Tampereen yliopisto

Christian Honkaniemi

LUONNOLLINEN PÄÄTTELY

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Toukokuu 2022

Tiivistelmä

Christian Honkaniemi: Luonnollinen päättely
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Toukokuu 2022

Tämän tutkielman tarkoituksena on esittää, mistä luonnollinen päättely sai alkunsa sekä esittää, miten luonnollisia päättelyitä käytännössä tehdään. Luonnollinen päättely on erittäin suosittu lähestymistapa eri logiikan osa-alueilla. Ensimmäisessä luvussa esitellään ja määritellään luonnollista päättelyä. Luonnollisen päättelyn systeemit ja aksiomaattinen menetelmä ovat kaksi lähestymistapaa formaaliin päättelyyn. Näistä luonnollinen päättely vastaa enemmän sitä, mitä päättely tarkoittaa matematiikassa ja arkipäiväisessä elämässä. Luonnolliselle päättelylle ei ole selkeää määritelmää. Tästä syystä se voi tarkoittaa jokaista järjestelmää, joka ei ole aksiomaattinen.

Toisessa luvussa käydään luonnollisen päättelyn historiaa. Tutustumme luonnollisen päättelyn kehitysvaiheisiin sekä siihen, ketkä ovat luonnollista päättelyä kehittäneet. Luonnollinen päättely sai alkunsa vuonna 1934, kun kaksi eri loogikkoa, Jaśkowski ja Gentzen, kehittivät luonnollisen päättelyn itsenäisesti tietämättä toisistaan. Gentzenin tavoitteena oli kehittää päättelysysteemi, joka vastaa matemaatikkojen päättelyprosessia todistuksia tehtäessä. Gentzenin ja Jaśkowskin julkaisujen jälkeen luonnollisesta päättelystä on ilmestynyt monia eri versioita ajan saatossa.

Tutkielman kolmannessa luvussa käydään läpi luonnollisen päättelyn säännöt lauselogiikassa. Näihin kuuluvat loogisten konnektiivien eliminointi- ja tuontisäännöt. Lisäksi tutkielmassa käydään läpi erilaisia merkintätapoja sekä esimerkkejä päättelytehtävistä. Käytännön esimerkkien avulla on helpompaa ymmärtää, miten luonnollista päättelyä tehdään. Lauselogiikan säännöt toimivat lisäksi muilla logiikan osa-alueilla, joten tutkielma toimii myös johdatuksena luonnolliseen päättelyyn kokonaisuudessaan. Luonnollinen päättelyn avulla on helpompaa tehdä monimutkaisempiakin päättelyitä. Voimme tutkielman pohjalta huomata, että luonnollinen päättely yksinkertaistaa päättelytehtäviä sekä tekee päättelystä, nimensä mukaisesti, luonnollisempaa.

Avainsanat: luonnollinen päättely, päättelysysteemi, lauselogiikka, propositiologiikka, päättelysäännöt

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustumme luonnolliseen päättelyyn. Rantalan ja Virtasen oppikirjan [1, s. 67] mukaan formaalin päättelyyn on kaksi erilaista lähestymistapaa: luonnollisen päättelyn systeemit ja aksiomaattinen menetelmä. Heidän mukaansa luonnollinen päättely vastaa päättelyä arkipäiväisessä elämässä ja matematiikassa, kun taas aksiomaattisessa menetelmässä annetaan joukko aksioomia ja vain pieni määrä päättelysääntöjä. Luonnolliselle päättelylle ei ole selkeää määritelmää. Termiä käytetään tosi laajasti, joten se tarkoittaa lähes jokaista järjestelmää, joka ei ole aksiomaattinen [2, s. 31]. Pelletier [3, s. 2] sanoo, että yksi luonnollisen päättelyn merkityksistä on se, että sitä käyttävät järjestelmät säilyttävät loogisen päättelyn luonnollisen rakenteen. Pelletier lisää, että näin järjestelmät eivät rajoitu esimerkiksi mihinkään konnektiivien osajoukkoon. Pelletierin mukaan toinen luonnollisen päättelyn ominaisuus on se, että luonnollisessa päättelyssä on kaksi sääntöä jokaiselle konnektiiville. Nämä ovat eliminointi- ja tuontisäännöt, jotka esitämme myös tässä tutkielmassa. Kolmanneksi ominaisuudeksi Pelletier mainitsee, että päättelysäännöt ovat luonnollisia. Toisin sanoen, luonnollinen päättely jäljittelee sitä, miten matemaatikko kirjoittaisi päättelyitä arkikielellä.

Tässä kirjoitelmassa käyn lisäksi läpi Fitchin merkintätapaa, mikä Indrzejczakin [2, s. 195] mukaan on luultavasti suosituin lähestymistapa luonnolliseen päättelyyn varsinkin modaalilogiikassa. Käyttämällä Fitchin kehittämää merkintätapaa voimme kirjoittaa lauseet ja kaavat eri riveille sekä merkitä tarvittavat alideduktiot selkeästi. Tämä tekee päättelyn seuraamisesta paljon helpompaa.

Luvussa 2 käymme luonnollisen päättelyn historiaa. Otamme selvää ketkä ovat luonnollisen päättelyn kehittäneet. Jaśkowski ja Gentzen ovat mitä luultavimmin luonnollisen päättelyn merkittävimmät henkilöt.

Seuraavaksi käymme pykälissä 3.1– 3.5 luonnollisen päättelyn säännöt ja ominaisuudet lauselogiikassa. Näihin kuuluvat eri konnektiivien eliminointi- ja tuontisäännöt. Samat säännöt toimivat lisäksi pohjana muille logiikan aloille.

Kolmanneksi otamme erilaisia esimerkkejä, joista voi hyvinkin tulla esiin, kuinka luonnollisen päättelyn sääntöjä käytetään Fitchin merkintätavalla. Esimerkit esitän pykälässä 3.6.

Lukijalta edellytämme logiikan peruskäsitteiden tuntemisen. Tutkielman päälähteinä on käytetty lähteitä [1], [2], ja [3].

2 Luonnollisen päättelyn historia

2.1 Luonnollisen päättelyn juuret

Luonnollinen päättely on melko uusi keksintö. Vuonna 1926 Łukasiewicz sanoi, että matemaatikot eivät tee todistuksia aksiomaattisen menetelmän avulla [3, s. 3]. Indrzejczakin [2, s. 29] mukaan vuonna 1934 kaksi loogikkoa, Jaśkowski ja Gentzen, julkaisivat uudet kehittämänsä järjestelmät. Tavoitteena oli kehittää systeemi, joka olisi mahdollisimman lähellä matemaatikkojen päättelyprosessia todistuksia tehtäessä [3, s. 4]. Jaśkowski käytti järjestelmästään termiä ”composite system”, kun taas Gentzen käytti termiä ”natural deduction system” [2, s. 29]. Pelletier [3, s. 1] kertoo, että Gentzen ja Jaśkowski kehittivät luonnollistä päättelya itsenäisesti tietämättä toisistaan. Myöhemmin satoihin eri oppikirjoihin on ilmestynyt monia eri versioita luonnollisesta päättelystä [2, s. 29].

Pelletier [3, s. 14] sanoo, että ensimmäinen modernin tyylisen luonnollisen päättelyn systeemin julkaisi W. V. Quine oppikirjassaan vuonna 1950. Pelletierin [3, s. 14] mukaan Tämä kirja toimi yhtenä tärkeimmistä luonnollisen päättelyn välittäjistä filosofeille ja loogikoille. Quine ei kuitenkaan ollut ainoa loogikko, joka kirjoitti omaa versiotaan luonnollisesta päättelystä noihin aikoihin. Pelletier [3, s. 18] kertoo, että samoihin aikoihin Frederic Fitch kirjoitti omaa oppikirjaansa, jonka hän julkaisi vuonna 1952. Fitch sanoo kirjassaan, että on käyttänyt omaa lähestymistapaansa opetuksessa jo 11 vuotta [3, s. 18]. Tämän oppikirjan tarkoituksena oli esittää tapa tehdä luonnollista päättelyä alekkain, mikä yksinkertaistaa monimutkaisten todistusten tekemistä [3, s. 18].

3 Luonnollinen päättely lauselogiikassa

Luonnollisessa päättelyssä valmiiksi annetusta ja todeksi oletetusta kaavasta päätellään jokin uusi lause käyttämällä loogisten konnektiivien eliminointi- ja tuontisääntöjä. Esimerkiksi jos tiedämme, että A on tosi ja $A \to B$ on tosi, niin voimme luonnollisen päättelyn sääntöjen avulla todeta, että myös kaavan B täytyy olla tosi.

Tässä osiossa käyn läpi luonnollisen päättelyn säännöt lauselogiikassa. Nämä säännöt toimivat pohjana luonnolliselle päättelylle myös muilla logiikan osa-alueilla, kuten predikaattilogiikassa.

3.1 Konjunktio

Ensimmäisenä käsitelemme konjunktiota. *Konjunktion eliminointisääntö* on seuraava:

$$\frac{A \land B}{A}, \qquad \frac{A \land B}{B}$$

[1, s. 73]. Tässä merkintätavassa laitamme oletukset viivan yläpuolelle ja johtopäätöksen viivan alapuolelle. Konjunktio vastaa sanaa *ja*. Tästä voimme melko luontevasti päätellä, että jos $A \land B$ on tosi, niin myös A sekä B ovat tosia.

Konjunktion tuontisääntö on vastaavanlainen:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \land B}$$

[1, s. 73]. Tässä säännössä tarvitsemme kaksi oletusta. Oletusten järjestyksellä ei kuitenkaan ole väliä tässä merkintätavassa. Triviaalisti, kun tiedämme, että A ja B ovat tosia, niin $A \land B$ on myös tosi.

3.2 Disjunktio

Disjunktion tuontisääntö on helppo ja yksinkertainen:

$$\frac{A}{A \lor B}, \qquad \frac{B}{A \lor B}$$

[1, s. 74]. Disjunktio vastaa yleisesti sanaa *tai*. Jos tiedämme, että A on tosi, voimme myös todeta disjunktion, jossa A esiintyy, todeksi.

Disjunktion eliminointisääntö on vaativampi. Tarvitsemme tämän säännön käyttöön kaksi apuoletusta. Käytämme tässä Fitchin merkintätapaa. Oletukset kirjoitamme ensimmäisen vaakaviivan yläpuolelle ja johtopäätökset alapuolelle. Apuoletusta käyttäessä teemme uuden sarakkeen, jossa apuoletus vaakaviivan yläpuolella ja johtopäätökset alapuolella. Eliminointisääntö on seuraavanlainen:

$$
\begin{array}{|l}
A \lor B \\ \hline
\begin{array}{|ll}
A & \quad \text{apuoletus} \\ \hline
\vdots & \\
C &
\end{array} \\
\\
\begin{array}{|ll}
B & \quad \text{apuoletus} \\ \hline
\vdots & \\
C &
\end{array} \\
C
\end{array}
$$

[1, s. 76]. Tämä saattaa näyttää monimutkaiselta. Kannattaa kuitenkin aina yrittää lukea loogiset säännöt sanallisesti. Tämän voikin tulkita Rantalan ja Virtasen [1, s. 76] mukaan niin, että jos oletuksesta A voidaan päätellä C ja oletuksesta B voidaan päätellä C, niin disjunktiosta $A \lor B$ voidaan päätellä C.

3.3 Implikaatio

Seuraavaksi käymme *implikaation eliminointisäännön*:

$$
\begin{array}{c}
A \\
A \to B \\ \hline
B
\end{array}
$$

[1, s. 72]. Implikaatio kertoo sen, että implikaation vasemmasta puolesta seuraa implikaation oikeapuoli. Kun siis oletamme A ja $A \to B$ todeksi, voimme niistä päätellä, että B on myös tosi.

Implikaation tuontisäännössä joudumme käyttämään apuoletusta:

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l}
 A \qquad\qquad \text{apuoletus} \\
 \hline
 \vdots \\
 B
 \end{array} \\
 & A \to B
\end{array}
$$

[1, s. 77]. Selvästi, jos kaavasta A ja muista annetuista oletuksista saamme johdettua kaavan B, niin $A \to B$ täytyy olla tosi.

3.4 Ekvivalenssi

Ekvivalenssin eliminointisääntö on:

$$
\begin{array}{c} A \\ A \leftrightarrow B \\ \hline B \end{array}, \qquad \begin{array}{c} B \\ A \leftrightarrow B \\ \hline A \end{array}
$$

ja *ekvivalenssin tuontisääntö* on:

$$
\begin{array}{c} B \to A \\ A \to B \\ \hline B \leftrightarrow A \end{array}
$$

[1, s. 79]. Ekvivalenssi tarkoittaa, että molemmilla puolilla ekvivalenssia tulee olla sama totuusarvo. Jos tiedämme, että A implikoi B:n, niin joko A ja B ovat molemmat tosia, tai A on epätosi. Jos taas tiedämme, että B implikoi A:n, niin joko B ja A ovat molemmat tosia, tai B on epätosi. Ekvivalenssi A:n ja B:n välillä tarkoittaa, että nämä molemmat implikaatiot ovat totta. Eli A:n ja B:n totuusarvojen täytyy olla samat. Voimme siis todeta, että kaavojen A ja B välillä on ekvivalenssi, mikäli kaavasta A seuraa B ja kaavasta B seuraa A.

3.5 Negaatio

Viimeisinä saantöinä lauselogiikassa ovat *negaation eliminointi-* ja *tuontisääntö*. Aloitetaan negaation eliminointisäännöstä:

$$
\frac{\neg\neg A}{A}
$$

[1, s. 74]. Negaation eliminointi menee triviaalisti, sillä negaatio käyttäytyy melko samalla tavalla kuin miinusmerkki. Siispä kaksi negaatiota kumoavat toisensa.

Negaation tuontisäännössä joudumme tekemään vastaoletuksen:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad \begin{array}{|l} \underline{A} \\ \vdots \\ B \land \neg B \end{array} & \text{vastaoletus} \\
\neg A &
\end{array}
$$

[1, s. 78]. Tehtävässä, jossa tulee todista jokin negaatio todeksi on hyvä tehdä apuoletus ja käyttää sitä vastaoletuksena. Idea negaation tuontisäännössä on, että teemme vastaoletuksen A joka johtaa ristiriitaan. Ristiriidan kohdatessa voimme todeta, että vastaoletus ei voi olla tosi, joten vastaoletuksen negaatio tulee olla tosi.

3.6 Esimerkkejä

Esitän tässä osiossa päättelytehtäviä käyttämällä Fitchin merkintätapaa. Tämä on mielestäni selkein ja helpoiten seurattava tapa tehdä luonnollista päättelyä. Päättelyissä numeroimme rivit, jotta voimme helposti viitata aikaisemmin esiintyviin kaavoihin. Lisäksi kirjoitamme oikeaan reunaan millä säännöllä kyseisen rivin kaavaan olemme päätyneet.

Esimerkki 3.1. Päättele $(A \leftrightarrow B), (B \land C) \vdash (A \leftrightarrow C)$. Eli todistetaan, että kaava $(A \leftrightarrow C)$ voidaan päätellä kaavoista $(A \leftrightarrow B)$ ja $(B \land C)$.

1	$(A \leftrightarrow B)$	premissi
2	$(B \wedge C)$	premissi
3	$\quad A$	apuoletus
4	$\quad C$	2, $\wedge$-Eliminointi
5	$(A \rightarrow C)$	3–4, $\rightarrow$-Tuonti
6	$\quad C$	apuoletus
7	$\quad B$	2, $\wedge$-Eliminointi
8	$\quad A$	1, 7, $\leftrightarrow$-Eliminointi
9	$(C \rightarrow A)$	6–8, $\rightarrow$-Tuonti
10	$(A \leftrightarrow C)$	5, 9, $\leftrightarrow$-Tuonti

Tässä esimerkissä onkin kaksi oletusta. Kirjoitamme ensin oletukset ylös. On melko selvää, että tulemme käyttämään päättelyssä ekvivalenssin tuontisääntöä. Joudumme siis todistamaan implikaatiot $(A \rightarrow C)$ ja $(C \rightarrow A)$. Tätä varten otamme ensin apuoletukseksi A:n ja päättelemme siitä C:n. Lisäksi otamme toiseksi apuoletukseksi C:n ja päättelemme siitä A:n. Teemme ensimmäisen apuoletuksen rivillä kolme. Neljännellä rivillä saamme soveltaa konjunktion eliminointisääntöä toiseen riviin. Koska A ja C on todistettu todeksi apuoletuksen kautta, voimme käyttää implikaation tuontisääntöä rivillä viisi. Olemme nyt todistaneet $(A \rightarrow C)$ todeksi. Seuraavaksi tavoite on todistaa $(C \rightarrow A)$. Teemme toisen apuoletuksen. Voimme edelliseen tapaan soveltaa konjunktion eliminointisääntöä toiseen riviin. Seuraavaksi sovellamme ekvivalenssin eliminointisääntöä ensimmäiseen ja seitsemänteen riviin. Koska B on todettu seitsemännellä rivillä, voimme ekvivalenssin eliminointisääntöa soveltaen todeta myös A. Seuraavaksi voimme soveltaa implikaation tuontisääntöä. Rivillä kuusi tehdyn apuoletuksen avulla saimme pääteltyä $(C \rightarrow A)$ todeksi. Lopuksi voimme ekvivalenssin tuontisääntöä soveltaen todistaa esimerkin väitteen pätevyys. On siis päätelty, että $(A \leftrightarrow B), (B \wedge C) \vdash (A \leftrightarrow C)$.

Esimerkki 3.2. Päättele $(A \to B) \vdash (\neg B \to \neg A)$

1	$(A \to B)$	premissi
2	$\quad \neg B$	apuoletus
3	$\quad\quad A$	apuoletus
4	$\quad\quad B$	1, 3, $\to$-Eliminointi
5	$\quad\quad (B \land \neg B)$	2, 4, $\land$-Tuonti
6	$\quad \neg A$	3–5, $\neg$-Tuonti
7	$(\neg B \to \neg A)$	2–6, $\to$-Tuonti

Ottakaamme ensimmäisenä apuoletukseksi toiselle riville $\neg B$. Yritämme todistaa kaavan $\neg A$ todeksi tälle samalle sarakkeelle, jotta voimme soveltaa implikaatioin tuontisääntöä. Ottakaamme A apuoletukseksi kolmannelle riville. Koska A on totta, voimme soveltaa implikaation eliminointisääntöä ensimmäiseen ja kolmanteen riviin. saamme siis todistettua B:n todeksi. Voimme huomata, että molemmat B ja $\neg B$ ovat tosia. Nyt voimme viidennellä rivillä soveltaa konjunktion tuontisääntöä, minkä avulla saamme ristiriidan. Kuudennella rivillä käytämme negaation tuontisääntöä. Koska oletettaessamme A:n todeksi päädyimme ristiriitaan, täytyy $\neg A$ olla totta. Lopuksi seitsemännellä rivillä sovellamme implikaation tuontisääntöä riveihin 2–6. Ensimmäisessä apuoletus sarakkeessa olemme todenneet sekä $\neg B$:n että $\neg A$:n todeksi. On siis helppoa todeta implikaatio todeksi. Olemme siis todistaneet $(A \to B) \vdash (\neg B \to \neg A)$.

Seuraava esimerkki on hieman monimutkaisempi. Teemme useamman apuoletuksen sekä käytämme useampia sääntöjä. Selkeyden vuoksi käytämme myös *iteraatiosääntöä*, jonka mukaan edellä mainittu kaava tai todeksi todettu kaava voidaan kirjoittaa uudestaan [1, s. 73]. Merkitsemme sitä kirjaimella R. Sääntö ei sinänsä ole pakollinen, mutta se voi tehdä todistuksesta helpommin seurattavan.

Esimerkki 3.3. Päättele $(\neg A \lor B) \vdash (A \to B)$.

1	$(\neg A \lor B)$	premissi
2	$\neg A$	apuoletus
3	A	apuoletus
4	$\neg B$	apuoletus
5	$(A \land \neg A)$	2, 3, $\land$-Tuonti
6	$\neg\neg B$	4–5, $\neg$-Tuonti
7	B	6, $\neg$-Eliminointi
8	$(A \to B)$	3–7, $\to$-Tuonti
9	B	apuoletus
10	A	apuoletus
11	B	10, R
12	$(A \to B)$	11–12, $\to$-Tuonti
13	$(A \to B)$	1–13, $\lor$-Eliminointi

Tässä esimerkissä pääsimme käyttämään monia luonnollisen päättelyn sääntöjä. Ensin teemme kolme apuoletusta. Viidennellä rivillä sovellamme konjunktion tuontisääntöä toiseen ja kolmanteen riviin. Kuudennella rivillä sovellamme negaation tuontisääntöä riveihin neljä ja viisi. Näin saamme lisätty negaation edelliseen apuoletuksen eteen. Seitsemännellä rivillä käytämme negaation eliminointisääntöä ja saamme todettua todeksi B. Kahdeksannella rivillä sovellamme implikaation tuontisääntöä. Tähän tarvitsemme kaikkia rivejä kolmannesta seitsemänteen. yhdeksännellä rivillä teimme uuden apuoletuksen disjunktion eliminointisäännön mukaan. Otamme apuoletuksen käyttöön myös rivillä 10. Rivillä 11 kirjoitamme edellä mainitun ja todeksi todetun kaavan uudestaan. Käytämme siis iteraatiosääntöä. Rivillä 12 saamme implikaation tuontisääntöä hyödyntäen todettu $(A \to B)$. Lopuksi soveltamalla disjunktion eliminointisääntöä voimme jokaisen rivin 1–12 nojalla todeta, että $(\neg A \lor B) \vdash (A \to B)$.

Lähteet

[1] Rantala, V. & Virtanen, A. *Logiikan peruskurssi*. Tampere: Tampereen yliopisto, 2003.

[2] Indrzejczak, A. *Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics*. Dordrecht: Springer, 2010.

[3] Pelletier, F.J. A brief history of natural deduction. *History and Philosophy of logic* 20: 1-31. London: Taylor & Francis, 1999.