття зростання, спадання та монотонності вводяться лише для функцій, область визначення та значень яких є впорядкованими множинами.

Нагадаємо, що множину M називають упорядкованою, коли в ній встановлено відношення порядку $\prec$, що має такі властивості: 1) $\forall\, a,\, b \in$ M або $a \prec b$ (a передує b), або $b \prec a$; 2) якщо $a \prec b$, $b \prec c$, то $a \prec c$. Вибір відношення порядку в даній множині називають її впорядкуванням. Для впорядкування скінченої n-множини досить кожному її елементу приписати один з номерів 1, ..., n або просто записати її елементи в певному порядку).

Отже, *відображення f називається зростаючим (спадним), якщо для довільних елементів x_1 та x_2 з області визначення і таких, що $x_1 \prec x_2$, виконується співвідношення $f(x_1) \prec f(x_2)$ ($f(x_2) \prec f(x_1)$). Зростаюче або спадне відображення називається монотонним.*

Найбільш простими відображеннями будуть ті, для яких область визначення скінченна. Зрозуміло, що відображення, область визначення якого складається з n елементів, не може приймати більше, ніж n різних значень. Отже, відображення, визначені на скінченних множинах, здійснюють відображення скінченних множин на скінченні множини. Такі відображення є одним з предметів вивчення важливої частини математики - комбінаторики.

9. Функціональний підхід до введення початкових понять комбінаторики

Традиційний підхід до таких комбінаторних понять як розміщення, розміщення з повтореннями, комбінації, комбінації з повтореннями, перестановки грунтується на понятті вибірки. Та дати точне визначення вибірки це не така проста річ, як може показатись на перший погляд. Справа в тому, що трактуючи вибірки як специфічні множини, є загроза прийти до протиріччя з поняттям рівності двох множин (множини рівні, якщо вони складаються з однакових елементів).

Відомий інший підхід для введення вищезгаданих понять, який грунтується на одному з основних математичних понять, а саме: функції, відображення.

При такому підході комбінаторика - це розділ математики, який вивчає функції зі скінченними областю визначення і областю значень. Тоді

Означення 1. *Довільні відображення m елементної множини X в n елементну множину Y будемо називати розміщеннями з повтореннями з n елементів по m.*

Означення 2. *Довільні оборотні відображення m елементної множини X в n елементну множину Y будемо називати розміщеннями без повторень з n елементів по m.*

Означення 3. *Довільні монотонні відображення m елементної множини X в n елементну множину Y будемо називати комбінаціями з повтореннями з n елементів по m.*

Означення 4. *Довільні монотонні оборотні відображення m елементної множини X в n елементну множину Y будемо називати комбінаціями без повтореннями з n елементів по m.*

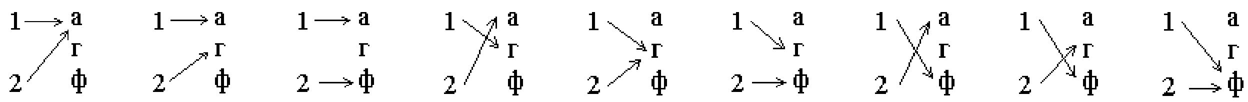
Означення 5. *Довільні відображення n елементної множини X на n елементну множину Y будемо називати перестановками без повторень з n елементів.*

Приклад. Нехай X={1, 2}, Y={а, г, ф}. X→Y. Тоді

а) Розміщеннями з повтореннями будуть такі функції:

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
1	а	а	а	г	г	г	ф	ф	ф
2	а	г	ф	а	г	ф	а	г	ф

Коли n і m невеликі, ці функції можна зображати графічно, наприклад:



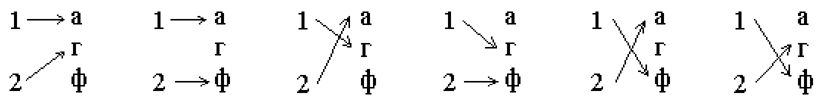
аа аг аф га гг гф фа фг фф

$$\overline{A}_3^2=3^2=9.$$

б) Розміщеннями без повторень будуть такі функції:

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	а	а	г	г	ф	ф
2	г	ф	а	ф	а	г

Графічно ці функції можна зобразити так:



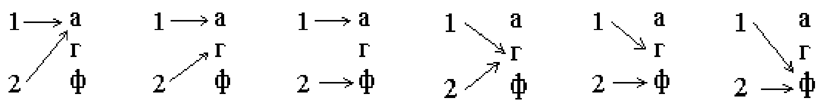
$$A_3^2=2\cdot 3=6.$$

аг аф га гф фа фг

в) Комбінаціями з повтореннями будуть такі функції:

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	а	а	а	г	г	ф
2	а	г	ф	г	ф	ф

Графічно ці функції можна зобразити так:



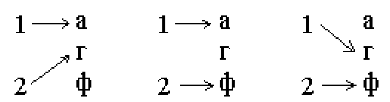
$$\overline{C}_3^2=6$$

аа аг аф гг гф фф

в) Комбінаціями без повторень будуть такі функції:

x	y_1	y_2	y_3
1	а	а	г
2	г	ф	ф

Графічно ці функції можна зобразити так:



$$C_3^2 = 3$$

аг аф гф

10. Формула включень та виключень

Розглянемо множину *M*, яка складається з *N* елементів. Позначимо символом *N(a)* кількість всіх елементів даної множини, які мають властивість *a.* Тоді, якщо позначити через $N(\overline{a})$ кількість елементів множини *M*, які не мають цієї властивості, то

(1) $$N(\overline{a})=N-N(a).$$

Якщо мова йде про елементи множини, які мають дві властивості *a* та *b*, то число елементів, які не володіють жодною з цих властивостей, знаходиться за формулою

$$N(\overline{a}\,\overline{b})=N-N(a)-N(b)+N(ab),$$

бо при відніманні *N(a)* і *N(b)* з загальної кількості елементів множини *M* величина *N(ab)* віднімається двічі.

Має місце і більш загальний результат.

Теорема . Нехай серед елементів множини *M* $N(a_1)$ елементів мають властивість a_1 , $N(a_2)$ – властивість a_2, ..., $N(a_n)$ – властивість a_n. Тоді число елементів множини, які не володіють жодною з цих властивостей , знаходиться за формулою

(2) $$N(\overline{a_1}\,\overline{a_2}\cdots\overline{a_n})=N-N(a_1)-N(a_2)-\ldots-N(a_n)+N(a_1a_2)+N(a_1a_3)+\ldots$$
$$+N(a_{n-1}a_n)-N(a_1a_2a_3)-\ldots-N(a_{n-2}a_{n-1}a_n)+\ldots+(-1)^nN(a_1a_2\ldots a_n).$$

Ця формула називається *формулою включень та виключень, або формулою решета*. Вона має численні застосування в різних галузях математики, зокрема в теорії чисел та в теорії ймовірностей.

Доведення.

Доводиться формула (2) методом математичної індукції. Справді, з (1) випливає таке співвідношення: $N(\overline{a_1}\,\overline{a_2}\cdots\overline{a_{n-1}}\,\overline{a_n})=N(\overline{a_1}\,\overline{a_2}\cdots\overline{a_{n-1}})-N(\overline{a_1}\,\overline{a_2}\cdots\overline{a_{n-1}}a_n)$. Припустимо, що формула (2) має місце для числа *n-1*, тобто, $N(\overline{a_1}\,\overline{a_2}\cdots\overline{a_{n-1}})=$
$=N-N(a_1)-N(a_2)-\ldots-N(a_{n-1})+N(a_1a_2)+N(a_1a_3)+\ldots+N(a_{n-1}a_{n-1})+\ldots+(-1)^{n-1}N(a_1a_2\ldots a_{n-1}).$

Застосуємо останнє співвідношення до тих елементів множини M, які мають властивість a_n і знайдемо $N(\overline{a_1}\,\overline{a_2}\cdots\overline{a_{n-1}}a_n) = N(a_n) - N(a_1a_n) - N(a_2a_n) - \ldots - N(a_{n-1}a_n) + N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + \ldots + N(a_{n-1}a_n) + \ldots + (-1)^{n-1}N(a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n)$.

Якщо тепер від останньої рівності відняти попередню, то отримаємо формулу (2). Залишилось врахувати те, що співвідношення (2) справедливе для n=1.

Формула (2) краще запам'ятовується в такій символічній формі:

$$N(\overline{a_1}\,\overline{a_2}\cdots\overline{a_n}) = N((1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n))$$

Смисл цього запису заключається в тому, що спочатку в правій частині цієї формули розкриваються дужки, а потім знак N застосовується до кожного з отриманих доданків.

Вправи до

п. 1

1. Наведіть два приклади множин, елементами яких є а) люди, б) книги, в) букви алфавіту, г) числа, д) геометричні фігури.
2. Опишіть і зобразіть множини точок, координати x і y яких задовольняють такі умови: а) $y=x$, б) $y>x$, в) $y<x$, г) $y>x+1$, д) $x+y\leq 4$, е) $|x|+|y|\leq 1$, ж) $x^2 + y^2 \geq 1$.
3. Нехай S={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Позначимо через T множину, елементами якої є квадрати елементів S. Задайте множину T двома способами.
4. Наведіть декілька прикладів універсальних множин і їх підмножин, використовуючи для цього множини людей, об'єктів і понять.
5. Нехай U складається з чисел *1, 2, 3, ..., 9* і 33 букв українського алфавіту *а, б, в, ..., ь*. Якщо A={*1, 3, 5, а, в, д*} і B={*1, 2, 3, 4, 5, а, б, г, д, е*}, знайдіть

а) $\overline{B}$, б) $A\cap B$, в) $A\cup B$, г) $A\cap\overline{B}$.

6. Дано, що

$$U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},\ A=\{3x \mid x\in U\},\ B=\{5x \mid x\in U\}.$$

Знайдіть $A\cap B$.

7. Нехай U є множина всіх точок координатної площини:

$$A=\{(x, y) \mid y=|x|\},\ B=\{(x, y) \mid y>|x|\},\ L=\{(x, y) \mid x+y=2\},\ M=\{(x, y) \mid x+y<2\}.$$

Вкажіть на площині такі множини:

а) A, г) $\overline{B}$, ж) $B\cap M$,

б) B, д) L, з) $\overline{M}$,

в) $A\cup B$, е) $A\cap L$, к) $\overline{L}$.

8. Нехай A і B - підмножини скінченної універсальної множини U. Кількість елементів деяких підмножин U вказана в перших чотирьох стовпчиках наступної таблиці:

Множина	U	A	B	$A\cap B$	$\overline{A}\cap B$	$A\cap\overline{B}$	$A\cup B$	$\overline{A}$	$\overline{A}\cup B$
Кількість елементів	20	7	8	3					

Побудуйте діаграму Венна для ілюстрації цих даних (елементи множин на діаграмі позначте точками). Потім доповніть таблицю, попередньо визначивши число елементів в кожній з наступних п'яти множин.

п. 2

1. "Знову вісімка!"- болісно скрикнув голова клубу велосипедистів, коли побачив зігнуте колесо свого велосипеда. "А все чому? Та тому, що при вступі до клубу мені видали квиток під номером 008. І тепер місяця не проходить, щоб то на одному, то на іншому колесі не з'явилася вісімка. Треба міняти номер квитка. А щоб мене не звинуватили в забобонності, перереєструю я всіх членів клубу і буду видавати лише квитки з номерами, в які жодна цифра 8 не входить." Скільки членів було в клубі, якщо відомо, що використано всі тризначні номери, що не містять жодної цифри 8? (Наприклад, 000 використано, а 836 ні.)
2. У меню кафе 3 перші страви, 5 других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них обід?
3. Маємо 5 різних типів конвертів та 6 типів марок однакової вартості. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою, щоб відправити листа?
4. Морська свинка біжить по лабіринту, який побудовано так, що спочатку вона повинна вибрати одну з двох дверей. За кожними з них її очікує по троє дверей, а за кожними з них- по четверо. Увійшовши в які-небудь двері, морська свинка не може повернутися через них назад. Скількома різними шляхами морська свинка може пройти лабіринт від початку до кінця?
5. Скільки впорядкованих пар символів (x, y) можна утворити, якщо на місце x можна поставити або a, або b, або c, а на місце y можна поставити або 1, або 2, або 3, або 4? Намалюйте дерево, на якому покажіть множину всіх можливих пар (x, y).
6. Металург, що вивчає сплави, при проведенні досліду може використовувати 3 різні температурні режими, 6 різних значень часу охолодження і 4 різні присадки міді. Вибір температурного режиму, часу охолодження і типу присадки повністю визначають дослід. Скільки різних дослідів може провести металург?

7. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися з неї. Дайте відповідь на те саме запитання, якщо підняття і спуск відбуваються різними дорогами ?

8. У школі 1200 учнів. Довести, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

9. Коли готують піццу до сиру додають різні компоненти, які забезпечують той, чи інший смак піцци. У Білла є перець, цибуля, сосиски, гриби і анчоуси, причому все це можна, на його думку, додавати до сиру. Скільки типів піцци може приготувати Білл?

10. Скільки тризначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо
а) жодна цифра не повторюється більше одного разу;
б) цифри можуть повторюватися;
в) числа повинні бути непарними?

11. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо
а) жодна цифра не повторюється більше одного разу;
б) цифри можуть повторюватися;
в) числа повинні бути непарними;
г) числа повинні бути кратні п’яти;
д) числа повинні бути кратні п’яти і жодна цифра не повторюється більше одного разу?

12. Скільки є п’ятизначних чисел, які діляться на 5?

13. У машині сім місць. Скількома способами сім чоловік можуть сісти в цю машину, якщо зайняти місце водія можуть лише троє з них?

14. Скількома різними способами з восьми книг можна відібрати декілька, але не менше однієї?

15. Є три різних прапорці. На щоглу підіймають сигнал, що складається не менше ніж з двох прапорців. Скільки різних сигналів можна підняти на щоглу, якщо порядок прапорців у сигналі враховується?

п. 4

Розміщення без повторень.

1. Скількома способами можна присудити золоту, срібну і бронзову медалі на змаганнях, в яких беруть участь 15 чоловік?

2. Наукове товариство налічує 25 членів. Необхідно обрати президента товариства, віце президента, вченого секретаря і скарбника. Скількома способами може бути зроблений цей вибір, якщо кожен член товариства може займати лише одну посаду?

3. У класі 30 учнів. Необхідно вибрати старосту, заступника старости та редактора стінгазети. Скількома способами можна обрати цю керівну трійку, якщо одна особа може займати лише одну посаду?
4. На станції є 6 запасних колій. Скількома способами можна розмістити на них чотири потяги?
5. Скільки тризначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 якщо кожну з цих цифр можна використовувати не більше одного разу?
6. В класі вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?
7. Скільки чисел а) тризначних, б) чотиризначних можна скласти з цифр 0, 2, 3, 4, 5, при умові, що кожну цифру можна використовувати не більше одного разу?
8. Скількома способами можна розсадити 5 учнів на 12 місцях?
9. У геометрії многокутник позначається буквами, які ставлять біля його вершин. Скількома способами можна позначити трикутник, використовуючи 26 букв латинського алфавіту? Скількома способами можна позначити п'ятикутник? Десятикутник? (Відповідь запишіть у вигляді добутку множників, не підраховуючи його.)
10. Скільки різних музичних фраз можна скласти з 6 нот, якщо не допускати в одній фразі повторення звуків?
11. Скількома способами можна зробити триколірний прапорець з горизонтальними смугами однакової ширини, якщо є тканина 6 різних кольорів? Розв'яжіть цю задачу за умови, що один з кольорів має бути червоним.
12. Скільки різних слів можна утворити з чотирьох букв, що входять до складу вашого прізвища, причому ці слова повинні починатися і закінчуватися приголосними, а в середині повинні стояти дві голосні букви?
13. До програми музичного концерту включено три пісні і два романси. Скількома способами можна скласти програму концерту так, щоб він починався і закінчувався виконанням пісні, і, щоб романси не виконувалися один за другим?
14. Скільки потрібно взяти елементів, щоб число розміщень з них по 4 було в 6 разів більше, ніж число розміщень з них по 2?
15. Число розміщень з n елементів по 2 в 6 разів більше ніж число розміщень з (n - 5) елементів по 2, знайти n.

<u>Розміщення з повтореннями</u>.

16. Скільки цілих шестизначних чисел можна записати за допомогою цифр 6, 7, 8, 9 ?

17. Студенту потрібно за 8 днів скласти 4 екзамени. Скількома способами це можна зробити?

18. Чотири студенти складають екзамен. Скільки може бути варіантів розподілу оцінок, якщо відомо, що так або інакше всі вони екзамен склали?

19. У пасажирському потязі 9 вагонів. Скількома способами можуть сісти в потяг чотири особи? Задачу розв'язати за умови, що всі вони поїдуть у різних вагонах.

20. На диску телефонного апарату є 10 цифр. Кожен телефон автоматичної станції має номер, який складається з п'яти цифр. Знайти найбільше число телефонів, які може обслужити така станція.

21. Алфавіт племені Мумбо-Юмбо складається з трьох букв А, Б, В. Словом є довільна послідовність довжиною не більше ніж чотири букви. Скільки слів у мові племені Мумбо-Юмбо?

22. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9 ?

23. Автомобільний номер складається з трьох букв та чотирьох цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, якщо використовуються 32 букви?

24. На залізничній станції є m світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за їх допомогою, якщо кожен світлофор має три сигнали - червоний, жовтий і зелений?

25. Два листоноші повинні віднести 10 листів. Скількома способами вони можуть розподілити між собою роботу?

26. Скількома способами можна дати клички чотирьом цуценятам, якщо є сім можливих варіантів? Задачу розв'язати за умови, що цуценят необхідно назвати по-різному.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

27. Скількома способами можна розфарбувати квадрат, який поділено на дев'ять частин, п'ятьма кольорами, при умові, що різні частини допускається фарбувати одним кольором?

28. Скількома способами можна розкласти 10 різних кульок в три різні урни?

29. У ліфт 12-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфту?

30. Потяг, в якому їдуть n пасажирів, робить k зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири на цих зупинках?

п. 5

Перестановки без повторень.

1. Скількома способами можна скласти список з 8 учнів?

2. Скількома способами можуть розміститися чотири пасажири в чотиримісному купе залізничного вагону?
3. Скількома способами 7 осіб можуть розташуватися в чергу до каси?
4. Для чергування в класі протягом тижня (крім неділі) виділено 6 учнів. Скількома способами можна встановити порядок чергування, якщо кожен учень чергує один раз?
5. У шаховому турнірі беруть участь 7 чоловік. Скількома способами можуть розподілитися місця між ними?
6. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр 2, 3, 4, 5, 6 і чому дорівнює сума всіх цифр у всіх цих числах при умові, що кожну цифру можна використовувати не більше одного разу?
7. Довести, що число трибуквених слів, які можна скласти з букв слова "гіпотенуза", дорівнює числу всіх можливих перестановок букв слова "призма".
8. Визначити число перестановок букв у слові *фізика*. Скільки перестановок можна одержати з букв цього слова, щоб перестановки починалися а) з букви *ф*, б) з букви *ф* і закінчувалися складом *ка* ?
9. Пасажирський потяг складається з двох багажних вагонів, чотирьох плацкартних і трьох купейних. Скількома способами можна сформувати потяг, якщо багажні вагони повинні знаходитися в "голові" потягу, а купейні в "хвості"?
10. П'ять хлопчиків і п'ять дівчаток сідають на 10 місць, які розташовані в ряд, причому хлопчики сідають на непарні місця, а дівчатка на парні. Скількома способами вони можуть це зробити ?

<u>Перестановки з повтореннями</u>.

11. Знайти число перестановок, утворених з усіх букв слова *комісія*.
12. Скільки різних перестановок можна утворити з усіх букв слова *перестановка*? Скільки з них починаються з букви *п* і закінчуються буквою *а*?
13. Знайти число різних способів, якими можна виписати в один ряд шість плюсів і чотири мінуси?
14. Скільки різних десятизначних чисел можна отримати, використовуючи в їх написанні цифри 2233344455?
15. Знайти число всіх можливих перестановок букв слова *зоологія*? Скільки серед них таких, в яких три букви *о* стоять поруч? Скільки таких, в яких точно дві букви *о* стоять поруч?

п. 6

Комбінації без повторень.

1. У агрохіміка є шість різних типів мінеральних добрив. Йому необхідно провести декілька дослідів по вивченню спільної дії будь-якої трійки мінеральних добрив. Скільки всього дослідів необхідно провести?
2. Нехай в умовах попередньої задачі агрохіміку не потрібно проводити експерименти по вивченню таких трійок добрив, в які б одночасно входили добрива А і В. Скільки дослідів йому доведеться провести в цьому випадку?
3. На біржу фірма повинна відправити двох брокерів, трьох дилерів і одного менеджера. Скількома способами це можна зробити, якщо фірма має 15 брокерів, 10 дилерів і 5 менеджерів?
4. Фермеру потрібні чотири водії, а до нього з пропозицією своїх послуг звернулися 10. Скількома способами він може вибрати з них чотирьох?
5. Скільки прямих можна провести через 6 точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій?
6. На колі вибрано 10 точок. Скільки можна провести хорд з кінцями в цих точках? Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках? Скільки опуклих десятикутників?
7. Скільки трикутників можна побудувати, з'єднуючи по три вершини восьмикутника?
8. Колода гральних карт налічує 52 різні карти. Скількома способами можна здати 13 карт на руки одному гравцю?
9. Колода карт містить 13 карт пікової масті, 13 трефової, 13 бубнової і 13 червової. Скількома способами можна здати одному гравцю 5 пік, 4 черви, 2 трефи і 2 бубни? (Відповідь записати у вигляді добутку, не обчислюючи його.)
10. Скількома способами з дев'яти книг можна вибрати чотири? Скількома способами це можна зробити, якщо до числа відібраних повинна входити деяка певна книга? Скількома способами можна відібрати чотири книги так, щоб певна книга не входила до їх числа?
11. Скільки різних маршрутів може вибрати турист, який вирішив пройти дев'ять кварталів,- з них п'ять на захід і чотири на північ?
12. Упередвиборній компанії за дві однакові посади змагаються шість кандидатів. Кожен виборець повинен занести в свій бюлетень або одного кандидата, або двох. Скількома способами можуть бути заповнені бюлетені?
13. При зустрічі 12 чоловік потиснули руки один одному. Скільки при цьому було зроблено привітань?

14. На випускному вечорі 20 випускників інституту обмінялися фотокарточками. Скільки при цьому було роздано фотокарток?
15. У вазі 12 білих і рожевих троянд, які пронумеровано. Відомо, що букет з двох білих і однієї рожевої троянди можна скласти 105 способами. Скільки у вазі троянд кожного кольору?
16. З чотирьох подружніх пар необхідно обрати комісію у складі трьох чоловік. Скількома способами це можна зробити, якщо а) в комісію може входити будь-хто з 8 чоловік; б) комісія повинна складатися з двох жінок і одного чоловіка; в) в комісію не повинні входити члени однієї сім'ї.
17. Група з двадцяти чоловік ділиться на три підгрупи, в першу з яких входять три чоловіки, в другу - п'ять і в третю - дванадцять. Скількома способами вони можуть це зробити? (Відповідь записати у вигляді добутку, не обчислюючи його.)
18. Знайти число способів, якими можна виписати в один ряд дев'ять трійок і шість п'ятірок так, щоб ніякі дві п'ятірки не стояли поруч.
19. П'ятеро дівчат і троє юнаків грають у городки. Скількома способами вони можуть розділитися на дві команди по чотири гравці, якщо у кожній команді повинен бути принаймні один юнак?

<u>Комбінації з повтореннями</u>.

20. Скількома способами можна купити 8 тістечок у кондитерській, де є 6 різних їх сортів?
21. Скількома способами можна вибрати 3 олівці, якщо є 5 видів олівців?
22. У продаж надійшли листівки 10 різних видів. Скількома способами можна відібрати набір з 12 листівок? З 8 листівок?
23. У гастрономі є коробки з цукерками чотирьох найменувань. Скількома способами можна замовити набір з 5 коробок?
24. Потяг, в якому їдуть n пасажирів, робить k зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири на цих зупинках, якщо враховується лише кількість пасажирів, які вийшли на кожній зупинці?
25. Скількома способами можна покласти 15 однакових кульок в 5 урн?
26. Скільки різних чисел можна отримати, переставляючи цифри числа 123456789, за умови, що в кожній такій перестановці як всі парні цифри, так і всі непарні цифри будуть розташовані у зростаючому порядку.
27. В класі 12 дівчаток і 10 хлопчиків. Скількома способами можна вишикувати їх в одну шеренгу, якщо в ній, як всі дівчатка взяті окремо, так і всі хлопчики, взяті без дівчаток, повинні стояти за зростом.
28. Скількома способами два продавці книжок можуть розподілити між собою 300 примірників однієї книги, 200 примірників другої і 100 примірників

третьої, якщо жоден з них не повинен отримати всіх книг? (Відповідь записати в загальному вигляді.)

29. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння $x_1+x_2+x_3=5$?

30. Скільки цілих додатних розв'язків має рівняння $x_1+x_2+...+x_n=k$?

п. 4 - 6

1. Скільки різних намист можна зробити
а) з семи намистинок різних розмірів;
б) з шести однакових намистинок і ще однієї дещо більшої.

2. У розиграші першості країни з футболу в вищій лізі бере участь 16 команд. Команди, які займають перше, друге і третє місця, нагороджуються відповідно золотою, срібною і бронзовою медалями, а команди, що зайняли останні 2 місця залишають вищу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?

3. Для польоту на Марс необхідно укомплектувати екіпаж космічного корабля в такому складі: командир корабля, перший його помічник, другий помічник, два бортінженери і один лікар. Керуюча трійка може бути відібрана з числа 25 льотчиків, два бортінженера - з числа 20 спеціалістів, які досконало знають будову космічного корабля, і лікар - з числа 8 медиків. Скількома способами можна укомплектувати екіпаж дослідників космосу?

4. Є п'ять пар рукавичок різних кольорів. Скількома способами з них можна вибрати
а) одну рукавичку на праву руку і одну на ліву;
б) одну рукавичку на праву руку і одну на ліву так, щоб рукавички були різних кольорів;
в) дві рукавички на ліву руку;
г) дві рукавички на одну руку?

5. Скільки різних добутків, кратних 10, можна дістати з чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13?

6. Скількома способами можна розташувати в один ряд п'ять червоних м'ячів, чотири чорних м'ячі й п'ять білих м'ячів так, щоб м'ячі, які лежать по краях, були одного кольору?

7. Визначити число всіх діагоналей правильного а)п'ятикутника, б) восьмикутника, в) дванадцятикутника.

8. 20 пасажирів вирішили здійснити подорож у двоповерховому автобусі, який вміщує 12 пасажирів внизу і 8 угорі. При цьому 4 пасажири не бажають їхати внизу, а 5 пасажирів – угорі. Скількома способами їх можна розсадити в автобусі, якщо а) порядок розміщення пасажирів по місцях як внизу, так і вгорі не враховується; б) порядок розміщення і внизу і вгорі враховується?

9. Скільки членів в квадраті многочлена, який містить n членів?

10. На шаховому турнірі було зіграно 45 партій, причому кожен з шахістів зіграв з іншими по одній партії. Скільки шахістів брало участь у турнірі?

11. У тенісному клубі юнаків займається на 2 більше, ніж дівчат. Дві змішані пари на міжнародний турнір можна вибрати 2520 способами. Скільки в цьому клубі юнаків і скільки дівчат?

12. У змаганнях з бейсболу дві команди A і B грають між собою декілька ігор доти, поки якась команда не виграє чотири гри. Складається послідовність назв команд, які виграють ігри. (Наприклад, послідовність A, B, A, B, B, B означає, що 1-шу і 3-тю ігри виграла команда A, а 2-гу, 5-ту і 6-ту - виграла команда B). Скільки таких різних послідовностей можна утворити?

13. Скількома способами з п'яти подружніх пар можна відібрати чотирьох чоловік, якщо а) до числа відібраних повинні входити два чоловіки і дві жінки; б) жодна подружня пара не повинна входити в це число?

п. 7

1. Доведіть рівність:

а) $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$;

б) $C_n^m + 3C_n^{m+1} + 3C_n^{m+2} + C_n^{m+3} = C_{n+3}^{m+3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $C_x^{12} = C_x^7$; б) $C_x^2 = C_x^{10}$.

3. Скільки доданків входить у вираз для $(m+n)^{100}$? Випишіть три перших члена цього виразу без їх коефіцієнтів, розташовуючи їх за зростаючими степенями n.

4. У виразі для $(1+x)^{1000}$, який розташований за зростаючими степенями x, знайти а) 200-й член, б) коефіцієнт при 375-му члені, в) коефіцієнт при x^{625}.

5. У виразі для $(a+x)^{100}$ випишіть, не спрощуючи, 50-й член. Чому дорівнює 20-й член? Який член містить x^{60}?

Використайте біноміальну формулу для розв'язування наступних прикладів (числові вирази обчисліть, у буквених - розкрийте дужки):

6. а) $(1+b)^5$, б) $(1{,}01)^5$.

7. а) $(1-b)^5$, б) $(0{,}98)^5$.

8. $(1+p)^7$.

9. $(1-3a)^4$.

10. $(1-x^3)^5$.

Випишіть перші три члени наступних виразів:

11. $(p+q)^{50}$.

12. $(x\text{-}y)^{100}$.

13. $(1\text{-}a^2)^{40}$.

14. $(2x\text{-}3y)^8$.

15. Скільки різних членів містить вираз для $(a+b+c)^n$ при n=1? При n=2? При n=3? В загальному випадку?

16. Обчисліть наближено:
а) $(0.997)^8$, б) $(2.003)^{10}$, в) $\sqrt[5]{0.998}$.

17. Знайдіть показник бінома $\left(\frac{a}{4}-\frac{3}{5}b\right)^n$, якщо в розкладі його сума всіх показників степенів числа b дорівнює 36.

18. Довести $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ (скористатися формулою бінома Ньютона, поклавши в ній $x = a = 1$).

п. 10

1. Із 100 студентів 40 знають англійську мову, 35 - німецьку, 28 - французьку; англійську і німецьку мови знають 12 студентів; англійську і французьку - 7; німецьку і французьку - 6; всі три мови знають 4 студенти. Скільки студентів не знають жодної з цих мов?

2. У звіті наведено числові дані як такі, що насправді спостерігалися: N=1000, N(A)=510, N(B)=490, N(C)=427, N(AB)=189, N(AC)=140, N(BC)=85. Показати, що у цих даних є помилка.

3. Кожен, хто зібрався в туристичну подорож, володіє хоча б однією іноземною мовою. 6 з них володіють англійською мовою, 6 - німецькою, 7 - французькою, 4 - англійською і німецькою, 3 - німецькою і французькою, 2 - французькою і англійською мовами. Один турист володіє англійською, німецькою і французькою мовами. Інших туристів в групі немає. Скільки туристів володіють лише англійською мовою, лише французькою? Скільки туристів в групі?

4. Загін з 92 школярів зібрався в похід. З них 47 приготували бутерброди з ковбасою, 38 - з сиром, 42 - з шинкою, 28 - з ковбасою і сиром, 31 - з ковбасою і шинкою, 26 - з сиром і шинкою. Взяли з собою бутерброди всіх видів 25 школярів, а деякі взяли лише по пляшці води. Скільки було таких, які взяли лише воду?

Відповіді

До пункту 2.
1. 729; **2**. 30; **3**. 30; **4**. 24; **5**. 12; **6**. 72; **7**. 49, 42; **9**. 32; **10**. 60, 125, 75; **11**. 300, 1080, 540, 360, 108; **12**. 18000; **13**. 2160; **14**. 2^8-1; **15**. 12.

До пункту 4.
1. 2730; **2**. 303600; **3**. 24360; **4**. 360; **5**. 120; **6**. 151200; **7**. 48, 96; **8**. 95040; **9**. A_{26}^{3}, A_{26}^{5}, A_{26}^{10}; **10**. 1242; **11**. 120, $A_5^2 \cdot 3$; **13**. 12; **14**. 5; **15**. 9; **16**. 4096; **17**. 4096; **18**. 81; **19**. 6561, 3024; **20**. $\overline{A}_{10}^{5}$; **21**. 120; **22**. $\sum_{k=1}^{6} \overline{\mathrm{A}}_{3}^{k}$; **23**. $\overline{\mathrm{A}}_{32}^{3} \cdot \overline{\mathrm{A}}_{10}^{4}$; **24**. 3^m; **25**. 1024; **26**. 2401, 840; **27**. 5^9; **28**. 3^{10}; **29**. 11^{10}; **30**. k^n.

До пункту 5.
1. 8!; **2**. 24; **3**. 5040; **4**. 720; **5**. 5040; **6**. 120, 2400; **8**. 720, 120, 6; **9**. 288; **10**. 5!·5!; **11**. 2520; **12**. 12!/(2!·2!), 10!/2!; **13**. 210; **14**. 25200; **15**. 6720, 720, 7!–6!.

До пункту 6.
1. 20; **2**. 16; **3**. $C_{15}^{2} \cdot C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{1}$; **4**. 210; **5**. 15; **6**. 45, 120, 1; **7**. 56; **8**. C_{52}^{13}; **9**. $C_{13}^{5} \cdot C_{13}^{4} \cdot C_{13}^{2} \cdot C_{13}^{2}$; **10**. 126, 56, 70; **11**. C_9^4; **12**. 21; **13**. 66; **14**. 380; **15**. 7 білих і 5 рожевих; **16**. 56, 24, 32; **17**. $C_{20}^{3} \cdot C_{17}^{5} \cdot C_{12}^{12}$; **18**. 210; **19**. 60; **20**. 1287; **21**. 21; **22**. $\overline{C}_{10}^{12}$, $\overline{C}_{10}^{8}$; **23**. 56; **24**. $\overline{C}_{k}^{n}$; **25**. 3876; **26**. $\overline{C}_{6}^{4}$; **27**. $\overline{C}_{13}^{10}$; **28**. $\overline{C}_{2}^{300} \cdot \overline{C}_{2}^{200} \cdot \overline{C}_{2}^{100}$-1; **29**. 21; **30**. $\overline{C}_{k}^{n}$.

До пунктів 4-6.
1. 5040, 7; **2**. 262080; **3**. $A_{25}^{3} \cdot C_{20}^{2} \cdot 8$; **4**. 25, 20, 10, 20; **5**. 16; **6**. 72072; **7**. 5, 20, 54; **8**. 330, $\dfrac{8!\cdot 11!\cdot 12!}{4!\cdot 7!}$; **9**. $n+C_n^2$; **10**. 10; **11**. 10 і 8; **12**. 54; **13**. 100, 30.

До пункту 7.
2. 19, 12; **3**. 101, m^{100}, $m^{99}n$, $m^{98}n^2$; **4**. а)$C_{1000}^{199}x^{199}$, б)C_{1000}^{374}, в)C_{1000}^{625}; **5**. $C_{100}^{49}x^{49}$, $C_{10}^{19}x^{19}$, 61-й член; **6**. б)1.0510100501; **7**. б)0.9039207968; **15**. 3, 6, 10, $\overline{C}_{3}^{n}$; **16**. 0.976, 1039.37, 0.9996; **17**. 8.

До пункту 10.
1. 18; **3**. 1, 3, 11; **4**. 25.

Література

1. Айгнер М. Комбинаторная теория: Пер. с анг. - М.: Мир, 1982. - 558 с.
2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М.: Наука, 1969. - 328 с.
3. Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики. - К.: Вища шк., 1972. - 83с.
4. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику: Пер. с анг. - М.: Издательство иностранной литературы, 1963. - 486 с.
5. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность: Пер. с анг. - М.: Мир, 1969. - 431 с.
6. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ: Пер. с анг. - М.: ИЛ, 1963. - 288с.
7. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. - К.: Вища шк., 1994. - 193 с.

Розділ II. **Дискретна теорія ймовірностей**

1. Вступ

Теорія ймовірностей - це розділ математики за допомогою якого можна вивчати випадкові явища. Вона виникла в результаті аналізу деяких азартних ігор. У 17 столітті цими питаннями цікавилися видатні французькі математики Паскаль і Ферма. Першим великим дослідженням з теорії ймовірностей був трактат Гюйгенса (1657 рік) "Про розрахунки в азартній грі". Та тільки праця Якоба Бернуллі "Мистецтво передбачень", яка була опублікована в 1713 році (через 8 років після смерті автора), поклала початок теорії ймовірностей, як строгої математичної дисципліни.

Довгий час теорія ймовірностей вважалася фізичною наукою. Про це свідчать і терміни, які використовуються в теорії ймовірностей: стохастичний експеримент, подія, ймовірність. Перш ніж перейти до абстрактного викладу теорії ймовірностей, пояснимо на інтуїтивному, фізичному рівні вказані терміни.

Почнемо зі стохастичного експерименту. Це дослід, експеримент, випробування, в широкому розумінні цих слів, результати якого заздалегідь передбачити не можливо - вони випадкові. Та в теорії ймовірностей не всякі експерименти з випадком називають стохастичними. Одна з основних властивостей стохастичного експерименту полягає в тому, що його можна повторювати багато разів без зміни умов проведення, і що при багаторазовому повторенні експерименту, наслідки попередніх експериментів не впливають на наслідки наступних експериментів. Наслідки стохастичних експериментів називаються випадковими подіями, або просто подіями. Найпростішим прикладом стохастичного експерименту є підкидання монети, в якому може відбутися одна з двох подій: випадає герб, випадає цифра.

Розглянемо детальніше другий приклад стохастичного експерименту, який розглядав ще Бернуллі. Нехай в деякій урні розміщені 5 тисяч камінців: 3 тисячі білих і 2 тисячі чорних. Але вважатимемо, що нам невідома кількість білих і чорних камінців. Будемо витягувати з урни по черзі камінець за камінцем, відмічати їх колір і повертати назад до урни. Підрахуємо, скільки було витягнено білих камінців і скільки чорних. Виникає питання, чи можемо ми, повторюючи цей дослід багато разів, дізнатися скільки в урні камінців того чи іншого кольору?

На перший погляд здається що відповісти на це питання неможливо. Та насправді, якщо випробувань з витягненням камінців провести досить багато, то виявиться, що частка білих камінців буде приблизно дорівнювати 3/5, а чорних 2/5 від усієї кількості камінців. Отже, якщо буде відома загальна кількість камінців в урні, то ці частки дозволять зробити висновок про кількість камінців кожного кольору.

Уважніше проаналізуємо результати нашого експерименту. Цей експеримент складний. Він складається з простіших експериментів - одноразового витягування камінця. Такі прості експерименти, з яких складаються складні, часто називаються стохастичними випробовуваннями. В нашому випадку, в результаті окремого випробовування відбувається одна з двох подій: витягнений камінець - білий, витягннеий камінець - чорний. Для скорочення подальших записів першу з цих подій позначатимемо буквою А, другу - В.

При проведенні великої кількості випробувань бачимо, що подія А відбувалася частіше, ніж подія В. Отже, часткою білих камінців (від усіх випробувань) можна охарактеризувати ступінь вірогідності, або інакше - ймовірності події А. А часткою чорних камінців - ступінь вірогідності (ймовірності) події В. Якби ми заздалегідь знали, скільки білих камінців сховано в урні, то природно за ймовірність події А було б взяти число 3/5, а за ймовірність події В - 2/5.

Важливо при цьому відмітити, що зі збільшенням кількості випробувань, частка білих камінців (від усіх випробувань) буде все менше і менше відрізнятись від числа 3/5, а чорних від числа 2/5. В цьому проявляється дія давно відомого людям закону – закону великих чисел або, інакше, закону стійкості частот.

Можна навести багато інших прикладів, в яких би ми виявили дію закону великих чисел. Так, якщо багато разів підкидати новеньку монету, то приблизно в половині випадків випадає герб, а приблизно в половині - цифра. Тому ймовірністю випадання герба вважають число 1/2 .

Ще одним цікавим прикладом прояву закону великих чисел може бути частка хлопчиків серед новонароджених дітей. Люди давно помітили, що хлопчиків народжується більше, ніж дівчаток, і хоча частка хлопчиків серед новонароджених залежить від країни, регіону, року, та вважається, що в середньому ця частка складає 51.4 %.

2. Статистичне (емпіричне) означення ймовірності

Розглянемо яке-небудь стохастичне випробування і подію А, яка може відбутися при цьому випробуванні. Проведемо ці випробування n разів і позначимо через k_n(А) кількість випробувань, в яких подія А відбулася. *Відношення*

$$\nu_n(A)=\frac{k_n(A)}{n}$$

називається частотою події А в проведеній серії з n випробувань.

Частоту події можна знайти тільки після того, як буде проведена серія випробувань, і, взагалі кажучи, частота зміниться, якщо взяти іншу серію випробувань, або змінити n. При досить великих n, для більшості таких серій випробувань, частота майже не буде мінятися. Причому великі відхилення будуть спостерігатися тим рідше, чим більше буде n. Це твердження виражає закон стійкості частот або закон великих чисел.

Якщо при великих n частота $\nu_n(A)$ події A мало відрізняється від частоти цієї події в інших серіях з n випробувань, то подія A називається стохастично стійкою, а число $\nu_n(A)$ називається ймовірністю події A.

Головним недоліком цього визначення є те, що ймовірність події знаходиться неоднозначно і залежить не тільки від події, а і від серії випробувань. Таке означення ймовірностей не є формальним означенням, а тому однією з основних задач теорії ймовірностей є формалізація поняття ймовірності та вивчення математичних об'єктів, пов'язаних з цим поняттям.

3. Простір елементарних подій і дії над подіями

З кожним стохастичним експериментом пов'язана множина всіх можливих наслідків, які називають подіями. Розрізняють складені події (ті, які можна розкласти) і елементарні події (ті, які не можна розкласти). Наприклад, при підкиданні грального кубика, сказати, що кількість вічок, які випали на верхній грані, є парним числом - це все одно, що сказати - дослід привів до одного з наслідків "випало або 2, або 4, або 6 вічок". Цей перерахунок розкладає подію "число вічок парне" на три елементарні події.

Сукупність усіх елементарних подій називається простором елементарних подій, який надалі позначатимемо грецькою буквою Ω.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. ("Монета"). Експеримент полягає в тому, що один раз підкидається монета. Монета може впасти догори гербом або цифрою. Простір елементарних подій даного експерименту - це множина Ω={Г, Ц}, де літера Г означає, що випав герб, а літера Ц означає, що випала цифра.

Приклад 2. ("Кубик"). Гральний кубик підкидається один раз. Тоді $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_j означає випадання грані з j вічками.

Приклад 3. ("Колода"). З колоди, яка містить 36 карт, витягнено одну. Тоді простір елементарних подій складається з 36 подій.

Експерименти, які ми розглянули в попередніх прикладах, мають скінчене число наслідків. Проте в багатьох важливих задачах теорії ймовірностей доводиться розглядати експерименти з нескінченим числом наслідків.

Приклад 4. Монету підкидають доти, поки не з'явиться герб. Простір елементарних подій має вигляд $\Omega=\{\text{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ...}, \underbrace{\text{Ц}\ldots\text{Ц}}_{n}\text{Г}, \ldots\}$.

Приклад 5. Відрізок завдовжки в ℓ розділили на три частини, вибираючи дві точки поділу навмання.

Зв'яжемо відрізок з числовою віссю так, щоб його лівий кінець збігся з початком координат. Позначимо через x координату однієї точки поділу, через y - координату другої точки поділу. Тоді простором елементарних подій можна вважати множину $\Omega=\{(x, y): 0<x<\ell, 0<y<\ell\}$.

Складені події, або просто події - це підмножини простору елементарних подій.

Приклад 6. Двічі підкидають монету. Позначимо через А випадкову подію, яка полягає в тому, що хоча б один раз з'явиться герб. Простором елементарних подій є множина Ω={ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}. Коли відбудеться подія А? Коли результатом експерименту буде одна з елементарних подій: або ГГ, або ГЦ, або ЦГ. Тобто подію А можна розглядати, як підмножину А={ГГ, ГЦ, РЦ} множини Ω, що містить ті елементарні події, при появі яких відбудеться А.

Приклад 7. Підкидають гральний кубик. Нехай подія А полягає в тому, що випаде непарне число вічок. Тоді $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$.

Як показують розглянуті приклади, ми ототожнюємо випадкову подію А з підмножиною А тих елементарних подій, при появі яких відбувається А.

Вся множина Ω ототожнюється з *вірогідною* подією, яка завжди відбувається, а порожня множина ∅ – з *неможливою* подією, яка не відбувається.

Сумою (або об'єднанням) подій A та B називається подія, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з цих подій. Сума подій позначається символом A+B або $A\cup B$. Наприклад, в електричному колі дві лампочки з'єднано послідовно. Нехай подія А - перегоріла перша лампочка, подія В - перегоріла друга лампочка. Тоді подія А+В - електричне коло розімкнено (світло зникло).

Добутком (або перетином) подій A та B називається подія, яка полягає в тому, що відбуваються обидві події. Добуток подій позначається символом AB або $A\cap B$. Наприклад, в електричному колі дві лампочки з'єднано паралельно. Нехай подія А - перегоріла перша лампочка, подія В - перегоріла друга лампочка. Тоді подія АВ - електричне коло розімкнено (світло зникло).

Протилежною подією $\overline{A}$ *для події A називається подія, яка відбувається тоді і лише тоді, коли не відбувається подія A.* Наприклад, стрілець стріляє в мішень. Нехай подія А - стрілець влучив. Тоді подія $\overline{A}$ - стрілець не влучив.

Різницею подій A та B називається подія, яка полягає в тому, що подія A відбувається, а подія B не відбувається. Різниця подій позначається символом A-B або $A\backslash B$. Наприклад, два спортсмена стріляють по мішені. Нехай подія А - влучив перший спортсмен, подія В - влучив другий. Тоді подія А-В - перший спортсмен влучив, а другий промахнувся; подія В-А - другий влучив, а перший промахнувся.

Симетричною різницею подій A та B називається подія, яка полягає в тому, що відбувається або подія A, або подія B, але не відбувається подія AB. Симетрична різниця позначається символом $A\circ B$. Наприклад, два спортсмени стріляють по мішені. Нехай подія А - влучив перший спортсмен, подія В -

влучив другий. Тоді подія $A \circ B$ - перший спортсмен влучив, а другий промахнувся; або - другий влучив, а перший промахнувся.

Дві події називаються несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу іншої, тобто дві події несумісні, якщо їх добуток неможлива подія. Наприклад, при підкиданні грального кубика подія "випало парне число вічок" несумісна з подією "число вічок, що випали, кратне п'яти.

У попередньому пункті вже було дано означення частоти події. Звернемо увагу на те, що частота події - це функція $\nu_n(A)$, аргументом якої є подія A.

Розглянемо *властивості* цієї функції.

1. Область визначення - це множина всіх подій, пов'язаних з даним експериментом.
2. Множина значень [0, 1].
3. $\nu_n(\Omega)=1$.
4. $\nu_n(\varnothing)=0$.
5. Якщо подія AB неможлива, то $\nu_n(A+B)= \nu_n(A)+ \nu_n(B)$.

Доведення.

Нехай в результаті n випробувань подія A відбулася k разів, а подія B - m разів. Оскільки подія AB неможлива, то в результаті даного експерименту подія $A+B$ відбулася $k + m$ разів. Тоді

$$\nu_n(A+B)=\frac{k+m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{m}{n}= \nu_n(A)+ \nu_n(B).$$

Приклади стохастичних експериментів, які розглянуті в цьому пункті, досить природні і подібних прикладів можна навести безліч. У свою чергу, такі приклади підказують і загальну схему для побудови стохастичних експериментів: візьмемо довільну множину Ω і будемо "навмання" вибирати елементи цієї множини. Цей вибір і буде загальною моделлю стохастичного експерименту. Таким чином, між стохастичними експериментами і множинами можна встановити взаємно-однозначну відповідність.

Далі основна увага приділяється випадку, коли простір елементарних подій скінченний. У цьому випадку найпростіше формалізувати поняття події, ймовірності події, випадкової величини. Таку частину теорії ймовірностей часто називають елементарною теорією ймовірностей.

4. Аксіоматичне означення ймовірності

Розглянемо довільну множину, яка складається з n елементів

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,.\omega_n\}.$$

Означення 1. *Подією називається будь-яка підмножина множини Ω, включаючи порожню множину $\varnothing$, яка називається неможливою подією, і саму множину Ω, яка називається достовірною подією. Одноелементні підмножини називаються елементарними подіями.*

Події позначатимемо великими літерами латинського алфавіту. Множину всіх подій позначатимемо буквою ***A***. Якщо A подія, то пишуть $A \in \boldsymbol{A}$.

Означення 2. *Ймовірністю події називається числова функція P(A), яка визначена на множині подій **A** і має такі властивості*

1. $P(\varnothing)=0$,
2. $P(\{\omega_1\})=p_1$, $P(\{\omega_2\})=p_2$, . . . , $P(\{\omega_n\})=p_n$, *причому числа* $p_1, p_2, ..., p_n$ *- невід'ємні і* $p_1+p_2+ ...+ p_n=1$*. Числа* $p_1, p_2, ..., p_n$ *називаються ймовірностями елементарних подій.*
3. *Ймовірність довільної події знаходиться як сума ймовірностей елементарних подій, з яких складається подія.*

Властивості 1-3 називаються аксіомами ймовірності.

Примітка. В загальному випадку під подіями розуміють не всі підмножини множини Ω, а тільки ті, які належать виділеній алгебрі підмножин.

Далі фігурні дужки для запису елементарних подій писати не будемо.

5. Класичне означення ймовірності

Розглянемо частинний випадок уведеного означення. Будемо вважати, що всі *n* елементарних подій мають одну й ту ж ймовірність, тобто ймовірність, що дорівнює числу $\frac{1}{n}$ (бо сума всіх ймовірностей елементарних подій за аксіомою 1 повинна дорівнювати 1). Тоді ймовірність довільної події A легко визначити: досить підрахувати кількість елементарних подій з яких складається подія A (цю кількість позначимо через *m*) і поділити на кількість усіх елементарних подій. Таким чином

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Знаходження ймовірності події за допомогою співвідношення (1), називається класичним означенням імовірності. Ті елементарні події, з яких складається подія *A*, називають подіями, що сприяють появі події *A*. Тому в літературі часто можна зустріти таке визначення ймовірності.

Означення 1. *Ймовірністю події A називається відношення кількості подій, що сприяють появі події A, до кількості всіх елементарних подій.*

6. Дії над подіями

Оскільки події - це множини, то над подіями можна виконувати ті ж операції, що і над множинами.

Означення 1. *Сумою (або об'єднанням) A+B подій A та B називається об'єднання відповідних множин (тобто подія, яка складається з елементарних подій, що входять до складу події A або події B або до обох разом).*

Означення 2. *Добутком (або перетином) AB подій A та B називається перетин відповідних множин (тобто подія, яка складається з усіх елементарних подій, які спільні для обох події A і B).*

Означення 3. *Подією протилежною до події A називається подія $\overline{A}$, яка складається з усіх елементарних подій, які не входять в A.*

Означення 4. *Різницею A-B подій A та B називається різниця відповідних множин (тобто подія, яка складається з елементарних подій, що входять до події A і не входять до події B).*

Означення 5. *Події A та B називаються несумісними, якщо $AB=\varnothing$.*

Теорема 1. *Якщо події A та B несумісні, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.*
Доведення.
Нехай $A=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$, $B=\{\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ..., \omega_n\}$, тоді $A+B=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ..., \omega_n\}$, бо $AB=\varnothing$, $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_k)$, $P(B)=P(\omega_{k+1}) + P(\omega_{k+2})+\ldots+P(\omega_n)$. Отже, $P(A+B)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_k)+P(\omega_{k+1})+P(\omega_{k+2}) + ...+P(\omega_n)= P(A)+P(B)$.

Теорема 2. *Якщо A та B довільні події, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.*
Доведення.
Нехай $A=\{\omega_1, \omega_2, ...,\omega_m, \omega_{m+1}, ..., \omega_k\}$, $B=\{\omega_m, \omega_{m+1}, ..., \omega_k,\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ..., \omega_n\}$. Тоді $A+B=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m, \omega_{m+1}, ..., \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ..., \omega_n\}$, $AB=\{\omega_m, \omega_{m+1}, ..., \omega_k\}$.

Далі матимемо:
$P(A)+P(B)=[P(\omega_1)+P(\omega_2)+... +P(\omega_m)+P(\omega_{m+1})+... +P(\omega_k)]+[P(\omega_m)+ P(\omega_{m+1})+... +P(\omega_k)+ P(\omega_{k+1})+ P(\omega_{k+2})+... +P(\omega_n)]= [P(\omega_1)+ P(\omega_2)+... +P(\omega_m)+ P(\omega_{m+1})+... +P(\omega_k)+ P(\omega_{k+1})+ P(\omega_{k+2})+... +P(\omega_n)]+ [P(\omega_m)+ P(\omega_{m+1})+... +P(\omega_k)]= P(A+B)+ P(AB)$. Звідси маємо: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Теорема 3. *$P(\overline{A})=1-P(A)$.*
Доведення.
Оскільки $A+\overline{A}=\Omega$, а події A та $\overline{A}$ несумісні, то за третьою властивістю ймовірності та теоремою додавання несумісних подій маємо:

$$P(A+\overline{A})=P(\Omega);\ P(A)+P(\overline{A})=1;\ P(\overline{A})=1-P(\overline{A}).$$

7. Умовна ймовірність

Розв’язання задач теорії ймовірностей починається з вибору математичної моделі. При визначенні ймовірностей подій часто виникають певні труднощі. Для їх подолання вводяться нові поняття. Одним з них є поняття умовної ймовірності. Спочатку розглянемо приклад.

Навмання на шахову дошку розміру 8×8 ставиться ферзь (рис. 1). Нехай подія А- ферзь попадає у верхній лівий квадрат (надалі цей квадрат позначатимемо буквою А), В- попадає у нижній правий квадрат (а цей квадрат позначатимемо буквою В). Тоді Р(А)=25/64, Р(В)=36/64, Р(АВ)=9/64.

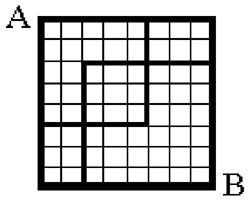


рис. 1

Припустимо, що подія В відбулася - ферзь міститься у квадраті В. Тоді ймовірність того, що він міститься і у квадраті А, дорівнює 9/36. Позначимо цю ймовірність символом Р(А|В)=9/36. (При відшуканні цієї ймовірності ми по суті мали справу з іншим стохастичним експериментом: ферзь навмання ставили у квадрат В, і відшукували ймовірність того, що він попадає в ту частину квадрату А, яка є спільною з квадратом В).

Неважко помітити, що для цих ймовірностей має місце співвідношення:

$$\mathrm{P(A|B)}=\frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}}=\frac{9\cdot 64}{64\cdot 36}=\frac{9}{36}.$$

Це співвідношення не випадкове. Якщо замість А та В розглянути інші подібні події, то матиме місце та сама залежність.

Означення 1. *Нехай A і B довільні події і P(B)≠0. Умовною ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B, називається число*

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Наслідок. *P(AB)=P(A|B)P(B)*.

В літературі часто цей наслідок називають теоремою множення.

8. Формула повної ймовірності

Нехай B_1, B_2, ..., B_n такі попарно несумісні події, що $B_1+B_2+ \ldots +B_n=\Omega$. Яка б не була подія *A* має місце співвідношення:

$$A=AB_1+AB_2+ \ldots +AB_n$$

(цей факт допоможе зрозуміти рис. 2).

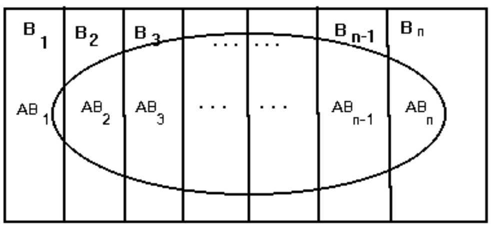


рис. 2

Тоді $\mathrm{P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+ \ldots +P(AB_n)}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P(AB}_i)$$

і на основі теореми множення маємо:

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P(AB}_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P(B}_i)\cdot\mathrm{P(A|B}_i).$$

Одержана формула називається

формулою повної ймовірності. З формули повної ймовірності легко одержати формули

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_i^n P(B_i)P(A \mid B_i)}, \; j = 1,2,\ldots,n.$$

які називаються формулами Байєса.

9. Незалежні події

Означення 1. *Дві події A та B називаються незалежними, якщо*

(1) $$P(A|B)=P(A) \text{ або } P(B|A)=P(B)$$

Теорема 1. *(Необхідна і достатня ознака незалежності двох подій). Для того, щоб події A та B були незалежними необхідно й достатньо щоб виконувалася рівність*

(2) $$P(AB)=P(A)P(B)$$

Доведення.
Необхідність. Якщо події A і B незалежні, то

(3) $$P(A|B)=P(A)$$

За означенням умовної ймовірності

(4) $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Оскільки ліві частини рівностей (3) і (4) рівні, прирівняємо їх праві частини. Маємо $P(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}$. Звідки P(AB)=P(A)P(B).

Достатність. Нехай має місце рівність (2). Покажемо, що події A та B незалежні. Поділимо праву і ліву частину рівності (2) на P(B). Маємо $\frac{P(AB)}{P(B)}$=P(A). Оскільки за означенням умовної ймовірності P(A|B)= $\frac{P(AB)}{P(B)}$, то P(A)=P(A|B). Отже, події A та B незалежні.

Приклад 1. З колоди, яка містить 36 карт, навмання витягують одну карту. Позначимо через A подію - витягнена карта дама, через B - витягнута карта піка. Чи є ці події незалежними?
Розв'язання. Зробимо перевірку, скориставшись означенням:
P(A)=1/9; P(B)=1/4; оскільки подія AB означає, що витягнута карта пікова дама, то P(AB)=1/36. Отже, P(AB)=P(A)P(B) і за теоремою 1 події A та B є незалежними.

Приклад 2. Розглянемо приклад подібний до попереднього, але витягуватимемо карту з колоди, яка складається з 37 карт (36 звичайних і одна

карта без масті - джокер). Чи будуть в цьому випадку події А та В незалежними?
Розв'язання.
В цьому випадку маємо:

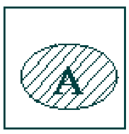
$$P(A)=4/37,\ P(B)=9/37,\ P(AB)=1/37.$$

Але $P(AB)\neq P(A)P(B)$. Отже, події A та B не є незалежними.

Наведені приклади показують, що на власну інтуїцію не завжди можна покластися при визначенні незалежності подій.

10. Геометричні ймовірності

Спочатку розглянемо допоміжні приклади. В квадрат, сторона якого відома, навмання кидається точка. Через А позначимо подію - точка попала в заштриховану область (рис. 3). Для даного експерименту Ω - множина точок квадрату, подія А - множина точок заштрихованої області.



Приклад 1. Обчислити ймовірність події А.
Розв'язання.
Можна скористатися статистичним означенням імовірності і провести серію з n випробувань. Нехай k - число появ події А. Тоді при великому n $P(A)=\frac{k}{n}$. Звичайно, на практиці такий розв'язок реалізувати складно.

Приклад 2. Обчислити площу заштрихованої фігури А.
Розв'язання.
Скористаємося попередньою задачею і знову проведемо серію з n випробувань. Нехай k- число точок, що попали у заштриховану фігуру. Позначимо через $S_к$ та $S_ф$ відповідно площі квадрата та розглядуваної фігури. Будемо вважати, що точки рівномірно покрили квадрат. Тоді $\frac{n}{S_к}=\frac{k}{S_ф}$. Звідки $S_ф=S_к\frac{k}{n}=S_к\cdot P(A)$.

Остання рівність підказує ще один метод знаходження ймовірності:

(1) $$P(A)=\frac{\text{площа } A}{\text{площа } \Omega}$$

У випадку, коли за простір елементарних подій береться просторове тіло, а подією А є деяка частина цього тіла, можна провести міркування аналогічні прикладу 1 і отримати наступний результат:

(2) $$P(A)=\frac{\text{об'єм A}}{\text{об'єм } \Omega}.$$

Подібна ситуація і у випадку, коли Ω - відрізок, а подія А - частина цього відрізка. Тоді формула для обчислення ймовірності події А набуде вигляду:

(3) $$P(A)=\frac{\text{довжина } A}{\text{довжина } \Omega}.$$

Означення 1. *Ймовірності, які визначаються формулами (1), (2), (3) називаються геометричними ймовірностями.*

Приклад 3. Палицю завдовжки l навмання розламали на три частини. Знайти ймовірність того, що з утворених частин можна скласти трикутник.

Розв'язання 1. (*Аналітичне*).

Покладемо палицю на числову вісь так, щоб її лівий кінець збігся з точкою O (початком координат), а правий співпав з точкою B, абсциса якої дорівнює l. Тоді, навмання розламати палицю на три частини по суті означатиме навмання вибрати дві точки X (з абсцисою x) і У(з абсцисою y) на відрізку OB. Координати точок X і У можуть набувати довільні значення з проміжку $(0, l)$, тобто $0<x<l$, $0<y<l$. Простір елементарних подій буде складатися з усіх можливих пар вигляду (x, y), де x і y задовольняють нерівності $0<x<l$, $0<y<l$:

$$\Omega=\{(x, y): 0<x<l,\ 0<y<l\},$$

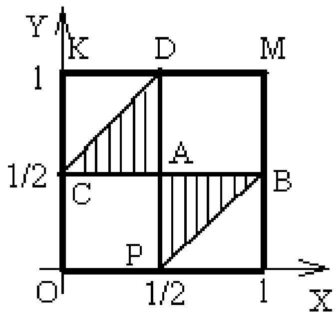


рис. 4

а це нещо інше, як множина точок квадрату. Визначимо довжини отриманих частин відрізка. При цьому можливі два випадки:

1. $x < y$, тоді
$|OX|=x$,
$|XY|=y-x$,
$|YB|=l-y$.

2. $x > y$, тоді
$|OX|=y$,
$|XY|=x-y$,
$|YB|=l-x$.

Для того, щоб з цих відрізків можна було скласти трикутник, необхідно щоб довжина кожного з них була меншою від суми довжин двох інших, тобто:

(4)
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+(y-x)>l-y, \\ x+l-y>y-x, \\ (y-x)+l-y>x, \end{cases} \\ \begin{cases} y+(x-y)>l-x, \\ y+l-x>x-y, \\ (x-y)+l-x>y. \end{cases}\end{array}\right.$$

Отже, подія A, ймовірність якої ми шукаємо, складається лише з тих точок квадрату, координати яких задовольняють співвідношення (4). Знайдемо множину цих точок.

$$\left[\begin{cases} 2y > l, \\ 2x - 2y + l > 0, \\ 2x < l, \end{cases} \atop \begin{cases} 2x > l, \\ 2y - 2x + l > 0, \\ 2y < l. \end{cases}\right. \iff \begin{cases} y > \frac{l}{2}, \\ y < \frac{l}{2} + x, \\ x < \frac{l}{2}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x > \frac{l}{2}, \\ x < \frac{l}{2} + y, \\ y < \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Остання сукупність нерівностей визначає заштриховану область на рис.4. Отже,

$$P(A)=\frac{S_{CAD}+S_{PAB}}{S_{OKML}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2}{l^2}=\frac{1}{4}.$$

Розв'язання 2. (*Геометричне*).

Розглянемо іншу математичну модель даного експерименту. Візьмемо рівносторонній трикутник з висотою, що дорівнює довжині палиці $h=l$. Навмання виберемо в ньому точку. Опустимо з неї перпендикуляри на сторони трикутника, які позначимо h_1, h_2, h_3 (рис. 5). Відомо, що $h_1+h_2+h_3=h$ або $h_1+h_2+h_3=l$.

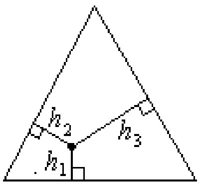


рис. 5

В даному випадку, навмання розламати палицю на три частини по суті означає навмання вибрати точку в середині рівностороннього трикутника з висотою $h=l$ і знайти довжини висот, опущених з цієї точки на сторони трикутника. Ці висоти будуть відповідати частинам палиці, що утворилися після розламування (рис. 6).

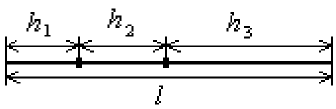


рис. 6

У цьому випадку простором елементарних подій є внутрішні точки рівностороннього трикутника. Надалі будемо вважати, що точка породжує трикутник, якщо з висот h_1, h_2, h_3, що їй відповідають, можна утворити трикутник. Знайдемо ті частини трикутника, точки яких породжують трикутники.

Згадаємо, що з відрізків довжини яких h_1, h_2 і h_3 можна побудувати трикутник тоді і лише тоді, коли

$$\begin{cases} h_1 + h_2 > h_3, \\ h_1 + h_3 > h_2, \\ h_2 + h_3 > h_1. \end{cases}$$

Розглянемо рівності:

$$(5)\qquad \begin{aligned} h_1 + h_2 &= h_3, \\ h_1 + h_3 &= h_2, \\ h_2 + h_3 &= h_1. \end{aligned}$$

Знайдемо множину точок розглядуваного трикутника, для яких висоти, що їм відповідають, задовольняють рівності (5).

Оскільки $h_1+h_2+h_3=l$ і $h_1+h_2=h_3$ то $h_3=h_1+h_2=\frac{l}{2}$. Аналогічними міркуваннями маємо: $h_2 = \frac{l}{2}$, $h_1 = \frac{l}{2}$. Отже точки, що задовольняють рівності (5), - це точки середніх ліній заданого трикутника (рис. 7).

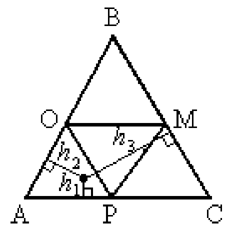


рис. 7

Очевидно, ті точки, що розташовані біля кутів трикутника не породжують трикутників, а ті, що в центрі,- породжують. Проведені міркування дозволяють висунути таку гіпотезу: точки, що породжують трикутники, знаходяться у внутрішній області ΔPOM. Доведемо це.

Розглянемо довільну внутрішню точку ΔAOP (рис.7). Оскільки $h_3 > \frac{l}{2}$ і $h_1+h_2+h_3=l$, то $h_1+h_2 < \frac{l}{2}$. Звідси $h_1+h_2 < h_3$, а значить побудувати трикутник з таких відрізків не можна. Це означає, що точки ΔAOP не породжують трикутників. Аналогічна ситуація і для ΔOBM і ΔPMC.

Розглянемо ΔPOM і виберемо в ньому довільну точку (рис. 8). Очевидно $h_1 < \frac{l}{2}$, а отже $h_2+h_3 > \frac{l}{2}$. Маємо $h_2+h_3 > h_1$. Аналогічними міркуваннями можна довести, що $h_1+h_3 > h_2$ і $h_1+h_2 > h_3$. Це означає, що точки ΔPOM породжують трикутники.

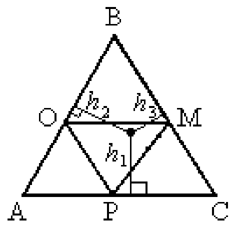


рис. 8

Оскільки ΔAOM=ΔOBM=ΔPMC=ΔPOM, то

$$P(A)=\frac{S_{POM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

При побудові математичної моделі стохастичного експерименту простір елементарних подій можна вибирати по різному, що ілюструється прикладом. Але всі ці математичні моделі еквівалентні між собою.

11. Випадкові величини

Під випадковою величиною розуміють числову величину, яка з'являється в результаті стохастичного експерименту. Інтуїтивно зрозуміло, що випадкова величина повинна бути пов'язана з елементарною подією: відбулася подія - випадкова величина набула певного значення. Пояснимо це на конкретних прикладах.

Приклад 1. Гра в орлянку має такі правила: підкидається монета, при випаданні герба гравець отримує одне очко, при випаданні цифри - нуль очок.

Простором елементарних подій є множина $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$, де ω_1=г, ω_2=ц (г- випадання герба, ц- випадання цифри).

Кожній елементарній події поставимо у відповідність число очок (виграш)

$$\omega_1 \to 1,\ \omega_2 \to 0.$$

Цей виграш і є прикладом випадкової величини. Позначимо її через ξ. Множина значень ξ - це множина $\{0, 1\}$.

Приклад 2. Випробування полягає в підкиданні грального кубика. Простором елементарних подій є множина $\Omega=\{\omega_1,..., \omega_6\}$, де ω_j- випадання грані з j вічками.

Кожній елементарній події поставимо у відповідність число вічок на грані:

$$\omega_1 \to 1,\quad \omega_3 \to 3,\quad \omega_5 \to 5,$$
$$\omega_2 \to 2,\quad \omega_4 \to 4,\quad \omega_6 \to 6.$$

Отже, маємо випадкову величину ξ - число вічок на грані. Множина значень ξ - це множина $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Приклад 3. (“Два підкидання шайби”). Випробування полягає в тому, що двічі підкидається шайба циліндричної форми, на поверхні якої знаходяться вічка: на одній основі - 0 вічок, на другій - 1 вічко, на бічній поверхні - 2 вічка.

Шайба має такі розміри, що ймовірність появи 0 вічок дорівнює 1/4, ймовірність появи 1 вічка - 1/4, ймовірність появи 2-х вічок - 1/2.

Можна вважати, що елементарною подією буде впорядкована пара чисел, які є кількістю вічок, що з’явилися відповідно в результаті першого та другого підкидань шайби. Випишемо всі елементарні події. Знайдемо ймовірності елементарних подій.

На кожну елементарну подію можна дивитися, як на добуток двох подій, що послідовно відбулися в результаті підкидань шайби. Оскільки підкидання незалежні, то ймовірність добутку подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Кожній елементарній події поставимо у відповідність суму вічок. Маємо випадкову величину ξ сума вічок. Множина значень ξ це множина $\{0,1,2,3,4\}$.

$\omega_1 = (\,0,\,0\,) \to 0,\ P(\omega_1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16},\qquad \omega_2 = (\,0,\,1\,) \to 1,\ P(\omega_2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16},$

$\omega_3 = (\,1,\,0\,) \to 1,\ P(\omega_3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16},\qquad \omega_4 = (\,1,\,1\,) \to 2,\ P(\omega_4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16},$

$\omega_5 = (\,0,\,2\,) \to 2\quad P(\omega_5)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\qquad \omega_6 = (\,2,\,0\,) \to 2,\ P(\omega_6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$

$\omega_7 = (1, 2) \to 3$, $P(\omega_7) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $\omega_8 = (2, 1) \to 3$, $P(\omega_8) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$,

$\omega_9 = (2, 2) \to 4$, $P(\omega_9) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9\}.$$

З прикладу 3 видно, що кількість елементів множини значень випадкової величини не обов'язково збігається з кількістю елементів простору елементарних подій, оскільки різним елементарним подіям можуть відповідати однакові значення випадкової величини.

В розглянутих прикладах множина значень випадкової величини скінченна. Проте це не обов'язково.

Приклад 4. Експеримент полягає у вимірюванні певної величини. Випадкова величина "помилка при вимірюванні" може набувати довільних значень з проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Приклад 5. Експеримент полягає у підрахунку кількості осіб, які звернулися до поштового відділення протягом дня. Випадкова величина "довжина черги" може набувати довільних натуральних значень з проміжку $[0;+\infty)$.

Означення 1. *Випадковою величиною називається функція $\xi=\xi(\omega)$, яка визначена на множині елементарних подій.*

Надалі будемо розглядати випадкові величини зі скінченною областю значень.

Серед можливих значень $\xi(\omega)$, що відповідають різним $\omega\in\Omega$, не обов'язково всі різні. Позначимо різні можливі значення випадкової величини ξ через $x_1, x_2, ..., x_k$ (де $k\le n$).

Розглянемо подію, яка полягає в тому, що $\xi=x_i$, $i=1, 2, ..., k$. Подія відбудеться, коли відбудеться одна з елементарних подій ω_i, таких що $\xi(\omega_i)=x_i$. Отже, ця подія складається з тих елементарних подій ω_i, для яких $\xi(\omega_i)=x_i$, тобто $\{\xi=x_i\}=\{\omega : \omega\in\Omega, \xi(\omega)=x_i\}$. Позначимо через p_i ймовірність події $\{\xi=x_i\}$. Тоді $p_i=P\{\xi=x_i\}=\{\omega: \omega\in\Omega, \xi(\omega)=x_i\} = \sum\limits_{\omega\,:\,\xi(\omega)=x_i} P(\omega)$.

Тепер ми можемо кожному значенню x_i випадкової величини ξ поставити у відповідність p_i.

Означення 2. *Таблиця*

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p	p_1	p_2	p_3	...	p_k

де ув верхньому рядку стоять можливі значення випадкової величини ξ, а в нижньому під кожним значенням стоїть ймовірність p_i того, що випадкова величина ξ набуде цього значення, задає функцію, яка називається функцією *ймовірності випадкової величини ξ.* (В літературі цю таблицю називають також *розподілом випадкової величини ξ.*)

Зрозуміло, що $p_1+p_2+...+p_k=1$.

12. Математичне сподівання

Означення 1. *Математичним сподіванням випадкової величини ξ називається число $M\xi$, яке визначається формулою*

$$M\xi=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega).$$

Часто замість терміну математичне сподівання використовується термін: *середнє значення* випадкової величини. Для того, щоб зрозуміти зміст цього поняття, розглянемо такий приклад

Приклад 1. Пригадаємо експеримент “Кубик”. Йому відповідає простір елементарних подій $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де . ω_j- випадання грані з j вічками.

Нехай дослідник в результаті кожного підкидання отримує стільки умовних одиниць виграшу, скільки випало вічок.

Розглянемо випадкову величину $\xi(\omega_i)=i$, яка кожному підкиданню кубика ставить у відповідність виграш, що дорівнює числу вічок. Знайдемо її математичне сподівання:

$$M\xi=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)=\xi(\omega_1)P(\omega_1)+\xi(\omega_2)P(\omega_2)+\xi(\omega_3)P(\omega_3)+\xi(\omega_4)P(\omega_4)+\xi(\omega_5)P(\omega_5)$$
$$+\xi(\omega_6)P(\omega_6).$$

Нехай в результаті n підкидань елементарні події відбулися наступне число разів:

Подія	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Число появ	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6

$(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6=n)$.

При великому n можна вважати, що $P(\omega_i)\approx\frac{k_i}{n}$. Тоді

$$M\xi\approx\xi(\omega_1)\cdot\frac{k_1}{n}+\xi(\omega_2)\cdot\frac{k_2}{n}+\xi(\omega_3)\cdot\frac{k_3}{n}+\xi(\omega_4)\cdot\frac{k_4}{n}+\xi(\omega_5)\cdot\frac{k_5}{n}+\xi(\omega_6)\cdot\frac{k_6}{n}=$$
$$\frac{1}{n}\cdot(\xi(\omega_1)\cdot k_1+\xi(\omega_2)\cdot k_2+\xi(\omega_3)\cdot k_3+\xi(\omega_4)\cdot k_4+\xi(\omega_5)\cdot k_5+\xi(\omega_6)\cdot k_6).$$

Вираз в дужках - це загальний виграш, що відповідає n підкиданням кубика. Тоді $M\xi$- це середнє арифметичне виграшу, що відповідає одному підкиданню кубика.

Приклад 2 Пригадаємо приклад 3 попереднього пункту “Два підкидання шайби”.

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини ξ сума вічок.

$$M\xi=\xi(\omega_1)P(\omega_1)+\xi(\omega_2)P(\omega_2)+...+\xi(\omega_9)P(\omega_9)=$$

$$0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}=$$

$$0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+4\cdot\frac{1}{4}=$$

$$0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{2}{16}+2\cdot\frac{5}{16}+3\cdot\frac{4}{16}+4\cdot\frac{4}{16}=\frac{40}{16}=2.5$$

Знайдемо розподіл випадкової величини ξ. Складемо таблицю, де в першому рядку запишемо всі можливі значення випадкової величини ξ, а в другому – ймовірності, з якими випадкова величина ξ набуває ці значення.

Розглянемо подію, яка полягає в тому, що $\xi=0$. Ця подія відбудеться, коли відбудеться елементарна подія ω_1. Тоді $P(\{\xi=0\})=P(\{\omega_1\})=\frac{1}{16}$.

Аналогічно:

$P(\{\xi=1\}) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{2}{16}$,

$P(\{\xi=2\}) = P(\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}) = P(\omega_4) + P(\omega_5) + P(\omega_6) = \frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$,

$P(\{\xi=3\}) = P(\{\omega_7, \omega_8\}) = P(\omega_7) + P(\omega_8) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{16}$,

$P(\{\xi=4\}) = P(\{\omega_9\}) = \frac{4}{16}$.

ξ	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$

Знайдемо суму добутків значень випадкової величини ξ на ймовірності цих значень:

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5=0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{2}{16}+2\cdot\frac{5}{16}+3\cdot\frac{4}{16}+4\cdot\frac{4}{16}=\frac{40}{16}=2.5.$$

Результат обчислення збігається з математичним сподіванням випадкової величини ξ. Чи випадково це?

$$M\xi=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)=\xi(\omega_1)P(\omega_1)+\xi(\omega_2)P(\omega_2)+...+\xi(\omega_9)P(\omega_9)=$$

$$=x_1P(\omega_1)+x_2[P(\omega_2)+P(\omega_3)]+x_3[P(\omega_4)+P(\omega_5)+P(\omega_6)]+x_4[P(\omega_7)+P(\omega_8)]+x_5P(\omega_9)$$

$$=x_1\mathrm{P}\{\xi=x_1\}+x_2\mathrm{P}\{\xi=x_2\}+x_3\mathrm{P}\{\xi=x_3\}+x_4\mathrm{P}\{\xi=x_4\}+x_5\mathrm{P}\{\xi=x_5\}=\sum_{i=1}^{5}x_i p_i\,.$$

Ми отримали формулу для знаходження Mξ за умови, що відомо розподіл випадкової величини ξ.

Узагальнимо отриманий результат.

Теорема 1. *Нехай випадкова величина ξ має такий розподіл:*

ξ	x_1	x_2	x_3	…	x_k
p	p_1	p_2	p_3	…	p_k

тоді для довільної функції f

$$\mathrm{M}f(\xi)=\sum_{i=1}^{k}f(x_i)p_i$$

За означенням математичного сподівання

$$\mathrm{M}f(\xi)=\sum_{\omega\in\Omega}f(\xi(\omega))\mathrm{P}(\omega)$$

Згрупуємо доданки вигляду $f(\xi(\omega))P(\omega)$ у групи, такі що $\xi(\omega)=x_i$. Тоді

$$\mathrm{M}f(\xi)=\sum_{x_i}\Big(\sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i}f(\xi(\omega))\mathrm{P}(\omega)\Big)$$

Але в межах однієї групи $\{\omega:\ \xi(\omega)=x_i\}$ маємо: $f(\xi(\omega))=f(x_i)$, отже

$$\sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i}f(\xi(\omega))\mathrm{P}(\omega)=f(x_i)\sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i}P(\omega)=f(x_i)p_i.$$

Тому

$$\mathrm{M}f(\xi)=\sum_{i=1}^{k}f(x_i)p_i\,.$$

Зокрема, якщо $f(x)=x$, то $\mathrm{M}\xi=\sum_{i=1}^{k}x_i p_i$

Таким чином, знаючи розподіл випадкової величини, можна знайти математичне сподівання цієї величини. Для цього потрібно значення випадкової величини помножити на їх ймовірності і додати отримані добутки.

На рівності $M\xi=\sum x_i p_i$ грунтуються різні інтерпретації математичного сподівання. Якщо ми в точки прямої лінії з абсцисами x_1, x_2, ...,x_k покладемо маси p_1, p_2, ..., p_k, то враховуючи, що $\sum p_i=1$, знайдемо, що $M\xi=\sum x_i p_i$ є абсциса центра мас цієї системи матеріальних точок.

Властивість 1. *Математичне сподівання суми випадкових величин ξ і η дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:*

$$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta.$$

Доведення.

$$M(\xi+\eta)=\sum_{\omega\in\Omega}(\xi(\omega)+\eta(\omega))P(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}(\xi(\omega)P(\omega)+\eta(\omega)P(\omega))=$$
$$=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)+\sum_{\omega\in\Omega}\eta(\omega)P(\omega)=M\xi+M\eta.$$

Властивість 2. *Якщо С- стала, то М(С)=С.*
Доведення.
Сталу С можна розглядати, як випадкову величину, яка набуває лише одного значення С з імовірністю одиниця. Тому М(С)=С·1=С.

Властивість 3. *Якщо С- стала, то* $M(C\xi)=CM\xi$.
Доведення.

$$M(C\xi)=\sum_{\omega\in\Omega}C\xi(\omega)P(\omega)=C\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)=CM\xi.$$

Означення 2. *Випадкові величини* ξ *і* η, *які набувають відповідно значення* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ *називаються незалежними, якщо*

$$P\{\xi=x_i,\ \eta=y_j\}=P\{\xi=x_i\}\cdot P\{\eta=y_i\}.$$

Властивість 4. *Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин* ξ *і* η *дорівнює добутку математичних сподівань цих величин:*

$$M(\xi\eta)=M\xi\cdot M\eta.$$

Доведення.
Нехай розподіли випадкових величин ξ і η задаються відповідно таблицями:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_m
p	p_1	p_2	p_3	...	p_m

η	y_1	y_2	y_3	...	y_n
P	P_1	P_2	P_3	...	P_n

Згідно з означенням математичного сподівання $M(\xi\eta)=\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega)$

Згрупуємо доданки виду $\xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega)$ у групи, такі що $\{\xi(\omega)=x_i,\ \eta(\omega)=y_j\}$. Тоді

$$M(\xi\eta)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}}\xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}}x_iy_jP(\omega)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\sum_{\{\omega:\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}}P(\omega)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jP\{\xi(\omega)=x_i\}P\{\eta(\omega)=y_j\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}x_iP\{\xi(\omega)=x_i\}\sum_{j=1}^{n}y_jP\{\eta(\omega)=y_j\}=M\xi M\eta$$

Приклад 3. Вам запропонували взяти участь в азартній грі, умови якої такі: внесок за право на хід у грі становить a грн. Учасник підкидає гральний кубик і отримує виграш, який дорівнює в гривнях числу вічок, що випали. За яких умов є сенс грати?

Розв'язання.

Проаналізуємо умови гри. Знайдемо $M\xi$, оскільки це середній виграш, що відповідає одному підкиданню кубика. Якщо $a > M\xi$, то в даній грі брати участь не варто. Якщо $a < M\xi$- можна спробувати.

13. Дисперсія

Означення 1. *Дисперсією випадкової величини ξ називається математичне сподівання випадкової величини $(\xi - M\xi)^2$*

(1) $$D\xi = M\{(\xi - M\xi)^2\}.$$

Користуючись цим означенням, знайдемо дисперсію випадкової величини ξ, яка має розподіл

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Для цього:

1. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини ξ:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i .$$

2. Знайдемо $D\xi$, використавши теорему 1. Матимемо:

$$D\xi = M((\xi - M\xi)^2) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M\xi)^2 p_i .$$

Можна отримати і зручнішу формулу. Для цього розкриємо дужки в правій частині рівності (1)

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - M(2\xi M\xi) + M(M\xi)^2 =$$
$$= M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Таким чином, отримали корисну формулу

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Розглянемо деякі властивості дисперсії.

Властивість 1. *Якщо C - стала, то $D(C)=0$.*

Доведення.

$$D(C) = M(C^2) - M^2(C) = C^2 - C^2 = 0.$$

Властивість 2. *Якщо C - стала, то $D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi$.*

Доведення.

$$D(C\xi)=M(C^2\xi^2)-M^2(C\xi)= C^2M(\xi^2)- C^2M^2(\xi)=C^2(M(\xi^2)-M^2(\xi))=C^2\cdot D\xi.$$

Властивість 3. *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин ξ і η дорівнює сумі їх дисперсій*

$$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta.$$

Доведення.

$$D(\xi+\eta)=M(\xi+\eta)^2-M^2(\xi+\eta)=M(\xi^2)+2M(\xi)M(\eta)+$$

$$M(\eta^2)-M^2(\xi)-2M(\xi)M(\eta)-M^2(\eta) =$$

$$(M(\xi^2)- M^2(\xi))+(M(\eta^2)- M^2(\eta))= D\xi+D\eta.$$

Замість дисперсії часто розглядають квадратний корінь з неї

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}\,.$$

Величину σ_ξ називають середнім квадратичним відхиленням. Вона має ту ж розмірність, що і випадкова величина ξ.

14. Біноміальний розподіл

Розглянемо випробування, в якому може спостерігатися подія А; настання події А будемо далі називати успіхом, а ненастання - невдачею; при цьому ймовірність успіху дорівнює p, тоді ймовірність невдачі буде дорівнювати $1 - p$. Проведемо експеримент, який складається з n послідовних випробувань. Ці випробування називають випробуваннями Бернуллі або послідовними незалежними випробуваннями.

Розглянемо випадкову величину ξ- число успіхів в n випробуваннях Бернуллі. Знайдемо ймовірність того, що при проведенні n випробувань Бернуллі подія А відбудеться m разів, тобто, знайдемо $P\{\xi=m\}$ (m=1, 2, ..., n).

Проведемо міркування у випадку, коли n=4, m=2.

Позначимо через A_i та $\overline{A}_i$ (i=1, ..., n) два можливі наслідки i-го випробування (тобто успіх та невдачу). Розглянемо подію $\{\xi=2\}$:

$$\{\xi=2\}=\{ A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4\}.$$

Ця подія відбудеться, коли відбудеться одна з перелічених елементарних подій. Зрозуміло, що цих елементарних подій стільки, скільки існує комбінацій з 4 елементів по 2, тобто C_4^2. Враховуючи, що випробування незалежні, маємо

$$P\{\xi=2\}=P\{ A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,$$

$$\overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4\} =$$

$= \mathrm{P}\{A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\} + \mathrm{P}\{\overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4\} + \mathrm{P}\{\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4\} + \mathrm{P}\{\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4\}+$

$\mathrm{P}\{A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4\}+\mathrm{P}\{\overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4\} = \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(\overline{A}_3)\cdot\mathrm{P}(\overline{A}_4) +$

$\mathrm{P}(\overline{A}_1)\cdot\mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(A_3)\cdot\mathrm{P}(\overline{A}_4) + \mathrm{P}(\overline{A}_1)\cdot\mathrm{P}(\overline{A}_2)\cdot\mathrm{P}(A_3)\cdot\mathrm{P}(A_4) + \mathrm{P}(\overline{A}_1)\cdot\mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(\overline{A}_3)\cdot\mathrm{P}(A_4)$

$+\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(\overline{A}_2)\cdot\mathrm{P}(A_3)\cdot\mathrm{P}(\overline{A}_4)+\mathrm{P}(\overline{A}_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(\overline{A}_4)=6p^2(1-p)^{4-2} = \mathrm{C}_4^2 p^2(1-p)^2.$

У загальному ж випадку, коли n і m довільні числа ($m\leq n$), можна провести аналогічні міркування. Тоді

(1) $$\mathrm{P}\{\xi=m\}=\mathrm{C}_n^m\, p^m(1-p)^{n-m}.$$

Формулу (1) називають формулою Бернуллі.

Задача 1. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка має біноміальний розподіл.
Розв'язання.
Нехай ξ - випадкова величина,яка має біноміальний розподіл. Позначимо через ξ_k - число появ події А при k-му випробуванні. ξ_k може приймати два значення: 1 з ймовірністю p (А відбулася) і 0 з ймовірністю q (А не відбулася). Тоді $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$. При цьому $\mathrm{M}\xi_k = 1^2\cdot p + 0^2\cdot(1-p) = p$. А значить $\mathrm{M}\xi = \mathrm{M}\xi_1 + . . . + \mathrm{M}\xi_n = np$.

Знайдемо $\mathrm{D}\xi$. Оскільки

$$\xi_k^2 = \xi_k \text{ і } \mathrm{D}\xi_k = \mathrm{M}\,\xi_k^2 - (\mathrm{M}\xi_k)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

і випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ попарно незалежні, то

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2 + ... + \mathrm{D}\xi_n = npq.$$

15. Нерівність Чебишова

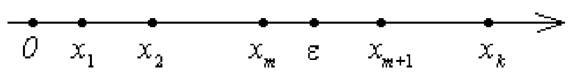
Теорема. (**Нерівність Чебишова**). *Нехай ξ невід'ємна випадкова величина. Тоді для довільного $\varepsilon>0$*

$$\mathrm{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{M}\xi}{\varepsilon}.$$

Доведення.
Нехай випадкова величина ξ має розподіл, що заданий таблицею, в якій можливі значення ξ розташовані в порядку зростання $x_1<x_2<...<x_k$:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
p	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Нанесемо всі можливі значення ξ на координатну пряму



Задамо довільне ε>0. Нанесемо і його на координатну пряму. Нехай

$$x_1<x_2<\ldots<x_m < \varepsilon \le x_{m+1}<\ldots<x_k.$$

Розглянемо подію {ξ≥ε}, де ε>0:

$$\{\xi\ge\varepsilon\}=\{\xi=x_{m+1}\}+\{\xi=x_{m+2}\}+\ldots+\{\xi=x_k\}.$$

Знайдемо ймовірність цієї події

$P\{\xi\ge\varepsilon\}=P(\{\xi=x_{m+1}\}+\{\xi=x_{m+2}\}+\ldots+\{\xi=x_k\})=P(\{\xi=x_{m+1}\})+P(\{\xi=x_{m+2}\})+\ldots+P(\{\xi=x_k\})=p_{m+1}+p_{m+2}+\ldots+p_k.$

Оцінимо математичне сподівання знизу

$$M\xi=\sum_{i=1}^{k}x_i p_i=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_mp_m+x_{m+1}p_{m+1}+\ldots+x_kp_k=(x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_mp_m)+$$

$$+(x_{m+1}p_{m+1}+x_{m+2}p_{m+2}+\ldots+x_kp_k)\ge x_{m+1}p_{m+1}+x_{m+2}p_{m+2}+\ldots+x_kp_k=$$

$$\varepsilon p_{m+1}+\varepsilon p_{m+2}+\ldots+\varepsilon p_k=\varepsilon(p_{m+1}+p_{m+2}+\ldots+p_k)=\varepsilon\cdot P\{\xi\ge\varepsilon\}.$$

Отже, $M\xi\ge \varepsilon\cdot P\{\xi\ge\varepsilon\}$, звідки

$$P\{\xi\ge\varepsilon\}\le\frac{M\xi}{\varepsilon}.$$

Наслідок. *Для довільного ε>0 справедлива нерівність:*

$$P\{|\xi-M\xi|\ge\varepsilon\}\le\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доведення.

Розглянемо випадкову величину |ξ-Mξ|. Задамо довільне ε>0. Оцінимо ймовірність події {|ξ-Mξ|≥ε}. Оскільки |ξ-Mξ|>0, то можна скористатися нерівністю Чебишова. Враховуючи, що нерівності $|\xi-M\xi|\ge\varepsilon$ і $(\xi-M\xi)^2\ge\varepsilon^2$ еквівалентні, маємо

$$P\{|\xi-M\xi|\ge\varepsilon\}=P\{(\xi-M\xi)^2\ge\varepsilon^2\}\le\frac{M(\xi-M\xi)^2}{\varepsilon^2}=\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Отже,

$$P\{|\xi-M\xi|\ge\varepsilon\}\le\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Це знаменита нерівність Чебишова. Вона дозволяє оцінити ймовірність відхилення випадкової величини ξ від її математичного сподівання.

16. Закон великих чисел

У першій частині розділу було розглянуто фізичний закон стійкості частот, який встановлено експериментально. В формальній теорії цьому закону відповідає ряд тверджень, які об’єднані під назвою: закон великих чисел. Розглянемо два з цих тверджень.

Теорема Чебишова. *Нехай ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... попарно незалежні випадкові величини з однаковими математичними сподіваннями $M\xi_i=a$ $(i=1, 2, ..., n,...)$ і дисперсіями, обмеженими тією самою сталою $D\xi_i \le c$ $(i=1, 2,..., n)$. Розглянемо числову послідовність*

$$P_n=\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}P_n=1.$$

Доведення.

Розглянемо випадкову величину $\eta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$. Згідно з властивостями математичного сподівання

$$\mathrm{M}(\eta_n)=\mathrm{M}\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\right)=\frac{\mathrm{M}\xi_1+\mathrm{M}\xi_2+\ldots+\mathrm{M}\xi_n}{n}=\frac{na}{a}=a.$$

Використовуючи властивості дисперсії та умову теореми, оцінимо зверху дисперсію випадкової величини η_n:

$$\mathrm{D}\eta_n=\mathrm{D}\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}(\mathrm{D}\xi_1+\mathrm{D}\xi_2+\ldots+\mathrm{D}\xi_n)\le\frac{nc}{n^2}=\frac{c}{n}.$$

Застосувавши до випадкової величини η_n нерівність Чебишова, дістанемо, що для довільного $\varepsilon>0$

$$\mathrm{P}\{|\eta_n-\mathrm{M}\eta_n|\ge\varepsilon\}\le\frac{\mathrm{D}\eta_n}{\varepsilon^2}.$$

Переходячи до протилежної події, дістанемо

$$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}\{|\eta_n-\mathrm{M}\eta_n|<\varepsilon\}=1-\mathrm{P}\{|\eta_n-\mathrm{M}\eta_n|\ge\varepsilon\}\ge 1-\frac{\mathrm{D}\eta_n}{\varepsilon^2},$$

тобто

$$\mathrm{P}_n\ge 1-\frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

При $n\to\infty$ $\frac{c}{n\varepsilon^2}\to 0$. Враховуючи, що ймовірність не може бути більшою від 1, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n=1.$$

Доведена теорема дає також обгрунтування правила середнього арифметичного, яким широко користуються в практиці вимірювань. Нехай потрібно виміряти деяку фізичну величину a. Здійснивши n незалежних вимірювань, ми дістанемо n значень цієї величини x_1, x_2, ...,x_n. Кожне значення

x_i є значенням випадкової величини X_i, математичне сподівання якої дорівнює a: $MX_i = a$ (i=1, 2, ..., n); ця умова означає, що вимірювання позбавлені систематичних помилок. Крім того, вважатимемо, що виконано умову $DX_i \le c$; це означає, що всі вимірювання здійснюються з деякою гарантованою точністю (якби дисперсії не були обмеженими, то це б означало, що розсіяння спостережених значень навколо вимірюваної величини можуть необмежено зростати, тобто точність необмежено знижується). Тоді з теореми Чебишова випливає, що

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} \to 1,$$

тобто, при достатньо великому числі вимірювань з імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, середнє арифметичне результатів вимірювань буде як завгодно мало відрізнятись від вимірюваної величини.

Теорема Бернуллі. *Нехай $\xi(n)$ - число появ події А при n послідовних незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність настання події А дорівнює p. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi(n)}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

(З імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що при досить великій кількості незалежних випробувань частота події, як завгодно мало відрізняється від її ймовірності при окремому випробуванні.)

Доведення.

Позначимо через ξ_k число появ події А при k-му випробуванні. ξ_k може набувати два значення: 1 з імовірністю p (А відбулася) і 0 з імовірністю q (А не відбулася). Тоді $\xi(n) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. При цьому $M\xi_k = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$, $D\xi_k = M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2 = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$ (k=1, 2, ..., n).

Отже, для випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ виконуються умови теореми Чебишова і тому

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\xi(n)}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Додаток

Програма **Bin_dstrb.pas** служить для знаходження ймовірності попадання випадкової величини, яка має біноміальний розподіл з параметрами (n, p), в проміжок [a, b]. Якщо покласти $a = b = k \in N$, то отримаємо біноміальні ймовірності $p_{n,k}=C_n^k p^k(1 - p)^{n-k}$, k=0, 1, ..., n.

```
program Bin_dstrb;
uses Crt;
const
   nn = 10;
type
   sequ = array[0..nn] of real;
var
   i, n: integer;
   p, x, a, b, pab: real;
   f: sequ;
function brd_1(f: sequ; n: integer; x: real): real;
var
  i: integer;
begin
    for i:=0 to n-1 do f[i]:=f[i]*(1-x)+f[i+1]*x;
    if n=1
      then brd_1:=f[0]
      else brd_1:=brd_1(f,n-1,x)
end; (* brd_1 *)
Begin
    writeln('Введіть n, p, a, b');
    read(n, p, a, b);
    for i:=0 to n do
      if (i<trunc(a)) or (i>trunc(b))
         then f[i]:=0
         else f[i]:=1;
    pab:=brd_1(f, n, p);
    writeln(pab);
    ReadKey;
End.
```

Вправи до

п. 2

Нехай A і B - довільні події. Довести:

1. $\nu(A+B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(AB)$.

2. $\nu(\overline{A}) = 1 - \nu(A)$.

3. Якщо $A \subset B$, то $\nu(A) \leq \nu(B)$.

4. $\nu(A+B+C) = \nu(A) + \nu(B) + \nu(C) - \nu(AB) - \nu(AC) - \nu(BC) + \nu(ABC)$.

п. 3

В задачах 1– 7 побудувати простір елементарних подій за описом експерименту і знайти підмножини, які відповідають указаним подіям.

1. Монета підкидається тричі. Результат, який спостерігається, поява герба (Г) або цифри (Ц). Події:

A={цифра випала лише раз},
B={жодного разу не випав герб},
C={випало більше цифр ніж гербів},
D={цифра випала не менше двох разів підряд}.

2. Гральний кубик підкидається двічі. Результат, який спостерігається, - пара чисел, що відповідають числу вічок, які ми бачимо на верхній грані кубика. Події:

A={обидва рази випало парне число вічок},
B={ні разу не випало чотири вічка},
C={обидва рази випало число вічок більше за п’ять},
D={обидва рази випало однакове число вічок}.

3. Двічі підкидається шайба, на одній з основ якої написано 0, на іншій – 1 і на бічній поверхні – 2. Результат, який спостерігається, - добуток чисел, які з’являться в результаті підкидань. Події:

A={добуток - число парне},
B={добуток - число не парне},
C={добуток дорівнює нулю}.

4. З колоди карт навмання витягається карта. Події:

A={витягнена карта червоної масті},
B={витягнена карта - фігура},
C={витягнена карта - піка},
D={витягнена карта - дама}.

5. Стріляють у прямокутну мішень, яка пов’язана з системою координат. Розташування мішені визначається нерівностями $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$. Результат,

який спостерігається, - координати точки попадання. За умовами стрільби не попадання в мішень виключається. Події:
A={абсциса точки попадання не більша ординати},
B={добуток координат додатній},
C={сума абсолютних величин координат перевищує одиницю}.
Чи є серед цих подій несумісні?

6. На відрізку $[a, b]$ навмання ставиться точка. Нехай x - координата цієї точки. Потім на відрізку $[a, x]$ навмання ставиться ще одна точка з координатою y. Результат, який спостерігається, - пара чисел (x, y). Події:
A= {друга точка ближче до правого кінця відрізка $[a, b]$, ніж до лівого},
B={відстань між двома точками менша половини довжини відрізка},
C={перша точка ближче до другої, ніж до правого кінця відрізка $[a, b]$}.
Знайти пари несумісних подій.

7. Іван і Марія домовилися про зустріч в певному місці між одинадцятою і дванадцятою годинами. Кожен приходить у випадковий момент вказаного проміжку і чекає появи другого до закінчення обумовленого часу, але не більше 15 хвилин, після чого залишає місце зустрічі. Результат, який спостерігається, - пара чисел (x, y), де x - час приходу Івана, y - час приходу Марії (час вимірюється в хвилинах починаючи з 11 години). Події:
A={зустріч відбулася},
B={Іван чекав Марію весь обумовлений час і не дочекався},
C={Марії не довелося чекати Івана},
D={зустріч відбулася після 11 год 30 хв},
E={Марія запізнилася на зустріч},
F={зустріч відбулася, коли до закінчення години залишалося менше п'яти хвилин}.

8. Навмання береться три відрізки, довжина кожного з яких не перевищує l. Подія A={з відрізків можна утворити трикутник}.

9. З групи студентів, які прийшли складати іспит з теорії ймовірностей, викладач навмання викликає одного. Нехай подія A - викликаний студент - хлопець. Подія B - студент (студентка) не підготовлений(а) до складання іспиту, а подія C - студент (студентка) живе в гуртожитку.
   1) Описати подію $AB\overline{C}$.
   2) При якій умові буде мати місце тотожність ABC=A?
   3) Коли буде вірним співвідношення $\overline{C} \subseteq B$?
   4) Коли буде рівність $\overline{A} = B$, чи буде вона мати місце, якщо всі хлопці не підготовлені до складання іспиту?

10. Дослід полягає в тому, що підкидають дві монети - бронзову і срібну. Розглядаються наступні події:
A={герб випав на бронзовій монеті},
B={цифра випала на бронзовій монеті},

C={герб випав на срібній монеті},
D={цифра випала на срібній монеті},
M={випав хоча б один герб},
F={випала хоча б одна цифра},
G={випав один герб і одна цифра},
H={не випало жодного герба},
K={випали два герба}.

Яким подіям з наведеного списку дорівнюють наступні події:
а) $A \cup C$; б) $A \cap C$; в) $M \cap F$; г) $G \cup M$; д) $G \cap M$; е) $B \cap D$; ж) $M \cup K$?

11. Проводять три постріли по мішені. Розглядають події A_k={влучення при k-му пострілі}, k=1, 2, 3. Користуючись діями над подіями A_k та $\overline{A}_k$, записати події:
A={всі три влучення},
B={всі три промахи},
C={хоча б одне влучення},
D={хоча б один промах},
M={не менше двох влучень},
F={не більше одного влучення},
G={влучення в мішень не раніше третього пострілу}.

12. Назвіть протилежні події для подій:
A={випадання двох гербів при киданні двох монет},
B={поява білої кульки} (експеримент полягає у витягуванні однієї кульки з урни, в якій лежать білі, чорні і червоні кульки),
C={три влучення при трьох пострілах},
M={не більше двох влучень п’ятьма пострілах},
D={хоча б одне влучення п’ятьма пострілах},
F={перемога першого гравця при грі у шахи}.

13. Прилад складається з двох блоків. Перший блок складається з двох однотипних деталей і працює тоді, коли хоча б одна з них справна. Другий блок складається з трьох однотипних деталей і працює, коли хоча б дві з них працюють. Увесь прилад працює, коли працюють обидва блоки. Виразіть через події A_k={k-та деталь першого блоку справна} (k = 1, 2), B_n={n-на деталь другого блоку справна} (n = 1, 2, 3) і протилежні до них, наступні події:
A={працює перший блок},
B={перший блок не працює},
C={працює другий блок},
D={другий блок не працює},
H={прилад працює},
F={прилад не працює},
G={прилад не працює, але для того, щоб його полагодити, досить замінити одну деталь}.

14. Є події: A={взята навмання деталь виявилася першого сорту}, B={взята навмання деталь виявилася другого сорту} і C={взята навмання деталь виявилася третього сорту}. Що являють собою наступні події:
    а) $A \cup B$; б) $\overline{A \cup C}$; в) $A \cap C$; г) $(A \cap B) \cup C$?
15. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія A_i (i=1, 2, ..., n) полягає в тому, що i-та виготовлена ним деталь має дефект. Записати подію, яка полягає в тому, що:
    а) жодна з деталей не має дефекту;
    б) хоча б одна деталь має дефект;
    в) лише одна деталь має дефект;
    г) не більше двох деталей мають дефекти;
    д) принаймні мірі два вироби не мають дефектів;
    е) точно два вироби дефектні.

п. 4

1. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірності таких подій:

A={число вічок парне},
B={число вічок кратне трьом},
C={число вічок більше двох},
D={число вічок більше двох, але менше шести},
E={число вічок не менше одного},
F={випало або 2, або 3, або 6 вічок}.

2. З колоди в 36 карт навмання витягується карта. Знайти ймовірності таких події:

A={витягнена карта червоної масті},
B={витягнена карта - фігура, тобто є валетом, дамою, королем або тузом},
C={витягнена карта - піка},
D={витягнена карта - дама}.

3. Гральний кубик підкидається двічі. Результат, який спостерігається, - пара чисел що відповідають числу вічок, які ми бачимо на верхній грані кубика. Вважаючи, що елементарні події мають однакову ймовірність, знайти ймовірності таких подій:

A={обидва рази випало парне число вічок},
B={ні разу не випало чотири вічка},
C={обидва рази випало число вічок більше чотирьох},
D={обидва рази випало однакове число вічок}.

4. Дослід полягає в тому, що підкидають дві монети - бронзову і срібну. Спостерігають випадання герба та цифри на цих монетах. Вважаючи, що елементарні події мають однакову ймовірність, знайти ймовірності таких подій:

    A={герб випав на бронзовій монеті},
    B={цифра випала на бронзовій монеті},

C={герб випав на срібній монеті},
D={цифра випала на срібній монеті},
M={випав хоча б один герб},
F={випала хоча б одна цифра},
G={випав один герб і одна цифра},
H={не випало жодного герба},
K={випали два герба}.

5. Робітник обслуговує 5 верстатів. 20% робочого часу він проводить біля першого верстата, 10% - біля другого, 15% - біля третього, 25% - біля четвертого і 30% - біля п'ятого. До цеху зайшов майстер. Яка ймовірність того, що він знайде робітника біля а) першого або третього верстата, б) першого або п'ятого, в) біля першого або четвертого, г) першого, другого або третього?

п. 5

1. До магазину надійшло 30 нових годинників, серед яких 5 йдуть не точно. Навмання вибирається один годинник для перевірки. Яка ймовірність того, що він іде точно?

2. Гральний кубик підкидається один раз. Знайти ймовірності таких подій:
A={число вічок дорівнює 6},
B={число вічок кратне трьом},
C={число вічок парне},
D={число вічок менше п'яти},
E={число вічок більше двох}.

3. Підкидають два гральні кубика. Знайти ймовірності таких подій:
A={число вічок на обох гральних кубиках збігається},
B={число вічок на першому кубику більше ніж на другому},
C={сума вічок парна},
D={сума вічок більше двох},
E={сума вічок не менше п'яти},
F={хоча б на одному кубику з'явилася цифра 6},
G={добуток числа вічок, що випали дорівнює 6}.

4. З колоди в 52 карти витягують навмання 4 карти. Знайти ймовірності таких подій:
A={в отриманій вибірці всі карти бубни},
B={є хоча б один туз}.

5. Навмання вибирається п'ятизначне число. Яка ймовірність наступних подій:
A={число однаково читається як зліва направо, так і справа наліво (як, наприклад, 13531)},
B={число складається з непарних цифр}.

6. 8 чоловік, які обрані до президії, займають місця з одної сторони прямокутного столу. Знайти ймовірність того, що дві певні особи будуть сидіти поруч, якщо
а) число місць дорівнює 8,
б) число місць дорівнює 12.

7. 12 студентів, серед яких Іванов і Петров, випадковим чином займають чергу в їдальні. Яка ймовірність, що між Івановим і Петровим в черзі виявиться 5 чоловік?

8. Шестеро осіб зайшли в ліфт на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що кожен пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-му, 3-му, ...,7-му поверхах, знайти ймовірності таких подій:
A={на другому, третьому і четвертому поверхах не вийде жоден пасажир},
B={троє пасажирів вийдуть на сьомому поверсі},
C={на кожному поверсі вийде по одному пасажиру},
D={усі пасажири вийдуть на одному поверсі}.

9. З п’яти букв розрізної азбуки складено слово *школа*. Маленький хлопчик перемішав букви, а потім навмання їх склав. Яка ймовірність того, що він знову склав слово *школа*?

10. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 чоловік припадають на різні місяці року.

11. До білету іспиту входить 4 питання з 45, що містить програма. Учень вивчив 30 питань. Яка ймовірність того, що він буде знати всі питання білета, який вибирається навмання.

12. Гральний кубик підкидається двічі. Яка ймовірність того, що сума вічок, які при цьому випали, ділиться на 3 ?

13. З колоди, яка складається з 36 карт, навмання витягуються 6 карт. Яка ймовірність того, що серед них виявиться 4 карти однієї масті?

14. З колоди, що складається з 36 карт, навмання виймається 6 карт. Яка ймовірність того, що серед них виявиться 2 дами ?

15. При грі в спортлото (5 з 36) знайти ймовірність того, що не буде вгадано жодного виду спорту?

16. Гральний кубик підкидається двічі. Яка ймовірність того, що сума вічок, які при цьому випали, дорівнюватиме 7?

17. З колоди, яка складається з 32 карт, навмання витягуються дві карти. Яка ймовірність того, що ці карти – тузи?

18. Колода з 36 карт добре перетасована. Знайти ймовірності подій:
A = {чотири тузи розташовані поруч}
B = {місця розташування тузів утворюють арифметичну прогресію з різницею 7}.

19. На полиці у випадковому порядку розставлено 20 книжок, серед яких тритомник віршів Є.Маланюка. Знайти ймовірність того, ці томи стоять у порядку зростання (не обов'язково поряд).

20. Із сукупності послідовностей довжини n, члени якої є цифри 0, 1, 2, випадково вибирається одна. Знайти ймовірності подій:

A={послідовність починається з 0},

B={послідовність містить рівно m+2 нулі, при цьому 2 з них міститься на кінцях послідовності},

C={послідовність містить рівно m одиниць},

D={в послідовності рівно m_0 нулів , m_1 одиниць, m_2 двійок}.

21. З 28 кісточок доміно випадково вибираються дві. Яка ймовірність того, що з них можна скласти "ланцюжок" відповідно до правил гри?

п. 6

1. Стрілець робить один постріл по мішені. Ймовірність вибити 10 очок дорівнює 0.3, а ймовірність вибити 9 очок дорівнює 0.6. Чому дорівнює ймовірність вибити не менше ніж 9 очок?
2. Іван з імовірністю 0.1 може піти до театру, з імовірністю 0.25 - в кіно та з імовірністю 0.3 може зіграти у футбол. Іван може піти лише до одного з цих місць. Яка ймовірність того, що Дмитро, вирішивши відвідати Івана, застане його вдома.
3. На колгоспному полі врожай збирає декілька комбайнів. Імовірність того, що за зміну ремонту потребуватиме рівно один комбайн дорівнює 0.1, рівно два комбайни - 0.07, більше двох комбайнів - 0.03. Знайти ймовірність того, що протягом зміни жоден комбайн не потребуватиме ремонту.
4. Під час олімпіади уболільник з імовірністю 0.3 може відвідати футбол, з ймовірністю 0.4 - баскетбол і з ймовірністю 0.2 - волейбол. Грошей йому вистачить лише на відвідування одного змагання. Які ймовірності наступних подій: A={болільник попав на змагання}, B={болільник попав на змагання, де немає воротаря }.
5. З 30 учнів класу за контрольну роботу 7 чоловік отримали оцінку "відмінно", 15 - "добре" і 8 - "задовільно". Яка ймовірність того, що навмання відібрані два учні, отримали однакові оцінки?
6. В майстерні є три верстати. За зміну з ладу може вийти не більше одного верстата. Перший виходить з ладу з ймовірністю 0.15, другий - з ймовірністю 0.05, третій - з ймовірністю 0.1. Знайти ймовірність того, що за зміну жоден верстат не вийде з ладу.
7. Стрілець влучає в десятку з ймовірністю 0.05, в дев'ятку - з ймовірністю 0.2, а в вісімку - з ймовірністю 0.5. Стрілець зробив один постріл і влучив у

мішень. Знайти ймовірності наступних подій: A={вибито не менше восьми очок}, B={вибито менше восьми очок}, C={вибито більше восьми очок}.

8. Підкидається гральний кубик. Події: A={випало число вічок не менше трьох}, B={випало парне число вічок}. Знайти ймовірність події C=A+B.

п. 7

1. З урни, де міститься 4 білих і 6 червоних кульок, навмання послідовно і без повернень витягують дві кульки. Подія:

A={перша кулька червона},

B={друга кулька червона},

C={хоча б одна з витягнутих кульок червона}.

Обчислити ймовірності P(B|A), P(A|B) і P(A|C).

2. Один раз підкидається гральний кубик. Подія:

A={випало просте число вічок},

B={випало парне число вічок}.

Обчислити ймовірність P(A|B).

3. Імовірність влучити в літак дорівнює 0.4, а ймовірність його збити дорівнює 0.1. Знайти ймовірність того, що при влученні в літак його буде збито.

4. Імовірність того, що прилад не вийде з ладу до моменту часу t_1 дорівнює 0.8, а ймовірність того, що він не вийде з ладу до моменту часу t_2 ($t_1 > t_2$), дорівнює 0.6. Знайти ймовірність того, що прилад, який не зіпсувався до моменту часу t_1, не зіпсується і до моменту часу t_2.

5. Підкидають навмання три гральні кубика. Спостерігаються події:

A={на трьох кубиках випали різні грані},

B={хоча б на одному кубику випала шістка}.

Обчислити P(B|A) і P(A|B).

6. Припустимо, що 5% всіх чоловіків і 0.25% всіх жінок дальтоніки. Навмання вибрана особа виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати, що кількість чоловіків і жінок однакова.)

7. Двічі підкидається гральний кубик. Яка ймовірність того, що випаде дві “3”, якщо відомо, що сума вічок, які випали, ділиться на 3?

8. З колоди в 32 карти навмання одна за другою витягують дві карти. Знайти ймовірність того, що:

а) витягнуті два валета;

б) витягнуті дві карти пікової масті;

в) витягнуті валет і дама.

9. Підкидають два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що випаде принаймні одна шістка, якщо відомо, що сума вічок дорівнює 8.

10. З урни, в якій лежать m білих і n чорних кульок, беруть послідовно дві кульки. Знайти ймовірність того, що друга кулька біла, якщо перша кулька: а) біла; б) чорна.

11. 1% учнів школи - невстигаючі. Серед встигаючих учнів 60% вчаться добре і відмінно. Яка ймовірність того, що навмання вибраний учень вчиться добре або відмінно?

п. 8

1. У рибалки є три місця, де він полюбляє рибалити. Ці місця він відвідує з однаковою ймовірністю. Ймовірність того, що риба клюватиме в першому місці, становить приблизно 1/3, в другому - 1/2, в третьому - 1/4. Відомо, що рибалка закинув вудочку 3 рази, а витягнув лише одну рибу. Яка ймовірність того, що він рибалив в першому з улюблених місць?

2. У Петра є троє друзів: Іван, Данило та Микола. Своїх друзів Петро відвідує з однаковою ймовірністю. Ймовірність застати Івана вдома становить приблизно 1/3, Данила - 1/2, Миколу - 1/4. Відомо, що Петро тричі ходив у гості до одного і того ж товариша і лише раз застав його вдома. Яка ймовірність того, що цим товаришем був Данило?

3. В інституті оголошено набір до трьох туристичних груп, кожна з яких відвідає або Київ, або Одесу, або Канів. Дізнавшись про це Петро вирішив записатися в одну з груп. Імовірність того, що він обере подорож до Києва становить приблизно 1/2, до Канева - 1/3, до Одеси - 1/6. Ймовірність того, що вже немає вільних місць у групі, яка подорожуватиме до Києва становить 1/5, до Канева - 1/6, до Одеси - 1/8. Петро вибрав одну з груп і записався до неї. Визначте ймовірність того, що він записався у групу, яка відвідає Київ.

4. Турист може придбати квиток в одній з трьох автобусних кас. Ймовірність того, що він підійде до першої каси приблизно становить 1/2, до другої - 1/3, до третьої - 1/6. Ймовірності того, що квитків вже немає в касах, приблизно такі: в першій касі - 1/5, в другій - 1/6, в третій 1/8. Турист звернувся в одну з кас і отримав квиток. Визначте ймовірність того, що він підійшов до другої каси.

5. На трьох станках при однакових і незалежних умовах виготовляють деталі одного найменування. На першому станку виготовляють a_1%, на другому - a_2%, на третьому - a_3% усіх деталей. Ймовірність кожної деталі бути бездефектною дорівнює p_1, якщо вона виготовлена на першому станку, p_2 - якщо на другому і p_3 - якщо на третьому станку. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде бездефектною.

а) a_1=10, a_2=30, a_3=60, p_1=0.7, p_2=0.8, p_3= 0.9;

б) a_1=30, a_2=20, a_3=50, p_1=0.6, p_2=0.7, p_3= 0.8;

в) a_1=15, a_2=30, a_3=55, p_1=0.8, p_2=0.5, p_3= 0.7.

6. З п’яти гвинтівок, серед яких 3 снайперські і 2 звичайні, навмання вибирається одна, і з неї робиться постріл. Знайти ймовірність влучення, якщо ймовірність влучення зі снайперської гвинтівки дорівнює 0.95, а зі звичайної 0.7.
7. В одному з ящиків 10 білих і 6 чорних кульок, в другому - 7 білих і 9 чорних. Довільним чином вибирають ящик і з нього навмання виймають кульку. Вона біла. Чому дорівнює ймовірність того, що і друга кулька, яка навмання вийнята з цього ящика, буде білою?
8. З п’яти задач, серед яких три з алгебри і дві з геометрії, Петро навмання вибирає одну і пробує її розв’язати. Знайти ймовірність успіху Петра, якщо ймовірність того, що він розв’яже задачу з алгебри приблизно дорівнює 0.95, а з геометрії - 0.7.
9. В першій команді 6 майстрів спорту і 4 кандидати, а в другій - 4 і 6, відповідно. Збірна команда складається з 10 чоловік: 6 чоловік беруть з першої команди і 4 - з другої випадковим чином. Яка ймовірність того, що навмання вибраний гравець збірної - майстер спорту?
10. На заводі, де виготовляють запчастини до сівалок, перший цех виготовляє 25%, другий - 35%, третій - 40% усієї продукції. Брак у їх виробах становить відповідно 5%, 4%, 2%.

а) Яка ймовірність того, що випадково вибрана деталь буде бракованою?

б) Яка ймовірність того, що випадково вибрана деталь виготовлена у першому, другому і третьому цехах, якщо вона виявилась з дефектом?

11. Під час вибуху снаряда утворюються осколки трьох вагових категорій: великі, середні і малі, причому число великих, середніх і малих осколків становить відповідно 0.1, 0.3, 0.6 загального числа осколків. При влученні в броню великий осколок пробиває її з імовірністю близькою до 0.9, середній - з ймовірністю близькою до 0.2, і малий - з імовірністю близькою до 0.05. У броню влучив один осколок і пробив її. Знайти ймовірність того, що ця пробоїна зроблена: великим, середнім та малим осколком.
12. Два спортсмени-початківці стріляють по одній мішені. Ймовірність влучити у першого спортсмена приблизно становить 0.2, у другого - 0.6. Першим пострілом в мішень попав лише один спортсмен. Яка ймовірність того, що промахнувся перший спортсмен?
13. Грибник, який заблукав у лісі, вийшов на галявину, з якої в різні боки ведуть 5 стежок. Якщо грибник піде по першій стежці, то ймовірність того, що він вийде з лісу протягом години, становить приблизно 0.6, якщо по другій - 0.3, якщо по третій - 0.2, якщо по четвертій - 0.1, якщо по п’ятій - 0.1. Яка ймовірність того, що грибник пішов по першій стежці, якщо через годину він вийшов з лісу?
14. З 10 студентів, які прийшли на екзамен з теорії ймовірностей, троє підготувались відмінно, четверо - добре, двоє - задовільно, а один зовсім не

підготувався. В білетах 20 питань. Студенти, які підготувалися відмінно, можуть відповісти на всі 20 питань, добре - на 16 питань, задовільно - на 10, і ті, які зовсім не підготувалися, - на 5 питань. Кожен студент отримує навмання 3 питання з 20. Студент, якого було запрошено відповідати першим, відповів на всі 3 питання. Яка ймовірність того, що він відмінник?

15. Годинники, які надходять до магазину, виробляють на трьох заводах. Перший постачає 40% всіх годинників, що надходять до магазину, другий - 45%, третій- 15%. З годинників, які виробляють на першому заводі, 80% йдуть точно, серед годинників другого заводу таких 70%, а третього - 90%. Яка ймовірність того, що куплений навмання годинник у цьому магазині, буде йти точно?

п. 9

1. Підкидають послідовно дві монети. Події:
A={випав герб на першій монеті},
B={випав хоча б один герб},
C={випала хоча б одна цифра},
D={випав герб на другій монеті}.
Визначити, залежні чи незалежні пари подій: 1) A і C; 2) A і D; 3) B і C; 4) B і D.

2. З колоди, яка містить 36 карт, виймають одну Події:
A={з’явився туз},
B={з’явилася карта чорної масті},
C={з’явився піковий туз},
D={з’явилася десятка}.
Залежні чи незалежні наступні пари подій: 1) A і B; 2) A і C; 3) B і C; 4) B і D; 5) C і D?

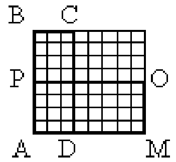
3. З урни, яка містить 3 білих і 7 червоних кульок, навмання послідовно і без повернень витягують дві кульки. Події:
A={перша кулька біла},
B={друга кулька біла},
C={хоча б одна з витягнених кульок біла}.
Визначити, залежні чи незалежні такі події: 1) A і B; 2) A і C; 3) B і C?

4. З колоди в 52 карти навмання виймають одну карту. Подія:
A={витягнута карта - туз},
B={витягнута карта червоної масті},
C={витягнута карта - фігура, тобто є валетом, дамою, королем або тузом}.
Визначити, залежні чи незалежні такі три пари подій: 1) A і B; 2) A і C; 3) C і B?

5. Підкидають навмання три гральні кубика. Події: A={з’явиться не менше двох одиниць}, B={з’явиться не більше двох шестірок}. Визначити, залежні чи незалежні ці події. Обчислити умовну ймовірність P(B/A).

6. Підкидають дві монети. Події: A={випав герб на першій монеті}, B={випав герб на другій монеті}. Знайти ймовірність події C=A+B.

7. На шахову дошку розміром 8×8 навмання кидається точка. Розглядаються події: A={точка попала у прямокутник ABCD}, B={точка попала у прямокутник APOM}. Визначити, залежні чи незалежні ці події.



8. Яка ймовірність витягнути з колоди в 36 карт туза, або короля, або карту пікової масті?

9. Прилад складається з двох незалежних в роботі блоків. Ймовірність того, що на протязі деякого часу вийде з ладу перший блок, дорівнює 0.05, другий - 0.08. Для того, щоб прилад зламався, досить поломки хоча б одного блоку. Знайти ймовірність того, що прилад вийде з ладу?

10. В першому ящику 4 білих кульки, 11 червоних і 5 чорних, в другому - 8 білих, 6 червоних і 6 чорних. Навмання беруть по одній кульці з кожного ящика. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

11. Студент може поїхати в інститут або автобусом, який ходить через кожні 20 хв, або тролейбусом, який ходить через кожні 10 хв. Яка ймовірність того, що студент, який підійшов до зупинки, поїде протягом наступних п'яти хвилин?

12. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює p_1, для другого – p_2. Стрільці зробили по одному пострілу в мішень. Вважаючи, що влучення в мішень кожним із стрільців є незалежними подіями, знайти ймовірність таких подій: A={жодного влучення в мішень}, B={лише одне влучення в мішень}.

13. Підкидають два гральні кубики. Знайти ймовірності таких подій: A={сума вічок, що випали, парна}, B={хоча б на одному кубику випало непарне число вічок}, C={на одному кубику випало парне число вічок, а на другому - непарне}, D={на жодному з кубиків не випало шість вічок}.

п. 10

1. Знайти ймовірність того, що точка, кинута у будь-яке місце всередині кола, потрапить у вписані в це коло: а) правильний трикутник; б) квадрат.

2. У коло радіуса R кинуто точку. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до центра кола не перевищує r.

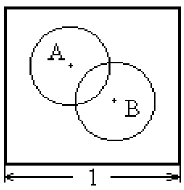
3. Абонент очікує на телефонний дзвінок протягом однієї години. Яка ймовірність того, що йому зателефонують протягом перших 15 хвилин?

4. Між 0 і 1 навмання вибрано два числа x і y. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не більша ніж 1, а модуль їх різниці не менше, ніж 0.5.

5. Між числами 1 і -1 навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не більше одиниці.

6. Навмання вибрано два дійсні числа x і y такі, що $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Яка ймовірність того, що їх сума не більше одиниці, а сума їх квадратів більше 0.25?
7. Навмання взяті два дійсні числа x і y такі, що $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$. Знайти ймовірність того, що $y{:}x \le 2$ і $xy \le 1$.
8. Два дійсних числа x і y вибирають навмання так, що $|x| \le 3$, $|y| \le 5$. Яка ймовірність того, що дріб x/y додатній?
9. На площині накреслено паралельні прямі на відстані $2a$ одна від одної. На площину навмання кидають монету радіуса r ($r < a$). Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодну з прямих.
10. Вздовж туго натягнутої нитки підвішені голки на відстані 1 м одна від одної. Під прямим кутом до цієї нитки рухається гумова кулька діаметром 20 см. Яка ймовірність того, що кулька мене голку?
11. Іван і Марія домовилися про зустріч в певному місці між одинадцятою і дванадцятою годинами. Кожен приходить у випадковий момент вказаного проміжку і чекає появи другого до закінчення обумовленого часу, але не більше a хвилин (a<60), після чого залишає місце зустрічі. Знайти імовірність того, що вони зустрінуться.

1. *Ведеться стрільба по квадратній мішені зі стороною рівною одиниці. Подія А - стрілець попадає в круг радіуса r=0.3 з центром в точці А з імовірністю, яка дорівнює площі цього круга. Подія В - стрілець попадає в круг того ж радіуса з центром в точці В, з імовірністю, яка також дорівнює площі круга. Яка повинна бути віддаль між центрами цих кругів, щоб події А та В були незалежними? (Підказка: $S_A S_B = S_{AB}$)



п. 11

1. Підкидається двічі тригранна кістка, яка зроблена з тригранної лінійки, грані якої пронумеровані числами 1, 2, 3. Випадкова величина ξ - сума чисел, що випали на нижніх гранях при двох підкиданнях. Знайти розподіл випадкової величини ξ.
2. Вибирається навмання одне з натуральних чисел від 1 до 10 і підраховується число його дільників. Випадкова величина ξ - число дільників. Знайти: розподіл ξ, $P\{\xi=2\}$, $P\{\xi=1\}$, $P\{\xi=4\}$, $P\{\xi>4\}$.
3. Підкидаються два звичайні гральні кубики. Випадкова величина ξ - сума вічок на цих гральних кубиках. Знайти розподіл випадкової величини ξ.
4. Одночасно підкидаються білий і чорний гральні кубики. Випадкова величина ξ- різниця числа вічок, що випали, на чорному і білому кубиках. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

5. Підкидаються чотири монети. Випадкова величина ξ - число гербів, що випали. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

п. 12

В задачах 1 - 5 використайте випадкову величину ξ, яка має розподіл:

ξ	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

1. Обчислити $M\xi$.
2. Знайти розподіл випадкової величини 3ξ-1 і знайти $M(3\xi-1)$. Порівняйте ваш результат з $3M\xi-1$.
3. Знайти розподіл випадкової величини $2\xi+3$. Обчисліть $M(2\xi+3)$ і порівняйте ваш результат з $2M\xi+3$.
4. Знайти розподіл випадкової величини ξ^2 і обчислити $M(\xi^2)$.
5. Знайти розподіл випадкової величини ξ^2+1 і обчислити $M(\xi^2+1)$.
6. Розподіл випадкової величини ξ задано таблицею:

ξ	1	2	3	4
P	1/16	1/4	1/2	3/16

Знайти $M\xi$ і $P\{\xi>2\}$.

7. Розподіл випадкової величини x такий:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

а величини y такий:

y	1	2	3	4	5	6	7	8
P	1/4	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16	1/8	1/4

Знайти математичне сподівання випадкових величин $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, $\lambda= xy$, де x і y - незалежні випадкові величини.

8. Знайти математичне сподівання випадкових величин, визначених в задачах 1-5 до пункту 11.
9. Один раз підкидаються три однакові гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 1, якщо хоча б на одному гральному кубику випаде цифра 6; набуває значення 0, якщо шестірка не випаде ні на одній грані, але хоча б на одній грані появиться цифра 5; і набуває значення (-1) в інших випадках. Описати розподіл ξ і знайти $M\xi$.
10. Робітник обслуговує 4 станки. Ймовірність того, що протягом години перший станок не потребуватиме регулювання, приблизно 0.9, другий - 0.8,

третій - 0.75, четвертий - 0.7. Знайти математичне сподівання числа станків, які протягом години не потребуватимуть регулювання.

п. 13

1. Знайти дисперсії випадкових величин, описаних в задачах 1-5 до пункту 11.

2. Зважування одної і то їж деталі приладом А дало такі результати(в мг):
7.88, 7.89, 8.01, 8.02, 8.04, 8.01, 8.03, 7.95, 7.96, 8.21,
а зважування тієї ж деталі приладом В:
7.91, 7.89, 8.01, 8.01, 8.02, 8.01, 8.03, 7.97, 7.97, 8.18.
Який з приладів точніший? (Вважати, що всі вимірювання рівноможливі.)

3. Нехай ξ - число білих кульок серед трьох навмання витягнутих з ящика, в якому 5 білих і 7 чорних кульок. Знайти $D\xi$.

4. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця p_1, для другого p_2. Випадкова величина ξ - сумарне число влучень в мішень у даному експерименті. Знайти розподіл ξ, $M\xi$, $D\xi$.

5. З урни, яка містить 4 білих і 6 червоних кульок, випадковим чином і без повернень виймають 3 кульки. Випадкова величина ξ - число білих кульок у вибірці. Знайти розподіл, $M\xi$ та $D\xi$.

6. Знайти розподіл випадкової величини X, яка приймає тільки два значення x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$, і відомі ймовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання $M(X)$ та дисперсія $D(X)$:

а) $p_1=0.1$, $M(X)=3.9$, $D(X)=0.09$;
б) $p_1=0.3$, $M(X)=3.7$, $D(X)=0.21$;
в) $p_1=0.5$, $M(X)=3.5$, $D(X)=0.25$;
г) $p_1=0.9$, $M(X)=3.1$, $D(X)=0.09$;
д) $p_1=0.6$, $M(X)=3.4$, $D(X)=0.24$;
е) $p_1=0.4$, $M(X)=3.6$, $D(X)=0.24$;
ж) $p_1=0.7$, $M(X)=3.3$, $D(X)=0.21$;
з) $p_1=0.6$, $M(X)=3.4$, $D(X)=0.24$.

7. Випадкова величина X приймає лише три можливі значення $x_1=1$, x_2 і x_3, причому $x_1<x_2<x_3$. Ймовірності того, що X прийме значення x_1 і x_2, відповідно дорівнюють 0.3 і 0.2. Знайдіть розподіл величини X, якщо $M(X)=2.2$ і $D(X)=0.76$.

8. Тричі підкидається правильна монета. Випадкова величина ξ - число гербів, що випали. Знайти розподіл даної випадкової величини, обчислити $M\xi$ та $D\xi$.

9. Зі 100 карточок з числами 00, 01, 02, ..., 98, 99 навмання виймають одну. Нехай η_1 і η_2 - відповідно сума і добуток цифр на витягнутій карточці. Знайти $M\eta_1$, $M\eta_2$, $D\eta_1$, $D\eta_2$.

п. 14

1. Ймовірність події в кожному з однакових і незалежних дослідів дорівнює p. Знайти ймовірність того, що в n дослідах подія настане k разів.

а) p=0.2, n=7, k=5;
б) p=0.3, n=10, k=7;
в) p=0.4, n=12, k=8;
г) p=0.7, n=11, k=8;
д) p=0.6, n=7, k=4.

2. За учбовий рік студент складає 7 екзаменів. У студента є 2 шанси з трьох скласти кожний екзамен. Яка ймовірність того, що він отримає не більше: ніж дві незадовільні оцінки?

3. У суді 7 присяжних. Кожен з них в одному з трьох випадків виносить несправедливий вирок. Яка ймовірність того, що на суді буде винесено справедливий вирок?

4. Серед кавунів, які продаються на базарі, 80% спілих. Яка ймовірність того, що серед 5 куплених кавунів виявиться не більше, ніж один спілий кавун?

5. Монета підкидається 5 разів. Яка ймовірність того, що гербів випаде більше, ніж цифр?

6. На фабриці, що виготовляє олівці, брак складає 3%. Яка ймовірність того, що при покупці 5 олівців принаймні 2 будуть якісними?

7. При користуванні телефоном 2 дзвінка з 10 помилкові. Яка ймовірність того, що з 5 дзвінків менше половини будуть помилковими?

8. Відомо, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0.52. Яка ймовірність того, в сім'ї з трьох дітей не менше двох дівчаток?

9. Для стрілка, що стріляє по мішені, ймовірність попасти в "яблучко" при одному пострілі не залежить від результатів попередніх пострілів і дорівнює p=1/4. Спортсмен зробив 5 пострілів. Знайти ймовірності подій:

A={рівно одне влучення};
B={рівно два влучення};
C={не менше трьох влучень}.

10. На контроль надійшла партія деталей з цеху. Відомо, що 25% всіх деталей не задовольняють стандарту. Скільки потрібно випробувати деталей, що б з ймовірністю не меншою 0.7 виявити хоча б одну нестандартну деталь?

11. Ймовірність того, що електрична лампочка залишиться справною після 1000 годин роботи, дорівнює 0.2. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з трьох ламп залишиться справною після 1000 годин роботи.

12. Ймовірність влучення в "десятку" при одному пострілі дорівнює p=0.4. Скільки треба зробити незалежних пострілів, щоб з ймовірністю, не меншою 0.9, влучити в "десятку" принаймні один раз?

13. Монету підкидають 7 разів. Скільки разів в середньому може з’явитися герб?
14. Гральний кубик підкидають 12 разів. Скільки разів в середньому може з’явитися двійка?
15. *Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Знайти математичне сподівання числа пострілів, якщо ймовірність влучення одним пострілом близька до 0.2.
16. Тричі стріляють по мішені. Ймовірність влучення приблизно 0.4. Нехай ξ - число влучень. Знайти $D\xi$.
17. З усієї продукції, що випускає завод, 95% складають стандартні вироби. Навмання відібрано 6 деталей. Нехай ξ - число стандартних деталей з шести відібраних. Знайти $D\xi$.

п. 15

1. Вимірюється швидкість вітру в даному пункті Землі. Розглядається випадкова величина ξ - швидкість вітру. Оцінити ймовірність події $A=\{\xi\geq 80$ км/год$\}$, якщо шляхом багаторічних вимірювань встановлено, що $M\xi=16$ км/год.
2. Розв’язати попередню задачу, якщо в результаті проведених додаткових вимірювань встановлено, що $\sigma=4$км/год.
3. Число ξ сонячних днів за рік для даної місцевості є випадковою величиною з середнім значенням 100 днів і середнім квадратичним відхиленням 20 днів. Оцінити зверху ймовірності подій: $A=\{\xi\geq 150\}$, $B=\{\xi\geq 200\}$.
4. Середнє споживання електроенергії в травні (за багато років) у даному мікрорайоні дорівнює 360 кВт·год.

а) оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 10^6 кВт·год;

б) оцінити ту саму ймовірність, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40000 кВт·год.

5. Математичне сподівання річної кількості опадів у даній місцевості дорівнює 55 см. Оцінити ймовірність того, що в цій місцевості випаде за рік не менше 175 см опадів.
6. Середнє річне число сонячних днів у даній місцевості дорівнює 75. Оцінити ймовірність того, що протягом року в цій місцевості буде не більше 200 сонячних днів.
7. Середня швидкість вітру на даній висоті дорівнює 25 км/год. Оцінити швидкість вітру, яку можна очікувати на цій висоті з ймовірністю, не меншою ніж 0.9, якщо $\sigma_\xi=4.5$ км/год.

8. Для деякого автопарку середнє число автобусів, які відправляють в ремонт після місяця експлуатації на місцевих лініях, дорівнює 5. Оцінити ймовірність події A={по закінченню місяця в даному автопарку буде відправлено в ремонт менше 15 автобусів}, якщо інформація про дисперсію відсутня.
9. Оцінити ймовірність події A з попередньої задачі, якщо дисперсія дорівнює 4.

Відповіді

До пункту 4.
1. 1/2, 1/3, 2/3, 1/2, 1, 1/2; **2**. 1/2, 4/9, 1/4, 1/9; **3**. 1/4, 25/36, 1/9, 1/6; **4**. 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1/2, 1/4, 1/4; **5**. 0.35, 0.5, 0.45, 0.45.

До пункту 5.
1. 5/6; **2**. 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 2/3; **3**. 1/6, 5/12, 1/2, 35/36, 5/6, 11/36, 1/9; **4**. $\approx 0.264\cdot 10^{-2}$, ≈ 0.2813; **5**. 0.01, 5/144; **6**. 1/4, 1/6; **7**. 1/11; **8**. 1/216, 5/48, 5/324, $1/6^5$; **9**. 1/5!; **10**. $12!/12^{12}$; **11**. 87/473; **12**. 1/3; **13**. ≈ 0.091; **14**. 0.012; **15**. 0.45; **16**. 1/6; **17**. 0.0121; **18**. 0.00056, 0.000255; **19**. 1/6; **20**. 1/3, $C_{n-2}^{m}\cdot\frac{2^{n-m-2}}{3^n}$, $C_n^m\cdot\frac{2^{n-m}}{3^n}$, $\frac{n!}{m_0!m_1!m_2!3^n}$; **21**. 7/18.

До пункту 6.
1. 0.9; **2**. 0.35; **3**. 0.8; **4**. 0.9, 0.6; **5**. ≈ 0.354; **6**. 0.7; **7**. 0.75, 0.25, 0.25; **8**. 5/6.

До пункту 7.
1. 5/9, 5/9, 9/14; **2**. 1/3; **3**. 1/4; **4**. 3/4; **5**. 0.5, 60/91; **6**. 0.952; **7**. 1/12; **8**. 3/248, 7/124, 1/62; **9**. 2/5; **10**. $(m-1)/(m+n-1)$, $m/(m+n-1)$; **11**. 0.594.

До пункту 8.
1. 256/715; **2**. 216/715; **3**. 288/593; **4**. 200/593; **5**. 0.85, 0.72, 0.655; **6**. 0.85; **7**. 11/40; **8**. 0.85; **9**. 13/25; **10**. 0.0345, 125/345, 140/345, 80/345; **11**. 0.5, 0.333, 0.167; **12**. 6/7; **13**. 6/13; **14**. 0.58; **15**. 0.77.

До пункту 9.
1. зал., незал., зал., зал.; **2**. незал., зал., зал., незал., зал.; **3**. зал., зал., зал.; **4**. незал., зал., незал.; **5**. залежні, 1/4; **6**. 3/4; **7**. не залежні; **8**. 15/36; **9**. 0.126; **10**. 0.32; **11**. 5/8; **12**. $P(A)=(1-p_1)(1-p_2)$, $P(B)=p_1+p_2-2p_1p_2$; **13**. 1/2, 3/4, 1/2, 25/36.

До пункту 10.
1. $3\sqrt{3}/(4\pi)$, $2/\pi$; **2**. r^2/R^2; **3**. 1/4; **4**. 0.125; **5**. $\pi/4$; **6**. $1/2-\pi/16$; **7**. $(1+3\ln 2)/8$; **8**. 1/2; **9**. $1-r/a$; **10**. 4/5; **11**. $1-(1-a/60)^2$.

До пункту 12.

1. 0; **2**. $M(3\xi-1)=3M\xi-1=-1$; **3**. $M(2\xi+3)=2M\xi+3=3$; **4**. $M(\xi^2)=1.4$; **5**. 2.4; **6**. 45/16, 11/16; **7**. 8, -1, 15.75; **8**. 4, 2.7, 7, 0, $2\frac{10}{21}$; **9**. 1/8; **10**. 3.15.

До пункту 13.

1. 4/3, 1.31, $5\frac{5}{6}$, $5\frac{5}{6}$, 2.34; **2**. прилад B; **3**. 105/176; **4**. $M\xi=p_1+p_2$, $D\xi=p_1q_1+p_2q_2$; **5**. 6/5, 14/25; **6**. $x_1=3$, $x_2=4$; **7**. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $p_1=0.3$, $p_2=0.2$, $p_3=0.5$; **8**. 3/2, 3/4; **9**. 9, 20.25, 16.5, 402.1875.)

До пункту 14.

2. ≈0.57; **3**. ≈0.8267; **4**. 0.00672; **5**. 0.5; **6**. 0.9985; **7**. 0.942; **8**. 0.2078; **9**. ≈0.3955, ≈0.2637, ≈0.1035; **10**. $n\geq5$; **11**. 0.488; **12**. $n\geq5$; **13**. 3-4 рази; **14**. 2 рази; **15**. 10; **16**. 0.72; **17**. 0.285.

До пункту 15.

1. $P(A)\leq0.2$; **2**. $P(A)\leq0.004$; **3**. $P(A)\leq0.16$, $P(B)\leq0.04$; **4**. а)$P\{\xi>1000000\}\leq0.36$, б)$P\{\xi>1000000\}\leq 0.0016$; **5**. $P\{\xi>175\}\leq0.31$; **6**. $P\{\xi\leq200\}\geq0.625$; **7**. $10.8\leq\xi\leq29.2$; **8**. 0.666; **9**. $P\{\xi<15\}\geq0.96$.

Література

1. Бернулли Я. О законе больших чисел: Пер. с лат.- М.:Наука.,1986.- 176 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - К.: Вища шк., 1988. - 439 с.
3. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание и:нформатики: Пер. с англ.-М.: Мир, 1998.-703 с.
4. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології.- К.: Вища шк.,1995.-351 с.
5. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику: Пер. с анг. - М.: Издательство иностранной литературы, 1963. - 486 с.
6. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей.-М.: Наука, 1974.- 120с.
7. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. - М.: Просвещение, 1990. - 161 с.
8. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность: Пер. с анг. - М.: Мир, 1969. - 431 с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для втузов / Э.А. Вуколов, В.Н. Земсков, А.Ф. Каракулин и др.; под ред. А.В.Ефимова. - М.: Наука, 1990. - 428с.
10. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. - М.: Из-во МГУ, 1972. - 229 с.
11. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. - К.: Вища шк., 1994. - 193 с.
12. Ядренко М.Й. Випадкові події та їх імовірності //У світі математики. - 1997. т.3, в.2. - С. 5-16.

Розділ III. **Різницеве числення**

1. Різницевий оператор та його властивості

Нехай функція f визначена в точці x і в деякому її околі і нехай h таке число, що f визначена і в точці $x + h$.

Означення 1. *Операція переходу від $f(x)$ до $f(x+h)-f(x)$ називається оператором знаходження різниці, або різницевим оператором.*

Значення різницевого оператора називають різницею, в аналізі часто використовується назва - приріст.

Різницю позначають символом Δf. Далі вважатимемо, що h=1, бо загальний випадок зводиться до цього, якщо функцію $f(x)$ замінити на $\varphi(t)$, де $\varphi(t)= f(ht)$, $t=x/h$. Тоді $\Delta\varphi = \varphi(t+1) - \varphi(t) = f(h(t + 1)) - f(ht) = f(h(x/h + 1)) - f(hx/h) = f(x + h) - f(x) =\Delta f$

З означення легко отримати такі властивості різницевого оператора.

Теорема 1. *(Однорідність). Якщо C - константа, то $\Delta(Cf) = C\Delta f$.*
Доведення.

$$\Delta(Cf) = Cf(x + h) - Cf(x) = C(f(x + h) - f(x)) = C\Delta f.$$

Теорема 2. *(Адитивність).* $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$.
Доведення.

$\Delta(f + g) = (f(x + 1) + g (x + 1)) - (f(x) + g(x)) = (f(x + 1) - f(x)) + (g(x + 1) - g (x)) = \Delta f + \Delta g$.

Наслідок. *(Лінійність різницевого оператора). Якщо C_1 і C_2 - константи, то*

$$\Delta(C_1f_1 + C_2f_2) = C_1\Delta f_1 + C_2\Delta f_2.$$

Теорема 3. $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + \Delta f\Delta g$.
Доведення.

$\Delta(fg) = f(x + 1)g(x + 1) - f(x)g(x) = f(x + 1)g(x + 1) - f(x + 1)g(x) + f(x + 1)g(x) -$
$- f(x)g(x) = f(x + 1)(g(x + 1) - g(x)) + g(x)(f(x + 1) - f(x)) = f(x + 1)\Delta g + g(x)\Delta f =$
$- f(x + 1)\Delta g - f(x)\Delta g + f(x)\Delta g + g(x)\Delta f = g(x)\Delta f + f\Delta g + \Delta f\Delta g$.

Приклади.

1) $\Delta(ax + b) = a$;
2) $\Delta x^2 = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$;
3) $\Delta(x(x - 1)) = (x + 1)x - x(x - 1) = 2x$;
4) $\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x$;
5) $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a - 1)a^x$;
6) $\Delta\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x(x+1)}$;

7) $\Delta\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{x(x+1)}=-\dfrac{2}{x(x+1)(x+2)}$;

8) $\Delta\arctan x = \arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\dfrac{1}{1+x+x^2}$;

9) $\Delta\sin(\alpha x) = \sin(\alpha(x+1)) - \sin(\alpha x) = 2\cos(\alpha x + \alpha/2)\sin\alpha/2$;

10) $\Delta\left(\dfrac{\mathrm{tg}(ax)}{\mathrm{tg}a}-x\right)=\left(\dfrac{\mathrm{tg}(a(x+1))-\mathrm{tg}(ax)}{\mathrm{tg}a}-1\right)=\left(\dfrac{\mathrm{tg}a(1+\mathrm{tg}(a(x+1))\cdot\mathrm{tg}(ax))}{\mathrm{tg}a}-1\right)=$
$\mathrm{tg}(a(x+1))\cdot\mathrm{tg}(ax)$.

1.1. Узагальнений степінь

Означення 2. *Функція*

$$x_h^{(k)} := x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(k-1)h)$$

називається узагальненим степенем.

Якщо тут покласти h=0, то отримаємо звичайну степеневу функцію. Якщо ж покласти h=1, то узагальнену степеневу функцію будемо далі позначати символом $x^{(k)}$.

Для від'ємних показників узагальнений степінь визначається за формулою

$$x_h^{(-k)} := \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(k-1)h))},\ k>0.$$

Якщо h=1, то, як і вище, одиницю не будемо використовувати як індекс.

В теорії скінченних різниць узагальнена степенева функція відіграє таку ж роль як і звичайна степенева функція в диференціальному численні. Справа в тому, що неважко перевірити таке співвідношення:

Теорема 4.

(1) $$\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)},$$

незалежно від того, чи k додатне, чи від'ємне.

Доведення.

Доведемо, наприклад, це співвідношення для випадку $k > 0$. Матимемо,

$\Delta x^{(k)} = \Delta(x(x-1)\ldots(x-k+1)) = (x+1)x(x-1)\ldots(x-k+2) - x(x-1)\ldots(x-k+1)$ $= x(x-1)\ldots(x-k+2)((x+1)-(x-k+1)) = kx^{(k-1)}$.

Точно так доводиться співвідношення (1) для від'ємних показників.

Якщо перемножити множники, які визначають узагальнений степінь, то матимемо:

(2) $$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k\ .$$

Коефіцієнти $s(n,k)$ називаються числами Стірлінга першого роду, вони часто зустрічаються в комбінаториці, мають багато цікавих властивостей (див. [1]). Для знаходження цих чисел найзручніше користуватись таким рекурентним співвідношенням:

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k),\ s(1, 0) := 0,\ s(1, 1) := 1,$$

яке випливає з того, що

$$x^{(n+1)} = (x-n)x^{(n)}.$$

Далі будемо користуватись поданням степеневої функції через узагальнений степінь, а саме:

(3) $$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^{(k)} .$$

В цій формулі числа $S(n,k)$ називаються числами Стірлінга другого роду, вони в комбінаториці відіграють не меншу роль, ніж числа $s(n,k)$. Для знаходження чисел Стірлінга другого роду використовують таке рекурентне співвідношення:

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k),\ S(1, 0) := 0,\ S(1, 1) :=1,$$

бо $x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1,k)x^{(k)} = x\sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x^{(k+1)} + kx^{(k)})$.

Числа *Стірлінга першого роду,* $s(n,k)$

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	-1	1						
3	2	-3	1					
4	-6	11	-6	1				
5	24	-50	35	-10	1			
6	-120	274	-225	85	-15	1		
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

Числа *Стірлінга другого роду,* $S(n,k)$

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

2. Антирізницевий оператор

Означення 1. *Антирізниця функції f(x) це функція F(x) така, що $\Delta F(x) = f(x)$. Позначається антирізниця символом:* $\Delta^{-1} f(x)$.

Таким чином, $\Delta(\Delta^{-1} f(x)) = \Delta f(x)$. Оператор переходу від функції $f(x)$ до функції $F(x)$ називається антирізницевим оператором. Значення цього оператора неоднозначне: якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ дві різні антирізниці, то $F_1(x) - F_2(x) = C(x)$, де $C(x)$ - довільна періодична функція з періодом T=1, наприклад, $C(x) = 2\sin(2\pi x) - 5\cos(2\pi x) + 7$.

Приклади.

1) $\Delta^{-1} 2^x = 2^x$,

2) $\Delta^{-1} a^x = \dfrac{a^x}{a-1}$,

3) $\Delta^{-1} x^{(k)} = \dfrac{x^{(k+1)}}{k+1}$, $k \neq -1$,

4) $\Delta^{-1} \cos x = \dfrac{\sin(x - 1/2)}{2\sin(1/2)}$,

5) $\Delta^{-1} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 + x + x^2} = \operatorname{arctg} x$;

6) $\Delta^{-1} (\operatorname{tg}(a(x + 1))\cdot\operatorname{tg}(ax)) = \dfrac{\operatorname{tg}(ax)}{\operatorname{tg} a} - x$.

Як застосовується поняття антирізниці буде з'ясовано в наступному пункті.

3. Скінченні суми

У цьому пункті розглянуті деякі методи знаходження сум вигляду

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x + k) = f(x) + f(x + 1) + \ldots f(x + n - 1).$$

Теорема 1. *(Про підсумовування). Якщо* $\Delta^{-1} f(x) = F(x)$, *то*

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x + k) = F(x + n) - F(x). \quad (1)$$

Доведення.

Через те що

$$\Delta F(x) = F(x + 1) - F(x) = f(x),$$

$$\Delta F(x + 1) = F(x + 2) - F(x + 1) = f(x + 1),$$

$$\Delta F(x + 2) = F(x + 3) - F(x + 2) = f(x + 2),$$

$$\ldots$$

$$\Delta F(x + n - 1) = F(x + n) - F(x + n - 1) = f(x + n - 1)$$

то, складаючи відповідні частини цих рівностей, отримаємо (1).

Формула (1) є аналогом формули Лейбніца-Ньютона в інтегральному численні, тому як і там, формулу (1) зручно використовувати в такому вигляді:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = F(x+k)\Big|_0^n = F(x+n) - F(x). \tag{2}$$

На практиці часто використовується частинний випадок формули (2), для $x = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = F(k)\Big|_0^n = F(n) - F(0). \tag{3}$$

Приклад 1.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^k\Big|_0^n = 2^n - 1.$$

Приклад 2.

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \frac{a^k}{a-1}\Big|_0^n = \frac{a^n - 1}{a-1}.$$

Приклад 3.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\alpha(x + k + 1/2)) = \frac{\sin(\alpha(x+k))}{2\sin(\alpha/2)}\Bigg|_0^n = \frac{\sin(\alpha(x+n)) - \sin(\alpha x)}{2\sin(\alpha/2)}.$$

Якщо тут покласти $x = -1/2$, то матимемо:

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha = \frac{\sin(n\alpha/2)\cos((n-1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}.$$

Приклад 4. Знайти суму

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2.$$

У даному випадку $f(x)=x^2$; $\Delta^{-1}x^2 = \Delta^{-1}(x(x-1) + x) = \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}x(x-1)$.

Тому за формулою (3)

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}k(k-1)(2k-1)\Big|_0^n = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Приклад 5. Знайти суму

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3.$$

У даному випадку $f(x) = x^3$; $\Delta^{-1}x^3 = \Delta^{-1}(x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x) =$

$= \frac{1}{4}(x^{(4)} + 4x^{(3)} + 2x^{(2)})$, тому

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{1}{4}(n^{(4)} + 4n^{(3)} + 2n^{(2)}) = \frac{1}{4}(n(n-1))^2.$$

Приклад 6. Справедлива формула:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tg}\frac{\pi(k+1)}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{4} = \operatorname{tg}\frac{\pi n}{4} - n.$$

Для доведення досить використати приклад 6) з п. 2 і покласти $a=\frac{\pi}{4}$.

4. Перетворення Абеля

Для ефективного знаходження сум часто буває корисним застосувати перетворення Абеля, яке виражається тотожністю:

$$\sum_{k=m}^{n} u(k+1)v(k+1) = U(n+1)v(n+1) - U(m)v(m) - \sum_{k=m}^{n} U(k)\Delta v(k),\ U(k) = \sum_{i=1}^{k} u(i).$$

Доводиться ця тотожність так:

$\Delta(U(k)v(k)) = \Delta U(k)v(k+1) + U(k)\Delta v(k) = u(k+1)v(k+1) + U(k)\Delta v(k)$, або

$u(k+1)v(k+1) = \Delta(U(k)v(k)) - U(k)\Delta v(k)$.

Підсумовуючи це від m до n, отримаємо потрібну тотожність.

Приклад. Знайти суму

$$1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \ldots + n\cdot 3^n.$$

Покладемо $u(k) = 3^{k-1}$, $v(k) = k - 1$, тому

$$\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(3^k - 1) = \frac{1}{2}n(3^{n+1} - 1) + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}(3^{n+1} - 3) =$$

$$= \frac{1}{2}n3^{n+1} - \frac{1}{4}(3^{n+1} - 3).$$

5. Різниці вищих порядків

Через те що різниця функції $f(x)$ є також функція, яка залежить від x, то до неї теж можна застосувати різницевий оператор, одержимо так звану другу різницю. Продовжуючи процес знаходження різниці від різниць, одержимо різниці 3, 4 і т. д. порядків. Таким чином

$$\Delta^2 f(x) := \Delta(\Delta f(x)) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x),$$

$$\Delta^3 f(x) := \Delta(\Delta^2 f(x)) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x),$$

$$\ldots$$

$$\Delta^n f(x) := \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x+n-k).$$

Приклади.

1) $\Delta^2 2^x = 2^x$; $\Delta^2 a^x = (a - 1)^2 a^x$; $\Delta^2 x^{(n)} = n(n - 1)x^{(n-2)}$;

2) $\Delta^2 2^x = 2^x$; $\Delta^n a^x = (a - 1)^n a^x$;

3) $\Delta^m x^{(n)} = n(n - 1)\ldots(n - m + 1)x^{(n-m)} = n^{(m)}x^{(n-m)}$.

5.1 Формула Ньютона

Теорема 1. *Якщо $f(x)$ многочлен степеня n, то*

(1) $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{(k)}.$$

Доведення.

Довільний многочлен можна записати у вигляді

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x(x - 1) + \ldots + b_nx(x - 1)\ldots(x - n + 1),$$

звідси отримаємо: $b_0 = f(0) = \Delta^0 f(0)$; $b_1 = \Delta f(0)$, бо $\Delta f(x) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^{(2)} + \ldots + nb_nx^{(n-1)}$; $b_2 = \frac{1}{2}\Delta^2 f(0)$, бо $\Delta^2 f(x) = 2b_2 + 6b_3x + \ldots + n(n - 1)b_nx^{(n-2)}$; і т.д.

Наслідок. *Для довільного натурального n*

(2) $$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k 0^n}{k!} x^{(k)}.$$

Зауваження. Якщо $n \neq 0$, то $\Delta 0^n := 1$, $x^{(0)} := 1$.

Через те, що числа

$$\frac{\Delta^k 0^n}{k!}$$

є числа Стірлінга другого роду, то формулу (2) можна переписати у такому вигляді:

(2') $$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{(k)}.$$

5.2 Суми степенів

Формулу (2')можна застосувати для знаходження сум виду:

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (n - 1)^m,\ m \geq 1.$$

Для цього скористаємося загальною формулою про підсумовування, а тому потрібно знати $\Delta^{-1}x^m$. Маємо

$$\Delta^{-1}x^m = \Delta^{-1}\sum_{k=0}^{m} S(m,k)x^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} S(m,k)\Delta^{-1}x^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} S(m,k)\frac{x^{(k+1)}}{k+1}.$$

Тому

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (n-1)^m = F(x)\Big|_0^n = \sum_{k=0}^{m} S(m,k)\frac{n^{(k+1)}}{k+1} - 0.$$

Отже

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (n-1)^m = \sum_{k=0}^{m} S(m,k)\frac{n^{(k+1)}}{k+1}.$$

Приклади.

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,

2) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$,

3) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$,

4) $1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$,

5) $1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$.

6. Різницеві рівняння

Далі вважатимемо, що x набуває тільки натуральні значення. Тому функція $y(x)$ це послідовність

$$y(0), y(1), \ldots, y(x), \ldots$$

6.1. Різницеві рівняння першого порядку

Означення 1. *Рівняння, яке можна записати у вигляді*

(1) $$\Delta y(x) - g(x)y(x) = 0,$$

відносно невідомої функції $y(x)$ (функція $g(x)$ задана), називається лінійним однорідним різницевим рівнянням (ЛОРР) першого порядку.

Означення 2. *Загальний розв'язок рівняння (1) це функція $y(x, C)$, яка залежить від сталої C і для довільного значення цієї сталої вона задовольняє (1) і кожний розв'язок рівняння (1) можна отримати з $y(x, C)$ при певному виборі сталої C.*

Перепишемо рівняння (1) так: $y(x+1) - y(x) - g(x)y(x) = 0$, або $y(x+1) = y(x)(g(x)+1)$. Якщо $y(0) = C$, то

$$y(1) = C(g(0)+1);$$

$$y(2) = y(1)(g(1)+1) = C(g(0)+1)(g(1)+1);$$

$$\ldots$$

$$y(x) = C\prod_{k=0}^{x-1}(g(k)+1).$$

Останній вираз буде загальним розв'язком рівняння (1).

6.2. Лінійні однорідні різницеві рівняння другого порядку

Такі рівняння можна записати у вигляді

$$(2) \qquad \Delta^2 y(x) + a\Delta y(x) + by(x) = 0.$$

У цьому випадку загальний розв'язок буде вже залежати від двох довільних сталих і матиме вигляд $y(x, C_1, C_2)$. Розглянемо оператор

$$L(\Delta) := \Delta^2 + a\Delta + b.$$

Це різницевий оператор другого порядку. Головна властивість оператора $L(\Delta)$ - він лінійний. Це означає, що має місце

Теорема 1. *Якщо y_1 та y_2 які-небудь розв'язки рівняння (2), то $C_1y_1 + C_2y_2$ розв'язок рівняння (2) для довільних значень сталих C_1 і C_2.*
Доведення.
Справді
$L(\Delta)(C_1y_1 + C_2y_2) = (\Delta^2 + a\Delta + b)(C_1y_1 + C_2y_2) = (\Delta^2 + a\Delta + b)(C_1y_1) + (\Delta^2 + a\Delta + b)(C_2y_2) = C_1L(\Delta)y_1 + C_2L(\Delta)y_2 = 0$, бо оператори Δ^2 і Δ є лінійні.

Теорема 2. *Якщо y_1 та y_2 такі, що*

$$\det[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} y_{10} & y_{11} \\ y_{20} & y_{21} \end{pmatrix} \neq 0,$$

де $y_{10} = y_1(0)$, $y_{11} = y_1(1)$, $y_{20} = y_2(0)$, $y_{21} = y_2(1)$, то функція $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ загальний розв'язок рівняння (2).
Доведення.
Справді, нехай $y(0) = a_0$, $y(1) = a_1$, тоді з системи

$$\begin{cases} a_0 = C_1y_{10} + C_2y_{20} \\ a_1 = C_1y_{11} + C_2y_{21} \end{cases}$$

отримаємо

$$C_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_0 & y_{20} \\ a_1 & y_{21} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{11} & y_{21} \end{pmatrix}}; \; C_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} y_{10} & a_0 \\ y_{11} & a_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{11} & y_{21} \end{pmatrix}}.$$

Далі вважатимемо, що коефіцієнти a та b сталі. В цьому випадку (як для диференціальних рівнянь) можна одержати в загальному вигляді розв'язки рівняння (2). Зручно переписати рівняння (2) у вигляді

$$(3) \qquad y(x + 2) + py(x + 1) + qy(x) = 0,\; p = a - 2,\; q = a + b + 1.$$

Шукатимемо розв'язки рівняння (3) серед показникових функцій виду λ^x. Підставимо в рівняння. Отримаємо $\lambda^{x+2} + p\lambda^{x+1} + q\lambda^x = 0$, звідси, скорочуючи на λ^x, отримаємо рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{4}$$

Означення 3. *Рівняння (4) називається характеристичним рівнянням для різницевого рівняння (3).*

Загальний розв'язок рівняння (3) залежить від того, які будуть розв'язки характеристичного рівняння. Тут є повна аналогія з теорією лінійних диференціальних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Випадок перший: корені рівняння (4) дійсні та різні.

Позначимо ці корені через λ_1 і λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ці корені дають два розв'язки рівняння (3): $y_1(x) = \lambda_1^x$ та $y_2(x) = \lambda_2^x$.

Перевіримо умови теореми 2. Маємо $y_{10} = y_1(0) = 1$, $y_{11} = y_1(1) = \lambda_1$, $y_{20} = y_2(0) = 1$, $y_{21} = y_2(1) = \lambda_2$, тому

$$\det[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Отже, функція

$$y(x) = C_1 \lambda_1^x + C_2 \lambda_2^x$$

загальний розв'язок рівняння (2).

Випадок другий: корені рівняння (4) дійсні та однакові.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Цей корінь дає один розв'язок рівняння (3), а саме $y_1(x) = \lambda^x$. Неважко перевірити, що і функція $y_2(x) = x\lambda^x$ теж розв'язок рівняння (3). Справді, $(x + 2)\lambda^{x+2} + p(x + 1)\lambda^{x+1} + q\lambda^x = \lambda^x((x + 2)\lambda^2 + p(x + 1)\lambda + qx) = \lambda^x(x(\lambda^2 + p\lambda + q) + 2\lambda^2 + p\lambda)=0$, бо λ корінь характеристичного рівняння,а за формулою Вієта $\lambda + \lambda = -p$.

Перевіримо умови теореми 2. Маємо $y_{10} = y_1(0) = 1$, $y_{11} = y_1(1) = \lambda$, $y_{20} = y_2(0) = 0$, $y_{21} = y_2(1) = \lambda$, тому

$$\det[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \neq 0.$$

Отже, в цьому випадку загальним розв'язком рівняння (3) буде функція

$$y(x) = \lambda^x(C_1x + C_2). \tag{5}$$

Випадок третій: корені рівняння (4) комплексні та різні. Позначимо один з цих коренів через $\alpha + i\beta$, тоді другий корінь буде спряженим до першого, тобто, $\alpha - i\beta$. Комплекснозначна функція $(\alpha + i\beta)^x$ є розв'язком рівняння (3) і неважко перевірити, користуючись лінійною властивістю оператора $L(\Delta)$, що дійсна та уявна частина цієї функції теж будуть розв'язками рівняння (3) (пропонуємо перевірити це самостійно). Знайдемо відповідні частини, використовуючи показникову форму запису комплексного числа. Тож нехай $\alpha + i\beta = \rho \exp(i\varphi)$. Тоді $(\alpha + i\beta)^x = \rho^x \exp(i\varphi x) = \rho^x \cos(\varphi x) + i\rho^x \sin(\varphi x)$.

Отже, функції $y_1(x) = \rho^x \cos(\varphi x)$ і $y_2(x) = \rho^x \sin(\varphi x)$ будуть дійсними розв'язками рівняння (2).

Перевіримо умови виконання теореми 2. Матимемо: $y_{10} = y_1(0) = 1$, $y_{11} = y_1(1) = \rho \cos \varphi$, $y_{20} = y_2(0) = 0$, $y_{21} = y_2(1) = \rho \sin \varphi$, тому

$$\det[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} 1 & \rho\cos\varphi \\ 0 & \rho\sin\varphi \end{pmatrix} = \rho \sin \varphi \neq 0.$$

Отже, функція

$$y(x) = \rho^x(C_1\cos(\varphi x) + C_2\sin(\varphi x))$$

буде загальним розв'язком рівняння (3) у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння.

Для того, щоб одержати частинні розв'язки рівняння (3) потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) = y_0 \\ C_1 y_1(1) + C_2 y_2(1) = y_1 \end{cases}$$

відносно C_1 та C_2. На практиці різницеві рівняння дуже часто задаються у вигляді рекурентних співвідношень. Тому рівняння (3) часто будемо записувати у такому вигляді:

(6) $$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Знайти загальний член послідовності чисел Фібоначчі, тобто послідовності

(7) $$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots, f_n, \ldots .$$

Кожний член цієї послідовності є сумою двох попередніх, тому ця послідовність визначається рекурентним співвідношенням:

(8) $$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n,\ y_0 = y_1 = 1.$$

Знайти загальний член послідовності (7) означає розв'язати рекурентне співвідношення (8). В цьому випадку характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^2 = \lambda + 1$. Коренями його будуть числа

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Тому загальний розв'язок рівняння (8) це функція

$$y_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

а враховуючи початкові умови, знаходимо C_1 і C_2. Матимемо

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\ C_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Таким чином, загальний член послідовності (7) матиме вигляд:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Ця формула відома під назвою формули Біне.

Якщо в співвідношенні (8) взяти початкові умови $y_0 = 2$, $y_1 = 1$, то одержимо послідовність чисел Люка:

(9) $\qquad 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots, l_n, \ldots.$

Загальний член для послідовності чисел Люка матиме вигляд:

$$l_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Приклад 2. Знайти загальний член послідовності, яка задається рекурентним співвідношенням

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0,\ y_0 = 1,\ y_1 = 6.$$

В даному випадку характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ має кратний корінь $\lambda = 3$, тому загальний розв'язок відповідного співвідношення матиме вигляд:

$$y_n = 3^n(C_1 n + C_2),$$

звідси, враховуючи початкові умови, отримаємо загальний член заданої послідовності:

$$y_n = (n + 1)3^n.$$

Приклад 3. Знайти загальний член послідовності, яка задається рекурентним співвідношенням

$$y_{n+2} + y_n = 0,\ y_0 = y_1 = 1.$$

В даному випадку характеристичне рівняння має комплексні корені

$$\lambda_1 = i = cos(\pi/2) + i\ sin(\pi/2),\ \lambda_2 = -i,$$

тому загальний розв'язок відповідного співвідношення матиме вигляд:

$$y_n = C_1\ cos(\pi n/2) + C_2\ sin(\pi n/2),$$

звідси, враховуючи початкові умови, отримаємо загальний член заданої послідовності:

$$y_n = cos(\pi n/2) + sin(\pi n/2).$$

Приклад 4. Оцінити верхню межу для кількості ділень при знаходженні найбільшого спільного дільника (НСД) двох чисел за допомогою алгоритма Евкліда.

Розв'язання. Нехай $a_0>a_1$ і потрібно знайти НСД(a_0, a_1). Позначемо через $d_1,d_2,...,d_n$ частки від відповідних ділень, а через $a_2,a_3,...,a_{n+1}$ - остачі. Тоді будуть справедливі такі рівності:

$$a_0=a_1d_1+a_2,$$
$$a_1=a_2d_2+a_3,$$
$$\ldots$$
$$a_{n-2}=a_{n-1}d_{n-1}+a_n,$$
$$a_{n-1}=a_nd_n+a_{n+1}.$$

Процес ділення продовжується доти, доки a_{n+1} не стане рівним нулю. Тоді НСД(a_0, a_1) = a_n. Звернемо увагу на те, що $a_n \geq 1$, остання частка $d_n \geq 2$, а всі інші частки не менші, ніж 1, тому будуть мати місце такі нерівності:

$$a_{n-1} \geq 2a_n \geq 2 = f_2,$$
$$a_{n-2} \geq 2a_n \cdot 1 + a_n \geq 3 = f_3,$$
$$a_{n-3} \geq a_{n-2} \cdot 1 + a_{n-1} \geq 3 + 2 = 5 = f_4,$$
$$a_{n-4} \geq a_{n-3} \cdot 1 + a_{n-2} \geq 5 + 3 = 8 = f_5,$$
$$\ldots$$
$$a_2 \geq 2a_3 \cdot 1 + a_4 \geq f_{n-2} + f_{n-3} = f_{n-1},$$
$$a_1 \geq f_n,$$

де $f_2, f_3, \ldots, f_n$ -числа Фібоначчі.

Залишилось розв'язати нерівність $a_1 \geq f_n$ відносно n. З формули Біне для чисел Фібоначчі матимемо

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) > \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - 1\right), \text{ бо } \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618...<1.$$

Звідси $1+a_1\sqrt{5} > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{2(1+a_1\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}} > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \Leftrightarrow \frac{a_1}{2}(\sqrt{5}-1)\cdot(\frac{1}{a_1}+\sqrt{5}) >$ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \Rightarrow 2a_1 > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \Leftrightarrow n\cdot\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \lg(2a_1)$, а через те що $\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0.2$, то $n < 5\lg(2a_1)$.

Нарешті, якщо позначити через p кількість цифр числа a_1, то $\lg(2a_1) \approx p$. Отже, $n \geq 5p$ - це число і дає верхню межу для кількості ділень. Одержаний результат носить назву теореми Ламе. Межа в $5p$ може досягатись, наприклад, нехай $a_0 = 144$, $a_1 = 89$. Тоді для того щоб впевнитись, що ці числа взаємно прості, потрібно виконати 10 ділень.

6.3. Лінійні однорідні різницеві рівняння вищих порядків

Теорія лінійних однорідних різницевих рівнянь вищих порядків аналогічна відповідній теорії рівнянь другого порядку і відповідній теорії диференціальних рівнянь, тому в цьому пункті обмежимося конкретними прикладами, які можуть послужити зразками для розв'язування подібних різницевих рівнянь.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок різницевого рівняння

$$y(x+3) - 6y(x+2) + 11y(x+1) - 6y(x) = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0,$$

його корені:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$$

Всі корені дійсні і різні, тому загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд:

$$y(x) = C_1 \cdot 1^x + C_2 \cdot 2^x + C_3 \cdot 3^x.$$

Приклад 2. Знайти загальний член послідовності

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots,$$

яка задається таким рекурентним співвідношенням:

$$y_{n+3} = y_n,\ y_0 = 1,\ y_1 = 2,\ y_2 = 3.$$

Характеристичне рівняння: $\lambda^3 - 1 = 0$, його корені:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

тому загальний розв'язок має вигляд:

$$y_n = C_1 + C_2 \cos(2\pi n/3) + C_3 \sin(2\pi n/3),$$

а звідси, використовуючи початкові умови, знаходимо загальний член заданої послідовності. Остаточно отримаємо:

$$y_n = 2 - \cos(2\pi n/3) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(2\pi n/3).$$

Приклад 3. Знайти загальний член послідовності, яка задається рекурентним співвідношенням

$$y_{n+3} = 3y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n,\ y_0 = 2,\ y_1 = 4,\ y_2 = 5.$$

Характеристичне рівняння: $(\lambda - 1)^3 = 0$. Воно має єдиний кратний корінь (кратність дорівнює 3), тому загальний розв'язок даного рівняння матиме вигляд:

$$y_n = C_1 + C_2\,n + C_3\,n^2,$$

звідси, враховуючи початкові умови, отримаємо

$$y_n = 2 + \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$$

6. 4. Неоднорідні рівняння

Теорія неоднорідних різницевих рівнянь (НРР) також аналогічна до відповідної теорії неоднорідних диференціальних рівнянь. В даному пункті ми обмежимося лише випадком, коли права частина рівняння $f(x)=(ax+d)b^x$. Детальніше з цим питанням можна познайомитися в [1].

Як і у випадку з диференціальними рівняннями структура загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння подібна до відповідної структури загального розв'язку диференціального рівняння. Неважко довести (зробіть це самостійно), що коли функція $y^*(x)$ є загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y(x)$ який-небудь частинний розв'язок неоднорідного рівняння, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює $y^*(x) + y(x)$. Тому при розв'язуванні неоднорідних рівнянь досить навчитися відшукувати який-небудь частинний розв'язок НРР.

Далі розглянемо таке рівняння

(10) $$y(x + 2) + py(x + 1) + qy(x) = (ax + d)b^x,$$

p, q, a, d, b - сталі, невідома функція $y(x)$.

Для одержання частинного розв'язку рівняння (10) доводиться розглядати такі три випадки.

1) Число b не корінь характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.
2) Число b є простий корінь характеристичного рівняння.
3) Число b є кратний корінь характеристичного рівняння, тобто в цьому випадку характеристичне рівняння має вид: $\lambda^2 - 2b\lambda + b^2 = 0$.

У випадку 1) частинний розв'язок рівняння (10) можна шукати у вигляді

$$y(x) = (Ax + D)b^x,$$

де A та D невизначені коефіцієнти. Знайдемо їх методом невизначених коефіцієнтів з тотожності

$$(A(x + 2) + D)b^{x+2} + p(A(x + 1) + D)b^{x+1} + q(Ax + D)b^x = (ax + d)b^x.$$

Після спрощення матимемо:

$$Ax(b^2 + pb + q) + (2A + D)b^2 + p(A + D) + qD \equiv ax + d,$$

а звідси

$$A=\frac{a}{b^2+pb+q},\ D=\frac{d-Ab(2b+p)}{b^2+pb+q}.$$

У випадку 2) частинний розв'язок рівняння (10) шукатимемо у вигляді

$$y(x) = (Ax^2 + Dx)b^x.$$

Невідомі коефіцієнти A та D знайдемо методом невизначених коефіцієнтів з тотожності

$$(A(x+2)^2 + D(x+2))b^{x+2} + p(A(x+1)^2 + D(x+1))b^{x+1} + q(Ax^2 + Dx)b^x = (ax+d)b^x,$$

яка після спрощень (врахуємо, що $b^2 + pb + q = 0$) стане такою:

$$2Ab(2b+p)x + 4Ab^2 + Abp + 2Db^2 + Dbp \equiv ax + d,$$

а звідси

$$A=\frac{a}{2b(2b+p)},\ D=\frac{d-Ab(4b+p)}{b(2b+p)}.$$

У випадку 3) частинний розв'язок рівняння (10) шукатимемо у вигляді

$$y(x) = (Ax^3 + Dx^2)b^x.$$

Невідомі коефіцієнти A та D знайдемо методом невизначених коефіцієнтів з тотожності

$$(A(x+2)^3 + D(x+2)^2)b^{x+2} + p(A(x+1)^3 + D(x+1)^2)b^{x+1} + q(Ax^3 + Dx^2) = (ax+d)b^x,$$

яка після спрощень (враховуємо, що $b^2 + pb + q = 0$) стане такою:

$$3Ab(p+4b)x + Ab(p+8b) + Db(p+4b) \equiv ax + d,$$

а звідси

$$A=\frac{a}{3b(p+4b)},\ D=\frac{d-Ab(p+8b)}{b(p+4b)}.$$

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y(x+2) + py(x+1) + qy(x) = d.$$

Маємо:

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{d}{1+p+q}, \text{ якщо } 1+p+q\neq 0\\ \dfrac{d}{p+2}x, \text{ якщо } 1+p+q=0,\ p+2\neq 0\\ \dfrac{d}{p+4}x^2, \text{ якщо } 1+p+q=0,\ p+2=0.\end{cases}$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y(x+2)+py(x+1)+qy(x)=b^x.$$

Маємо:

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{b^x}{1+p+q}, \text{ якщо } b^2+pb+q\neq 0\\ \dfrac{xb^x}{p+2}, \text{ якщо } b^2+pb+q=0,\ p+2b\neq 0\\ \dfrac{x^2b^x}{p+4}, \text{ якщо } b^2+pb+q=0,\ p+2b=0.\end{cases}$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y(x+2)+py(x+1)+qy(x)=x.$$

Маємо:

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+p+q}+\dfrac{p+2}{(1+p+q)^2}, \text{ якщо } 1+p+q\neq 0\\ \dfrac{x^2}{2(p+2)}, \text{ якщо } 1+p+q=0,\ p+2\neq 0\\ x^2\left(\dfrac{x}{3(p+4)}-\dfrac{p+8}{p+4}\right), \text{ якщо } 1+p+q=0,\ p+2=0.\end{cases}$$

Вправи

Знайти різниці.

1. $2x^2+x+3$, $3x^2-2x+1$, $-x^2+4x-5$.
2. $x\cdot 2^x$, $(2x+1)\cdot 5^x$, $(4-5x)\cdot 3^{2x-1}$.
3. $(2x^2+3x+4)\cdot 3^{x+1}$, $x^2\cdot 2^x$, $(3x^2-2x-4)\cdot 5^{-2x+3}$.
4. $x\cdot 2^x-5^x+4$, $(2x-1)\cdot 5^{2x}+3^{x-1}+6x$, $(6x+4)\cdot 5^{-3x+4}-4^{-5x+1}+7$.
5. $(ax+b)\cdot p^x$, a^{bx+c}, $(ax^2+bx+c)\cdot p^x$.
6. $x^3\cdot 2^x$, $(x^3+5x+3)\cdot 7^x$, $(x+1)\cdot x^2\cdot 3^{2x}$.
7. $\sin(2x+1)$, $\cos(2-5x)$, $x\cdot\sin x$, $x\cdot\cos x$.
8. $(1-3x)\cdot\cos(2x+1)$, $(x+4)\cdot\sin(5x)$, $(2x-3)\cdot\cos(5-4x)$.
9. $2^x\cdot\sin x$, $3^x\cdot\cos x$, $4^{1-x}\cdot\sin(3-2x)$.
10. $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{1}{x(x-1)}$, $\dfrac{x+1}{x-1}$, $\dfrac{x^2+1}{x^2-x}$.
11. $\dfrac{2^x}{x}$, $\dfrac{3^x}{x+1}$, $\dfrac{4^{1-x}}{2-3x}$.

12. $\dfrac{\sin x}{x-1}$, $\dfrac{\cos x}{2x-3}$, $\sin^2(x)$.

13. $x^{(3)}\cdot 2^x$, $\dfrac{x^{(4)}}{x+5}$, $2^x\cdot x^{(-3)}$, $x^{(3)}\cdot\sin x$, $x^{(-2)}\cdot\cos x$.

Знайти антирізницю.

14. $(x+1)\cdot 2^x$, $(2x-3)\cdot 3^x$, $(5-2x)\cdot 2^{3x}$.

15. $(x^2+2x-3)\cdot 3^x$, $(x^2-3x+8)\cdot 2^x$, $(x^2-3x+10)\cdot 2^x$.

16. $x^{(3)}\cdot 2^x$, $3^x\cdot x^{(-3)}$, $2^x\cdot x^{(-3)}$.

Знайти суми, скориставшись перетворенням Абеля.

17. $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot 5^k$.

18. $\sum\limits_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 4^k$.

19. $\sum\limits_{k=1}^{n}(5k+2)\cdot 3^k$.

20. $\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)\cdot 2^k$.

21. $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot\sin(\alpha k)$.

Знайти різниці другого і третього порядку.

22. $2x^2+x+3$, $3x^2-2x+1$, $-x^2+4x-5$.

23. $x\cdot 2^x$, $(2x+1)\cdot 5^x$, $5x\cdot 3^{2x-1}$.

24. $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{1}{x(x-1)}$, $\dfrac{x+1}{x-1}$, $\dfrac{x^2+1}{x^2-x}$.

Знайти суми.

25. $2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+10\cdot 2^{10}$.

26. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k^2+1)\cdot 2^k$.

27. $2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+14\cdot 2^{14}$.

28. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k^2+k+4)\cdot 2^k$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k^2+k+6)\cdot 2^k$.

29. $\sum\limits_{k=0}^{9}(k^2+4k+3)\cdot 3^k$, $\sum\limits_{k=0}^{9}(k^2+2k+5)\cdot 3^k$.

30. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k^2+k+3)\cdot 4^k$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k^2+k+2)\cdot 5^k$.

31. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+...+\cos(n-1)\alpha$, $\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin(n-1)\alpha$

32. $1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)+...+\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{3}\right)$,

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)+...+\sin\left(9\cdot\frac{\pi}{3}\right)$.

33. $\sum_{k=0}^{n-1} k^3\cdot 2^k$.

34. $1^4\cdot 2^1+2^4\cdot 2^2+3^4\cdot 2^3+4^4\cdot 2^4+\ldots+9^4\cdot 2^9$.

35. $1^5\cdot 2^1+2^5\cdot 2^2+3^5\cdot 2^3+4^5\cdot 2^4+\ldots+(n-1)^5\cdot 2^{n-1}$.

36. $\sum_{k=0}^{9} k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot 2^k$.

37. $\sum_{k=0}^{11} 3^k\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot k\right)$,

$2^3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2^6\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+2^9\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)+...+2^{3(n-1)}\sin\left((n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

38. Розв’язати рівняння

$$y(x+4)+2y(x+3)+3y(x+2)+2y(x+1)+y(x)=0,$$
$$y(0)=y(1)=y(3)=0,\ y(2)=-1$$

і знайти $y(100)$.

39. Знайти загальний член послідовності, яка задана рекурентним співвідношенням

$$y_{n+4}-\frac{5}{2}y_{n+3}+\frac{5}{2}y_{n+1}-y_n=1,$$
$$y_0=0,\ y_1=11,\ y_2=-8,\ y_3=6$$

і знайти y_{100}.

40. Кожний член послідовності y_0, y_1, ..., y_n, ..., починаючи з y_2, дорівнює середньому арифметичному двох попередніх. Довести, що $\lim_{n\to\infty} y_n=\frac{5}{3}$, якщо $y_0=1$, $y_1=2$.

41. Кожний член послідовності y_0, y_1, ..., y_n, ..., починаючи з y_3, дорівнює середньому арифметичному трьох попередніх членів. Знайти $\lim_{n\to\infty} y_n$, якщо $y_0=1$, $y_1=2$, $y_2=3$.

42. Знайти коефіцієнти ряду Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$, користуючись рекурентним співвідношенням для коефіцієнтів цього ряду.

43. Послідовність y_0, y_1, y_2,... така, що $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, а інші члени цієї послідовності дорівнюють середньому арифметичному двох наступних. Знайти цю послідовність.
44. Послідовність y_0, y_1, y_2, ... така, що середнє арифметичне довільних трьох послідовних членів дорівнює 2. Знайти цю послідовність, якщо $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. І знайти y_{100}.
45. Послідовність y_0, y_1, ..., y_n,... така, що середнє арифметичне її трьох довільних послідовних членів дорівнює номеру середнього члена. Знайти цю послідовність, якщо $y_0 = -1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.
46. Знайти загальний член послідовності

$$2, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

47. Послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ визначаються такими рекурентними співвідношеннями:

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n,\ x_0 = 1,\ x_1 = 3,$$
$$y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n,\ y_0 = 0,\ y_1 = 2.$$

Довести, що для всякого n $x_n^2 = 2y_n^2 + 1$.
48. Послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ визначаються такими рекурентними співвідношеннями:

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2,$$
$$y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1.$$

Довести, що для всякого n $x_n^2 = 3y_n^2 + 1$.
49. Послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ визначаються такими рекурентними співвідношеннями:

$$x_{n+2} = 18x_{n+1} - x_n,\ x_0 = 1,\ x_1 = 9,$$
$$y_{n+2} = 18y_{n+1} - y_n,\ y_0 = 0,\ y_1 = 4.$$

Довести, що для всякого n $x_n^2 = 5y_n^2 + 1$.
50. Послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ визначаються такими рекурентними співвідношеннями:

$$x_{n+2} = 10x_{n+1} - x_n,\ x_0 = 1,\ x_1 = 5,$$
$$y_{n+2} = 10y_{n+1} - y_n,\ y_0 = 0,\ y_1 = 2.$$

Довести, що для всякого n $x_n^2 = 6y_n^2 + 1$.
51. Послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ визначаються такими рекурентними співвідношеннями:

$$x_{n+2} = 16x_{n+1} - x_n,\ x_0 = 1,\ x_1 = 8,$$
$$y_{n+2} = 16y_{n+1} - y_n,\ y_0 = 0,\ y_1 = 3.$$

Довести, що для всякого n $x_n^2 = 7y_n^2 + 1$.
52. Натуральне число називається трикутним, якщо воно є половиною добутку двох послідовних чисел. Число називається квадратним, якщо воно є квадрат

якогось числа. Довести, що кожний член послідовності $y_0, y_1, ..., y_n, ...$, яка задана рекурентним співвідношенням $y_{n+2} = 34y_{n+1} - y_n + 2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 36$, є

1) одночасно і квадратним і трикутним, тобто існують такі натуральні a_n і b_n, що

$$y_n = a_n^2,\ y_n = \frac{1}{2} b_n(b_n + 1);$$

2) знайти рекурентні співвідношення, яким задовольняють числа a_n і b_n і знайти ці числа в явному виді;
3) довести, що трійка (x_n, y_n, z_n), де $x_n = 2a_n + b_n$, $y_n = 2a_n + b_n + 1$, $z_n = 2a_n + 2b_n + 1$ є піфагоровою, тобто, $x_n^2 + y_n^2 = z_n^2$.

53. Члени послідовності $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ $y_0 = 1$, $y_1 = 7$, називаються гексами, якщо кожний член цієї послідовності, починаючи з y_1, дорівнює середньому арифметичному двох його сусідів без 3. Знайти загальний член цієї послідовності.
54. Члени послідовності $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ $y_0 = 1$, $y_1 = 13$, називаються зірками, якщо кожний член цієї послідовності, починаючи з y_1, дорівнює середньому арифметичному його сусідів без 6. Знайти загальний член цієї послідовності.
55. Довести, що члени послідовності $y_0, y_1, ..., y_n, ...$, яка визначається рекурентним співвідношенням

$$y_{n+2} = 194y_{n+1} - y_n + 60,\ y_0 = 1,\ y_1 = 253,$$

є трикутні зірки. Знайти такі зірки.

56. Довести, що члени послідовності $y_0, y_1, ..., y_n, ...$, яка визначається рекурентним співвідношенням

$$y_{n+2} = 98y_{n+1} - y_n + 24,\ y_0 = 1,\ y_1 = 121,$$

є квадратні зірки. Знайти такі зірки.

57. Довести, що члени послідовності $y_0, y_1, ..., y_n, ...$, яка визначається рекурентним співвідношенням

$$y_{n+2} = 98y_{n+1} - y_n - 6,\ y_0 = 1,\ y_1 = 91,$$

є трикутні гекси. Знайти такі гекси.

58. Довести, що члени послідовності $y_0, y_1, ..., y_n, ...$, яка визначається рекурентним співвідношенням

$$y_{n+2} = 194y_{n+1} - y_n - 24,\ y_0 = 1,\ y_1 = 169,$$

є квадратні гекси. Знайти такі гекси.

Примітка. Назви трикутні, квадратні, гекси, зірки походять з їх геометричної інтерпретації.

59. На яку максимальну кількість частин можна розрізати круглий пиріг n розрізами?
60. На яке максимальне число шматків можна розрізати хлібину n розрізами?
61. На яке максимальне число частин можна розрізати серпик, зробивши n розрізів?

62. На яке число частин ділить площину *n* кіл, які перетинаються?
63. На яке число частин ділить площину *n* еліпсів, які перетинаються?
64. На яке число областей ділить простір *n* сфер, які перетинаються?
65. Довести рівність:

$$\Delta\left(\left(\frac{1}{2^x\sin\frac{\alpha}{2^x}}\right)^2\right) = -\left(\frac{1}{2^{x+1}\cos\frac{\alpha}{2^{x+1}}}\right)^2$$

66. Довести рівність:

$$\Delta\left(\frac{1}{2^x}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^x}\right) = \frac{1}{2^{x+1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{x+1}}$$

67. Довести рівність:

$$\Delta\left\{\left(2^x\sin\frac{\alpha}{2^x}\right)^2\right\} = 2^{2x+2}\left(\sin\frac{\alpha}{2^{x+1}}\right)^4$$

68. Довести рівність:

$$\Delta\operatorname{arctg}(ax+b) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{a^2x^2+(2ab+a^2)x+b^2+ab+1}\right)$$

69. Знайти різниці:

$$\Delta\operatorname{arctg}(2x\text{-}1),\ \Delta\operatorname{arctg}(\frac{5x-1}{2}),\ \Delta\operatorname{arctg}(\frac{5}{2}x\text{-}2),\ \Delta\operatorname{arctg}(b\text{-}(b+\frac{1}{b})),\ \Delta\operatorname{arctg}(\frac{10x-1}{3}).$$

70. Довести рівність:

$$\Delta^{-1}(x^m a^x) = \frac{a^x}{a-1}\left(x^m - \frac{a}{a-1}\Delta x^m + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2\Delta^2 x^m - \dots + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^m m!\right)$$

71. Довести рівність:

$$\Delta^{-1}(x^{(\mathrm{m})}a^x) = \frac{a^x}{a-1}\left(x^{(m)} - \frac{a}{a-1}mx^{(m-1)} + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 m(m-1)x^{(m-2)} - \dots + \left(-\frac{a}{a-1}\right)^m m!\right)$$

72. Довести рівність:

$$\Delta\frac{1+a^{2^x}}{1-a^{2^x}} = -\frac{2a^{2^x}}{1-a^{2^{x+1}}}$$

73. Знайти суму ряду:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2a^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(a+1)^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(a+2)^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(a+3)^2} + \dots$$

74. Знайти суму ряду:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2} + \ldots$$

75. Знайти суму ряду:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13} + \operatorname{arctg}\frac{1}{27} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{2}{3n+5n^2} + \ldots$$

Відповіді

1. $4x+3$, $6x+1$, $3-2x$;

2. $2^x(x+2)$, $5^x(4x+9)$, $-3^{2x-1}(40x+13)$;

3. $3^{x+1}(4x^2+18x+23)$, $2^x(x^2+4x+2)$, $-5^{1-2x}(72x^2-54x-97)$;

4. $2^x(x+2)-4\cdot 5^x$, $5^{2x}(48x+26)+2\cdot 3^{x-1}+6$, $2\cdot 5^{3x+4}(372x+623)-1023\cdot 2^{-2(5x+4)}$;

5. $p^x(ax(p-1)+ap+b(p-1))$, $a^{bx}(a^{b+c}-a^c)$, $p^x(ax^2(p-1)+x(2ap+b(p-1))+ap+bp+c(p-1)$;

6. $2^x(x^3+6x^2+6x+2)$, $7^x(6x^3+21x^2+51x+60)$, $3^{2x}(x+1)(8x^2+27x+18)$;

10. $-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$, $\dfrac{2}{x(x+1)(1-x)}$, $\dfrac{2}{x(1-x)}$, $\dfrac{2(2x+1)}{x(x+2)(1-x^2)}$;

11. $2^x\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{3^x(2x+1)}{(x+1)(x+2)}$, $\dfrac{3\cdot 2^{-2x}\cdot(3x+2)}{(3x+1)(3x-2)}$;

13. $2^x\cdot x(x-1)(x+4)$, $\dfrac{x(x-1)(x-2)(3x+23)}{(x+5)(x+6)}$, $2^x\cdot(x-3)\cdot x^{(-4)}$;

14. $2^x(x-1)$, $3^x(x-3)$, $\dfrac{2^{3x}(51-14x)-51}{49}$;

15. $\dfrac{3^x(x^2-x-3)}{2}$, $2^x(x^2-7x+20)$, $2^x(x^2-7x+22)$;

16. $2^x(x^3-9x^2+32x-48)$, $\dfrac{3^x(2x^2-8x+9)}{4}$;

17. $\dfrac{5^{n+1}(4n+1)-5}{8}$;

18. $\dfrac{2^{2(n+1)}(3n-2)+8}{3}$;

19. $\dfrac{3^{n+1}(10n-1)+3}{4}$;

20. $2^{n+1}\cdot n$;

21. $-\dfrac{1}{2}(-\sin(\alpha(n+1))n+\sin(\alpha(n+1))n\cos(\alpha)+\sin(\alpha(n+1))\cos(\alpha)-$
$\sin(\alpha)\cos(\alpha(n+1))n-\sin(\alpha)\cos(\alpha(n+1)))/(-1+\cos(\alpha))$;

22. 4, 0; 6, 0; -2,0;

23. $2^x(x+4)$, $2^x(x+6)$; $32\cdot5^x(x+3)$, $32\cdot5^x(4x+17)$; $80\cdot3^{2x-1}(4x+9)$, $320\cdot3^{2x-1}(8x+27)$;

24. $\dfrac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $-\dfrac{6}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$;

$\dfrac{6}{x(x+1)(x-1)(x+2)}$, $\dfrac{24}{x(x+1)(1-x)(x+2)(x+3)}$;

$\dfrac{4}{x(x^2-1)}$, $\dfrac{12}{x(x+1)(1-x)(x+2)}$;

$\dfrac{12}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$, $\dfrac{24(2x+3)}{x(x+1)(1-x)(x+2)(x+3)(x+4)}$;

25. 18434;

26. $(n^2-4n+7)\cdot2^n-7$;

27. 425986;

28. $2^n\cdot(n^2-3n+8)-8$, $2^n\cdot(n^2-3n+10)-10$;

29. 3247695, 2804825;

30. $\dfrac{4^n(9n^2-15n+35)-35}{27}$, $\dfrac{5^n(8n^2-12n+21)-21}{32}$;

31. $\dfrac{\sin\left(\alpha\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\dfrac{\cos\left(\alpha\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$;

32. 1, $\sqrt{3}$;

33. $2^n\cdot(n^3-6n^2+18n-26)+26$;

34. 4822890;

35. $2^n\cdot(n^5-10n^4+60n^3-260n^2+750n-1082)+1082$;

36. 380976;

37. $97215\cdot\sqrt{2}+58329$, $-\dfrac{1}{65}8^{(n+1)}\cos(\dfrac{1}{2}n\pi)-\dfrac{1}{65}8^n\sin(\dfrac{1}{2}n\pi)+\dfrac{8}{65}$;

38. $y(x)=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2\pi x}{3}$, $y(100)=99$;

39. $y_n = 2^{3-n} + 8\cdot(-1)^{n+1} - n$, $y_{100} = -108 + 2^{-97}$;

41. $\dfrac{7}{3}$;

42. Вказівка: $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$, де a_0, a_1, a_2, ...послідовність невідомих коефіцієнтів;

43. $y_n = \dfrac{1}{3}(4 + (-2)^{n+1})$;

44. $y_n = 2 - \cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2\pi n}{3}$, $y_{100} = 2$;

45. $y_n = n - \cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2\pi n}{3}$;

52. $y_n = \frac{1}{32}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n+4} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{4n+4}\right] - \frac{1}{16}$, $a_n = \frac{1}{32}\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]$,

$b_n = \frac{1}{4}\left(\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n+1} - 2\right)$;

55. Вказівка: знайти y_n в явному вигляді. $y_n = \frac{3}{32}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{4n+2} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{4n+2}\right] - \frac{5}{16}$;

56. $y_n = \frac{1}{16}\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n}\left(\sqrt{6}-2\right) - \left(5-2\sqrt{6}\right)^{n}\left(\sqrt{6}+2\right)\right]^2$;

57. $y_n = \frac{3}{32}\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2n+1} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{2n+1}\right] + \frac{1}{16}$;

58. $y_n = \frac{1}{16}\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^{n}\left(2+\sqrt{3}\right) + \left(7-4\sqrt{3}\right)^{n}\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^2$;

59. $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$;

60. $\frac{n^3+5n}{6} + 1$;

61. $\frac{n^2+3n}{2} + 1$;

62. $n^2 - n + 2$;

63. $2n^2 - 2n + 2$;

64. $\frac{1}{8}n(n^2 - 3n + 8)$;

69. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2x^2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{5x^2+3x}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{5x^2-3x}$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{(b^2+1)x^2-(b^2-1)x}$,

$\operatorname{arctg}\frac{3}{8x^2+5x}$;

73. $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(2a-1)$;

74. $\frac{\pi}{4}$;

75. $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}2$.

Література

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. - М.: Наука, 1967. - 376с.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ.-М.: Мир, 1998.-703 с.
3. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. - М.: Наука, 1990. - 384с.
4. Марков А.А. Числення скінченних різниць. - Харків, Київ: ОНТИ ДНТВУ НКТП, 1936. - 235с.
5. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. - М.: Наука, 1983. - 48с.
6. Чебышов П.Л. Теория вероятностей, лекции 1879-1880 гг. - М., Л.: Изд-во АН СССР, 1936.- 255с.
7. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. - М.: Физматгиз, 1961. - Т.1. - с.177-196

Розділ IV. **Системи числення**

1. Вступ

Математика починається з дій над числами, та для цього потрібно спочатку навчитися зображати числа за допомогою символів. Розвиток способів представлення чисел почався давно і відбувається досі паралельно з розвитком самої цивілізації. Особливий інтерес до систем числення (СЧ) виник в останні десятиріччя нашого століття. Це, в першу чергу, пов'язано з розвитком інформаційних технологій.

Найдавніші способи зображення чисел грунтуються на використанні груп пальців або кучок камінців із додатковими домовленостями стосовно заміни деякої групи предметів одним об'єктом спеціального вигляду або розташованої в певному місці. Такі системи привели до зображення чисел у письмовій формі, як то єгипетські, вавилонські, грецькі, китайські й римські числа. Та вони виявилися дуже незручними для виконання дій над числами.

У стародавньому Вавилоні застосовувалися, насправді, два різні зображення чисел. Перше з них було предтечею десяткової системи числення, яка у свою чергу була спадкоємицею цивілізацій Месопотамії. Для рішення математичних задач вавилоняни використовували шістдесяткову позиційну систему числення, яка була вже досить розвиненою не пізніше 1750 р. до н.е. Ця система була фактично СЧ з плаваючою комою і досить зручною для виконання множення і ділення за допомогою таблиць.

За декілька століть до нової ери греки застосовували для арифметичних обчислень різновидність абаки, в якій використовувалась галька на дошці, що мала ряди або колонки, і природнім чином відповідала нашій десятковій СЧ.

Сучасна десяткова СЧ відрізняється від стародавньої наявністю позиційної точки та нуля. Така система вперше з'явилась у індусів в 6 ст. н.е. Приблизно в 750 р. десяткова арифметика поширилась в Персії, і невдовзі аль-Хорезмі написав арабською мовою посібник з цього приводу, між іншим, від імені автора посібника походить слово "алгоритм". В 1202 р. Леонардо Пізанський (Фібоначчі) під впливом книги аль-Хорезмі, що була перекладена на латинь, написав книгу з арифметики, яка, в свою чергу, стала головним чинником в поширенні десяткової СЧ в Європі.

Десяткова СЧ застосовувалася спочатку тільки для цілих чисел. Арабські астрономи для створення карт зоряного неба та інших таблиць продовжували користуватись позначеннями Птоломея для шісдесяткових дробів. Ці позначення збереглись до наших днів ("градуси, мінути, секунди").

Десяткові дроби вперше стали використовуватись китайськими математиками. Китайські одиниці ваг і мір були десятковими. Так китайський математик Цзу Чун-чжі (помер біля 500 р.) число π виразив як 3 чана, 1 чжі, 4 цуня, 1 фен, 5 лі, 9 хао, 2 мяо, 7 ху. (чан, ..., ху - одиниці довжини ; 1 ху дорівнює 1/10 мяо і т.д.). В Європі десяткові дроби стали загально-прийнятими в 17 столітті, тоді ж почали розглядатися і недесяткові СЧ.

Відомо, що вперше двійкова СЧ з'явилася біля 1605 р. в неопублікованих працях американця Томаса Герріота. Перша публікація (1670), в якій розглядалися СЧ з основами 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 і 60, належить іспанському священику Гуану Карамюелю. Та загальна увага до двійкової СЧ була привернута завдяки статті Лейбніца [*Memories de l'Academie Rouyale des Sciences, Paris*, (1703), 110-116], саме на цю статтю посилаються, коли говорять про народження двійкової арифметики. Лейбніц часто звертався до двійкової СЧ, але він її не рекомендував для практичних обчислень, хоча підкреслював її значення в теоретичних дослідженнях; ще Лейбніц вбачав деякий містичний сенс в тому, що все на світі можна виразити за допомогою нулів та одиничок.

З часів Лейбніца двійкова СЧ стає добре відомою. На початку 20-го століття було вже опубліковано декілька десятків робіт, присвячених цій системі. Двійкова СЧ в основному застосовувалась для обчислення степенів та для аналізу деяких ігор та головоломок. Відомий математик Дж. Пеано використав двійкову систему для створення алфавіту з 256 символів.

З появою арифмометрів з'явились роботи, присвячені діям над числами в двійковій системі (стаття Е.В. Філліпса "Двійкові обчислення" в Journal of the Institute of Actuaries, 67(1936), 187-221; автор статті був палким прибічником переходу від десяткової СЧ до вісімкової).

На початку 30-х років почали створюватись обчислювальні машини на двійковій основі. Перші обчислювальні схеми на електронних лампах спроектував в 1937 році американець Джон В.Атанасов, а перші релейні схеми з'явились в тому ж році незалежно завдяки зусиллям американця Джорджа З.Стибица. В Німеччині Конрад Цузе побудував механічну машину на основі двійкової СЧ з плаваючою комою, в 1941 він замінив механічну логічну схему релейною. К. Цузе вважають родоначальником сучасних ЕОМ.

В перших швидкодіючих ЕОМ, які були побудовані в США на початку 40-х років, використовувалась десяткова арифметика, та в 1946 році було створено проект ЕОМ на основі двійкової СЧ (автори проекту А.У.Бйоркс, Х.Х.Голдстайн та Дж. фон Нейман). З тих пір двійкові обчислювальні пристрої набули загального поширення.

В другій половині нашого століття почали з'являтись роботи по СЧ з від'ємними, ірраціональними та комплексними основами, а також СЧ, в яких базові послідовності були відмінні від степеневих послідовностей, як, наприклад, послідовності чисел Фібоначчі і їм подібні, послідовності факторіалів та інші.

Багато цікавого матеріалу про СЧ можна знайти в книгах [8], [9], [13], [15], [16].

2. Загальні означення

Під СЧ розуміють спосіб зображення чисел за допомогою скінченного числа символів.

Позиційні СЧ, якими найчастіше користуються на практиці і які досліджуються теоретиками, в загальному вигляді можна охарактеризувати за допомогою таких об'єктів.

1. Двобічна послідовність чисел (взагалі кажучи, комплексних)

$$. . . v_{-j}, v_{-j+1}, . . ., v_{-1,} v_{0,} v_1, . . ., v_n, . . . \quad \text{(V)}$$

2. Набір скінченно-значних функцій $r_k = r_k(x), x\in N$, таких що

$$x = \sum_{k=-n}^{m} r_k v_k \ , \tag{1}$$

де $n=n(x)$, $m=m(x)\in N$, $r_k\in Q:=\{-p, -p+1, . . ., -1, 0, 1, . . ., q\}$.

3. Арифметика, тобто правила знаходження значень $r_k(x+y)$, $r_k(x\text{-}y)$, $r_k(x\times y)$, $r_k(x/y)$, якщо відомі числа $r_k(x)$, $r_k(y)$.

Послідовність (V) називається *базисною*, або *ваговою*, числа k називаються *розрядами* числа x. Параметри p та q визначають кількість символів, за допомогою яких записуються числа (p+q+1 символ), тому така СЧ називається p+q+1-*ковою* СЧ. Якщо p=q, то СЧ називається *врівноваженою* СЧ. Якщо p=0, а q=1, то СЧ називається *бінарною*, а символи 0 та 1 називають *бітами*. Якщо p= -1, а q=1, то СЧ називається *тернарною*, а символи -1, 0, 1 називають *трітами*. Якщо послідовність (V) є послідовністю цілих степенів деякого числа b, то це число називається *основою* СЧ.

Подання числа x за допомогою співвідношення (1) записується так:

$$x=(. . . r_3 r_2 r_1 r_0 \,.\, r_{-1} r_{-2} \ . . .)_{(v)}, \tag{2}$$

такий запис називають *позиційним* поданням числа x, або (V) - *кодом* числа x.

Точка (крапка) між r_0 і r_{-1} називається *позиційною точкою* (в математиці замість “точки” використовується “кома”, та останнім часом все частіше для відділення дробової частини числа від цілої використовують “точку”).

Числа r в (2) називають *цифрами* представлення. Цифру r_k з більшим k називають “більш значимою”, ніж цифру r_k з меншим k.

Якщо СЧ має основу b, то співвідношення (2) записується так:

$$x=(. . . r_3 r_2 r_1 r_0 \,.\, r_{-1} r_{-2} . . .)_{b,}$$

а якщо b=10, то так:

$$x= . . . r_3 r_2 r_1 r_0 \,.\, r_{-1} r_{-2} . . . .$$

Приклад 1. Якщо v_k=10^k, p=0, q=9, то маємо звичайну десяткову СЧ, в якій основні символи це цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Арифметика тут це звичайна арифметика десяткових дробів.

Приклад 2. Якщо v_k=2^k, p=0, q=1, то маємо звичайну двійкову СЧ, код числа - це двійковий код. Тут арифметика це двійкова арифметика.

Приклад 3. Якщо за основу СЧ взяти число 3 і покласти p=0, q=2, то отримаємо трійкову СЧ, а якщо покласти p= -1, q=1, то отримаємо врівноважену трійкову СЧ, в якій основні символи називаються трітами, тобто це символи -1, 0, 1.

Приклад 4. Якщо за основу СЧ взяти число 16, покласти p=0, а за шістнадцяткові цифри взяти символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, то отримаємо стандартну шістнадцяткову систему числення. Коди чисел в такій СЧ називаються гексакодами.

Приклад 5. Якщо за базисну послідовність взяти послідовність чисел Фібоначчі, тобто послідовність

$$. . . -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .,$$

то отримаємо бінарну фібоначчієву СЧ. Коди чисел в такій системі називаються фібоначчієвими.

Приклад 6. Якщо за основу СЧ взяти золоту пропорцію, тобто ірраціональне число

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339887498948482045868343656381177203091798\,05. . .,$$

то отримаємо бінарну СЧ Бергмана; коди чисел відносно такої системи називаються кодами золотої пропорції.

Мета цього розділу більш детально познайомитись з такого типу СЧ, як в прикладах 1-6.

3. Системи числення, які породжені рекурсією

3.1. Основна теорема

Не всяка числова послідовність може служити базисом СЧ. В той же час можна вказати нескінченну множину послідовностей, які породжують СЧ. При виборі базисних послідовностей можна керуватись різними критеріями. Природно керуватись такими.

1. Послідовність (V) повинна бути необмеженою.
2. Коди натуральних чисел повинні бути скінченними.
3. Арифметика по можливості повинна бути простою і допускати машинну реалізацію.
4. Повинні існувати зручні алгоритми для знаходження розрядів.

Найпростіші системи числення, які задовольняють цим критеріям, породжуються оборотними послідовностями, тобто такими, що задаються лінійними рекурентними співвідношеннями, а саме:

(1)
$$v_{n+m} = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k v_{n+k}, \ \varepsilon_0 \neq 0,\ \varepsilon_k \in Q,\ n \in Z,$$

з заданими початковими умовами $v_0, v_1, v_2, . . ., v_{m-1}$.

Доведемо це.

Основна теорема. *Якщо* $\varepsilon_{m-1}=q\neq 0$, *всі інші коефіцієнти невід'ємні і* $\varepsilon_k\leq q$, *то послідовність* $\{v_k\}$, *яка породжується рекурентним співвідношенням (1), при належному виборі невід'ємних початкових значень* $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1,}$ *може бути базисом СЧ з q+1 цифрою.*

Доведення.

Через те що початкові значення послідовності $\{v_k\}$ невід'ємні, то послідовність $\{v_k\}$ монотонно зростає і, отже, для довільного натурального числа x знайдеться таке натуральне n, що $v_n\leq x<v_{n+1}$. Подамо проміжок $[v_n, v_{n+1}]$ у вигляді об'єднання $q\text{-}1+\sum_{k=0}^{m-2}\varepsilon_k$ проміжків таких , що довжина перших q-1 проміжків дорівнює v_n, наступних ε_{m-2} проміжків дорівнює v_{n-1} і т. д., і, нарешті, довжина останніх ε_0 проміжків дорівнює $v_{n-m+1.}$

Нехай точка x попала в j-ий проміжок довжиною v_{n-k}. Тоді

$$x=qv_n+\varepsilon_{m-2}v_{n-1}+\ldots+\varepsilon_{m-k}v_{n-k+1}+(j-1)v_{n-k}+\alpha,\ 0\leq k\leq m-1,\ 0\leq\alpha<v_{n-k}.$$

Застосуємо попередні міркування до числа α і т.д. Через те що число α натуральне, то взявши належним чином початкові значення послідовності $\{v_k\}$ (наприклад, $v_0=1$, $v_1=2$, $v_2=3$, . . ., $v_{m-1}=m$) після скінченного числа кроків прийдемо до значення $\alpha=0$, що і потрібно було довести.

Отже, за скінченне число кроків отримаємо подання

$$x=\sum_{k=0}^{p}\omega_k v_k\ ,\ \omega_k\in\{0, 1, 2, \ldots, q\}$$

Відмітимо, що так отримане подання числа x єдине, крім того (у випадку $m>1$), якщо якесь $\omega_k=q$, то $\omega_{k-1}\neq q$, $\omega_{k+1}\neq q$.

Доведена вище основна теорема має конструктивний характер, тобто, процес доведення теореми дає і алгоритм для знаходження величин розрядів відносно тієї чи іншої СЧ.

Приклад 1. *Система числення називається b-системою, якщо базисна послідовність визначається таким лінійним рекурентним співвідношенням:*

$$v_{n+1}=bv_n,\ v_0=1,\ b\in N,\ b\geq 2,$$

число b називається базисом системи.

Приклад 2. *Система числення називається системою Фібоначчі, якщо базисна послідовність визначається таким лінійним рекурентним співвідношенням:*

$$v_{n+2}=v_{n+1}+v_n,\ v_0=v_1=1.$$

3.2. Алгоритми для переведення чисел з однієї *b*-системи в іншу

Через те що на практиці важливе значення мають b-системи, то зупинимося більш детально на правилах знаходження кодів чисел в таких системах. Найчастіше використовуються чотири алгоритми для переведення чисел з однієї b-системи в іншу. Спочатку розглянемо алгоритми для переведення цілих чисел. Досить обмежитись випадком, коли ці числа додатні.

Нехай X ціле число, записане в B-системі. Потрібно його перевести в b-систему. Для цього використовують два алгоритми: у першому з них всі операції, пов'язані з переведенням, виконуються в арифметиці B-системи, в другому - в арифметиці b-системи.

Алгоритм 1. *Для переведення числа X в b-систему спочатку знаходимо частку і остачу від ділення числа X на основу b (записану в B-системі), потім частку і остачу від ділення попередньої частки на число b і т.д. до тих пір, поки не отримаємо нульову частку,* (це завжди станеться, бо після кожного ділення частки зменшуються і на якомусь кроці остання з часток стане меншою, ніж b, а тому на наступному кроці отримаємо нульову частку)*, тобто, виконаємо такі дії:*

(1)
$$\frac{X}{b} = y_0 + \frac{x_0}{b},\ \frac{y_0}{b} = y_1 + \frac{x_1}{b},\ \frac{y_1}{b} = y_2 + \frac{x_2}{b},\ \ldots,$$
$$\frac{y_{n-2}}{b} = y_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{b},\ \frac{y_{n-1}}{b} = y_n + \frac{x_n}{b},\ y_n=0.$$

В цих співвідношеннях числа $y_0, y_1, \ldots, y_n$ - частки, а $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - відповідні остачі від ділень. Записуємо одержані остачі в b-системі і покладемо $x=(x_nx_{n-1}\ldots x_0)_b$. Тоді $X=x$.

Справді, з передостанньої рівності системи рівностей (1), отримаємо $y_{n-1}=x_n$, далі, $y_{n-2}=x_nb+x_{n-1}$, $y_{n-3}=x_nb^2+x_{n-1}b+x_{n-2}$, ..., $y_1=x_nb^{n-2}+x_{n-1}b^{n-3}+\ldots+x_2$, $y_0=x_nb^{n-1}+x_{n-1}b^{n-2}+\ldots+x_1$, нарешті, $X=x_nb^n+x_{n-1}b^{n-1}+\ldots+x_0=x$.

Приклад 1. Перевести число $(8921)_{10}$ в вісімкову СЧ. Маємо

$$\frac{8921}{8}=1115+\frac{1}{8},\ \frac{1115}{8}=139+\frac{3}{8},\ \frac{139}{8}=17+\frac{3}{8},\ \frac{17}{8}=2+\frac{1}{8},\ \frac{2}{8}=0+\frac{2}{8}.$$

Отже, $(8921)_{10}=(21331)_8$.

Приклад 2. Перевести число $X=(1011101101)_2$ в десяткову СЧ. Маємо,

$$(10)_{10}=(1010)_2, \frac{1011101101}{1010}=1001010+\frac{1001}{1010},\ \frac{1001010}{1010}=111+\frac{100}{1010},$$
$$\frac{111}{1010}=0+\frac{111}{1010},\ (1001)_2=(7)_{10},\ (100)_2=(4)_{10},\ (111)_2=(9)_{10}.$$

Отже, $X=(749)_{10}$.

Алгоритм 2. *Для переведення числа $X=(X_nX_{n-1}\ldots X_0)$ в b-систему спочатку переведемо число B та розряди X в b-систему, а потім виконаємо в цій системі такі дії:*

$$y_1=X_nB+X_{n-1},$$

$$y_2=y_1B+X_{n-2},$$
$$\dots$$
$$y_{n-1}=y_{n-2}B+X_1,$$
$$y_n=y_{n-1}B+X_0.$$

Тоді $X=y_n$.

Справді,

$y_n=y_{n-1}B+X_0=(y_{n-2}B+X_1)B+X_0=y_{n-2}B^2+X_1B+X_0=(y_{n-3}B+X_2)B^2+X_1B+X_0=$

$=y_{n-3}B^3+X_2B^2+X_1B+X_0=\ldots=y_1B^{n-1}+X_{n-2}B^{n-2}+\ldots+X_1B+X_0=X_nB^n+X_{n-1}B^{n-1}+\ldots+X_1B+X_0.$

Приклад 3. Перевести число $X=(8921)_{10}$ в вісімкову СЧ, користуючись алгоритмом 2. Маємо

$(10)_{10}=(12)_8$, $(8)_{10}=(10)_8$, $(9)_{10}=(11)_8$, $(2)_{10}=(2)_8$, $(1)_{10}=(1)_8$.

$y_1=(10)_8\cdot(12)_8+(11)_8=(131)_8$,

$y_2=(131)_8\cdot(12)_8+(2)_8=(1574)_8$,

$y_3=(1574)_8\cdot(12)_8+(1)_8=(21331)_8$.

Отже, $X=(21331)_8$.

Далі подамо алгоритм 3 і алгоритм 4 для переведення правильних дробів з однієї СЧ в іншу.

Алгоритм 3. *Для переведення правильного дробу* $X=(0.X_{-1}X_{-2}\ldots X_{-n})_B$ *в b-систему, користуючись арифметикою B-системи, виконаємо такі дії:*

$$Xb=y_1+x_{-1},$$
$$y_1b=y_2+x_{-2},$$
$$y_2b=y_3+x_{-3}, \qquad (2)$$
$$\dots$$
$$y_{m-1}b=y_m+x_{-m},$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *- дробові частини (в B-системі) і* $x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-m}$ *- цілі частини, які потім записуємо в b-системі. Покладемо* $x=(0.x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-m})_b$. *Тоді, якщо на m-ому кроці дробова частина* y_m *стане рівною нулю, то* $X=x$, *в противному випадку* $X\approx x$ і $|X-x|<\frac{1}{b^m}$.

Справді, з рівностей (2) маємо:

$y_{m-1}=\frac{y_m}{b}+\frac{x_{-m}}{b}$, $y_{m-2}=\frac{y_m}{b^2}+\frac{x_{-m}}{b^2}+\frac{x_{-m+1}}{b}$, ..., $y_1=\frac{y_m}{b^{m-1}}+\frac{x_{-m}}{b^{m-1}}+\frac{x_{-m+1}}{b^{m-2}}+\cdots+\frac{x_{-2}}{b}$,

нарешті $X=\frac{y_m}{b^m}+\frac{x_{-m}}{b^m}+\frac{x_{-m+1}}{b^{m-1}}+\cdots+\frac{x_{-1}}{b}=\frac{y_m}{b^m}+(0.x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-m})_b=\frac{y_m}{b^m}+x$.

Звідси видно, що коли $y_m=0$, то $X=x$, якщо ж $y_m\neq 0$, то $|X-x|=\frac{|y_m|}{b^m}<\frac{1}{b^m}$.

Важлива **примітка.** При переведенні дробу X в b-систему дробова частина може ніколи не стати рівною нулю, а тому, *якщо ми хочемо отримати число x в b-системі таким, щоб при оберненому переведенні числа x в B-систему одержалось n знаків числа X після позиційної крапки, потрібно брати m таким, щоб*

$$\frac{1}{b^m}<\frac{1}{B^n} \Leftrightarrow m>n\cdot\log_b B.$$

Наприклад, якщо b=2, B=10, то $\log_2 10 \approx \frac{10}{3}$, і, отже, за m можна взяти число $\left[\frac{10n}{3}\right]+1$, а наприклад, якщо b=3, B=10, то $\log_3 10 \approx 2$, то за m можна взяти число $2n$.

Приклад 4. Знайти таку кількість двійкових знаків числа e=2.71828..., щоб при оберненому переведені в десяткову СЧ зберігалось 4 знаки після позиційної крапки числа e.

Для цього потрібно здійснити $\left[\frac{10\cdot 4}{3}\right]+1=14$ кроків згідно алгоритму 3. Маємо, ціла частина числа e дорівнює $2=(10)_2$, займемося дробовою частиною.

0	71828...	×2
1	43656...	×2
0	87312...	×2
1	74624...	×2
1	49248...	×2
0	98496...	×2
1	96992...	×2
1	93984...	×2
1	87968...	×2
1	75936...	×2
1	51872...	×2
1	03744...	×2
0	07548...	×2
0	15096...	×2
0	30192...	×2
. . .	. . .	. . .

Відповідь. $e=(10.10110111111000...)_2$.

При оберненому переведенні отримаємо $e \approx 2 + \frac{1471}{2048}=2.7182617$.

Алгоритм 4. *Для переведення правильного дробу* $X=(0.X_{-1}X_{-2}\dots X_{-n})_B$ *в* b-*систему, користуючись арифметикою цієї системи, спочатку переведемо число* B *і розряди числа* X *в* b-*систему, а потім виконаємо такі дії:*

$$x_{-n+1}=\frac{X_{-n}}{B}+X_{-n+1},\ x_{-n+2}=\frac{x_{-n+1}}{B}+X_{-n+2},\ \dots,\ x_{-1}=\frac{x_{-2}}{B}+X_{-1},\ x=\frac{x_{-1}}{B}.$$ *Тоді* $X=x$.

Дійсно,

$$x=\frac{x_{-1}}{B}=\left(\frac{x_{-2}}{B}+X_{-1}\right)\cdot\frac{1}{B}=\frac{x_{-2}}{B^2}+\frac{X_{-1}}{B}=\frac{X_{-n}}{B^n}+\frac{X_{-n+1}}{B^{n-1}}+\dots+\frac{X_{-1}}{B}=$$

$$(0.X_{-1}X_{-2}\dots X_{-n})_B=X.$$

Приклад 5. Перевести число $X=(0.101101)_2$ в десяткову СЧ, користуючись алгоритмом 4. Маємо:

$$x_{-5}=\frac{1}{2}+0=0.5,\ x_{-4}=\frac{0.5}{2}+1=1.25,\ x_{-3}=\frac{1.25}{2}+1=1.625,\ x_{-2}=\frac{1.625}{2}+0=0.8125,$$

$$x_{-1}=\frac{0.8125}{2}+1=1.40625,\ x=\frac{1.40625}{2}=0.703125.$$

Отже, $X=(0.703125)_{10}$.

Корисно звернути увагу на зв'язок між СЧ з основою b і СЧ з основою b^m.

Теорема 1. *Має місце співвідношення*

(2) $$(\dots a_3a_2a_1a_0)_b=(\dots A_3A_2A_1A_0)_{b^m},$$

де $A_j=(a_{mj+m-1}\dots a_{mj+1}a_{mj})_b$.

Доведення.

Справді

$$(\dots a_3a_2a_1a_0)_b=a_0+a_1b+\dots+a_{m-1}b^{m-1}+a_mb^m+a_{m+1}b^{m+1}+\dots+a_{2m}b^{2m}+\dots+$$

$$+a_{mj}b^{mj}+a_{mj+1}b^{mj+1}+\dots+a_{mj+m-1}b^{mj+m-1}+\dots=(a_0+a_1b+\dots+a_{m-1}b^{m-1})+$$

$$+(a_m+a_{m+1}b+\dots+a_{2m}b^m)b^m+\dots+(a_{mj}+a_{mj+1}b\dots+a_{mj+m-1}b^{m-1})b^{mj}+\dots=$$

$$=A_0+A_1b^m+\dots+A_j(b^m)^j+\dots,$$

що і потрібно було довести.

Приклади застосування співвідношення (2) будуть наведені нижче.

3.3. Арифметика в *b*-системах

Розглянемо правила виконання арифметичних дій в СЧ з основою b.

Додавання. Для додавання многозначних чисел користуються таблицею додавання однозначних чисел.

Таблиця додавання

$x \setminus y$	0	1	2	...	b-2	b-1
0	0	1	2	...	b-2	b-1
1	1	2	3	...	b-1	10
2	2	3	4	...	10	11
...	...	...	...	...	...	...
b-2	b-2	b-1	10	...	1(b-4)	1(b-3)
b-1	b-1	10	11	...	1(b-3)	1(b-2)

Нехай потрібно знайти суму чисел $x=(x_n\, x_{n-1} \dots x_0\,)_b$ та $y=(y_n\, y_{n-1} \dots y_0\,)_b$. Позначимо невідому суму через $z=(z_n\, z_{n-1} \dots z_0\,)_b$. Для знаходження z_i, i = 0, 1, 2, ..., n+1, потрібно знайти переноси p_i з (i-1)-го розряду в i-тий, i = 0, 1, 2, ..., n+1. Числа p_i можуть набувати одне з двох значень - 0, або 1 і знаходиться так:

$$p_0=0,\ p_i=(x_{i-1}+y_{i-1}+p_{i-1}) \text{ div } b,\ i=1, \dots, n+1,$$

а це означає, що коли число $x_{i-1}+y_{i-1}+p_{i-1}$, буде меншим, ніж b, то $p_{i+1}=0$; в протилежному випадку $p_{i+1}=1$.

Тоді

$$z_i=(x_i+y_i+p_i) \bmod b,\ i=0, 1, \dots, n,$$

$$z_{n+1}=p_{n+1},$$

а це означає, що коли число $x_i+y_i+p_i$ буде меншим ніж b, то z_i буде дорівнювати цій сумі, в противному разі, щоб отримати z_i потрібно від числа $x_i+y_i+p_i$ відняти b.

Ми і далі будемо використовувати символи div і mod для позначення, відповідно, операцій цілочисельного ділення та знаходження остачі від ділення (так як і у мові Pascal).

Приклад 3. Знайти суму чисел $x=(576)_8$ та $y=(417)_8$. Маємо

$$\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & \multicolumn{4}{c}{\text{переноси}} \\
+ & 0 & 5 & 7 & 6 \\
 & 0 & 4 & 1 & 7 \\
\hline
 & 0+0+1 & 5+4+1-8 & 7+1+1-8 & 6+7-8 \\
 & \| & \| & \| & \| \\
 & 1 & 2 & 1 & 5
\end{array}$$

Відповідь. $x+y=(1215)_8$.

Приклад 4. Знайти суму $x=(3251)_6$ та $y=(455)_6$. Маємо

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\,1\,1\ \ } \\
+\,3251 \\
0455 \\
\hline
4150
\end{array}$$

Відповідь. $x+y=(4150)_6$.

Віднімання. Нехай потрібно від числа $x=(x_n\, x_{n-1} \dots x_0)_b$ відняти число $y=(y_n\, y_{n-1} \dots y_0)_b$. Число x називають зменшуваним, число y називають від'ємником. Позначимо різницю x-y через $z=(z_n\, z_{n-1} \dots z_0)_b$. Для знаходження z_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$, потрібно знайти переноси p_i з i-го розряду в (i-1)-й розряд. Ці числа знаходяться так:

$$p_0=0,\ p_{i+1}=\begin{cases}0, \text{ якщо } x_i - y_i - p_i \ge 0\\ 1, \text{ якщо } x_i - y_i - p_i < 0,\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1.\end{cases}$$

Тоді

$$z_i=\begin{cases}x_i - y_i - p_i, \text{ якщо } x_i - y_i - p_i \ge 0\\ x_i - y_i - p_i + b, \text{ якщо } x_i - y_i - p_i < 0,\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1.\end{cases}$$

Приклад 5. Знайти різницю чисел $x=(4201)_5$ та $y=(2443)_5$. Маємо

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & \multicolumn{4}{c}{\text{переноси}} \\ - & 4 & 2 & 0 & 1 \\ & 2 & 4 & 4 & 3 \\ \hline & 4\text{-}2\text{-}1 & 2\text{-}4\text{-}1\text{+}5 & 0\text{-}4\text{-}1\text{+}5 & 1\text{-}3\text{+}5\text{-}0 \\ & \| & \| & \| & \| \\ & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}$$

Відповідь. x-$y=(1203)_5$.

Приклад 6. Знайти різницю чисел $x=(56006)_9$ та $y=(8872)_9$. Маємо

$$\begin{array}{rccccc} & & & 8 & 9 & \\ - & 5 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ & 0 & 8 & 8 & 7 & 2 \\ \hline & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

Відповідь. x-$y=(46024)_9$.

Множення. Для знаходження добутку многозначних чисел потрібно користуватися таблицею множення однозначних чисел.

Таблиця множення

$x \setminus y$	0	1	2	...	b-1
0	00	00	00	...	00
1	00	01	02	...	0(b-1)
2	00	02	04	...	1(b-2)
...	...	...	...	...	...
b-1	00	0(b-1)	1(b-2)	...	(b-2)1

У випадку коли b=10 таблиця множення називається таблицею Піфагора.

Нехай потрібно знайти добуток чисел $x=(x_n\, x_{n-1} \dots x_0)_b$ та $y=(y_m\, y_{n-1} \dots y_0)_b$. Спочатку знаходимо частинні добутки $x{\cdot}y_j$, $j = 0, 1, 2, ..., m$, а потім суми цих добутків, зміщених на відповідне число розрядів.

Отже, досить навчитися знаходити добуток числа на однозначне число. То ж будемо вважати, що y однозначне число, записане в СЧ з основою b. Позначимо добуток x на y через

$$z=(z_n\, z_{n-1} \dots z_0\,)_b.$$

Спочатку знаходимо добутки цифр числа x на y і позначимо ці добутки так: $x_i y=\left(z_1^i z_0^i\right)_b$, i= 0, 1, 2, ..., n і будемо вважати, що z_0^{n+1}:=0. Потім знаходимо переноси p_i з i-го в (i+1)-й розряд, які визначаються так:

$$p_0=0,\ p_{i+1}=\left(z_1^i + z_0^{i+1} + p_i\right)\operatorname{div} b,\ i= 0, 1, 2, \dots, n,$$

що означає: $p_{i+1}=0$, якщо $z_1^i + z_0^{i+1} + p_i < b$, в противному разі $p_{i+1}=1$.

Тоді

$$z_0=z_0^0,\ z_{i+1}=\left(z_1^i + z_0^{i+1} + p_i\right)\operatorname{mod} b,\ i= 0, 1, 2, \dots, n,$$

що означає: $z_{i+1}=z_1^i + z_0^{i+1} + p_i$, якщо $z_1^i + z_0^{i+1} + p_i < b$, в противному разі $z_{i+1}=z_1^i + z_0^{i+1} + p_i - b$.

Приклад 7. Знайти добуток числа $x=(2423)_5$ на число y=4. Маємо

$$4\cdot 3=(22)_5,\ 4\cdot 2=(13)_5,\ 4\cdot 4=(31)_5,\ 4\cdot 2=(13)_5,$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 2 & 2 \\
 & & & 1 & 3 & \\
+ & & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & & & \\
\hline
 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2
\end{array}$$

Відповідь. $x\cdot y=(21302)_5$.
Перевірка. З одного боку $x=3+2\cdot 5+4\cdot 25+2\cdot 125=363$, $x\cdot y=363\cdot 4=1452$.
З другого боку $x\cdot y=2+3\cdot 25+1\cdot 125+2\cdot 625=1452$.

Приклад 8. Знайти добуток числа $x=(2301)_4$ на число $y=(233)_4$. Маємо

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & & & \\
 & & & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
\times & & & & & 2 & 3 & 3 \\
\hline
 & & & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 \\
+ & & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & \\
 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & & \\
\hline
 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3
\end{array}$$

Відповідь. $x\cdot y=(2001333)_4$.
Перевірка. З одного боку
$x=1+3\cdot 16+2\cdot 64=177$, $y=3+3\cdot 4+2\cdot 16=47$, $x\cdot y=177\cdot 47=8319$.
З другого боку $x\cdot y=3+3\cdot 4+3\cdot 16+1\cdot 64+2\cdot 4096=8319$.

Ділення. Алгоритм ділення $m+n$ розрядного числа x на n розрядне число y в СЧ з довільною основою подібний до алгоритму ділення "стовпчиком" в десятковій системі числення. Аналіз звичайного процесу ділення стовпчиком показує, що загальна задача розбивається на більш прості кроки кожний з яких складається з ділення або n розрядного числа на n розрядний дільник, або n+1 розрядного числа на n-розрядний дільник.

Наприклад, якщо нам потрібно розділити 923 на 45 то спочатку ділимо 92 на 45, отримуємо 2 і 23 в остачі; а якщо ділимо, наприклад, 2312 на 54, то спочатку ділимо 231 на 54, отримуємо 4 і 15 в остачі. Ця ідея застосовується і для довільної позиційної СЧ з основою b.

Нехай спочатку $x=(x_n\, x_{n-1} \ldots x_1)_b$ і $y=(y_n\, y_{n-1} \ldots y_1)_b$ n-розрядні числа, $x_n \geq y_n$, а $y_n \neq 0$. Позначимо невідому частку буквою q. У цьому випадку знаходимо число $q_1=x_n$ div y_n. Після цього знаходимо добуток $q_1 \cdot y$. Можуть трапитись два випадки:

1) $q_1 \cdot y \leq x$, тоді $q=q_1$ буде часткою від ділення x на y, а $x - q_1 \cdot y$ буде остачею при діленні x на y;
2) $q_1 \cdot y > x$, тоді нехай $q_2=q_1-1$, знову може виникнути дві ситуації:
   a) $q_2 \cdot y \leq x$, тоді число q_2 буде часткою від ділення x на y, а число $x - y \cdot q_2$ в остачі;
   b) $q_2 \cdot y > x$, тоді знаходимо добуток $(q_2 - 1)y$ і знову може виникнути два випадки, аналогічних до попередніх. Цей процес продовжимо до тих пір, поки не отримаємо частку і остачу.

   Наприклад, в десятковій СЧ

   873 div 213 = 4, 873 mod 213 = 21;

   843 div 280 = 3, 843 mod 280 = 3;

   800 div 299 = 2, 800 mod 299 = 202.

Розглянемо тепер випадок, коли число $x=(x_{n+1}\ x_n\ \ldots\ x_1)_b$ є $(n+1)$-розрядним, а число $y=(y_n\ y_{n-1}\ \ldots\ y_1)_b$ n-розрядним і $x_{n+1}<y_n$. В цьому випадку знаходимо частку від ділення числа $(x_{n+1}x_n)_b$ на $(y_n)_b$ і далі поступаємо так, як і вище.

Виникає питання. Скільки кроків треба зробити, щоб отримати частку q? Виявляється, що коли y_n не досить мале, то вже q_1 є хорошим наближенням до q. Точніше має місце

Теорема 2 [9, теорема B, стор. 290].

Якщо $y_n \geq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$ *(ціла частина числа* $\frac{b}{2}$*), то* $q_1 - 2 \leq q \leq q_1$.

Доведення.

Те що $q \leq q_1$ випливає з означення q_1. Нехай $q_1 \geq q + 3$, тоді

$$q_1 \le \frac{x_{n+1}b + x_n}{y_n} = \frac{x_{n+1}b^n + x_n b^{n-1}}{y_n b^{n-1}} \le \frac{x}{y_n b^{n-1}} < \frac{x}{y - b^{n-1}}.$$

(Випадок, коли $y=b^{n-1}$, неможливий, бо якщо $y=(1000...0)_b$, то $q=q_1$.)

Через те що $x<yq+y$ (остача $<y$), то звідси

$$q > \frac{x}{y}-1,\ 3 \le q_1 - q < \frac{x}{y-b^{n-1}} - \frac{x}{y} + 1 = \frac{x}{y}\left(\frac{b^{n-1}}{y-b^{n-1}}\right)+1.$$

Таким чином,

$$\frac{x}{y} > 2\left(\frac{y-b^{n-1}}{b^{n-1}}\right) \ge 2(y_n-1).$$

Нарешті, оскільки

$$b-4 \ge q_1-3 \ge q = \left[\frac{x}{y}\right] \ge 2(y_n-1),$$

то $y_n < \left[\frac{b}{2}\right]$, і тому, коли $y_n \ge \left[\frac{b}{2}\right]$, то $q_1<q+3 \Leftrightarrow q \ge q_1-2$, а це і потрібно було довести.

Щоб не робити багато кроків при діленні, можна спочатку обидва числа x та y помножити на $\left[\frac{b}{y_n+1}\right]$, при цьому значення частки не зміниться, а старший розряд дільника вже буде не меншим, ніж число $\left[\frac{b}{2}\right]$. Більш детальні відомості про алгоритм ділення натуральних чисел в довільній СЧ можна прочитати в книзі [9].

Розглянемо приклади.

Приклад 9. Знайти частку та остачу від ділення числа $x=(5243)_8$ на $y=(1115)_8$.

$$\begin{array}{r|l} -\,5243 & 1115 \\ \cline{2-2} \underline{4464} & 4 \\ 557 & \end{array}$$

Відповідь. $x \text{ div } y=(4)_8$, $x \text{ mod } y=(557)_8$.

Приклад 10. Знайти частку та остачу від ділення числа $x=(1577)_8$ на $y=(307)_8$.

$$\begin{array}{r|l} -\,1577 & 307 \\ \cline{2-2} \underline{1434} & 4 \\ 143 & \end{array}$$

Відповідь. x div $y=(4)_8$, x mod $y=(143)_8$.

Приклад 11. Знайти частку від ділення числа $x=(24161)_8$ на $y=(35)_8$. Маємо

```
_24161|35
 221  |545
 _206
  164
  _221
   221
     0
```

Відповідь. x div $y=(545)_8$.
Перевірка. З одного боку $x=1+6\cdot8+8^2+4\cdot8^3+2\cdot8^4=10353$, $y=5+3\cdot8=29$,
x div $y=10353$ div $29=357$. З другого боку x div $y=5+4\cdot8+5\cdot8^2=357$.

Приклад 12. Поділити число $x=(2AA5E)_{16}$ на $y=(26)_{16}$. Маємо

```
_2AA5E|26
 26   |11F5
 _4A
  26
 _245
  23A
   _BE
    BE
     0
```

Відповідь. x div $y=(11F5)_{16}$.
Перевірка. З одного боку $x=14+5\cdot16+10\cdot16^2+10\cdot16^3+2\cdot16^4=174686$, $y=6+2\cdot16=38$, x div $y=174686$ div $38=4597$. З другого боку x div y = $5+15\cdot16+1\cdot16^2+1\cdot16^3=4597$.

Перейдемо тепер до більш детального знайомства з конкретними СЧ.

4. Двійкова система числення

4.1. Знаходження двійкових кодів

Двійкова СЧ це позиційна система з основою 2. Ця система бінарна, тобто в такій системі числа записуються за допомогою тільки двох символів 0 та 1, які називаються бітами.

При вивченні тієї, чи іншої системи числення розглядаються такі основні задачі.
1. Число записане в b-системі. Знайти його десятковий код.
2. Число задане в десятковій СЧ. Знайти його код в b-системі.
3. Навчитись виконувати дії над числами в b-системі.

Всі ці задачі можуть бути розв’язані на основі результатів пунктів 3.2 і 3.3.

Подивимося, як розв'язуються ці задачі для двійкової СЧ. Найпростіше, обмежитись розглядом конкретних прикладів.

Приклад 1. Знайти десятковий код числа $x=(11010111)_2$. Маємо

$$x=1+1\cdot 2+1\cdot 2^2+0\cdot 2^3+1\cdot 2^4+0\cdot 2^5+1\cdot 2^6+1\cdot 2^7=1+2+4+16+64+128=215.$$

Відповідь. $x=215$.

Приклад 2. Знайти двійковий код числа $x=247$.

Скористаємося загальним алгоритмом. Схему ділення в цьому випадку найзручніше записати так.

247	123	61	30	15	7	3	1
1	1	1	0	1	1	1	↵

В першому рядку записуються саме число та частки від ділення, в другому- остачі. Звернемо увагу на те, що у випадку двійкової системи остачі виписуються автоматично: якщо число або частки парні, то остача дорівнює 0, а якщо непарні - то 1. Далі вже можна записати відповідь: рухаючись від останньої частки до остач справа наліво (напрям руху показує стрілочка) отримаємо

Відповідь. $x=(11110111)_2$.

Рекомендується робити перевірку, тобто від отриманого двійкового коду перейти до десяткового.

Займемося поданням довільних дійсних чисел в двійковій СЧ. Досить обмежитись поданням дійсних чисел з проміжку (0,1), бо любе дійсне число є сума цілого і дробового.

Теорема 1. *Довільне дійсне число $x\in(0,1)$ можна подати у вигляді скінченного або нескінченного двійкового дробу.*

Доведення. Розглянемо послідовність 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, ...

Ця послідовність строго монотонно спадає і збігається до нуля; отже, яке б не було число $x\in(0,1)$, існує таке натуральне число k_1, що $\frac{1}{2^{k_1+1}}\le x<\frac{1}{2^{k_1}}$. Тому, $x=\frac{1}{2^{k_1}}+x_1$, $0\le x_1<\frac{1}{2^{k_1}}$. Застосуємо до числа x_1 ті ж міркування, що і для x. Отримаємо таке число $k_2>k_1$, що $\frac{1}{2^{k_2+1}}\le x_1<\frac{1}{2^{k_2}}$, тому $x_1=\frac{1}{2^{k_2}}+x_2$, $0\le x_2<\frac{1}{2^{k_2}}$, отже, $x=\frac{1}{2^{k_1}}+\frac{1}{2^{k_2}}+x_2$. Цю процедуру можна продовжити і далі. Вона може бути і нескінченною. В любому випадку ми отримаємо послідовність натуральних чисел $k_1<k_2<\ldots<k_m<\ldots$ таку, що $x=\frac{1}{2^{k_1}}+\frac{1}{2^{k_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{k_m}}+\ldots$, тобто число x можна подати чи то у вигляді скінченної суми, чи то суми збіжного ряду, членами яких будуть степені 2 з різними від'ємними показниками. А це і доводить теорему.

Звернемо увагу на конструктивний характер доведеної теореми. Процедура, яка використовується при доведенні теореми 1 дає практичний алгоритм запису чисел в двійковій системі.

Як і в десятковій СЧ, не всякий звичайний дріб можна записати у вигляді скінченного двійкового. Крім того, не любий скінченний десятковий дріб можна записати у вигляді скінченного двійкового. В багатьох випадках при перетвореннях отримуються нескінченні періодичні двійкові дроби.

Теорема 2. *У вигляді скінченного двійкового дробу можна подати ті і лише ті звичайні дроби знаменник яких є натуральним степенем числа 2.*
Доведення.
Для доведення цієї теореми досить обмежитись правильними звичайними дробами, бо коли дріб змішаний, то його можна представити у вигляді суми цілого числа і правильного дробу.

Спочатку доведемо необхідну умову цієї теореми, тобто доведемо таке твердження: якщо число x є двійковим скінченним дробом, то його представлення в десятковій СЧ звичайним дробом має знаменником натуральний степінь 2. Дійсно, нехай $x=(0.a_{-1}a_{-2}\ldots a_n)_2$. Це означає, що

$$x=\frac{a_{-1}}{2}+\frac{a_{-2}}{2^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{2^n}=\frac{2^{n-1}a_{-1}+2^{n-2}a_{-2}+\ldots+a_{-n}}{2^n},$$

що і доводить справедливість останнього твердження.

Доведемо тепер достатню умову теореми, тобто доведемо таке твердження: якщо знаменник правильного дробу є натуральний степінь 2, то цей дріб можна записати у вигляді скінченного двійкового дробу. Справді, нехай $x=\frac{a}{2^n}$. Якщо $a=1$, то твердження справедливе, якщо ж $a>1$, то знайдемо двійковий код числа a. Нехай

$$a=(a_s a_{s-1}\ldots a_1 a_0)_2=a_s\cdot 2^s+a_{s-1}\cdot 2^{s-1}+\ldots+a_1\cdot 2+a_0.$$

Тоді

$$x=a_s\cdot 2^{s-n}+a_{s-1}\cdot 2^{s-n-1}+\ldots+a_1\cdot 2^{1-n}+a_0\cdot 2^{-n},$$

що і доводить останнє твердження.

Якщо число x записане у вигляді скінченного десяткового дробу, то його спочатку можна перетворити у звичайний дріб і проаналізувати знаменник, а потім використати теорему.

Для подання правильних дробів двійковими використовують наступний алгоритм, який випливає з алгоритму 3 п.3.2.

Подвоюємо дане число до тих пір, поки ціла частина не стане рівною 1 (це завжди буде досягнуто, бо навіть якщо розряд десятих дорівнює 9, то *після подвоєння ціла частина не може бути більша, ніж 1). Після цього будемо подвоювати дробову частину числа і знову до тих пір, поки ціла частина не стане рівною 1. Продовжимо цю процедуру. Можуть трапитись два випадки: або після скінченного числа кроків дробова частина стане рівною 0 і тоді процедуру закінчуємо, або процедура може ніколи не закінчитись. У першому випадку ми отримаємо скінченний двійковий дріб, у другому - нескінченний. Щоб записати ці дроби досить після кожного кроку виписувати значення цілої частини послідовно від позиційної крапки зліва направо.*

Цей алгоритм може бути обгрунтований ще й так. Нехай $x=(0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots a_{-m}\ldots)_2$. Це означає, що

$$x=\frac{a_{-1}}{2}+\frac{a_{-2}}{2^2}+\frac{a_{-3}}{2^3}+\ldots+\frac{a_{-m}}{2^m}+\ldots .$$

Тому

$$2x=a_{-1}+\frac{a_{-2}}{2}+\frac{a_{-3}}{2^2}+\ldots+\frac{a_{-m}}{2^{m-1}}+\ldots,$$

і, отже, ціла частина числа $2x$ дає значення (-1)-го розряду. Якщо тепер подвоїмо число $2x - a_{-1}$, то отримаємо число

$$a_{-2}+\frac{a_{-3}}{2}+\ldots+\frac{a_{-m}}{2^{m-2}}+\ldots,$$

ціла частина якого дає значення (-2)-го розряду і т.д.

Приклад 3. Знайти двійковий код числа x=0.8125.
Обчислення ведемо за такою схемою:

0	8125	×2
1	6250	×2
1	2500	×2
0	5000	×2
1	0000	

Відповідь. $x=(0.1101)_2$.

Приклад 4. Знайти двійковий код числа 0.2. Маємо

0	20000	×2
0	40000	×2
0	80000	×2
1	60000	×2
1	20000	×2
0	40000	×2
0	80000	×2
. . .	. . .	. . .

Як бачимо, процес періодичний і тому число 0.2 подається нескінченним періодичним двійковим дробом.
Відповідь. $0.2=(0.001100110011...)_2=(0.(0011))_2$.

В двійковій СЧ можна розглядати і звичайні двійкові дроби, тобто дроби, у яких чисельник і знаменник записуються двійковими натуральними числами. Від двійкових періодичних дробів можна переходити до звичайних двійкових дробів за правилами аналогічними при подібних перетвореннях в десятковій СЧ.

Наприклад, якщо двійковий періодичний дріб чистий, то йому відповідає звичайний двійковий дріб, у якого чисельник це число в періоді; а знаменник це число, яке складається тільки з одиничок і їх кількість дорівнює кількості знаків в періоді.

Якщо ж дріб змішаний, то йому відповідає число, у якого чисельник це різниця чисел, перше з яких складається з усіх знаків до другого періоду, а друге- до першого періоду, а знаменник це число, яке складається тільки з одиничок і нулів, причому одиничок стільки, скільки знаків в періоді, а нулів стільки, скільки знаків до періоду.

Приклад 5. Знайти звичайний дріб в десятковій СЧ, що відповідає такому дробу $x=(0.010(1011))_2$. Маємо

$$x=\frac{(0101011)_2-(010)_2}{(1111000)_2}=\frac{41}{120}.$$

4.2. Арифметичні операції

Додавання та множення. Для виконання додавання та множення над числами, заданими двійковими кодами, користуються таблицями додавання і множення. В цьому випадку вони дуже прості.

Таблиця додавання

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Таблиця множення

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Наприклад, знайдемо добуток чисел $x=(1011101)_2$ і $y=(110110)_2$. Обчислення виконуються за звичайною схемою множення:

$$\begin{array}{r}
\times\ 1011101\\
110110\\
\hline
1011101\\
+\ 1011101\\
1011101\\
1011101\\
\hline
1001110011110
\end{array}$$

Відповідь. $x\cdot y=(1001110011110)_2$.

Перевірка. В десятковій системі x=1+4+8+16+64=93, y=2+4+16+32=54, $x \cdot y$=2+4+8+16+128+256+512+4096=5022, з іншого боку 93·54=5022.

Віднімання. Віднімання чисел в двійковій СЧ відбувається за такими ж правилами, що і в десятковій СЧ. Обмежимося прикладами.

Приклад 1. Знайти різницю чисел $x=(1001001)_2$ та $y=(1100)_2$. Маємо

$$\begin{array}{r} _{-}\ 1001001 \\ 1100 \\ \hline 111101 \end{array}$$

Відповідь. x-$y=(111101)_2$.
Перевірка. З одного боку x=1+8+64=73; y=4+8=12; x-y=73-12=61.
З іншого боку x-y=1+4+8+16+32=61.

Часто на практиці для віднімання двійкових чисел використовується ще один алгоритм. Він грунтується на понятті числа додаткового до даного.

Числом, додатковим до даного, називається таке, яке отримується з даного заміною його одиничок на нулі, а нулів на одинички. Наприклад, нехай x=110100, тоді $\overline{x}$=001011. Звернемо увагу на те, що $x+\overline{x}$ складається тільки з одиничних бітів, а тому, коли до нього додати 1, то отримується число, у якого старший розряд дорівнює 1, а всі інші нулі, причому нулів стільки, скільки одиничок є в числі $x+\overline{x}$. Так в нашому прикладі,

$$x+\overline{x}=(111\,111)_2, \text{ а } (111\,111)_2+1=(1\,000\,000)_2.$$

Нехай тепер потрібно знайти різницю x-y. Доповнимо зліва число y нулями так, щоб кількість символів у числі y була така, як і у числі x. Знайдемо додаткове число $\overline{y}$ до так доповненого нулями числа y, тоді

$$x-y=x+\overline{y}+1-1\underbrace{00...0}_{r},$$

де r - розрядність числа y. Останнє співвідношення дає таке правило знаходження різниці.

Додамо до числа x число $\overline{y}$, потім до суми $x+\overline{y}$ додамо 1 *і в отриманій сумі відкинемо одиницю старшого розряду.*

Приклад 2. Знайти різницю тих же чисел, що і в прикладі 1. Маємо

$$y=(0001100)_2,\ \overline{y}=1110011,$$
$$x+\overline{y}=1001001+1110011=10111100,\ x+\overline{y}+1=(10111101)_2,$$

тому

$$x-y=(111101)_2.$$

Ділення. Ділення в двійковій СЧ виконується за тією ж схемою, що і в десятковій СЧ.

Приклад 3. Поділити число x=(10100000111)$_2$ на y=(1101)$_2$. Маємо

```
_10100000111 | 1101
 1101        |1100011
 _1110
  1101
   _10011
     1101
     _1101
      1110
         0
```

Відповідь. x div y=(1100011)$_2$.
Перевірка. З одного боку
x=1+2+4+256+1024=1287, y=1+4+8=13, x div y=1287 div 13=99.
З іншого боку x div y=1+2+32+64=99.

5. Трійкова система числення

Трійкова система числення - це позиційна СЧ з основою 3. Ця система тернарна, тобто в такій системі числа записуються за допомогою тільки трьох символів. На практиці використовуються дві трійкові СЧ: звичайна - з основними символами (цифрами) 0, 1, 2 і врівноважена трійкова СЧ з основними символами -1, 0, 1. Розглянемо окремо кожний з цих випадків.

При використанні звичайної трійкової СЧ основні задачі розв'язуються за загальною схемою. Тому обмежимося прикладами.

Приклад 1. Знайти десятковий код числа x=(210012)$_3$. Маємо

$$x=2+1\cdot 3+0\cdot 3^2+0\cdot 3^3+1\cdot 3^4+2\cdot 3^5=2+3+81+486=572.$$

Відповідь. x=572.

Приклад 2. Знайти трійковий код числа x=792.
Скористаємося загальним алгоритмом. Схему ділення в цьому випадку запишемо аналогічно до попереднього. Матимемо:

792	264	88	29	9	3	1
0	0	1	2	0	0	↵

Відповідь. x=(1002100)$_3$.

Розглянемо арифметичні дії. Вони виконуються за загальними правилами, викладеними в п.3. Для виконання додавання та множення чисел, які задані трійковими кодами, користуються такими таблицями додавання та множення.

Таблиця додавання

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10

Таблиця множення

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2

2	2	10	11		2	0	2	11

Приклад 3. Знайдемо добуток чисел $x=(2021)_3$ і $y=(122)_3$. Обчислення здійснюємо за традиційною схемою множення:

$$
\begin{array}{r}
\times\ 2021 \\
122 \\
\hline
11112 \\
+11112 \\
2021 \\
\hline
1102102
\end{array}
$$

Відповідь. $x\cdot y=(1102102)_3$.
Перевірка.
В десятковій СЧ x=1+6+54=61, y=2+6+9=17, $x\cdot y$= 2+9+54+243+729=1037.
З іншого боку $x\cdot y$=61.17=1037.

Приклад 4. Знайдемо різницю чисел $x=(22101)_3$ та $y=(1222)_3$. Маємо

$$
\begin{array}{r}
-\ 22101 \\
01222 \\
\hline
20102
\end{array}
$$

Відповідь. x - $y=(20102)_3$.

Приклад 5. Поділити число $x=(100111)_3$ на $y=(22)_3$. Маємо

$$
\begin{array}{r|l}
-\ 100111 & 22 \\
\cline{2-2}
22 & 1012 \\
\cline{1-1}
-\ 111 & \\
22 & \\
\cline{1-1}
-\ 121 & \\
121 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Відповідь. x div $y=(1012)_3$.

Зупинимося тепер на врівноваженій трійковій СЧ. Основні символи в цій СЧ називаються трітами, тобто тріти це цифри -1, 0, 1. Зручно символ (-1) записувати так $\bar{1}$. Розглянемо приклади. Нехай потрібно число $(1\bar{1}0\bar{1}01)_3$ записати в десятковій СЧ. Матимемо: x=1-9-81+243=154.

Для отримання трітових кодів з десяткових можна використовувати два алгоритми. Перший алгоритм випливає з загального з тією різницею, що коли знаходитимуться частки від ділення на 3, то у випадку, коли остача дорівнюватиме 2, частку збільшують на 1, а тоді остача від ділення дорівнюватиме (-1). Наприклад, нехай потрібно знайти трітовий код числа 792. Схема для обчислень тут буде така.

792	264	88	29	10	3	1
0	0	1	-1	1	0	↵

Отже, трітовий код числа 792 є $(101\bar{1}100)_3$.

Другий алгоритм для отримання трітових кодів полягає в тому, що спочатку знаходять звичайний трійковий код числа, а потім додають і віднімають число з одиничними цифрами, тільки значність цього числа на 1 більша, ніж у заданого числа. Наприклад, $792=(1002100)_3$, тому

$$\begin{array}{r} + \; 1\,0\,0\,2\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline - \; 1\,2\,1\,2\,0\,2\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,\bar{1}\,1\,0\,0 \end{array}$$

Для заміни врівноваженого трітового коду звичайним трійковим користуються таким алгоритмом. *До врівноваженого трітового коду числа додається число, яке складається лише з* $\bar{1}$ (*мінус* 1) *в кількості, що дорівнює кількості знаків даного числа. Після цього до одержаної суми додається число, яке складається лише з одиничок, кількість яких така, як і в попередньому.*

Приклад 6. Знайти трійковий код числа $x=(1\bar{1}\bar{1}01\bar{1})_3$. Маємо

$$\begin{array}{r} + \; 1\,\bar{1}\,\bar{1}\,0\,1\,\bar{1} \\ \bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1} \\ \hline + \; \bar{1}\,0\,1\,\bar{1}\,\bar{1}\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline 0\,1\,2\,0\,0\,2 \end{array}$$

Відповідь. $x=(12002)_3$.

Для виконання додавання та множення чисел, які задані трітовими кодами, користуються такими таблицями додавання та множення.

Таблиця додавання

+	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	0
0	$\bar{1}$	0	1
1	0	1	$1\bar{1}$

Таблиця множення

×	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
0	0	0	0
1	$\bar{1}$	0	1

Приклад 7. Знайти добуток чисел $x=(10\bar{1}\bar{1})_3$ і $y=(\bar{1}01)_3$. Обчислення здійснюється за традиційною схемою множення. Отримаємо: $x\cdot y=(\bar{1}1\bar{1}1\bar{1}\bar{1})_3$.

Перевірка. В десятковій СЧ x=-1-3+27=23, y=1-9=-8, $x\cdot y$=-1-3+9-27+81-243=-184, з іншого боку $x\cdot y$=23·(-8)=-184.

Характерною особливістю врівноваженої трійкової СЧ є те, що зникає різниця між додаванням і відніманням чисел. При машинній реалізації цих дій не потрібно приєднувати додатковий знак числа. Щоб отримати число протилежне до даного досить замінити 1 на $\bar{1}$, а $\bar{1}$ на 1. Тому при виконанні арифметичних операцій не вимагається використовувати ще й “правило знаків”. Між іншим, в 60-ті роки в Радянському Союзі на базі врівноваженої трійкової СЧ була сконструйована ЕОМ «Сетунь», головним конструктором якої був Н.П.Брусенцов.

Зупинимося тепер коротко на поданні довільних дійсних чисел в трійковій СЧ. Ситуація тут аналогічна до тієї, яка розглядалась в попередньому пункті. Справедливі такі твердження, які рекомендуються довести читачам самостійно.

1. *Довільне дійсне число $x\in(0,1)$ можна подати у вигляді скінченного або нескінченного трійкового дробу.*
2. *У вигляді скінченного трійкового дробу можна подати ті і лише ті звичайні дроби знаменник яких є натуральним степенем числа 3.*

З цього твердження випливає такий наслідок. *Довільний скінченний десятковий дріб не можна перетворити в скінченний трійковий дріб.*

Для подання правильних дробів трійковими використовують наступний алгоритм, який випливає з алгоритму 3 п.3.2.

Потроюємо дане число до тих пір, поки ціла частина не стане рівною 1 або 2 (це завжди буде досягнуто, бо навіть якщо розряд десятих дорівнює 9, то після потроєння ціла частина не може бути більша, ніж 2). Після цього будемо потроювати дробову частину числа і знову до тих пір, поки ціла частина не стане рівною 1 або 2. Продовжимо цю процедуру. Можуть трапитись два випадки: або після скінченного числа кроків дробова частина стане рівною 0 і тоді процедуру закінчуємо, або процедура може ніколи не закінчитися. У першому випадку ми отримаємо скінченний трійковий дріб, у другому - нескінченний. Щоб записати ці дроби досить після кожного кроку виписувати значення цілої частини послідовно від позиційної крапки зліва направо.

Приклад 8. Знайти трійковий код числа x=0.5.
Обчислення ведемо за такою схемою:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 5 & \times 3 \\ 1 & 5 & \times 3 \\ 1 & 5 & \times 3 \\ 1 & 5 & \times 3 \\ \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \cdots & \cdots \end{array}$$

Відповідь. x=0.111...=0.(1).

Приклад 9. Знайти таку кількість трійкових знаків числа e=2.7182818..., щоб при оберненому переведені в десяткову СЧ зберігалось 6 знаків після позиційної крапки числа e. Для цього потрібно здійснити 2·6=12 кроків згідно алгоритму. Маємо, ціла частина числа e дорівнює $2=(2)_3$, займемося дробовою частиною.

$$\begin{array}{c|ll}
0 & 7182818... & \times 3 \\
2 & 1548454... & \times 3 \\
0 & 4645362... & \times 3 \\
1 & 3936086... & \times 3 \\
1 & 1808258... & \times 3 \\
0 & 5424774... & \times 3 \\
1 & 6274322... & \times 3 \\
1 & 8822966... & \times 3 \\
2 & 6468898... & \times 3 \\
1 & 9406694... & \times 3 \\
2 & 8220082... & \times 3 \\
2 & 4660246... & \times 3 \\
1 & 3980738... & \times 3 \\
\multicolumn{1}{c}{...} & ... & ...
\end{array}$$

Відповідь. $e=(2.201101121221...)_3$.

Перевірка. При оберненому переведенні отримаємо $e\approx 2+\frac{381724}{531441}=2.7182810509...$

Звідси можна отримати і трітовий код числа e :

$$\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 2.201101121221 \\ 11.111111111111 \end{array} \\ \hline
-\begin{array}{r} 21.012220010102 \\ 11.111111111111 \end{array} \\ \hline
10.\bar{1}01111\bar{1}\bar{1}0\bar{1}0\bar{1}1
\end{array}$$

Отже, трітовий код числа $e=(10.\bar{1}01111\bar{1}\bar{1}0\bar{1}0\bar{1}1...)_3$.

6. Гексакоди

В комп'ютерних науках важливу роль грає позиційна СЧ з основою 16. Основні символи, які при цьому використовуються: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, причому цифри A, B, C, D, E, F, відповідно, мають значення 10, 11, 12, 13, 14, 15. Коди чисел в такій СЧ називаються гексакодами. Для позначення гексакоду прийнято після останнього розряду числа ставити букву h. Наприклад, якщо x=1A9Fh, то десятковий код цього числа є $x=15+9\cdot16+10\cdot16^2+16^3=6815$.

Для знаходження гексакодів з десяткових можна користуватись алгоритмами 1 та 2 з п.3.2.

Приклад 1. Знайти гексакод числа $y=21357$, використовуючи алгоритм 1. Обчислення ведемо за схемою:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
21357 & 16 & & \\ \cline{2-2}
\mathbf{13} & 1334 & 16 & \\ \cline{3-3}
 & \mathbf{6} & 83 & 16 \\ \cline{4-4}
 & & \mathbf{3} & \mathbf{5}
\end{array}$$

Отже, y = 536Dh.

Існує ще один алгоритм для знаходження гексакодів. Він грунтується на використанні теореми 1 з п.3.2. *Знаходимо двійковий код числа, для якого відшукується гексакод. Одержаний двійковий код розбивається на групи з 4-ох символів справа наліво. На кожну з цих груп дивляться як на двійкові коди відповідних десяткових чисел. Знаходять ці числа. І тоді послідовність одержаних десяткових кодів дає гексакод заданого числа.* Наприклад, знайдемо цим способом гексакод числа y=21357. Двійковий код цього числа дорівнює $(101\ 0011\ 0110\ 1101)_2$. Звідси $y=(5\ 3\ 6\ 13)_{16}$ =536Dh.

Для переведення десяткових дробів в гексакоди, можна користуватись або алгоритмом 3 або 4 з п.3.2.

Приклад 2. Знайти таку кількість шістнадцяткових знаків числа π = 3.1415926..., щоб при оберненому переведені в десяткову СЧ зберігалось 6 знаків після позиційної крапки числа π. Для цього потрібно здійснити $[6\cdot\log_{16}10]\approx 6\cdot\frac{5}{6}$=5 кроків (див. примітку п.3.2) згідно алгоритму. Маємо, ціла частина π дорівнює $3=(3)_{16}$, займемося дробовою частиною.

0	1415926	×16
2	2654816	×16
4	2477056	×16
3	9632896	×16
15	4126336	×16
6	6021376	×16
. . .	. . .	. . .

Відповідь. $\pi=(3.243F6...)_{16}$.

Перевірка. При оберненому переведенні отримаємо

$$\pi \approx 3 + \frac{148470}{1048576} = 3.141592025...$$

Шістнадцяткову СЧ зручно використовувати в проміжних розрахунках. Наприклад, знаючи гексакод числа π, легко отримати двійковий код цього числа, для чого досить шістнадцяткові розряди π замінити двійковими кодами в форматі з чотирьох знаків. Матимемо, $\pi=(11.\ 0010\ 0100\ 0011\ 1111\ 0110\ ...)_2$.

В комп'ютерах гексакоди найчастіше використовуються для адресації пам'яті і при створенні кодових таблиць символів.

7. Коди Фібоначчі

7.1. Знаходження кодів Фібоначчі

Нагадаємо визначення кодів Фібоначчі. Якщо за базисну послідовність взяти двобічну послідовність чисел Фібоначчі f_n, тобто послідовність

$$. . . -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . ,$$

що задається рекурентним співвідношенням $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, $f_0=f_1=1$, то отримаємо СЧ, яка називається Фібоначчієвою СЧ.

З основної теореми п.3 випливає, що довільне ціле число можна записати у вигляді скінченної суми різних чисел Фібоначчі. А це означає, що кожному цілому числу можна поставити у відповідність бітовий код, який називається кодом Фібоначчі (коротко f-кодом).

Наприклад, 71=1001001000f, 221=101010000001f. (Символ f у кінці останнього розряду числа означає, що написаний код - це код Фібоначчі. Далі, коли зрозуміло, що маємо справу з f-кодом, символ f не будимо вживати).

Якщо при поданні числа використовують числа Фібоначчі з від'ємними індексами, відповідні розряди коду відділятимемо крапкою. Наприклад, f-коду 10101.00101f відповідає число $f_0 +f_2 +f_4 +f_{-3} +f_{-5}$ =1+2+5-3-8=-3.

На відміну від однозначного представлення чисел у СЧ з основою b, одне і те ж число має безліч f-кодів. Наприклад, 71=11001000f = 10111000f = 11000110f =. . . Та серед усіх f-кодів одного і того ж числа існує єдиний код, який характеризується тим, що у ньому після кожної одинички стоїть принаймні один нуль, такі коди будемо називати *нормалізованими*. Цей факт випливає з більш загального твердження, яке зараз розглянемо.

Означення 1. *Узагальненим фібоначчієвим кодом (pf-кодом) числа називається код відносно СЧ, яка задається базисною послідовністю, що породжується рекурентним співвідношенням*

(1) $$f_{n+2}=p{\cdot}f_{n+1}+f_n \text{ , } f_0=1, f_1=p,$$

де p довільне натуральне число. Якщо покласти p=1, то отримаємо Фібоначчієву СЧ.

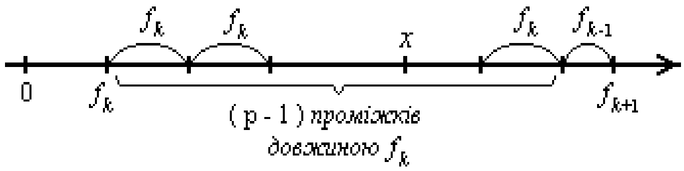
В pf-коді використовується p+1 цифр, значення яких відповідно дорівнюють числам 0, 1, 2, ..., p. В узагальнених Фібоначчієвих СЧ теж представлення чисел неоднозначні.

Означення 2. *pf-код числа називається нормалізованим, якщо в цьому коді або відсутня цифра p або якщо така цифра в коді зустрічається, то після неї стоїть нуль.*

Теорема 1. *Для довільного натурального числа існує єдиний нормалізований pf-код.*

Доведення.

Через те що базисна послідовність монотонно зростає, $\forall x \in N$ існує таке натуральне k, що $f_k \le x < f_{k+1}$. Далі подамо проміжок $[f_k; f_{k+1}]$ у вигляді об'єднання p-проміжків, серед яких останній проміжок має довжину f_{k-1}, а перші p-1 проміжків однакові і мають довжину f_k. Це можна зробити, бо з рекурентного співвідношення (1) випливає, що $f_{k+1}-f_k=(p-1)f_k+f_{k-1}$. Число x попаде в один з цих проміжків.



Отже, знайдуться такі натуральні r_k і x_1, що

$$x=r_kf_k+x_1,\ 1\le r_k\le p,\ 0\le x_1<f_k.$$

Можуть виникнути такі випадки.

1) $x_1=0$, тоді $x=r_kf_k=(r_k\underbrace{0\ldots0}_{k})_{\text{pf}}$.

2) $r_k = p$ і $x_1 > 0$, x_1 в "найгіршому" випадку попаде в проміжок $f_{k-2} \le x_1 < f_{k-1}$, і, отже, $x_1 = r_{k-2}f_{k-2} + x_2$, де $1 \le r_{k-2} \le p$, $0 \le x_2 < f_{k-2}$ і тоді повертаємося до випадку 1). Тоді $x=pf_k+r_{k-2}f_{k-2}+x_2=(p0r_{k-2}\ldots)_{\text{pf}}$.

3) $1\le r_k < p$, тоді x_1 в "найгіршому" випадку попаде в проміжок $f_{k-1} \le x_1 < f_k$, і, отже,

$x_1=r_{k-1}f_{k-1}+x_2$, де $1\le r_{k-1}\le p$, $0\le x_2<f_{k-1}$ і знову повертаємося до випадку 1).

$x=r_kf_k+r_{k-1}f_{k-1}+x_2$, отримуються нормалізовані pf-коди, бо коефіцієнти r_k або менші p, або, якщо рівні p, то після них іде нуль.

Алгоритм дає єдине представлення. Отже, нормалізований pf-код єдиний.

Приклад 1. Знайти нормалізований 3f-код числа x=642.

В цьому випадку базисна послідовність задається рекурентним співвідношенням

$$f_{n+2}=3\cdot f_{n+1}+f_n,\ f_0=1,\ f_1=3,$$

тобто це така послідовність

$$1, 3, 10, 33, 109, 360, 1189, \ldots$$

$x\in[360;\ 1189]=[f_5;\ f_6]=[f_5;\ 2f_5]\text{U}[2f_5;\ 3f_5]\text{U}[3f_5;\ f_6]$. Звідси $x=f_5+x_1$, де $x_1=282$; $x_1\in[218;\ 360]=[2f_4;\ f_5]$, $x_1=2f_4+x_2$, $x_2=64$; $x_2\in[33;66]=[f_3;\ 2f_3]$, $x_2=f_3+x_3$, $x_3=31$; $x_3\in[30;\ 33]=[3f_2;\ f_3]$, $x_3=3f_2+1$. Таким чином $x=f_5+2f_4+f_3+3f_2+f_0$, а це означає, що $642=(121301)_{3\text{f}}$.

Приклад 2. Знайти нормалізований код Фібоначчі числа x=126.

Для цього скористаємося звичайною послідовністю чисел Фібоначчі, тобто послідовністю

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

$x \in [89;\ 144]=[f_{10}; f_{11}]$, $x=f_{10}+x_1$, $x_1=37$; $x_1 \in [34;\ 55]=[f_8; f_9]$, $x_1=f_8+x_2$, $x_2=3$; $x_2=f_3$. Таким чином $x=f_{10}+f_8+f_3$, а це означає, що 126=10100001000f

Доведена теорема дає практичний алгоритм знаходження pf-кодів натуральних чисел. Його легко запрограмувати (див. додаток, програма Kod_p_q.pas).

Розглянемо основні арифметичні операції над цілими числами, які задані своїми f-кодами. Ці операції значно складніші ніж відповідні операції над кодами в системах числення, які були розглянуті вище. F-коди - скінченні послідовності нулів і одиничок можливо розділені в якомусь місці однією крапкою. Тому арифметичні операції над числами - це деякі операції над такими послідовностями, і задача заключається в тому, що б навчитися виконувати певні операції над ними. Між f-кодами та цілими числами є відповідність, але, як було відмічено вище, ця відповідність не взаємно-однозначна, бо якщо f-коду можна поставити у відповідність одне ціле число, то кожному цілому числу можна поставити у відповідність нескінченно багато f-кодів.

Означення 3. *Два f-коди називаються еквівалентними, якщо вони визначають одне число.*

Отже, кожному числу можна поставити у відповідність певну множину еквівалентних кодів. Виникає питання, як можна переходити від одного коду до йому еквівалентного. На це питання легко дати відповідь, якщо згадати основне співвідношення між числами Фібоначчі, тобто співвідношення $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. А з нього випливає, що коли в послідовності нулів і одиничок, які задають f-код числа, замінити групу символі 011 на 100 або 100 на 011, то отримаємо код еквівалентний даному. Першу заміну символів називають згорткою, а другу заміну - називають розгорткою. Отже, скінченне число згорток і розгорток даного f-коду не змінює його значення і дає коди еквівалентні даному.

Теорема 2. *Довільний скінченний f-код шляхом скінченного числа згорток і розгорток можна нормалізувати.*

Доведення.

Нагадаємо, що f-код називається нормалізованим, якщо в ньому не стоять дві одинички поруч. Далі звернемо увагу на те, що кожна згортка зменшує кількість одиничок на одну.

Доведення теореми проведемо методом математичної індукції по кількості n одиничок.

1. Для $n=2$ - теорема справедлива, бо коли дві одинички розділені нулями, то код вже нормалізований, а коли вони стоять рядом, то їх можна згорнути і отримаємо одну одиничку.
2. Припустимо, що твердження має місце для $n=r\geq 2$.
3. Доведемо, що це твердження буде справедливим і для $n=r+1$. Справді, якщо такий f-код не є нормалізованим, переглядаючи його зліва направо обов'язково дійдемо до першої групи символів 011. Виконаємо згортку цих

символів. Тоді в одержаному коді кількість одиничок буде дорівнювати r, а такий код в силу припущення індукції вже можна нормалізувати.

Що й треба було довести.

Приклад 3. Нормалізувати код 001011110111010.
Цей код еквівалентний такому

001100110111010 ~ 010000110111010 ~ 010001000111010 ~ 010001001001010.

Останній код вже нормалізований.

Розглянемо тепер послідовності, які складаються з нулів і одиничок і може ще бути одна двійка. На такі послідовності теж можна дивитися як на f-коди чисел. Наприклад, коду 10201f відповідає число $f_0+2f_2+f_4=1+2\cdot 2+5=10$. Над кодами з однією двійкою будемо виконувати ще й такі операції: групу символів 200 замінюємо на 111, групу символів 0201 на 1002, 021 на 110, 012 на 101. Такі заміни і заміни в протилежному напрямку називатимемо додатковими розгорткою та згорткою. Додаткові згортки і розгортки не міняють значення коду, бо $2f_{n+2}=f_{n+2}+f_{n+1}+f_n$, $2f_{n+2}+f_n=f_{n+3}+f_n$, $2f_{n+1}+f_n=f_{n+2}+f_{n+1}$, $f_{n+1}+2f_n=f_{n+2}+f_n$ (ці співвідношення випливають з основного рекурентного співвідношення для чисел Фібоначчі). Крім того, якщо перед крапкою в коді числа стоять символи 20, то їх можна замінити символами 11, бо $f_0=f_1=1$. Коди з двійкою називатимемо *нормалізованими*, якщо після кожної одиниці коду і після двійки стоїть принаймні один нуль.

Теорема 3. *Довільний нормалізований код з однією двійкою шляхом скінченного числа згорток і розгорток можна перетворити на еквівалентний нормалізований код без двійки.*
Доведення.
Доведення проведемо методом математичної індукції по кількості n символів між двійкою і останньою одиницею коду.

1. Для n=1 це твердження справедливе, бо тоді останні символи нашого коду матимуть вигляд 020100... Групу символів 0201 замінимо еквівалентною їй групою 1002. І тому останні символи коду заміняться такими 100200... ~ 100111... ~ 101001... . Таким чином в одержаному коді вже не буде двійок і його можна нормалізувати за попередньою теоремою.
2. Припустимо, що наше твердження справедливе для випадку, коли між двійкою і останньою одиницею є $n=r\geq 1$ символів.
3. Доведемо, що воно буде справедливе, коли $n=r+1$ символ. В околі символу 2 код матиме вигляд $...02\underbrace{00...1...0}_{r+1\text{ символ}}1$ або $...02\underbrace{010...1...0}_{r+1\text{ символ}}$. В першому випадку замінимо послідовність 200 на 111 і отримаємо код без двійок, отже його можна буде нормалізувати. В другому випадку послідовність 0201 замінимо на 1002, отримаємо код, в якому між двійкою і останньою одиничкою вже буде знаходитись r-1 символ, а тому такий код за припущенням індукції можна нормалізувати.

Що і треба було довести.

Приклад 4. Нормалізувати код 00101002010100.
Цей код еквівалентний такому

00101001002100 ~ 00101001011000 ~ 00101001100000 ~ 00101010000000.

Перейдемо до арифметичних дій над кодами Фібоначчі.

7.2. Арифметичні дії над кодами Фібоначчі

Додавання. Відомо декілька алгоритмів для знаходження сум f-кодів [15, с.53-58]. Ми пропонуємо наступний алгоритм.

Нехай x та y це два f-коди, які потрібно додати. Можна вважати, що коди нормалізовані, бо це завжди можна зробити. З коду числа y перемістимо в код x одинички з тих розрядів, де на відповідних місцях коду x стоять нулі. Отримані коди позначимо відповідно x_1 і y_1. Ясно що $x+y=x_1+y_1$. Код x_1 нормалізуємо і знову повторимо попередню операцію, якщо її можна виконати. За скінченне число k кроків отримаємо такі коди x_k і y_k, що $x+y=x_k+y_k$ і одинички в цих кодах можуть розташовуватися тільки в однакових розрядах. Візьмемо останню одиничку коду y_k і додамо до відповідної одинички коду x_k. Отримаємо код x_{k+1}, в якому буде одна двійка. Такий код у силу теореми 3 можна нормалізувати. Позначимо отриманий код через x_{k+1}, а через y_{k+1} позначимо код, який отримується з y_k заміною останньої одинички нулем. Матимемо $x+y=x_{k+1}+y_{k+1}$ і до останніх двох кодів застосуємо ту ж процедуру, яка була описана вище. В решті решт, за скінченне число кроків ми дійдемо до того, що код другого доданку буде нульовим, а, отже, сума дорівнюватиме першому доданку.

Приклад 1. Нехай числу x відповідає код 10100101010, а y ~ 01010101010. Знайти $x+y$.

Розв'язання.

x ~ 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 $\qquad$ x_1 ~ 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0
y ~ 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 $\qquad$ y_1 ~ 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0
$\quad\uparrow\quad\uparrow$

x_1 ~ 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0~ 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0

x_1 ~ 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 $\qquad$ x_2 ~ 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 2 0
y_1 ~ $\quad$ 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 $\qquad$ y_2 ~ 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0
$\uparrow$

x_2 ~ 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 ~ 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 ~ 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0

x_2 ~ 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 $\qquad$ x_3 ~ 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0
y_2 ~ 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 $\qquad$ y_3 ~ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
$\uparrow\quad\uparrow$

x_3 ~ 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
y_3 ~ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

$x + y = x_3 + y_3$ ~ 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0

Перевірка. Коду x відповідає число $f_1+f_3+f_5+f_8+f_{10}=135$, $y=f_1+f_3+f_5+f_7+f_9=88$, $x+y=f_3+f_7+f_9+f_{11}=223$.

Віднімання. Новою якісною властивістю Фібоначчієвої СЧ є можливість виконувати віднімання f-кодів без порівняння відповідних чисел по величині. Проілюструємо цю дію на прикладі.

Приклад 2. Нехай потрібно від числа x=197 відняти число y=75 в f-кодах. Маємо:

$x \sim$ 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0
$y \sim$ 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0.

1. Співставляємо коди чисел x та y і проводимо взаємне "знищення" одиничок. В результаті отримається перша пара проміжних кодів:

$x_1 \sim$ 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0
$y_1 \sim$ 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0.

2. Виконуємо розгортку кодів x_1 та y_1:

$x_1 \sim$ 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0
$y_1 \sim$ 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1.

3. Утворюємо наступні проміжні коди у відповідності з кроком 1:

$x_2 \sim$ 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0
$y_2 \sim$ 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1

   і знову виконуємо розгортку кодів x_2 і y_2. Цей процес "знищення" одиничок і розгорток проміжних кодів повторюємо до тих пір, поки в одному з проміжних кодів не будуть "знищені" всі одинички. При цьому другий проміжний код буде кодом результату віднімання.

   В нашому прикладі віднімання далі буде здійснюватися так.

4. Розгортка кодів x_2 та y_2 дає

$x_2 \sim$ 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1
$y_2 \sim$ 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1.

5. Співставлення кодів x_2 і y_2 і "знищення" одиничок дає такі проміжні коди:

$x_3 \sim$ 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0
$y_3 \sim$ 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1.

6. Співставлення кодів x_3 і y_3 і подальша розгортка

$x_4 \sim$ 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0
$y_4 \sim$ 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1.

7. Співставлення x_4 і y_4 і розгортка

$x_5 \sim$ 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0
$y_5 \sim$ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1.

8. Співставлення x_5 і y_5 і розгортка

$x_6 \sim$ 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1

$y_6 \sim 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,\underset{\uparrow}{1}.$

9. Співставлення x_6 і y_6 дає

$x_7 \sim 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$

$y_7 \sim 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0.$

Після цього віднімання закінчено, отже x-y ~ 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0.

Перевірка. З одного боку x-y=122.

З іншого боку x-y=f_1+f_3+f_5+f_7+f_{10}=1+3+8+21+89=122.

Примітка. Якщо при відніманні буде "занулене" число x, то результат віднімання буде від'ємним числом.

Множення. Нехай потрібно знайти добуток натуральних чисел x та y, які задані своїми f-кодами. Для цього розглянемо послідовність

(2) $$x_0, x_1, ..., x_k, ...,$$

яка визначається рекурентним співвідношенням

(3) $$x_{k+2}=x_{k+1}+x_k,\ x_0=x_1=x.$$

Звідси випливає, що $x_k=f_k \cdot x$ (справді, $x_2=x+x=2x$, $x_3=2x+x=3x$, ...)

Нехай f-код числа y такий, що ненульовими будуть розряди

$$k_1, k_2, \ldots, k_r,\ k_1>k_2>\ldots>k_r.$$

Це означає, що

$$y = f_{k_1} + f_{k_2} + \ldots + f_{k_r},$$

а звідси

$$x \cdot y = xf_{k_1} + xf_{k_2} + \ldots + xf_{k_r} = x_{k_1} + x_{k_2} + \ldots + x_{k_r}.$$

З цих міркувань випливає такий алгоритм знаходження добутку двох чисел, заданих f-кодами.

1. Будуємо послідовність (2) задану співвідношенням (3).
2. По f-коду числа y знаходимо всі його ненульові розряди k_1, k_2, ..., k_r.
3. Вибираємо члени послідовності (2) з індексами k_1, k_2, ..., k_r і знаходимо суму цих членів. Одержана сума і дає f-код добутку $x \cdot y$.

Приклад 3. Знайти добуток чисел x=20=1010100 та y=7=10100.

Обчислення ведемо за схемою.

k	y	x_k	
0	0	x ~ 0001010100	
1	0	x ~ 0001010100	
2	1	$2x=x+x$ ~ 0100010010	+
3	0	$3x=x+2x$ ~ 1000010000	
4	1	$5x=2x+3x$ ~ 10000101000	+

$x \cdot y \sim 2x + 5x,$

$$\begin{array}{r} {}_{+}00100010010 \\ 10000101000 \end{array}$$

$\overline{10100111010} \sim 10101001010$.

Отже, $x \cdot y \sim 10101001010$.

Перевірка. З одного боку $x \cdot y = 20 \cdot 7 = 140$,
з іншого боку $x \cdot y = f_1 + f_3 + f_6 + f_8 + f_{10} = 1+3+13+34+89 = 140$.

Ділення. Спочатку розглянемо один маловідомий спосіб ділення натурального числа a на b в десятковій СЧ, який грунтується на властивостях чисел Фібоначчі.

Лема. *Для всякого натурального n справедливі співвідношення*

$$f_0 + f_2 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1},$$
$$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n} - 1$$

Доведення.
Кожна з цих рівностей легко доводиться методом математичної індукції.
1. Для $n=1$ ці рівності справедливі.
2. Припустимо, що вони справедливі для $n=r \geq 1$.
3. Доведемо, що ці рівності мають місце і для $n=r+1$. Справді, за припущенням індукції і в силу основного рекурентного співвідношення для чисел Фібоначчі

$$f_0 + f_2 + \ldots + f_{2r} + f_{2r+2} = f_{2r+1} + f_{2r+2} = f_{2r+3} = f_{2(r+1)+1},$$
$$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2r-1} + f_{2r+1} = f_{2r} - 1 + f_{2r+1} = f_{2r+2} - 1 = f_{2(r+1)} - 1.$$

Що і потрібно було довести.

Наслідок. *Нехай* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *такі натуральні числа, що* $k_1 > k_2 > \ldots > k_m$,

$k_1 - k_2 \geq 2$, $k_2 - k_3 \geq 2$, ..., $k_{m-1} - k_m \geq 2$, $k_m > 0$. *Тоді* $\forall n > k_1$ $f_n \geq f_{k_1} + f_{k_2} + \ldots + f_{k_m} + 1$.

Доведення.
Розглянемо два випадки: n- парне число, n- непарне. В першому випадку в силу леми

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-3} + \ldots + f_3 + f_1 + 1 \geq f_{k_1} + f_{k_2} + \ldots + f_{k_m} + 1,$$

бо $n-1 \geq k_1$. Коли ж n непарне, то в силу леми

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-3} + \ldots + f_2 + f_0 \geq f_{k_1} + f_{k_2} + \ldots + f_{k_m} + 1,$$

бо $n-1 \geq k_1$, $k_m > 0$, $f_0 = 1$.

Нехай тепер a та b довільні натуральні числа і $a > b$. Позначимо через x частку від ділення a на b, а через r- остачу. Тоді

(4) $$a = bx + r,\ r < b.$$

Розглянемо послідовність

$$b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots,$$

яка визначається рекурентним співвідношенням

$$b_{n+2}=b_{n+1}+b_n,\ b_0=b_1=b.$$

Загальний член цієї послідовності легко виражається через числа Фібоначчі, а саме

(5) $$b_n=f_n\cdot b.$$

Далі, через те, що для кожного натурального числа існує нормалізований f-код, то це означає, що кожне натуральне число можна подати у вигляді суми різних натуральних і не сусідніх чисел Фібоначчі. Отже існують такі натуральні числа k_1, k_2, ..., k_m, $k_1>k_2>...>k_m$, k_1-$k_2\geq 2$, k_2-$k_3\geq 2$, ..., k_{m-1}-$k_m\geq 2$, $k_m>0$, що $x = f_{k_1}+f_{k_2}+...+f_{k_m}$.

Звідси і з (4), (5) випливає, що

$$a=b\left(f_{k_1}+f_{k_2}+...+f_{k_m}\right)+r;$$

або

(6) $$a=b_{k_1}+b_{k_2}+...+b_{k_m}+r.$$

Нехай $a_1 = a - b_{k_1}$, $a_2 = a_1 - b_{k_2}$, ..., $a_m = a_{m-1} - b_{k_m}$. З (6) випливає, що $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_m=r > 0$. Крім того, нехай $a_1^{'}=a-b_{k_1+1}$, $a_2^{'}=a_1-b_{k_2+1}$, ..., $a_m^{'}=a_{m-1}-b_{k_m+1}$. Всі ці різниці від'ємні.

Доведемо, наприклад, що $a_1^{'}<0$. Справді $a_1^{'}=a-b_{k_1+1}= a - b_{k_1}-b_{k_1-1} = b_{k_2}+...+b_{k_m}+r-b_{k_1-1} = bf_{k_2}+...+bf_{k_m}+r-bf_{k_1-1}< bf_{k_2}+...+bf_{k_m}+b-bf_{k_1-1} < b\left(f_{k_2}+...+f_{k_m}+1-f_{k_1-1}\right)$, а через те, що $k_1 - 1 > k_2$, то в силу наслідку з леми, $f_{k_1-1}\geq f_{k_2}+...+f_{k_m}+1$. Отже, $f_{k_2}+...+f_{k_m}+1-f_{k_1-1}\leq 0$ і тому $a_1^{'}<0$.

Аналогічно доводяться, що і числа $a_2^{'}$, $a_3^{'}$, ..., $a_m^{'}$ від'ємні.

Нехай тепер частка x невідома. Для її знаходження потрібно знайти числа k_1, k_2, ..., k_m, а їх ми взнаємо, якщо знайдемо b_{k_1}, b_{k_2}, ..., b_{k_m}. Попередні міркування показують, що для знаходження цих чисел можна діяти так: знаходимо різниці a - b_0, a - b_1, ..., і як тільки на k_1 + 1 кроці різниця стає від'ємною, то попередній крок дає число b_{k_1}. Далі різницю a - b_{k_1} позначимо через a_1 і з числом a_1 проробимо ту ж процедуру, що і з a. Цей процес продовжується до тих пір поки відповідна різниця, або стане рівною нулю, або буде меншою, ніж b. Отже, ми отримали алгоритм для знаходження частки.

Приклад 4. Знайти частку і остачу від ділення числа a=1537 на b=35.
Процес ділення будемо вести за схемою.

k	b_k	a-b_k	a_1-b_k	a_2-b_k	a_3=32<35	f_k
0	35	1537-35>0	347-35>0	67-35>0		1

1	35	1537-35>0	347-35>0	67-35>0		1 +
2	70	1537-70>0	347-70>0	67-70<0		2
3	105	1537-105>0	347-105>0			3
4	175	1537-175>0	347-175>0			5
5	280	1537-280>0	347-280>0			8 +
6	455	1537-455>0	347-455<0			13
7	735	1537-735>0				21
8	1190	1537-1190>0				34 +
9	1925	1537-1925<0				55
10	3115					

Отже, $x=f_1+f_5+f_8=1+8+34=43$; $r=a_3=32$; $1537=43\cdot 35+32$.

Якщо тепер числа a та b будуть задані f-кодами, то ділення a на b можна здійснити за тією ж самою схемою.

Приклад 5. Знайти частку від ділення числа a=100100100010f на число b=10100f.

Процес ділення проводимо за схемою:

k	b_k	a-b_k	a_1-b_k	a_2-b_k	f_k
0	000000101000	100010101000>0	10101010>0	0	f_0
1	000000101000	100010101000>0	10101010>0	0	f_1 +
2	000010101010	100010000000>0	10000010>0		f_2
3	000010101010	100000100100>0	00101000>0		f_3 +
4	001000000000	010100100010>0	-0101000<0		f_4
5	001010101010	010000100100>0			f_5
6	010100100100	000100100100>0			f_6 +
7	101000101000	-00100100100<0			f_7

Відповідь. $x=a$ div $b=f_1+f_3+f_6$=1001010f.

Перевірка. З одного боку $a=f_{11}+f_8+f_5+f_1=144+34+8+1=187$, $b=f_5+f_3=8+3=11$, $x=a$ div b =187 div 11=17. З іншого боку $x=f_1+f_3+f_6=1+3+13=17$.

8. Коди золотої пропорції

8.1. Знаходження кодів золотої пропорції

Коли розглядались позиційні СЧ з основою b, то вважалось, що b - натуральне число, хоча це не обов'язково. Основою СЧ може бути довільне дійсне число відмінне від нуля, зокрема, ірраціональне. Та коли за основу СЧ брати довільні дійсні числа, то значно ускладнюється арифметика в таких СЧ.

У другій половині нашого століття були виявлені СЧ з ірраціональною основою, в яких арифметика більш менш проста і допускала машинну реалізацію. Першою такою СЧ була система, запропонована американцем Бергманом в 1957 році [19]. За основу СЧ була взята золота пропорція, тобто число $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$. Бергман вивчив цілий ряд цікавих особливостей цієї системи. Однією з таких особливостей є те, що ця система бінарна, тобто коди чисел бітові, крім того, виявилось, що кожне ціле число має скінченний код.

Пізніше були відкриті і інші позиційні СЧ з ірраціональними основами, були сконструйовані пристрої для знаходження кодів золотої пропорції і здійснення різних арифметичних операцій над такими кодами. З цим можна детально познайомитися в книзі О.П.Стахова [15].

Розглянемо детально позиційну СЧ з основою $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Коди чисел в такій СЧ називаються кодами золотої пропорції. Ця система тісно пов'язана з Фібоначчієвою СЧ. Це не випадково, бо числа Фібоначчі є лінійними комбінаціями степенів φ (див. формулу Біне з різницевого числення). Наприклад, код золотої пропорції числа $3=(100.01)_\varphi$. Справді

$$(100.01)_\varphi=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}=\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=3.$$

Базисна послідовність, за допомогою якої знаходять коди золотої пропорції, це послідовність степенів φ, тобто послідовність

(1) $$\ldots,\ \varphi^{-3},\ \varphi^{-2},\ \varphi^{-1},\ 1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \ldots$$

Перша задача, яку ми будемо розв'язувати, - задача знаходження кодів золотої пропорції натуральних чисел. В цьому випадку можна було б скористатись універсальним алгоритмом для знаходження кодів в позиційній СЧ з основою b, та це привело б до значних похибок, пов'язаних з тим, що число φ ірраціональне, а на практиці ми вимушені користуватися його наближеним значенням. Тому доводиться шукати інші шляхи для отримання кодів золотої пропорції.

Теорема 1. *Код золотої пропорції довільного дійсного числа є бінарним кодом.*
Доведення.
Для доведення досить обмежитись додатними числами. Отже, нехай x довільне дійсне додатне число. Через те, що послідовність (1) строго монотонно зростає, обов'язково знайдеться таке ціле число k, що

$$\varphi^k \le x < \varphi^{k+1}.$$

Можуть трапитись два випадки.
1) $x=\varphi^k$ і тоді кодом золотої пропорції числа x буде або $1\underbrace{000\ldots0}_{k\ \text{нулів}}$, якщо $k>0$, або $0.\underbrace{000\ldots0}_{m-1\ \text{нулів}}1$, якщо $k=-m$, $m>0$.
2) Нехай $x>\varphi^k$. Тоді

$$x_1 = x - \varphi^k < \varphi^{k+1} - \varphi^k = \varphi^{k-1},$$

бо $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \varphi^{k-1}$. Застосуємо до x_1 попередні міркування, отримаємо ціле число k_1 таке, що

$$\varphi^{k_1} \le x_1 < \varphi^{k_1+1} \text{ і } k_1+1 \le k-1, \text{ або } k-k_1 \ge 2.$$

Продовжимо ці міркування далі. Отримаємо послідовність цілих чисел k, k_1, k_2, ... таких, що $k-k_1\ge 2$, $k_1-k_2\ge 2$, ... і

$$x = \varphi^k + \varphi^{k_1} + \varphi^{k_2} + \ldots .$$

Ця сума може бути або рядом, який збігається до x і тоді x буде подано нескінченним бінарним дробом, або скінченною - і тоді бінарний код числа x буде скінченним.

Число φ є коренем характеристичного рівняння для рекурентного співвідношення, яке визначає числа Фібоначчі ($f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$), тобто, коренем рівняння $\lambda^2=\lambda+1$. Отже $\varphi^2 = \varphi + 1$, а звідси випливає таке співвідношення для φ:

$$\varphi^{k+2} = \varphi^{k+1} + \varphi^k$$

k - довільне ціле число. Наприклад, $\varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3$, а якщо це співвідношення записати в бінарному коді, то це означає, що 100000 = 011000. Цей приклад показує, що в кодах золотої пропорції числа x можна групу символів 100 замінити на 011 і навпаки. Від цього значення числа x мінятися не буде. А це означає, що кожне число має безліч кодів золотої пропорції. Такі коди будемо називати еквівалентними, а заміну символів 100 на 011 і навпаки - згорткою і розгорткою, як в п.7.

Доведена теорема дає алгоритм отримання деякого коду золотої пропорції, який будемо називати нормалізованим. Характерною особливістю цього коду є те, що в ньому не стоять поруч дві одинички. Крім того, коли код числа скінченний, то нормалізований код має найменше число одиничок в порівнянні з кодами йому еквівалентними.

Операції згортки і розгортки над кодами золотої пропорції повністю аналогічні відповідним операціям над кодами Фібоначчі, тому для кодів золотої пропорції будуть справедливі теореми, аналогічні теоремі 2 і 3 з попереднього пункту. Тобто мають місце теореми.

Теорема 2. *Довільний скінченний код золотої пропорції за допомогою скінченного числа згорток і розгорток можна нормалізувати.*

Теорема 3. *Довільний скінченний нормалізований код з однією двійкою за допомогою скінченного числа згорток і розгорток можна перетворити на нормалізований код без двійок.*

Доведення цих теорем таке, як і теорем 2 та 3 з попереднього пункту.

Теорема 4 (Bergman, [19]). *Для кожного натурального числа існує скінченний нормалізований код золотої пропорції.*

Доведення.

Доведення проводиться методом математичної індукції.

1. Для x=1 теорема справедлива: $1=(1)_\varphi$.
2. Припустимо, що теорема справедлива для $x=n$.
3. Доведемо, що вона буде справедлива і для $x=n+1$.

Може трапитись два випадки.

1) Нульовий розряд числа n дорівнює нулю. Тоді нульовий розряд числа n+1 буде дорівнювати одиниці. Залишилось код числа n+1 нормалізувати, якщо виявиться що цей код не є нормалізованим.
2) Нульовий розряд числа n дорівнює одиниці. Тоді нульовий розряд числа n+1 дорівнюватиме двійці, і, отже, код числа n+1 буде мати одну двійку. В силу теореми 3, його можна нормалізувати.
3) На цьому доведення теореми завершується.

Приклади.

1=1.00=0.11; 2=1.11=10.01;3=10.01+1=11.01=100.01; 4=100.01+1=101.01;
5=101.01+1=102.01=102.0011=101.1111=110.0111=1000.1001.

Доведена теорема дає спосіб отримання кодів золотої пропорції натуральних чисел.

Примітка. Якщо проаналізувати доведення теореми Бергмана, то неважко помітити, що всі міркування можна повторити, якщо користуватись не числом φ, а числом $(-\varphi)^{-1}$, яке є другим коренем рівняння $\lambda^2=\lambda+1$. А це означає, що *за основу СЧ можна взяти число* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx-0.618$, *при цьому коди натуральних чисел в такій СЧ співпадають з кодами золотої пропорції.*

Наприклад,

$$(101.01)_{-1/\varphi}=\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2+1+\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{-2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=4=(101.01)_\varphi .$$

Наведемо невелику таблицю кодів золотої пропорції.

Таблиця 1

2=10.01	27=1010010.010101
3=100.01	28=1010100.010101
4=101.01	29=1010101.010101
5=1000.1001	30=10000000.10101001
6=1010.0001	31=10000010.00101001
7=10000.0001	32=10000100.00101001
8=10001.0001	33=10000101.00101001
9=10010.0101	34=10001000.10001001
10=10100.0101	35=10001010.00001001
11=10101.0101	36=10010000.00001001
12=100000.101001	37=10010001.00001001
13=100010.001001	38=10010010.01001001
14=100100.001001	39=10010100.01001001
15=100101.001001	40=10010101.01001001

16=101000.100001	41=10100000.10100001
17=101010.000001	42=10100010.00100001
18=1000000.000001	43=10100100.00100001
19=1000001.000001	44=10100101.00100001
20=1000010.010001	45=10101000.10000001
21=1000100.010001	46=10101010.00000001
22=1000101.010001	47=100000000.00000001
23=1001000.100101	48=100000001.00000001
24=1001010.000101	49=100000010.01000001
25=1010000.000101	50=100000100.01000001
26=1010001.000101	

Алгоритм отримання кодів золотої пропорції не зовсім зручний, бо щоб знайти код якого-небудь числа потрібно знати коди попередніх чисел. Виявляється є кращий алгоритм, який грунтується на зв'язку кодів Фібоначчі і кодів золотої пропорції.

Теорема 5. *Нехай x довільне натуральне число і відомо його код золотої пропорції, тобто відомі цілі числа k_1, k_2, ..., k_m такі, що*

$$x = z^{k_1} + z^{k_2} + \ldots + z^{k_m},$$

де z який-небудь корінь рівняння $z^2=z+1$. Нехай далі $\{v_n\}$ послідовність, що породжується рекурентним співвідношенням $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, $v_0 = 1$. Тоді для всякого цілого числа k справджується рівність

$$x \cdot v_k = v_{k_1+k} + v_{k_2+k} + \ldots + v_{k_m+k}.$$

Доведення.

Корені рівняння $z^2=z+1$ є числа $z_1=\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $z_2=-\varphi^{-1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. З різницевого числення відомо, що $v_n=C_1 z_1^n + C_2 z_2^n$, де C_1 і C_2 такі сталі, що $C_1 + C_2 = 1$. Тому

$$v_{k_1+k} + v_{k_2+k} + \ldots + v_{k_m+k} = C_1 z_1^{k_1+k} + C_2 z_2^{k_1+k} + \ldots + C_1 z_1^{k_m+k} + C_2 z_2^{k_m+k} =$$
$$= C_1 z_1^k \left(z_1^{k_1} + \ldots + z_1^{k_m}\right) + C_2 z_2^k \left(z_2^{k_1} + \ldots + z_2^{k_m}\right) = C_1 z_1^k x + C_2 z_2^k x = x\left(C_1 z_1^k + C_2 z_2^k\right) = x \cdot v_k.$$

Що і потрібно було довести.

Наслідок. *Кожен код золотої пропорції натурального числа x є також і кодом Фібоначчі цього числа.*

Справді, покладемо в теоремі $k=0$ і за v_n візьмемо числа Фібоначчі f_n.

Приклад. $40=(10010101.01001001)_\varphi$=10010101.01001001f.

Перевірка. 10010101.01001001f=$f_7+f_4+f_2+f_0+f_{-2}+f_{-5}+f_{-8}$=21+5+2+1+1-3+13=40.

Теорема 6. *Нехай x довільне натуральне число, а ціле число $(-r)$ є номером наймолодшого одиничного розряду в нормалізованому коді золотої пропорції* *числа x. Тоді для довільного натурального k, k>r, нормалізований код Фібоначчі числа $x{\cdot}f_k$ співпадає з нормалізованим кодом золотої пропорції числа $x{\cdot}\varphi^k$.*

Доведення.

Нехай натуральні числа k_1, k_2, ..., k_m, $k_1<k_2<\ldots<k_m$ є номерами одиничних розрядів нормалізованого коду Фібоначчі числа $x{\cdot}f_k$, тобто,

(2) $$x{\cdot}f_k = f_{k_1} + f_{k_2} + \ldots + f_{k_m}.$$

Знайдемо нормалізований код золотої пропорції числа x, тобто, знайдемо такі цілі числа n_1, n_2, ..., n_s, $n_1<n_2<\ldots<n_s$, що

$$x = \varphi^{n_1} + \varphi^{n_2} + \ldots + \varphi^{n_s}.$$

В силу теореми 5 матимемо рівність

(3) $$x{\cdot}f_k = f_{n_1+k} + f_{n_2+k} + \ldots + f_{n_s+k}.$$

Але нормалізований код кожного натурального числа єдиний, тому (2) і (3) повинні бути однаковими, тобто повинно бути $m=s$, $n_1+k=k_1$, $n_2+k=k_2$, ..., $n_m+k=k_m$. Отже, $n_1=k_1-k$, $n_2=k_2-k$, ..., $n_m=k_m-k$.

Таким чином,

$$x = \left(\varphi^{k_1} + \varphi^{k_2} + \ldots \varphi^{k_m}\right)\varphi^{-k} \;\Rightarrow\; x{\cdot}\varphi^k = \varphi^{k_1} + \varphi^{k_2} + \ldots \varphi^{k_m},$$

що і вимагалось довести.

З цієї теореми випливає такий алгоритм знаходження кодів золотої пропорції.

Нехай потрібно знайти код золотої пропорції натурального числа x. Знайдемо яке-небудь число k (по можливості найменше), k>r, де (-r) номер наймолодшого одиничного розряду в нормалізованому коді числа x. Далі знаходимо нормалізований f-код числа xf_k. В одержаному коді поставимо позиційну крапку так, щоб після неї було записано k символів коду. Це і буде код золотої пропорції числа x.

Для того, щоб практично вміти користуватися цим алгоритмом потрібно вміти знаходити число k.

При знаходженні коду числа за допомогою коду попереднього числа доводиться часто здійснювати “занулення” розряду з нульовим номером. Кожна така операція пересуває наймолодший ненульовий розряд максимум на два номера вправо. Тому для нормалізованого коду числа x номер його наймолодшого одиничного розряду не перевищує числа $2x$. Для великих чисел ця оцінка дуже груба, бо не на кожному кроці при знаходженні коду золотої пропорції доводиться “занулювати” розряд з номером нуль.

Для більш точної оцінки положення наймолодшого одиничного розряду числа x скористаємося послідовністю чисел Люка $\{l_n\}$, тобто послідовністю

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots,$$

яка породжується рекурентним співвідношенням

$$l_{n+2}=l_{n+1}+l_n,\ l_0=2,\ l_1=1.$$

З різницевого числення відомо, що

$$l_n=(\varphi)^n+(-\varphi)^{-n},$$

і якщо $n=2m$ число парне, то $l_{2m}=\varphi^{2m}+\varphi^{-2m}$, а це означає, що код золотої пропорції числа

$$l_{2m}=1\underbrace{00...0}_{2m\text{ нулів}}.\underbrace{00...0}_{2m-1\text{ нулів}}1.$$

Наприклад, $l_{10}=123=100000.00001$.

Отже, для чисел Люка $r=2m$.

Нехай тепер x довільне натуральне число відмінне від чисел Люка з парними індексами. Через те, що послідовність l_2, l_4, l_6, ... монотонно зростає, знайдеться таке m, що

(4) $$l_{2m-2}<x<l_{2m}.$$

Звідси випливає, що $r\leq 2m$ і отже, при знаходженні кодів золотої пропорції за допомогою кодів Фібоначчі, можна брати $k=2m$. Що б по x взнати m, розв'яжемо нерівність (4). Маємо

$$l_{2m-2}<x<l_{2m}\Leftrightarrow\varphi^{2m-2}+\varphi^{-2m+2}<x<\varphi^{2m}+\varphi^{-2m}\Leftrightarrow \mathrm{ch}((2m-2)\ln(\varphi))<\frac{x}{2}<$$

$$\mathrm{ch}(2m\cdot\ln(\varphi))\Leftrightarrow 2m-2<q<2m,\text{ де } q=\frac{\ln\left(\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)/2\right)}{\ln\varphi}.$$

Звідси

$$m=[q]+\begin{cases}2,\ \text{якщо } [q] \text{ парне}\\ 1,\ \text{якщо } [q] \text{ непарне.}\end{cases}$$

Таблиця 2

x	$[q]$	x	$[q]$
3-4	2	30-46	7
5-6	3	47-76	8
7-11	4	77-123	9
12-17	5	124-199	10
18-29	6	200	11

Досі ми шукали коди золотої пропорції натуральних чисел. Для знаходження кодів правильних дробів застосовується той же алгоритм, що і для знаходження двійкових кодів, тільки на кожному кроці знаходять добуток дробової частини не на 2, а на φ.

Як і у випадку двійкової СЧ коди золотої пропорції дробів, як правило, складаються з нескінченної кількості знаків.

Приклад. Знайти декілька знаків кодів золотої пропорції числа 1/3.
Обчислення ведемо за схемою.

Ціла частина	Дробова частина	
0	3333333...	$\times\varphi$
0	5393446...	$\times\varphi$
0	8726778...	$\times\varphi$
1	4120222...	$\times\varphi$
0	6666666...	$\times\varphi$
1	0786878...	$\times\varphi$
0	1273195...	$\times\varphi$
0	2060072...	$\times\varphi$
0	3333333...	...
...	...	

Отже, для 1/3 отримаємо такий періодичний дріб

$$1/3 = (0.\underbrace{00101000}_{\text{період}}\underbrace{00101000}001010\ldots)_\varphi\,.$$

Для знаходження кодів золотої пропорції змішаних дробів окремо знаходять код цілої частини, код дробової частини, а потім ці два коди додають, бо коди золотої пропорції цілих чисел є змішаними дробами.

Наприклад, нехай потрібно знайти код золотої пропорції числа $15\frac{1}{3}$. Маємо

$15+\frac{1}{3}$=100101.00100100000000+

$+ \quad$ 0.00101000001010=100101.00101100001010+0.001=

↑ ↑ ↑

=100101.01000000001010+0.001=100101.01100000001010...=
=101000.00000000001010...

Відповідь. $15\frac{1}{3} = (101000.00000000001010\ldots)_\varphi \approx (101000)_\varphi$.

Абсолютна похибка цієї наближеної рівності не перевищує $\varphi^{-10} \approx 0.056$.

8.2. Арифметичні дії над кодами золотої пропорції

Додавання та віднімання. Ці дії виконуються за допомогою тих же алгоритмів, що і додавання та віднімання f-кодів.

Приклад 1. Знайти суму x=(10010.0101)$_\varphi$ та y=(10101.0101)$_\varphi$. Маємо

10010.0101 +
+10101.0101 ~ 10111.0101 +
↑ ↑
\+ 10000.0101 ~ 100001.0101 +
\+ 010000.0101 ~
↑

011001.0101+0.0101~1000001.0101+0.0101~1000001.0102+0.01~

1000001.010111+0.01~1000010.000001+0.01=1000010.010001.

Відповідь. $x+y=(1000010.010001)_{\varphi}$.
Перевірка. (Див. табл. 1). $x=9$, $y=11$, $x+y=20$.

Множення та ділення. Таблиця множення в кодах золотої пропорції така ж сама як і в двійковій СЧ. Тому множення і ділення проводиться так як і в двійковій СЧ.

Приклад 2. Знайти добуток числа $x=(1000.1001)_{\varphi}$ на $y=(101.01)_{\varphi}$.
Маємо:

$$
\begin{array}{r}
\times\,10001001\\
10101\\
\hline
10001001\\
+\quad 10001001\\
10001001\\
\hline
101020111101
\end{array}
\sim 1000010.010001.
$$

Відповідь. $x\cdot y=(1000010.010001)_{\varphi}$.
Перевірка. (Див. табл. 1). $x=5$, $y=4$, $x\cdot y=20$.

Приклад 3. Поділити $x=(100101.001001)_{\varphi}$ на $y=(100.01)_{\varphi}$.
Маємо (спочатку в кожному з операндів позиційну крапку пересунемо на 6 знаків вправо)

$$
\begin{array}{l|l}
-100101001001 & 100010000\\
100010000 & \overline{10001001}\\
\hline
-101000010 & \\
100010000 & \\
\hline
-100010000 & \\
100010000 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Примітка. Знаходження остач на кожному кроці відбувається за правилом віднімання кодів Фібоначчі.
Відповідь. x div $y=(1000.1001)_{\varphi}$.
Перевірка. (Див. табл. 1). $x=15$, $y=3$, x div $y=5$.

9. Деякі цікаві задачі

Хороше володіння основними поняттями з теорії позиційних СЧ дає можливість розв'язувати цілий ряд задач, пов'язаних з СЧ.

Давно відома так звана

Теорема 1089. *Нехай* $\overline{xyz}$ *довільне тризначне число, у якого* $x>z$*. Позначимо через* $\overline{abc}$ *різницю* $\overline{xyz}-\overline{zyx}$*. Тоді* $\overline{abc}+\overline{cba}=1089$*.*

Доведення.

$\overline{xyz}=100x+10y+z$, $\overline{zyx}=100z+10y+x$. Звідси, $\overline{abc}=99(x-z)=100(x-z-1)+90+(10+z-x)$. Отже, $\overline{cba}=100(10+z-x)+90+(x-z-1)$, а вже звідси, $\overline{abc}+\overline{cba}=900+180+9=1089$.

Чи можна цей результат узагальнити в інших СЧ? Відповідь позитивна.

Узагальнення теореми 1089. *Нехай x яке-небудь 3m-значне число в СЧ з натуральною основою p. Позначимо через y число, яке отримується з x так: m перших цифр числа y співпадають з m останніми цифрами числа x, m середніх цифр числа y такі ж, як і m середніх цифр числа x, нарешті, m останніх цифр числа y співпадають з m першими цифрами числа x. Будемо вважати, що x>y. Позначимо через u=x-y, а через v число, яке отримається з u по тому ж правилу, що і y з x. Тоді*

$$u+v=(p^m-1)(p^m+1)^2.$$

Доведення.

Введемо ще такі позначення: через x_1 позначимо m-значне число, яке складається з m перших цифр числа x, через x_2 - число, яке складається з m середніх цифр числа x і x_3 - число, яке складається з m останніх цифр числа x. Аналогічні позначення введемо і для числа y. Отже $x_1=y_3$, $x_2=y_2$, $x_3=y_1$. Маємо

$$x=\overline{x_1x_2x_3}=x_1p^{2m}+x_2p^m+x_3,$$

$$y=\overline{y_1y_2y_3}=y_1p^{2m}+y_2p^m+y_3,$$

$$u=x-y=(x_1-y_1)p^{2m}+(x_2-y_2)p^m+x_3-y_3=(x_1-x_3)p^{2m}+(x_3-x_1)=(x_1-x_3)(p^{2m}-1)=$$

$$=p^{2m}(x_1-x_3-1)+(p^m-1)p^m+(p^m+x_3-x_1).$$

Звідси

$$v=p^{2m}(p^m+x_3-x_1)+(p^m-1)p^m+(x_1-x_3-1),$$

а

$$u+v=p^{2m}(p^m-1)+2p^m(p^m-1)+p^m-1=(p^m-1)(p^{2m}+2p^m+1)=(p^m-1)(p^m+1)^2.$$

Зокрема, якщо взяти p=10, m=1, то отримаємо $u+v$=1089.

Таблиця для $u+v$

$p \setminus m$	1	2
2	$9=(1001)_2$	$75=(10010101)_2$
3	$32=(1012)_3$	$800=(1002101)_3$
8	$567=(1067)_8$	$266175=(1007677)_8$
10	1089	1009899
16	$4335=(10EF)_{16}$	$16842495=(100FEFF)_{16}$

Теорема 495. *Нехай задана така послідовність тризначних натуральних чисел: початковий член послідовності довільне натуральне число з трьома цифрами, які не всі рівні між собою; наступні члени послідовності - різниці між максимальним та мінімальним числами, які одержуються перестановками цифр попереднього члена послідовності. Тоді така послідовність стабілізується на числі 495 і не пізніше ніж на шостому кроці.*

Доведення.

Нехай перший член нашої послідовності є число $\overline{abc}$ і $a \geq b \geq c$, $a > c$. Тоді наступним членом буде число $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a-c)$. Різниця $a-c$ може набувати значень 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Залишилось перевірити твердження теореми для цих значень. Наприклад, якщо $a-c=1$, то отримаємо таку послідовність 990-099=891, 981-189=792, 972-279=693, 963-369=594, 954-459=495, 495, ... Аналогічно перевіряються і інші випадки.

Узагальнення теореми 495. *Нехай задана така послідовність тризначних натуральних чисел в СЧ з натуральною основою 2p: початковий член послідовності довільне натуральне число з цифрами, які не всі рівні між собою; наступні члени послідовності - різниці між максимальним та мінімальним числами, які одержуються перестановками цифр попереднього члена послідовності. Тоді така послідовність стабілізується на числі*

$$4p^3 - p = ([p-1][2p-1][p])_{2p}.$$

(Тут і далі в квадратних дужках пишуть цифри числа)

Доведення

Нехай початковий член послідовності є число $\overline{abc}$ і $a \geq b \geq c$, $a > c$. Тоді наступним членом буде число

$$x_1 = \overline{abc} - \overline{cba} = (2p)^2 a + 2pb + c - (2p)^2 c - 2pb - a = (2p)^2 (a-c) + c - a =$$
$$= (2p)^2 (a-c-1) + (2p-1)2p + 2p - (a-c) = [\underbrace{a-c-1}_{\text{I цифра}}][\underbrace{2p-1}_{\text{II цифра}}][\underbrace{2p-(a-c)-1}_{\text{III цифра}}]$$

Можуть трапитись два випадки: або $2(a-c) < 2p+1$, або $2(a-c) > 2p+1$.

В першому випадку наступним членом нашої послідовності буде число

$$x_2 = [2p-1][2p-(a-c)][a-c-1] - [a-c-1][2p-(a-c)][2p-1] =$$
$$= (2p-1)(2p)^2 + (2p-(a-c))2p + a-c-1 - (a-c-1)(2p)^2 - (2p-(a-c))2p - 2p + 1 =$$
$$= (2p)^2(2p-1-(a-c-1)) + a-c-1-2p+1 = (2p)^2(2p-(a-c)) + a-c-2p =$$
$$= (2p)^2(2p-1-(a-c)) + 2p(2p-1) + a-c = [2p-1-(a-c)][2p-1][a-c],$$

аналогічно

$$x_3 = [2p-2-(a-c)][2p-1][a-c+1]$$

і продовжуємо цей процес побудови послідовності далі.

Звернемо увагу на такі особливості послідовності x_1, x_2, x_3, ... По-перше, сума першої і третьої цифри стала, а, по-друге, починаючи з x_2, перша цифра зменшується, а III збільшується на одиницю. Тому існує таке k, $k \leq p$, що

$$x_k=[p\text{-}1][2p\text{-}1][p]=(p-1)(2p)^2+(2p-1)2p+p=4p^3-p.$$

Далі знайдемо

$$x_{k+1}=(2p-1)(2p)^2+p\cdot 2p+p-1-p\cdot(2p)^2-(p-1)2p-2p+1=4p^3-p,$$

тобто починаючи з x_k, всі члени послідовності стають однаковими.

В другому випадку, тобто, коли $2(a-c)>2p+1$, провівши аналогічні міркування, знову отримаємо послідовність x_1, x_2, x_3, ..., яка стабілізується на числі $4p^3-p$. Що і треба було довести.

Окремі частинні випадки теореми запишемо у вигляді такої таблиці:

$2p$	$4p^3-p$	$2p$	$4p^3-p$
2	$3=(110)_2$	8	$252=(374)_8$
4	$30=(132)_4$	10	495
6	$78=(253)_6$	16	$2040(7F8)_{16}$

Можемо отримати ще й такий аналог теореми 495.

Теорема 499950. *Запишемо довільне шестизначне число. Розіб'ємо його на групи по дві цифри. Переставимо ці групи і отримаємо з них найбільше і найменше число. Знайдемо різницю цих чисел, а потім для цієї різниці повторимо процедуру. Тоді одержана послідовність стабілізується на числі 499950.*

Доведення.

Нехай перший член послідовності є число $\overline{abc}$, де a означає перші дві цифри, b - другі дві цифри, c - третя пара цифр і нехай $a\geq b\geq c$. Тоді наступним членом послідовності буде різниця $\overline{abc}-\overline{cba}=a\cdot 10^4+b\cdot 10^2+c-c\cdot 10^4-b\cdot 10^2-a=(a-c)9999$.

Різниця $a-c$ може набувати значень від 1 до 99. Залишилось перевірити твердження теореми для 99 чисел, що найпростіше зробити за допомогою комп'ютера.

Приклад. Візьмемо число 415423. Переставимо пари цифр і отримаємо число 544123. Віднімемо від нього число 234154, отримаємо 309969. Продовжимо будувати цю послідовність, далі через 20 кроків отримаємо сталу 499950.

Пропонуємо читачеві пошукати аналоги теореми 499950 в інших СЧ.

Теорема 6174. *Нехай задана така послідовність чотиризначних натуральних чисел: початковий член послідовності - довільне натуральне число з чотирма цифрами, які не всі рівні між собою; наступні члени послідовності - різниці між максимальним та мінімальним числами, які одержуються перестановками цифр попереднього члена послідовності. Тоді така послідовність стабілізується на числі 6174 і не пізніше, ніж на сьомому кроці.*

Доведення.

Нехай перший член нашої послідовності є число $\overline{abcd}$ і $a\geq b\geq c\geq d$, $a>d$. Тоді наступним членом буде число $\overline{abcd}-\overline{dcba}=999(a-d)+90(b-c)$. Різниця $u=a-d$ може набувати значень 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а різниця $v=b-c$ може набувати значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Залишилось перевірити справедливість теореми для чисел виду $999u + 90v$, а таких чисел всього $9\cdot10=90$.

В наведеній нижче таблиці вказано кількість кроків через які послідовність стабілізується в залежності від значень u та v.

$u\backslash v$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	4	3	3	7	7	7	3	3	4
2	4	3	6	5	2	7	2	5	6	3
3	6	3	5	6	3	5	3	6	5	3
4	4	7	2	3	4	5	4	3	2	7
5	6	7	7	5	5	5	5	5	7	7
6	6	7	2	3	4	5	4	3	2	7
7	4	3	5	6	3	5	3	6	5	3
8	6	3	6	5	2	7	2	5	6	3
9	4	4	3	3	7	7	7	3	3	4

Числа **495** та **6174** називаються сталими Капрекара, бо вперше ці числа були знайдені відомим індійським математиком Д.Р.Капрекаром зовсім недавно- в 1955 році. Про нього так писав Мартін Гарднер: “Капрекар малий ростом, та великий розумом і серцем”.

Теорема 153. *Нехай п довільне натуральне число, яке кратне 3. Тоді послідовність, кожний член якої є сума кубів цифр попереднього члена, стабілізується на числі 153.*

Доведення.

Спочатку твердження теореми перевіримо безпосередньо (от де місце комп’ютеру!) для чисел 3, 6, 9, 12, ..., 3000 (всього 1000 чисел).

Далі врахуємо те, що коли число ділиться на 3, то і сума кубів його цифр ділиться на 3 (доведіть це!).

Візьмемо довільне число $a > 3000$ і кратне 3. Будуємо для цього числа послідовність, визначену умовою теореми. Теорема буде доведена, якщо покажемо, що сума кубів цифр числа a менша, ніж це число. Справді, якщо число чотиризначне, то найбільшу суму кубів має число 9999, тобто 2916, а отже ця сума $< 3000 < a$. Якщо число a r-*значне* і $r > 4$, то сума кубів цифр такого числа буде менша, ніж $1000r < 10^{r-1}$, бо $r < 10^{r-4}$, якщо $r > 4$.

Природно виникає питання, а які отримаються послідовності, якщо брати не суму кубів цифр чисел, а, наприклад, суму четвертих степенів. В цьому випадку справедливі такі результати.

В залежності від того, яким буде початковий член послідовності, матимемо 6 різних випадків:

1. *послідовність стабілізується на 1;*
2. *послідовність стабілізується на числі 1634;*
3. *послідовність стабілізується на числі 8208;*
4. *послідовність стабілізується на числі 9474;*

5. *послідовність стає періодичною з періодом 2 та таким складом періоду: (6514, 2178);*
6. *послідовність стає періодичною з періодом 7 та таким складом періоду: (13139, 6725, 4338, 4514, 1138, 4179, 9219).*

Спочатку ці твердження перевіримо для всіх чисел $a \leq 32805$ безпосередньо, а потім візьмемо довільне число $a > 32805$. Будуємо для цього числа послідовність, визначену умовою теореми. Теорема буде доведена, якщо покажемо, що сума 4-х степенів цифр числа a менша, ніж це число. Справді, якщо число п'ятизначне, то найбільшу суму 4-х степенів цифр має число 99999, тобто 6561, а отже ця сума < 32805 < a. Якщо число a r-*значне* і $r > 5$, то сума четвертих степенів цифр такого числа буде менша, ніж $10000r < 10^{r-1}$, бо $r < 10^{r-5}$, якщо $r > 5$.

За допомогою комп'ютера неважко підрахувати кількість початкових членів послідовностей з проміжку [2, 32805] в тих, чи інших випадках. Маємо такі результати.

1. 24 числа породжують послідовність, яка стабілізується на числі 1; це або одиничка з нулями, або перестановки числа 11123.
2. 75 чисел породжують послідовність, яка стабілізується на числі 1634; найменше з них це число 1346.
3. 2055 чисел породжують послідовність, яка стабілізується на числі 8208; найменше з них це число 12.
4. 76 чисел породжують послідовність, яка стабілізується на числі 9474; найменше з них це число 4479.
5. 1326 чисел породжують послідовність, яка має період 2; найменше з них це число 66.
6. 29248 чисел породжують послідовність, яка має період 7**;** найменше з них це число 2.

10. Реальні числові системи

Числові множини, які використовуються в математиці - нескінченні множини. На практиці (див., наприклад, [17]) використовуються скінченні числові множини, елементами яких є тільки раціональні числа, найчастіше це системи з плаваючою комою (крапкою).

Означення. *Числова система (ЧС) дійсного типу називається системою з плаваючою комою, якщо кожне ненульове число x з цієї системи можна записати у вигляді*

$$x=\pm\left(\frac{x_1}{b}+\frac{x_2}{b^2}+\cdots+\frac{x_s}{b^s}\right)b^i,\ m\leq i\leq n.$$

В цьому представленні b-*основа* системи числення, i - *порядок* числа, s-кількість значучих цифр, m, n цілі числа, які дають *межі* порядку. Якщо, $x_1 \neq 0$, то представлення числа x називається *нормалізованим* (такі системи ще називаються нормалізованими обчислювальними системами з плаваючою комою, [2]). Скорочено число x записується так: $x=\pm 0.x_1x_2\ldots x_s\cdot b^i$, група цифр $x_1x_2\ldots x_s$ називається *мантисою* числа.

Всього в такій ЧС $2b^{s-1}(b-1)(n-m+1)+1$ чисел (разом з числом 0).

Таким чином, ЧС характеризується чотирма параметрами: b, s, m, n. На практиці найчастіше використовуються системи з b=2, 8, 10, 16. Відповідні значення s, m, n можуть сильно мінятися. Далі такі системи позначатимемо символом $Q(b, s, m, n)$. Наприклад, в мові Паскаль числові типи *Real* та *Single* це відповідно системи $Q(10, 11, -39, 38)$ та $Q(10, 7, -45, 38)$.

Як же виконуються дії над числами в таких ЧС? Арифметика в таких системах суттєво відрізняється від звичайної, це, насправді, *інтервальна* арифметика. Для того, щоб дати відповідь на поставлене питання найкраще розглянути конкретну ЧС, наприклад, систему $Q(10, 2, -1, 2)$. У цій системі всього 721 число. Додатних чисел в такій системі рівно 360, найменше з них це число 0.01, а найбільшим буде число 99. Якщо числа з цієї системи зобразити точками на числовій осі, то вони будуть розташовані нерівномірно. В проміжках (0.01, 0.1], (0.1, 1], (1, 9], (9, 99] (кожний наступний в 10 разів довший, ніж попередній) міститься по 90 чисел.

Уявимо собі, що таку ЧС використовують на практиці. В такому разі реальне число потрібно спочатку ідентифікувати (округлити) з якимось числом із системи Q. Це можна зробити, наприклад, так. Подамо всю числову вісь у вигляді об’єднання 722 проміжків:

$$(-\infty, -99), [-99, -98), [-98,-97),\ldots, [-0.011, -0.01), [-0.01,0),$$
$$[0, 0.01), [0.01, 0.011),\ldots, [99, \infty).$$

Тоді кожне дійсне число попаде в один і тільки один проміжок. Якщо наше число попадає в проміжок $(-\infty, -99)$, то воно не буде далі оброблятись, всі числа з цього проміжку ототожнюються з $-\infty$. Всі інші числа ототожнюються з лівим кінцем відповідного проміжку. В наближених обчисленнях описана процедура називається *округленням* чисел. При такому округленні відносна похибка не перевищує числа b^{1-s}.

Відмітимо, що спосіб ідентифікації реальних чисел з елементами ЧС не єдиний, наприклад, реальні числа можна було б ототожнювати з правим кінцем того проміжку, куди попало число, або з тим кінцем проміжку, який ближчий до реального числа, в останньому випадку відносна похибка при округленні не перевищує числа b^{1-s}. Взагалі, вибір арифметики в ЧС з плаваючою комою неоднозначний і тут керуються скоріше тим, як зручніше ці правила реалізуються в інженерних пристроях для виконання арифметичних дій.

Розглянемо одне з можливих правил виконання арифметичних дій в числовій системі $Q(10, 2, -1, 2)$, яке найближче до обчислювальної практики. Будемо вважати, що основні арифметичні дії на множині цілих чисел ми вміємо виконувати, бо існують технічні пристрої для реалізації таких дій. Крім того, будемо вважати, що в нашій числовій системі відомі значення чисел обернених до цифр, а саме:

$$\frac{1}{2}=0.5,\ \frac{1}{3}=0.33,\ \frac{1}{4}=0.25,\ \frac{1}{5}=0.2,\ \frac{1}{6}=0.16,\ \frac{1}{7}=0.14,\ \frac{1}{8}=0.12,\ \frac{1}{9}=0.11.$$

Перед виконанням дій числа спочатку потрібно нормалізувати.

Додавання. Нехай $x=0.x_1x_2\cdot10^k$, $y=0.y_1y_2\cdot10^p$. Знайти суму цих чисел означає знайти мантису цієї суми і її показник. Позначимо невідому суму через $z=0.z_1z_2\cdot10^r$. Матимемо

$$z=(10z_1+z_2)\cdot10^{r-2}=(10x_1+x_2)\cdot10^{k-2}+(10y_1+y_2)\cdot10^{p-2}.$$

Розглянемо випадки

1) $k=p$.
   a) $k=p=2$. Тоді $z_2=(x_2+y_2)$ mod 10, $z_1=((x_1+y_1)$ mod 10 + (x_2+y_2) div 10) mod 10, $r=k+(x_1+y_1+(x_2+y_2)$ div 10) div 10.
      Якщо при цьому виявиться, що $r>2$, то це означатиме, що в нашій числовій системі $x+y=99$, а якщо $r<-1$, то $x+y=0$.
   b) $k=p<2$. Тоді, якщо $(x_1+y_1+(x_2+y_2)$ div 10) div 10 =1 то $z_1=1$, $z_2=(x_1+y_1+(x_2+y_2)$ div 10) mod 10.
2) k-$p=1$. В цьому випадку числу y присвоїмо значення $y=0.0y_1\cdot 10^k$, а далі діємо як і у випадку 1).
3) k-$p>1$. В цьому випадку $x+y=x$.

Віднімання зводиться до додавання до зменшуваного числа, яке протилежне від'ємнику.

Наприклад, в нашій числовій системі

$$43.035 + 7.948 = 50,\ 43.035 - 7.948 = 35.$$

Множення. Для викладу правил множення і ділення досить обмежитись додатними числами. Маємо

$z=(10z_1+z_2)\cdot10^{r-2}=(10x_1+x_2)\cdot(10y_1+y_2)\cdot10^{k+p-4}=(100x_1y_1+10(x_1y_2+x_2y_1)+x_2y_2)\cdot10^{k+p-4}=$
$=(1000a_3+100a_2+10a_1+a_0)\cdot10^{k+p-4}$.

Розглянемо випадки.

1) Якщо $k+p=4$ або $k+p=3$ *і* $a_3\neq0$, то $x\cdot y=99$.
2) Якщо $k+p=3$, $a_3=0$, $a_2\neq0$, то $x\cdot y=0.a_2a_1\cdot10^2$.
3) Якщо $k+p=2$, $a_3\neq0$, то $x\cdot y=0.a_3a_2\cdot10^2$.
4) Якщо $k+p=2$, $a_3=0$, $a_2\neq0$, то $x\cdot y=0.a_2a_1\cdot10^1$.
5) Якщо $k+p=1$, $a_3\neq0$, то $x\cdot y=0.a_3a_2\cdot10$.
6) Якщо $k+p=1$, $a_3=0$, $a_2\neq0$, то $x\cdot y=0.a_2a_1$.
7) Якщо $k+p=0$, $a_3\neq0$, то $x\cdot y=0.a_3a_2$.
8) Якщо $k+p=0$, $a_3=0$, $a_2\neq0$, то $x\cdot y=0.a_2a_1\cdot10^{-1}$.
9) Якщо $k+p=-1$, $a_3\neq0$, то $x\cdot y=0.a_3a_2\cdot10^{-1}$.
10) Якщо $k+p=-1$, $a_3=0$ *і* $a_2\neq0$, або $k+p=-2$ *і* $a_3\neq0$, то $x\cdot y=0$.

Звернемо увагу на те, що наведені правила для додавання і множення в ЧС Q дають теоретичне обгрунтування правил підрахунку цифр при наближених обчисленнях, якщо за правило округлення наближених чисел брати правило відкидання цифр після відповідних розрядів числа.

Ділення. Ділення зводиться до множення на обернене число. Тому досить навчитися знаходити числа обернені до чисел ЧС Q. Тож нехай $x=0.x_1x_2\cdot10^k=(10x_1+x_2)\cdot10^{k-2}$. Звідси

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_1}\cdot\left(1-\frac{x_2}{10x_1}+\left(\frac{x_2}{10x_1}\right)^2-\cdots+\cdots\right)\cdot10^{1-k}.$$

В цьому виразі фігурує збіжний ряд, бо $\frac{x_2}{10x_1}<1$. Цей ряд в ЧС Q перетворюється в скінченну суму, бо члени ряду, які по модулю менші, ніж 0.01 в нашій ЧС дорівнюють нулю. Числа $\frac{1}{x_1}$ відомі і тому знаходження чисел $\frac{1}{x}$ зведеться до попередніх операцій.

Наприклад, нехай потрібно знайти число обернене до числа 2.72. Матимемо,

$$\frac{1}{2.72}=\frac{1}{2+0.72}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+0.36}=0.5\cdot(1-0.36+0.36^2-036^3+...)=$$

$$=0.5\cdot(1-0.36+0.36^2)=0.5\cdot(1-0.36+0.12)=0.38.$$

Особливістю арифметики в числових системах типу Q є те, що не всі закони звичайної арифметики будуть справедливими. Неважко навести конкретні приклади, які показують, що в таких системах вже не діють асоціативний та дистрибутивний закони відносно додавання і множення. Наприклад, нехай потрібно знайти значення такого виразу 23+85-92. У звичайній арифметиці як би ми не розставляли дужки це значення дорівнюватиме числу 12. В числовій системі Q: (23+85)-92=7, а 23+(85-92)=16.

Додаток

В цьому додатку наведено декілька програм мовою Pascal, які дозволяють знаходити коди чисел в деяких СЧ, породжених рекурсією.

1. Програма **Fibo_kod.pas** служить для знаходження кодів Фібоначчі натуральних чисел для СЧ на основі рекурентного співвідношення: $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$, з такими початковими значеннями: $U_0=1$, $U_1=2$. За допомогою цієї програми можна отримати коди золотої пропорції (1+sqrt(5))/2=1.6180339...

```
Program Fibo_kod;
type
   simvol = 0..1;
var
```

```
   a, b: array[0..100] of simvol;
   c: array[1..30] of integer;
   l: integer;
   v0, v1, v2, v, x, x1, j: longint;
   n, m, k, r: integer;
Begin
   repeat
      m:=0;
      writeln('v[r]: v[0]=1, v[9]=55, v[10]=89, v[11]=144, v[12]=233');
      writeln('v[13]=377, v[14]=610, v[15]=987');
      writeln('Введіть числа x, v, r'); writeln;
(* x - це число, для якого потрібно одержати код золотої пропорції,*)
(*число v це одне з чисел послідовності v[r];*)
(* для одержання звичайного бітового коду числа x взяти v=1, r=0*)
      read(x, v, r);
      j:=x; x:=x*v;
      for l:=0 to 100 do b[l]:=0;
      repeat
         v0:=1; v1:=2; n:=1; m:=m+1;
         x1:=x-v1;
         while x1>=0 do
         begin
            n:=n+1; v2:= v1+v0;
            v0:=v1; v1:=v2; x1:=x-v1;
         end;
         c[m]:=n;
         b[n]:=1; x:=x-v0;
      until x = 0;
      for k:=1 to c[1] do a[k]:=b[c[1]-k+1];
      x:=j;
      write(x,'='); for k:=1 to c[1]-r+1 do write(a[k],'');
      write('.'); for k:=c[1]-r+2 to c[1] do write(a[k],'');
      writeln;
   until x=1;
  (* Для виходу з програми введіть 1 1 1 *)
End.
```

2. Програма **Ternarn.pas** служить для знаходження тернарних кодів натуральних чисел для СЧ на основі рекурентного співвідношення: $U_{n+2}=2(U_{n+1}+U_n)$, з такими початковими значеннями: $U_0=1$, $U_1=2$. За допомогою цієї програми можна отримати також тернарний код в СЧ з основою $d=1+\sqrt{3}$.

```
Program  Ternarn;
type
```

```
   simvol = 0..2;
var
   b, a: array[0..100] of simvol;
   c: array[1..30] of integer;
   l: integer;
   v0, v1, v2, x, y, x1, j: longint;
   n, m, k, r, v: integer;
Begin
   repeat
      m:=0;
      writeln('v[r]: v[0]=1, v[6]=328, v[7]=896, v[8]=2448, v[9]=6688');
      writeln('Введіть числа x, v, r'); writeln;
(* x - це число, для якого потрібно одержати код в СЧ з d=1+sqrt(3), *)
(* число v це одне з чисел послідовності v[r]; *)
(* для одержання тернарного коду числа x взяти v=1. *)
      read(x, v, r); j:=x; x:=x*v;
      for l:=0 to 100 do b[l]:=0;
      repeat
         v0:=1; v1:=2; n:=1; m:=m+1;
         x1:=x-v1;
         while x1>=0 do
         begin
            n:=n+1; v2:=2*(v1+v0);
            v0:=v1; v1:=v2; x1:=x-v1;
         end;
         c[m]:=n;
         x1:=x-v0; y:=v1 div 2+v0;
         if ((x1=0) or (x1 < v0))
            then begin b[n]:=1; x:=x-v0 end
            else if (( x1 >= v0) and (x1 < y))
                    then begin b[n]:=2;x:=x-2*v0 end
                    else  if x1 >= y then begin b[n]:=2;b[n-1]:=1;x:=x-y end;
      until x = 0;
      for k:=1 to c[1] do a[k]:=b[c[1]-k+1];
      x:=j;
      write(x,'='); for k:=1 to c[1]-r do write(a[k],'');
      write('.'); for k:=c[1]-r+1 to c[1] do write(a[k],'');
      writeln;
   until x=1;
End.
```

3. Програма **Trit.pas** служить для знаходження врівноважених трітових кодів натуральних чисел в СЧ з основою b=1+$\sqrt{2}$.

```
Program  Trit;
var
  a,b,c:array[1..20] of integer;
  j, l, v0, v1, v2, n, m, x, x1, k: integer;
begin
   repeat
      m:=0;
      write('Введіть x'); writeln; read(x); j:=x;
      repeat
         v0:=-1; v1:=1; n:=1; m:=m+1; x1:=x-v1;
         while x1>0 do
         begin
              n:=n+1; v2:=2*v1+v0; v0:=v1; v1:=v2; x1:=x-v1;
         end;
         if 2*x-v1-1>=0  then
         begin
             x:=-x1; c[m]:=-n
         end
         else begin x:=x-v0; c[m]:=n-1 end
      until x1=0;
      a[1]:=1; c[m]:=n; c[m+1]:=0;
      for k:=1 to m do
      begin
         b[k]:=abs(c[k])-abs(c[k+1])-1;
         a[k+1]:=a[k]*abs(c[k]) div c[k]
      end;
      x:=j;
      write (x,'='); for k:=1 to m do
      if b[k]=0 then write(a[k]) else begin write(a[k]);
      for l:=1 to b[k] do write('0') end; writeln;
   until x=1;
end.
```

4. Програма **Byt_kod.pas** служить для знаходження бітових кодів натуральних чисел для СЧ на основі рекурентного співвідношення: $U_{n+3}=pU_{n+2}+qU_{n+1}+rU_n$, $U_0=1$, $U_1=2$, $U_2=3$.

```
Program Byt_kod;
type
   simvol =0..1;
var
   b, c: array[1..100] of simvol;
   p, q, r, l: integer;
   u0, u1, u2, v0, v1, v2, v3, x, x1, j: longint;
```

```
   n, m, k: integer;
Begin
   writeln('Введіть p, q, r, u0, u1, u2');
   read(p, q, r, u0, u1, u2);
   repeat
      m:=0;
      writeln('Введіть число x'); writeln; read(x); j:=x;
      repeat
         v0:=u0; v1:=u1; v2:=u2; n:=1; m:=m+1;
         x1:=x-v0;
         while x1>0 do
         begin
            n:=n+1; v3:=p*v2+q*v1+r*v0;
            v0:=v1; v1:=v2; v2:=v3; x1:=x-v0;
         end;
         c[m]:=n-1; x:=x-v3+p*v1+q*v0;
      until x1=0;
      c[m]:=n; c[m+1]:=0;
      for k:=1 to m do b[k]:=c[k]-c[k+1]-1;
      x:=j; write(x,'=');
      for k:=1 to m do if b[k]=0
                          then write('1')
                          else begin write('1');
                                  for l:=1 to b[k] do write('0')
                               end;
      writeln;
   until x=1;
End.
```

5. За допомогою програми **Kod_p_q.pas** можна отримувати коди натуральних чисел в СЧ, яка визначається рекурентним співвідношенням $U_{n+2}=pU_{n+1}+qU_n$, $U_0=1$, $U_1=2$, $p\geq q$.

```
Program Kod_p_q;
Uses Crt;
Const NN=10;
Type NewType=array[0..NN] of Longint;
Var
   X :LongInt;  P1, Q1: Word;
   P, Q, I, J, A: Integer;
   Ps,Qs :String; Un: NewType;
Procedure _Enter;
Begin
   Writeln('Введіть P,Q'); Readln(P, Q);
End;
```

```
Procedure _OutPut_1;
Begin
   Textcolor(14); Str(P:1,Ps); Str(Q:1,Qs);
   Writeln;
   Writeln('Y(n+2) = ',Ps,'*Y(n+1) + ',Qs,'*Yn');
   Writeln;
   Writeln('L^2 - ',Ps,'*L - ',Qs,' = 0');
   Writeln('Y0 = 1  &  Y1 = 2');
End;
Procedure _OutPut_2;
Begin
      Un[0]:=1;
      Un[1]:=2;
      For I:=2 to NN do Un[I]:=P1*Un[I-1]+Q1*Un[I-2];
End;
Procedure _X;
  Label Goto1,Goto3;
  Var Xn, Vsego, V, R: Longint;
       Koef: Word;
       Chisla, Koof: array[0..10] of Longint;
Begin
      Write('введіть X : ');
      Readln(X);
      I:=0; Vsego:=0; P:=-P;
      While X>Un[I] do I:=I+1;
      For V:=0 to 10 do
             If Un[V]=X then
                            begin
                                 Write('ÊÎÄ : ',1);
                                 For R:=I-1 downto 0 do Write(0);
                                Goto Goto3;
                            end;
      Xn:=0;
      For J:=I-1 downto 0 do
      begin
           For A:=1 to P+1 do
                 If A*Un[J]>X
                    then begin
                            Xn:=(A-1)*Un[J];
                            If Xn>X then Goto Goto1;
                            Koef:=A-1;
                            Vsego:=Vsego+Xn;
                            X:=X-Xn;
                            Chisla[J]:=Un[J];
```

```
                          Koof[J]:=Koef;
                          Goto1:
                        end
     end;
     Writeln('      ',Vsego:8);
     Textcolor(14);
     Write('ÊÎÄ : ');
     For J:=I-1 downto 0 do Write(Koof[J]);
     Textcolor(15);
     Goto3:
End;
Begin
     Clrscr;
     _Enter;
     P1:=P; Q1:=Q;
     _OutPut_1;
     P:=-P; Q:=-Q;
     _OutPut_2;
     Textcolor(15);
     Writeln;
     For I:=0 to 10 do Write(Un[I],'  ');
     Writeln('. . .');
     _X;
     ReadKey;
     Textcolor(15);
End.
```

Вправи

1. Скласти таблиці додавання цифр у СЧ: трійковій (q=3); п'ятірковій врівноваженій (q=5, $a_i \in \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$); четвірковій ($q$=4, $a_i \in \{\bar{1}, 0, 1, 2\}$).
2. В системі числення з основою q=5 замість цифр 0, 1, 2, 3, 4 використати цифри $\bar{1}$, 0, 1, 2, 3. Скласти таблицю додавання та множення цифр в цій системі.
3. В СЧ, яка розглянута в попередній задачі, виконати дії:

$$+\begin{array}{r} 231\bar{1} \\ \bar{1}2\bar{1}2 \\ \hline ? \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 33\bar{1}1\bar{1} \\ 3222\bar{1} \\ \hline ? \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 2\bar{1}1\bar{1} \\ 32\bar{1} \\ \hline ? \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 12\bar{1}\bar{1} \\ 1\bar{1}1 \\ \hline ? \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 2\bar{1} \\ \bar{1}3 \\ \hline ? \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 10\bar{1} \\ 2\bar{1} \\ \hline ? \end{array}$$

4. Сформулювати і довести ознаку подільності на 2 в системах числення: трійковій (q=3); трійковій врівноваженій.
5. Довести, що якщо в системі числення з основою q, $q \in N$, сума цифр числа A_q, які стоять на непарних місцях, дорівнює сумі цифр, які стоять на парних, або різниця цих сум кратна q+1, то число A_q кратне числу q+1.
6. Знайти основу q, $q \in N$, системи, в якій мають місце наступні ознаки подільності:

якщо сума цифр числа ділиться на 5, то саме число ділиться на 5;

якщо число, яке утворене двома останніми цифрами даного числа, ділиться на 7, то і саме число ділиться на 7.

7. Довести, що ціле число, яке записане в системі з непарною натуральною основою, непарне тоді і лише тоді, коли воно містить непарне число непарних цифр.
8. Довести, що якщо в деякому числі, яке записане в системі з основою q, довільно переставити цифри і відняти різницю між початковим і отриманим числами, то різниця буде кратна q - 1.
9. Людину, якій більше 9 і менше 100 років, просять записати число, яке відповідає її віку, три рази підряд (наприклад 373737). Довести, що отримане число ділиться на 7.
10. Розглянути чотиризначне число $abcd_{10}$, подати його у вигляді многочлена $a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$ і знайти значення цього многочлена. Якщо число, що отримали, ділиться на 7, то і початкове число ділиться на 7. Чи так це?
11. Квадрат цілого десяткового числа, яке складається більше ніж з однієї цифри, має цифру десятків рівну 7. Якою цифрою закінчується квадрат цього числа?
12. При нумерації сторінок книги була використана вісімкова система числення. Всього було використано 216_8 цифр. Скільки сторінок має книга?
13. Довести, що різниця чисел ($abcd_q$ - $dcba_q$), де $q \in N$, кратна числу q-1.
14. Сформулювати умови, яким повинні задовольняти основи p і q систем, для того що б при переході від запису правильних скінченних дробів, які

записані в системі з основою q, до їх запису в системі з основою p завжди отримувався скінченний дріб.

15. Дана сума чисел $abc_q + cba_q$. Показати, що подільність суми на q не залежить від середньої цифри.
16. Довести, що немає таких десяткових тризначних чисел, які при перестановці початкової цифри в молодший розряд числа збільшуються в 5, 6 або 8 разів.
17. Чотиризначне десяткове число записане лише парними цифрами і є повним квадратом. Знайти всі такі десяткові числа.
18. Яке найменше число гирь треба мати, щоб відважити довільне ціле число кілограмів від 1 до 30 на шалькових терезах, якщо гирі можна класти лише на *одну* шальку терез? (Ви можете підбирати таку вагу гирь, яку хочете.)
19. В умові попередньої задачі теж питання, але дозволяється класти гирі на *обидві* шальки терез.
20. Яке найменше число гирь треба мати для двох попередніх задач, щоб зважити любий вантаж (в ціле число грамів) від 1г до 1000г ?
21. Доведіть, що в трійковій системі числення (q=2) любе число N можна представити у вигляді $N=A-B$, де A, B і $A+B$ записуються лише нулями і одиничками, причому таке представлення для кожного числа єдине. Наприклад:

$$2 = 10 - 1,\ 21 = 101 - 10,\ 1001 = 1001 - 0$$

(всі числа записані в трійковій системі).

22. Задача Баше. Знайти набір з чотирьох гирь з допомогою яких на шалькових терезах можна зважити любий вантаж масою від 1 до 40 кг включно. При необхідності гирьки можна класти на обидві шальки терез.
23. Переведіть наступні 8-кові числа в 16-кові (використовуючи 16-кові цифри 0, 1, ..., F): 12; 5655; 2550276; 76545336; 3726755.
24. Покажіть, що довільне дійсне число (додатне, від'ємне або нуль) можна представити в десятковій СЧ за допомогою цифр -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (без цифри 9).
25. Чи можна довільне дійсне число (додатне, від'ємне або нуль) представити у "врівноваженій десятковій " СЧ, тобто представити у вигляді $\Sigma k \le n a_k \cdot 10^k$ для деякого цілого n і деякої послідовності a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., де кожне a_k це одне з десяти чисел $\left\{-4\frac{1}{2},\ -3\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{2},\ -1\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 4\frac{1}{2}\right\}$? (Відмітимо, що нуль не входить до числа "дозволених" цифр, проте неявно ми вважаємо, що всі цифри a_{n+1}, a_{n+2},... суть нулі.) Знайти всі представлення нуля в цій системі і всі представлення одиниці?
26. Сформулювати алгоритм заміни врівноваженого 5-кового коду в десятковий.
27. Скласти таблицю додавання та множення у врівноваженій СЧ з основою 5.
28. Замінити код числа $(1\bar{2}0\bar{1}1)_5$ на код цього числа у врівноваженій трійковій СЧ.

29. Замінити код числа $(11\bar{1}\bar{1}0\bar{1})_3$ на код цього числа у врівноваженій 5-ій СЧ.
30. Поділити число $x=(1\bar{2}021\bar{1})_5$ на число $y=(2\bar{1}\bar{2}1)_5$.
31. Розбити всі натуральні числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... на дві такі зростаючі послідовності $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ і $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$, що $b_k - a_k = k$ для довільного $k = 1, 2, 3, \ldots$. (Вказівка: записати цю послідовність не в десятковій, а у фібоначчієвій СЧ.)
32. *Довести, що послідовність

$$u_n=\begin{cases}\left(2^{n+1}+1\right)/3, \text{ якщо } n \text{ парне}\\ \left(2^{n+1}-1\right)/3, \text{ якщо } n \text{ непарне}, \ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{cases}$$

можна взяти за базисну бінарної СЧ. Скласти програму на якій-небудь мові програмування для одержання бітових кодів чисел в такій СЧ. Побудувати арифметику в такій СЧ.
33. *Довести, що число $1+\sqrt{2}$ може бути основою тернарної СЧ.
34. *Довести, що число $1+\sqrt{3}$ може бути основою тернарної СЧ.
35. *Знайти алгоритм отримання кодів натуральних чисел в тернарній СЧ з основою $1+\sqrt{2}$.
36. *Знайти алгоритм отримання кодів натуральних чисел в тернарній СЧ з основою $1+\sqrt{3}$.
37. ***Довести, що кожний корінь рівняння $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$ може бути основою бінарної СЧ.
38. ***Довести, що кожний корінь рівняння $\lambda^3 = \lambda^2 + 1$ може бути основою бінарної СЧ.
39. ***Довести, що кожний корінь рівняння $\lambda^3 = \lambda + 1$ може бути основою бінарної СЧ.
40. Побудувати СЧ на основі рекурентного співвідношення $u_{n+3} = u_{n+2} + u_n$. Скласти програму на мові Pascal для отримання кодів натуральних чисел в такій СЧ.
41. Побудувати СЧ на основі рекурентного співвідношення $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. Скласти програму на мові Pascal для отримання кодів натуральних чисел в такій СЧ.
42. Побудувати СЧ на основі рекурентного співвідношення $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$. Скласти програму на мові Pascal для отримання кодів натуральних чисел в такій СЧ.
43. **Нехай $b:=(p+\sqrt{p^2+4})/2$, $p\in N$. Довести, що довільне натуральне число x можна представити у вигляді скінченної лінійної комбінації різних цілих степенів числа b.
44. *Нехай $b=(9+\sqrt{85})/2$. Довести рівності:

$$b + 8b^{-1} + b^{-2} = 10,$$
$$b^2 + b + 7 + 8b^{-1} + 2b^{-2} = 1000,$$

$$b^3 + 2b^2 + 8b + 5 + b^{-1} + 2b^{-2} + 8b^{-3} + b^{-4} = 1000.$$

45. Будемо будувати послідовності так, як про це сказано в умові теореми 153, але починатимемо з чисел, які не кратні 3.
    a) Довести, що для чисел виду $3k+2$ такі послідовності стабілізуються на числах 371, або 407.
    b) Невідома проста ознака числа, яка породжує послідовність типу 371, чи 407.
    c) Дослідити послідовності, які породжуються числами виду $3k+1$.
46. Довести, що послідовність, яка породжується сумою квадратів цифр числа стабілізується або на 1, або стає періодичною з періодом 8 (склад періоду: 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20).
47. Дослідити послідовності, які породжуються сумами п'ятих степенів цифр числа.
48. Будемо записувати числа в трійковій системі числення і виконувати дії в цій системі. Будуватимемо послідовності, члени яких є сума кубів цифр попереднього числа. Довести, що коли перший член послідовності число непарне, то вона стабілізується, або на числі 1, або на 17; якщо ж парне, то послідовність стає періодичною з періодом 4.
49. Записати числа π та e в СЧ з основою b=27. Користуючись отриманим поданням знайти тернарні коди цих чисел.
50. **Довести твердження: які б не були натуральні числа m та $k_1>k_2>...>k_m$ сума $\varphi^{k_1} + \varphi^{k_2} + \ldots + \varphi^{k_m}$ не може бути цілим числом. Отримати звідси такий наслідок: ніяка лінійна комбінація з натуральними коефіцієнтами натуральних степенів числа φ не може бути цілим числом.

Відповіді

3. 2001, 120123, 1110, 1123, 112, 1331; **4**. "На два діляться ті і лише ті числа, в запису яких кількість "1" парна"; "на два діляться ті і лише ті числа, в запису яких парна кількість одиниць."; **6**. q=21; **10**. Да; **12**. 121; **14**. Необхідно і досить, щоб q було кратним p; **17**. 4624, 6084, 6400, 8464; **20**. 10, 7; **22**. 1, 3, 9 і 27 кг; **23**. A, BAD, AD0BE, FACADE, FADED.

Література

1. Арсак Ж. Программирование игр и головоломок: Пер. с франц. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. - 224с.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. - М.: Наука, 1986.-744с.
3. Бельский А.А., Калужнин Л.А. Деление с остатком.- К: Вища школа, 1977.- 72с.
4. Воробьёв Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. - 144с.
5. Гарднер М. Математические досуги. - М.: ОНИКЕ, 1995. - 496с.
6. Гарднер М. Путешествие во времени: Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - 371с.
7. Гутер Р.С. Вычислительные машины и системы счисления // Квант. - 1971. - №9.- С.1-6.
8. Касаткин В.Н. Новое о системах счисления. - К: Вища школа, 1982. - 96 с.
9. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: В 7 т.: Пер. с англ. - М.: Мир, 1977. - Т.2: Получисленные алгоритмы. - 726с.
10. Математика: Посібник для факультативних занять у 7 кл. / Г.П.Бевз, А.Г.Конфорович, З.О.Резніченко, Є.О.Ченакал; За ред. Г.П.Бевза. - К.: Рад. школа, 1982.- 152с.
11. Монахов В.М. Системы счисления и арифметические устройства электронных вычислительных машин // Математика в школе.- 1967. - №3.- С.39-48.- №4.- С.49-57.
12. Оре О. Приглашение в теорию чисел: Пер. с анг. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.- 128с.
13. Певи С. Шопф А. Системы счисления // Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
14. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. - М.: Знание, 1979. - 64с.
15. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. - М.: Радио и связь, 1984. - 152 с.
16. Фомин С.В. Системы счисления. - М.: Наука, 1980. - 48 с.
17. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.- М.: Мир, 1980.-280с.
18. Яглом И.М. Системы счисления // Квант. - 1970. - №6. - С.2-10.
19. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics magazine. - 1957. - № 31. - P.98-119.

Зміст

Волков Юрій Іванович
Войналович Наталія Михайлівна

ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Підписано до друку ________. Формат А5.
Папір газетний. Друк розіграф.
Ум. др. арк. ______. Тираж ___. Зам. № _____.

Редакційно-видавнича група інформаційного центру
Кіровоградського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка.
316050, Кіровоград-50, вул. Шевченка, 1.
Тел.: (0522) 29 31 63, 24-59-84.
Fax: (0522) 24 85 44.