Viivi Kivelä

USEAN MUUTTUJAN FUNKTION JATKUVUUS JA JOUKON YHTENÄISYYS

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Huhtikuu 2022

Tiivistelmä

Viivi Kivelä: Usean muuttujan funktion jatkuvuus ja joukon yhtenäisyys
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Huhtikuu 2022

Tässä tutkielmassa käsitellään usean muuttujan funktion jatkuvuutta sekä joukon yhtenäisyyttä. Luvussa 2 tarkastellaan suppenemisen määritelmää sekä komponenttikohtaista suppenemista. Suppeneminen liittyy läheisesti jatkuvuuteen, jota käsitellään luvussa 3.

Luvussa 3 laajennetaan analyysin kursseilta tuttua jatkuvuuden käsitettä koskemaan usean muuttujan funktiota. Ensimmäisessä pykälässä jatkuvuus määritellään suppenemisen sekä $\epsilon - \delta$-ehdon avulla. Toisessa pykälässä todistetaan funktion olevan jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, jos ja vain jos sen jokainen komponenttifunktio on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Tätä ehtoa kutsutaan komponenttikohtaiseksi jatkuvuusehdoksi. Jatkuvuuden perustuloksia tarkastellaan kolmannessa pykälässä. Tutkielmassa todistetaan summan, tulon ja osamäärän vaikutus funktion jatkuvuuteen, sekä milloin yhdistetty funktio on jatkuva.

Luvussa 4 todistetaan avointa joukkoa koskeva lause, joka liittää funktion jatkuvuuden joukon avoimuuteen. Seuraavassa pykälässä määritellään polkuyhtenäisyys sekä todistetaan joukon $\mathbb{R}$ osajoukon olevan polkuyhtenäinen, jos ja vain jos se on väli. Lisäksi todistetaan, että jos joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko on polkuyhtenäinen osajoukko ja f jatkuva funktio, niin myös kuva $f(A)$ on polkuyhtenäinen ja siksi myös väli. Tällaisella jatkuvalla funktiolla, jonka kuva on väli, on jatkuvien funktioiden väliarvolauseen ominaisuudet.

Viimeisessä pykälässä yhtenäinen joukko määritellään kahden avoimen joukon avulla. Joukko A on yhtenäinen, jos ei ole olemassa kahta avointa joukkoa, jotka erottavat joukon A. Lisäksi todistetaan joukon $\mathbb{R}$ osajoukon olevan yhtenäinen, jos ja vain jos se on väli, sekä osoitetaan yhtenäisellä joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukolla olevan jatkuvien funktioiden väliarvolauseen ominaisuudet. Pykälässä todistetaan myös jokaisen polkuyhtenäisen joukon olevan yhtenäinen, mutta huomataan, ettei jokainen

yhtenäinen joukko ole polkuyhtenäinen.

Avainsanat: jatkuvuus, komponenttifunktio, avoin joukko, polkuyhtenäisyys, polku, väli, yhtenäisyys

Sisällys

1 Johdanto

Luvussa 2 tarkastelemme suppenemisen määritelmää sekä komponenttikohtaista suppenemista. Suppeneminen liittyy läheisesti jatkuvuuteen, jota käsittelemme luvussa 3.

Luvussa 3 laajennamme analyysin kursseilta tuttua jatkuvuuden käsitettä koskemaan usean muuttujan funktiota. Määrittelemme jatkuvuuden suppenemisen sekä $\epsilon - \delta$-ehdon avulla. Pykälässä 3.2 todistamme, että funktio on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, jos ja vain jos sen jokainen komponenttifunktio on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Tätä ehtoa kutsumme komponenttikohtaiseksi jatkuvuusehdoksi. Jatkuvuuden perustuloksia tarkastelemme pykälässä 3.3. Todistamme summan, tulon ja osamäärän vaikutuksen funktion jatkuvuuteen, sekä milloin yhdistetty funktio on jatkuva.

Todistamme avoimeen joukkoon liittyvän lauseen pykälässä 4.1, sillä käytämme kyseistä lausetta apuna luvun 4 todistuksissa. Pykälässä 4.2 määrittelemme polkuyhtenäisyyden sekä todistamme, että joukko A on polkuyhtenäinen, jos ja vain jos se on väli. Lisäksi todistamme, että jos A on polkuyhtenäinen osajoukko ja f jatkuva funktio, niin myös kuva $f(A)$ on polkuyhtenäinen ja siksi myös väli. Tällaisella jatkuvalla funktiolla, jonka kuva on väli, on jatkuvien funktioiden väliarvolauseen ominaisuudet.

Pykälässä 4.3 määrittelemme yhtenäisen joukon sekä todistamme, että joukko on yhtenäinen, jos ja vain jos se on väli. Lisäksi todistamme jokaisen polkuyhtenäisen joukon olevan yhtenäinen, mutta huomaamme, ettei jokainen yhtenäinen joukko ole polkuyhtenäinen.

Lukijan oletamme hallitsevan analyysi A -kurssin sisällöt ja tuntevan yhden muuttujan funktion jatkuvuuden määritelmän. Lisäksi oletamme lukijan tuntevan joukko-opin laskusäännöt, kuten osittelulait ja liitännäisyyden. Lähdekirjallisuutena käytämme pääasiassa Fitzpatrickin kirjaa Advanced Calculus. Lisäksi käytämme Kumarin teosta Advanced Calculus of Several Variables sekä Shurmanin kirjaa Multivariable Calculus.

2 Suppeneminen

Tästä eteenpäin merkintä $\mathbb{R}^n$ tarkoittaa tilannetta, jossa $n > 1$. Merkitsemme funktiota pienellä kirjaimella, jos sen maalijoukko on $\mathbb{R}$, esimerkiksi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Käytämme isoa kirjainta tapauksessa $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Määritelmä 2.1. Olkoon $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ pisteiden jono ja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ piste. Jono $\{\mathbf{u}_k\}$ *suppenee pisteeseen* $\mathbf{u}$, jos jokaista positiivista lukua ϵ kohti on olemassa sellainen indeksi K, että

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) < \epsilon, \quad \forall k \geq K.$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{u},$$

jolloin $\mathbf{u}$ on jonon $\{\mathbf{u}_k\}$ *raja-arvo*.

Määritelmä 2.2. Pistejono $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *suppenee komponenteittain pisteeseen* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, jos jokaisella $1 \leq i \leq n$ on voimassa,

$$\lim_{k\to\infty} p_i(\mathbf{u}_k) = p_i(\mathbf{u}).$$

Lause 2.1. *Olkoot jono* $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *ja piste* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$*. Täten* $\{\mathbf{u}_k\}$ *suppenee pisteeseen* $\mathbf{u}$*, jos ja vain jos* $\{\mathbf{u}_k\}$ *suppenee komponenteittain pisteeseen* $\mathbf{u}$.

Todistus. Ks. [1, s. 280]. □

3 Jatkuvuus

3.1 Määritelmiä

Tässä pykälässä määritämme jatkuvuuden suppenemisen 3.1 sekä $\epsilon - \delta$-ehdon 3.2 avulla (vrt.[1, s. 290,294]). Lisäksi osoitamme, että molemmat määritelmät ovat ekvivalentteja lauseessa 3.2.

Määritelmä 3.1 (Jatkuvuus)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$.

1. Funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on *jatkuva pisteessä* $\mathbf{u} \in A$, jos aina, kun jono $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq A$ suppenee pisteeseen $\mathbf{u}$, niin kuvajono $\{F(\mathbf{u}_k)\}$ suppenee pisteeseen $F(\mathbf{u})$.
2. Funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on *jatkuva joukossa* A, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Lause 3.1. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{u} \in A$. Olkoon funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Tällöin jonolle $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq A$ pätee,*

$$\textit{jos} \lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) = 0, \quad \textit{niin} \lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}(F(\mathbf{u}_k), F(\mathbf{u})) = 0.$$

Todistus. Seuraa suoraan jatkuvuuden määritelmästä 3.1 ja suppenemisen määritelmästä 2.1. □

Määritelmä 3.2 ($\epsilon - \delta$-jatkuvuus)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$. Millä tahansa $\mathbf{u} \in A$, funktio F on *$\epsilon - \delta$-jatkuva pisteessä* $\mathbf{u}$, jos kaikilla positiivisilla luvuilla ϵ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\text{jos } \mathbf{v} \in A \text{ ja } \mathrm{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) < \delta, \quad \text{niin } \mathrm{dist}(F(\mathbf{v}), F(\mathbf{u})) < \epsilon.$$

Funktio F on *$\epsilon - \delta$-jatkuva joukossa* A, jos se on $\epsilon - \delta$-jatkuva jokaisessa pisteessä $\mathbf{u} \in A$.

Lause 3.2 (Määritelmät 3.1 ja 3.2 ovat ekvivalentteja)**.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$. Funktio F on jatkuva joukossa A, jos ja vain jos se on $\epsilon - \delta$-jatkuva joukossa A.*

Todistus (vrt. [3, s. 276]). Oletamme, että $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Todistaaksemme $\epsilon - \delta$-jatkuvuuden, teemme vastaväitteen: funktio ei ole $\epsilon - \delta$-jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Täten määritelmän 3.2 nojalla, on olemassa jokin luku $\epsilon_0 > 0$, jolle $\epsilon - \delta$-kriteeri ei ole voimassa. Siis kun $\epsilon = \epsilon_0$, niin ei ole olemassa sellaista $\delta > 0$, jolle määritelmä 3.2 pitää paikkansa. Olkoon k luonnollinen luku. Täten funktio ei ole $\epsilon - \delta$-jatkuva, kun $\epsilon = \epsilon_0$ ja $\delta = \frac{1}{k}$. Tällöin määritelmän 3.2 mukaan jokaisella luonnollisella luvulla k on olemassa piste $\mathbf{u}_k \in A$ siten, että

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) < \delta = \frac{1}{k}, \quad \text{mutta } \operatorname{dist}(F(\mathbf{u}_k), F(\mathbf{u})) \geq \epsilon = \epsilon_0.$$

Koska $\operatorname{dist}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) < \delta$, niin jono $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq A$ suppenee pisteeseen $\mathbf{u}$. Koska funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva, niin $\{F(\mathbf{u}_k)\}$ suppenee pisteeseen $F(\mathbf{u})$. Täten

$$\operatorname{dist}(\{F(\mathbf{u}_k)\}, F(\mathbf{u})) < \epsilon$$

ja päädymme ristiriitaan. Funktio F on $\epsilon - \delta$-jatkuva joukossa A.

Todistamme väitteen vastakkaiseen suuntaan. Oletamme, että funktio F on $\epsilon - \delta$-jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$ ja osoitamme, että se toteuttaa määritelmän 3.1. Olkoon $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq A$, joka suppenee pisteeseen $\mathbf{u}$. Olkoon $\epsilon > 0$. Silloin $\epsilon - \delta$-jatkuvuudesta pisteessä $\mathbf{u}$ ja määritelmästä 3.2 seuraa, että

$$\text{jos } \operatorname{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) < \delta, \quad \text{niin } \operatorname{dist}(F(\mathbf{v}), F(\mathbf{u})) < \epsilon. \tag{3.1}$$

Lisäksi koska $\{\mathbf{u}_k\}$ suppenee pisteeseen $\mathbf{u}$, niin on olemassa sellainen K, että

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) < \delta, \quad \forall k \geq K. \tag{3.2}$$

Merkitsemme $\mathbf{u}_k = \mathbf{v}$. Täten kohdasta (3.2) seuraa, että $\operatorname{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) < \delta$. Ja täten kohdasta (3.1) seuraa, että $\operatorname{dist}(F(\mathbf{v}), F(\mathbf{u})) < \epsilon$. Täten

$$\operatorname{dist}(F(\mathbf{u}_k), F(\mathbf{u})) < \epsilon, \quad \forall k \geq K.$$

Siis määritelmän 2.1 nojalla $\{F(\mathbf{u}_k)\}$ suppenee pisteeseen $F(\mathbf{u})$ ja funktio F on jatkuva joukossa A. □

3.2 Komponenttikohtainen jatkuvuusehto

Määritelmä 3.3. Funktion $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ yhdistettä i:nnen komponettikuvauksen kanssa kutsutaan *i:nneksi komponettifunktioksi* $F_i\colon A \to \mathbb{R}$, jossa $A \subset \mathbb{R}^n$ ja indeksi $1 \leq i \leq n$. Täten,

$$F(\mathbf{u}) = (F_1(\mathbf{u}), \ldots, F_m(\mathbf{u})), \quad \forall \mathbf{u} \in A$$

ja funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ voidaan esittää sen komponenttifunktioiden avulla

$$F(\mathbf{u}) = (F_1(\mathbf{u}), \ldots, F_m(\mathbf{u}))\colon A \to \mathbb{R}^m.$$

Esimerkki 3.1. Määrittelemme funktion $F(x, y, z) = (x^2y, x + yz, y)$. Täten sen komponenttifunktiot ovat $F_1(x, y, z) = x^2y$, $F_2(x, y, z) = x + yz$ ja $F_3(x, y, z) = y$.

Lause 3.3. *Komponenttikuvaus $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva jokaisella indeksillä i, missä $1 \leq i \leq n$.*

Todistus (vrt. [1, s. 290–291]). Olkoon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Oletamme, että jono $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ suppenee kohti pistettä $\mathbf{u}$. Koska $\{\mathbf{u}_k\}$ suppenee pisteeseen $\mathbf{u}$, niin lauseen 2.1 nojalla, se suppenee komponenteittain pisteeseen $\mathbf{u}$. Täten määritelmän 2.2 mukaan jokaisella indeksillä $1 \leq i \leq n$,

$$\lim_{k\to\infty} p_i(\mathbf{u}_k) = p_i(\mathbf{u}).$$

Täten komponenttikuvaus $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Lisäksi, koska $\mathbf{u}$ on mielivaltaisesti valittu piste, niin $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä. Täten $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva. □

Lause 3.4 (Komponenttikohtainen jatkuvuusehto)**.** *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{u} \in A$. Määrittelemme funktion*

$$F(\mathbf{u}) = (F_1(\mathbf{u}), \ldots, F_m(\mathbf{u}))\colon A \to \mathbb{R}^m.$$

Täten funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, jos ja vain jos sen jokainen komponenttifunktio $F_i\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$.

Todistus (vrt. [1, s. 294]). "⇒" Olkoon $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ jatkuva pisteessä $\mathbf{u} \in A$. Täten määritelmän 3.2 nojalla, kaikilla luvuilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\operatorname{dist}(F(\mathbf{v}), F(\mathbf{u})) < \epsilon, \quad \text{kun } \operatorname{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) < \delta \text{ ja } \mathbf{v} \in A.$$

Todistamme, että kun funktio F on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, niin myös komponenttifunktio F_i on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Nyt kaikilla $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned}
&|F_i(\mathbf{v}) - F_i(\mathbf{u})| \\
&\quad = \sqrt{[F_i(\mathbf{v}) - F_i(\mathbf{u})]^2} \\
&\quad \leq \sqrt{(F_1(\mathbf{v}) - F_1(\mathbf{u}))^2 + \cdots + (F_i(\mathbf{v}) - F_i(\mathbf{u}))^2 + \cdots + (F_m(\mathbf{v}) - F_m(\mathbf{u}))^2} \\
&\quad = \|F_1(\mathbf{v}) - F_1(\mathbf{u}), \ldots, F_i(\mathbf{v}) - F_i(\mathbf{u}), \ldots, F_m(\mathbf{v}) - F_m(\mathbf{u})\| \\
&\quad = \operatorname{dist}(F(\mathbf{v}), F(\mathbf{u})) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Siis jokainen komponenttifunktio $F_i\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, kun $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$.

"$\Leftarrow$" Olkoon jokainen komponenttifunktio $F_i \colon A \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Todistamme, että funktio F on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, kun F_i on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Määritelmän 3.2 nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $1 \le i \le m$,

$$|F_i(\mathbf{v}) - F_i(\mathbf{u})| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}, \quad \text{kun } \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < \delta.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
&\|F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{u})\| \\
&\quad = \|F_1(\mathbf{v}) - F_1(\mathbf{u}), \ldots, F_i(\mathbf{v}) - F_i(\mathbf{u}), \ldots, F_m(\mathbf{v}) - F_m(\mathbf{u})\| \\
&\quad = \sqrt{(F_1(\mathbf{v}) - F_1(\mathbf{u}))^2 + \cdots + (F_i(\mathbf{v}) - F_i(\mathbf{u}))^2 + \cdots + (F_m(\mathbf{v}) - F_m(\mathbf{u}))^2} \\
&\quad < \sqrt{\left[\frac{\epsilon}{\sqrt{m}}\right]^2 + \cdots + \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{m}}\right]^2 + \cdots + \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{m}}\right]^2} \\
&\quad = \sqrt{m \cdot \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{m}}\right]^2} = \sqrt{m \cdot \frac{\epsilon^2}{m}} \\
&\quad = \epsilon.
\end{aligned}$$

Täten $F \colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, kun jokainen komponenttifunktio $F_i \colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. □

3.3 Perustuloksia

Tässä pykälässä todistamme jatkuvuuteen liittyviä perustuloksia, kuten jatkuvien funktioiden summan ja tulon jatkuvuuden.

Lause 3.5. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{u} \in A$. Oletamme, että funktiot $h \colon A \to \mathbb{R}$ ja $g \colon A \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia pisteessä $\mathbf{u}$. Tällöin millä tahansa reaaliluvuilla α ja β, funktio*

$$\alpha h + \beta g \colon A \to \mathbb{R}$$

on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Lisäksi tulo

$$h \cdot g \colon A \to \mathbb{R}$$

ja osamäärä

$$\frac{h}{g} \colon A \to \mathbb{R}, \quad \text{jos } g(\mathbf{v}) \neq 0 \text{ kaikilla } \mathbf{v} \in A,$$

ovat jatkuvavia pisteessä $\mathbf{u}$.

Todistus (vrt. [1, s. 291–292]). Olkoon funktiot $h\colon A \to \mathbb{R}$ ja $g\colon A \to \mathbb{R}$ jatkuvia pisteessä $\mathbf{u}$. Oletetaan, että jono $\{\mathbf{u}_k\}$ suppenee pisteeseen $\mathbf{u}$. Täten määritelmän 2.1 nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{u}.$$

Jatkuvuudesta seuraa, että jonot $\{h(\mathbf{u}_k)\}$ ja $\{g(\mathbf{u}_k)\}$ suppenevat pisteisiin $h(\mathbf{u})$ ja $g(\mathbf{u})$. Nyt analyysi A -kurssilta tuttujen suppenevien lukujonojen ominaisuuksista seuraa, että jatkuvien reaalifunktioiden summa, tulo sekä osamäärä ovat jatkuvia pisteessä $\mathbf{u}$. □

Esimerkki 3.2. Tutkimme funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuvuutta, kun

$$f(x, y, z) = 2x - yz^2, \quad (x, y, z) \in A.$$

Lauseen 3.5 perusteella jatkuvien funktioiden summa- ja tulofunktiot ovat jatkuvia. Täten $f(x, y, z) = 2x - yz^2$ on jatkuva, sillä funktiot $2x, -y$ sekä z^2 ovat jatkuvia jokaisessa pisteessä $(x, y, z) \in A$.

Seuraus 3.1. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{u} \in A$. Oletamme, että funktiot $H\colon A \to \mathbb{R}^m$ ja $G\colon A \to \mathbb{R}^m$ ovat molemmat jatkuvia pisteessä $\mathbf{u}$. Tällöin kaikilla reaaliluvuilla α ja β funktio*

$$\alpha H + \beta G\colon A \to \mathbb{R}^m$$

on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$.

Todistus (vrt. [1, s. 294]). Oletamme, että funktiot $H\colon A \to \mathbb{R}^m$ ja $G\colon A \to \mathbb{R}^m$ ovat molemmat jatkuvia pisteessä $\mathbf{u}$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Määritelmän 3.3 nojalla, voimme jakaa funktiot komponenttifunktioihin $H_i\colon A \to \mathbb{R}$ ja $G_i\colon A \to \mathbb{R}$. Koska lauseen 3.4 mukaan, pisteessä $\mathbf{u}$ jatkuvan funktion komponenttifunktiot ovat jatkuvia pisteessä $\mathbf{u}$, niin voimme käsitellä jokaista komponenttifunktiota erikseen. Määrittämällä indeksi i välille $1 \leq i \leq n$ saamme summafunktion

$$\alpha H_i + \beta G_i\colon A \to \mathbb{R},$$

joka lauseen 3.5 nojalla on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$ kaikilla reaaliluvuilla α ja β, sekä kaikilla indeksin i arvoilla. Täten lauseen 3.4 nojalla myös summafunktio

$$\alpha H + \beta G\colon A \to \mathbb{R}^m$$

on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, sillä jokainen sen komponenttifunktioiden summa

$$\alpha H_i + \beta G_i\colon A \to \mathbb{R},$$

on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. □

Lause 3.6. *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $\mathbf{u} \in A$. *Oletamme, että funktio* $G\colon A \to \mathbb{R}^m$ *on jatkuva pisteessä* $\mathbf{u}$. *Olkoon* $B \subset \mathbb{R}^m$ *ja* $G(A) \subseteq B$. *Oletamme, että funktio* $H\colon B \to \mathbb{R}^k$ *on jatkuva pisteessä* $G(\mathbf{u})$. *Tällöin yhdistetty funktio*

$$H \circ G\colon A \to \mathbb{R}^k$$

on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$.

Todistus (vrt. [1, s. 292]). Olkoon $\{\mathbf{u}_k\} \subseteq A$, joka suppenee pisteeseen $\mathbf{u}$. Koska funktio $G\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, niin määritelmän 3.1 nojalla $\{G(\mathbf{u}_k)\} \subseteq B$ suppenee kohti pistettä $G(\mathbf{u})$. Funktion $H\colon B \to \mathbb{R}^k$ jatkuvuudesta pisteessä $G(\mathbf{u})$ seuraa, että jono $\{H(G(\mathbf{u}_k))\}$ suppenee kohti pistettä $\{H(G(\mathbf{u})\}$. Täten jono $\{(H \circ G)(\mathbf{u}_k)\}$ suppenee pisteeseen $(H \circ G)(\mathbf{u})$ ja yhdistetty funktio on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. $\square$

4 Joukon yhtenäisyys

4.1 Avoin joukko

Tässä pykälässä esitämme avointa joukkoa koskevia lauseita. Avoimen joukon käsite on keskeisessä osassa pykälässä 4.3.

Määritelmä 4.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Pistettä $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ kutsutaan joukon A *sisäpisteeksi*, jos on olemassa sellainen avoin pallo B, että $\mathbf{u} \in B \subset A$.

Määritelmä 4.2. Osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *avoin*, kun jokainen $\mathbf{u} \in A$ on joukon A sisäpiste.

Lause 4.1. *Jokainen avoin pallo joukossa $\mathbb{R}^n$ on avoin joukossa $\mathbb{R}^n$.*

Todistus. Ks. [1, s. 284]. □

Lause 4.2. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin osajoukko ja funktio $F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Siten seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:*

1. *Funktio $F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva.*

2. *$F^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ on avoin osajoukko aina, kun $V \subset \mathbb{R}^m$ on avoin osajoukko.*

Todistus (vrt. [1, s. 295–296]). Oletamme, että funktio $F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^m$ avoin osajoukko. Todistamme, että $F^{-1}(V)$ on avoin, toisin sanoen, että jokainen piste joukossa $F^{-1}(V)$ on sisäpiste. Olkoon $\mathbf{u} \in F^{-1}(V)$. Täten $F(\mathbf{u}) \in V$ ja V on avoin joukossa $\mathbb{R}^m$, joten on olemassa jokin positiivinen luku ϵ siten, että $\mathcal{B}_\epsilon(F(\mathbf{u})) \subseteq V$. Olkoon $\mathbf{v} \in A$. Koska funktio $F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$, niin määritelmän 3.2 nojalla voimme valita luvun $\delta > 0$ siten, että

$$\operatorname{dist}(F(\mathbf{v}), F(\mathbf{u})) < \epsilon, \quad \text{jos } \operatorname{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) < \delta. \tag{4.1}$$

Oletuksemme mukaan joukko A on avoin joukossa $\mathbb{R}^n$. Täten voimme valita positiivisen luvun $r < \delta$ siten, että $\mathcal{B}_r(\mathbf{u}) \subseteq A$. Ehdosta (4.1) seuraa, että

$$F(\mathcal{B}_r(\mathbf{u})) \subseteq \mathcal{B}_\epsilon(F(\mathbf{u})) \subseteq V.$$

Täten $\mathcal{B}_r(\mathbf{u}) \subseteq F^{-1}(V)$ ja määritelmän 4.1 nojalla $\mathbf{u}$ on joukon $F^{-1}(V)$ sisäpiste.

Todistaaksemme väitteen toiseen suuntaa oletamme, että $F^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ on avoin osajoukko aina, kun $V \subset \mathbb{R}^m$ on avoin osajoukko. Olkoot $\mathbf{u} \in A$ ja $\epsilon > 0$. Osoitamme, että funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. Lauseen 4.1 nojalla, avoimet pallot ovat joukon $\mathbb{R}^m$ avoimia osajoukkoja. Täten $\mathcal{B}_\epsilon(F(\mathbf{u}))$ on avoin joukossa $\mathbb{R}^m$. Nyt väitteestä 2 seuraa, että $F^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(F(\mathbf{u})))$ on avoin joukossa $\mathbb{R}^n$. Koska $\mathbf{u}$ on joukon $F^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(F(\mathbf{u}))$ sisäpiste, voimme valita positiivisen luvun δ siten, että

$$\mathcal{B}_\delta(\mathbf{u}) \subseteq F^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(F(\mathbf{u})).$$

Tämä tarkoittaa, että $F(\mathcal{B}_\delta(\mathbf{u})) \subseteq \mathcal{B}_\epsilon(F(\mathbf{u}))$. Täten funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ täyttää $\epsilon - \delta$ -ehdon ja on jatkuva pisteessä $\mathbf{u}$. □

Seuraus 4.1. *Olkoon funktio $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva ja c reaaliluku. Täten jokainen joukko*

$$\{\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{u}) < c \,\} \quad \textit{ja} \quad \{\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{u}) > c \,\}$$

on avoin joukossa $\mathbb{R}^n$ sekä

$$\{\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{u}) \leq c \,\} \quad \textit{ja} \quad \{\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{u}) \geq c \,\}$$

on suljettu joukossa $\mathbb{R}^n$.

Todistus. Ks. [1, s. 296]. □

4.2 Polkuyhtenäisyys

Määritelmä 4.3. Osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *konveksi joukko* edellyttäen, että jos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$, niin segmentti $\{\, t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v} \mid 0 \leq t \leq 1 \,\} \subset A$.

Määritelmä 4.4. Olkoot $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}$, sekä $a < b$. Jatkuvaa usean muuttujan funktiota $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ kutsutaan *parametrisoiduksi poluksi*. Kuvauksen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ lähtöjoukkoa kutsutaan *parametriseksi avaruudeksi* ja sen kuvaa *poluksi*.

Määritelmä 4.5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja pisteet $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$.

1. Polulla, joka yhdistää pisteet $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ joukossa A, tarkoitetaan parametrisen polun kuvausta $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, missä $\gamma(a) = \mathbf{u}$ ja $\gamma(b) = \mathbf{v}$ siten, että kuvauksen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ kuva sisältyy joukkoon A.

2. Osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *polkuyhtenäinen* edellyttäen, että jokainen pistepari $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ voidaan yhdistää polulla joukon A sisällä.

Lause 4.3. *Osajoukko $A \subset \mathbb{R}$ on polkuyhtenäinen, jos ja vain jos se on väli.*

Todistus (vrt. [1, s. 307]). Oletamme, että A on väli. Olkoot pisteet $u, v \in A$. Voimme olettaa, että $u < v$. Koska A on väli, niin suljettu väli $[u, v] \subset A$. Täten voimme määritellä välin $[u, v]$ olevan parametrinen avaruus ja määritellä $\gamma(t) = t \mid u \leq t \leq v$ toteuttavan polun joukossa A ja yhdistävän pisteet u ja v. Täten määritelmän 4.5 nojalla, A on polkuyhtenäinen.

Todistaaksemme käänteisen väitteen oletamme, että $A \subset \mathbb{R}$ on polkuyhtenäinen osajoukko. Todistaaksemme, että A on väli, valitsemme kaksi pistettä u ja v joukosta A, joilla $u < v$. Meidän täytyy osoittaa, että suljettu väli $[u, v]$ on joukon A osajoukko. Koska A on polkuyhtenäinen, on olemassa parametrisoitu polku $\gamma\colon [a, b] \to A$, jossa $\gamma(a) = u$ ja $\gamma(b) = v$. Nyt väliarvolauseen nojalla $[\gamma(a), \gamma(b)] \subseteq \gamma([a, b])$, joten $[u, v] \subseteq A$. □

Seuraus 4.2. *Konveksi osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on polkuyhtenäinen.*

Todistus (vrt. [2, s. 111]). Oletamme, että $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$. Täten määritelmän 4.3 mukaan segmentti $\gamma(t) = \{ t\mathbf{u} + (1 - t)\mathbf{v} \mid 0 \leq t \leq 1 \} \subset A$. Lisäksi, koska $\gamma(1) = \mathbf{u}$ ja $\gamma(0) = \mathbf{v}$, niin jokainen pistepari $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$ voidaan yhdistää polulla joukon A sisällä. Täten määritelmän 4.5 nojalla, konveksi osajoukko on polkuyhtenäinen. □

Lause 4.4. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja oletamme, että funktio $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva. Jos A on polkuyhtenäinen, niin myös sen kuva $F(A)$ on polkuyhtenäinen.*

Todistus (vrt. [1, s. 308]). Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ kuvan $F(A)$ pisteitä. Meidän täytyy löytää polku kuvassa $F(A)$, mikä yhdistää pisteet $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$. Valitsemme pisteet $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ siten, että $F(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ ja $F(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$. Koska oletuksemme mukaan määrittelyjoukko A on polkuyhtenäinen, on olemassa parametrinen polku $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, missä $\gamma(a) = \mathbf{x}$ ja $\gamma(b) = \mathbf{y}$ sekä $\gamma([a, b]) \subseteq A$. Koska lauseen 3.6 mukaan, jatkuvien funktioiden yhdiste on jatkuva, niin yhdistetty funktio $F \circ \gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ on kuvan $F(A)$ parametrinen polku, joka yhdistää pisteet $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$. □

Lause 4.5. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ polkuyhtenäinen osajoukko, ja oletamme, että funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tällöin sen kuva $f(A)$ on väli.*

Todistus (vrt. [1, s. 309]). Koska A on polkuyhtenäinen ja funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin lauseen 4.4 nojalla sen kuva $f(A)$ on polkuyhtenäinen. Täten lauseesta 4.3 seuraa, että $f(A)$ on väli. □

Määritelmä 4.6. Osajoukolla $A \subset \mathbb{R}^n$ on *jatkuvan funktion väliarvolauseen ominaisuudet*, jos jokaisella jatkuvalla funktiolla $f\colon A \to \mathbb{R}$ on väli sen kuvana.

4.3 Yhtenäisyys

Määritelmä 4.7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Kaksi avointa osajoukkoa $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^n$ *erottavat* joukon A edellyttäen, että kaksi leikkausta $A \cap U$ ja $A \cap V$ ovat epätyhjiä, ne ovat erillisiä sekä niiden yhdiste on yhtäsuuri kuin A. Siis

$$A \cap U \neq \emptyset, \quad A \cap V \neq \emptyset$$

ja

$$(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset, \quad (A \cap U) \cup (A \cap V) = A.$$

Määritelmä 4.8. Osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *yhtenäinen* edellyttäen, että ei ole olemassa kahta avointa osajoukkoa $U, V \subset \mathbb{R}^n$, jotka erottavat joukon A. Osajoukko A on *epäyhtenäinen*, jos se ei ole yhtenäinen.

Esimerkki 4.1. Olkoot $A = \mathbb{R} \setminus \{2\}, U = (-\infty, 2) \subset \mathbb{R}$ ja $V = (2, \infty) \subset \mathbb{R}$. Nyt A ei ole yhtenäinen joukko, sillä

$$A \cap U = (-\infty, 2[\neq \emptyset, \quad A \cap V =]2, \infty) \neq \emptyset$$

ja

$$(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset, \quad (A \cap U) \cup (A \cap V) = \mathbb{R} \setminus \{2\} = A.$$

Täten määritelmän 4.7 nojalla osajoukot U ja V erottavat joukon A.

Lause 4.6. *Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on yhtenäinen, jos ja vain jos se on väli.*

Todistus (vrt. [2, s. 108–109]). Olkoon A yhtenäinen joukko. Teemme vastaoletuksen, A ei ole väli. Täten on olemassa $u, v \in A$ siten että, $u < v$ ja $[u, v] \not\subset A$. Siis on olemassa jokin $w \in [u, v]$, joka ei kuulu joukkoon A. Määrittelemme avoimet osajoukot $U = (-\infty, w)$ ja $V = (w, \infty)$. Täten yhtenäisen joukon määritelmästä 4.7 näemme, että osajoukot U ja V erottavat joukon A. Päädymme ristiriitaan ja joukko A on väli.

Todistaaksemme käänteisen väitteen oletamme, että A on väli, mutta se ei ole yhtenäinen. Olkoot U ja V avoimia osajoukkoja, jotka erottavat joukon A. Täten määritelmän 4.7 nojalla $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$ ja $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$. Olkoot $w \in A \cap U$ ja $z \in A \cap V$ sekä $w < z$. Olkoot $U_0 = U \cap A \cap [w, z]$ ja $V_0 = V \cap A \cap [w, z]$. Täten joukot U_0 ja V_0 ovat epätyhjiä, mutta $U_0 \neq V_0$, sillä $w \in U$ ja $z \in V$.

Koska U_0 on rajoitettu, voimme määrittää arvon $c = \sup\{ x \mid x \in U_0 \} < \infty$. Koska $z \in V$ ja $w < z$, voimme valita $\delta > 0$ siten, että $(z-\delta, z) \subset V_0$. Koska $\delta \leq z-w$, niin $w \leq z - \delta$. Täten valisemalla suurimman arvon δ, saamme $w \leq c \leq z - \delta$. Täten seurauksen 4.1 nojalla joukon V avoimuudesta seuraa, että $c \notin V$ sekä joukon U avoimuudesta, että c voi olla joukon U_0 yläraja vain, jos $c \notin U$. Koska $c \notin U \cap V$, niin $c \notin (A \cap U) \cup (A \cap V) = A$. Siis A ei ole väli ja täten päädymme ristiriitaan. □

Lause 4.7. *Osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen, jos ja vain jos sillä on jatkuvien funktioiden väliarvolauseen ominaisuudet.*

Todistus (vrt. [1, s. 310–311]). Oletamme, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen. Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ jatkuva. Oletamme, ettei kuva $f(A)$ ole väli. Täten on olemassa pisteet $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$ sekä reaaliluku c siten, että

$$f(\mathbf{u}) < c < f(\mathbf{v}), \quad \text{mutta } c \notin f(A).$$

Määrittelemme $A_1 = f^{-1}(-\infty, c)$ ja $A_2 = f^{-1}(c, \infty)$. Nyt A_1 ja A_2 ovat epätyhjiä, erillisiä sekä $A_1 \cup A_2 = A$. Merkitsemme $A \cap U = A_1$ ja $A \cap V = A_2$, kuten lähteessä [1, s. 311]. Nyt määritelmän 4.7 nojalla, osajoukot U ja V erottavat joukon A ja täten päädymme ristiriitaan ja kuvan $f(A)$ täytyy olla väli. Nyt määritelmästä 4.6 seuraa, että osajoukolla A on väliarvolauseen ominaisuudet.

Todistamme väitteen toiseen suuntaan. Olkoon osajoukolla A on jatkuvien funktioiden väliarvolauseen ominaisuudet. Tällöin jokaisella jatkuvalla funktiolla on väli sen kuvana. Oletamme, että A ei ole yhtenäinen. Täten on olemassa kaksi avointa osajoukkoa $U, V \subset \mathbb{R}^n$, jotka erottavat joukon A. Määrittelemme funtion $f\colon A \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f(\mathbf{u}) = \begin{cases} 0, & \text{jos } \mathbf{u} \in U \cap A \\ 1, & \text{jos } \mathbf{u} \in V \cap A. \end{cases}$$

Koska funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ saa vain arvot 0 ja 1, ei sillä voi olla väliarvolauseen ominaisuuksia. Toisaalta funktio on jatkuva [1, s. 311]. Täten päädymme ristiriitaan ja A on yhtenäinen. □

Seuraus 4.3. *Jokainen polkuyhtenäinen osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen.*

Todistus (vrt. [1, s. 311]). Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ polkuyhtenäinen. Nyt lauseesta 4.5 seuraa, että sen kuva $F(A)$ on väli. Täten määritelmän 4.6 mukaan osajoukolla A on väliarvolauseen ominaisuudet. Tästä seuraa, että lauseen 4.7 nojalla polkuyhtenäinen osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen. □

Huomautus. Jokainen yhtenäinen osajoukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ei ole polkuyhtenäinen.

Tällainen yhtenäinen, muttei polkuyhtenäinen osajoukko on esimerkiksi *topologin sinikäyrä*.

Esimerkki 4.2 (vrt. [4])**.** Määrittelemme polkuyhtenäiset joukot $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ -1 \leq y \leq 1 \}$ ja $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1,\ y = \sin(1/x) \}$. Lisäksi määrittelemme $A = K \cup G$ ja sulkeuma $\overline{G} = A$. Todistamme, että A on yhtenäinen, mutta se ei ole polkuyhtenäinen.

Ensimmäiseksi todistamme, että jos G on yhtenäinen, niin sulkeuma $\overline{G}$ on yhtenäinen. Teemme vastaoletuksen, G on yhtenäinen, mutta sen sulkeuma $\overline{G}$ on epäyhtenäinen. Oletamme, että $G \neq \emptyset$. Tällöin määritelmän 4.7 nojalla on olemassa avoimet joukot $U, V \neq \emptyset$, joille $U \cap V = \emptyset$ ja $U \cup V = \overline{G}$. Siis joukot U, V erottavat joukon $\overline{G}$. Olkoot $U_0 = U \cap G$ ja $V_0 = V \cap G$. Täten joukot U_0 ja V_0 ovat avoimia joukossa G. Nyt liitännäisyydestä seuraa, että $U_0 \cap V_0 = (U \cap G) \cap (V \cap G) = (U \cap V) \cap (G \cap G) = \emptyset \cap G = \emptyset$. Lisäksi osittelulain nojalla $U_0 \cup V_0 = (U \cap G) \cup (V \cap G) = G \cup (U \cap V) = G \cup \emptyset = G$. Täten määritelmän 4.7 nojalla joukot U_0 ja V_0 erottavat joukon G.

Mutta G on yhtenäinen, joten päädymme ristiriitaan ellei toinen joukoista U_0 tai V_0 ole tyhjä. Valitsemme $U_0 = G$ ja $V_0 = \emptyset$. Nyt komplementti $U^c = A \setminus U = \overline{G} \setminus U = U \cup V \setminus U = V$, joka on avoin osajoukko. Täten $U \subset \overline{G}$ on suljettu, sillä $U = \overline{G} \cap C$, jollain suljetulla osajoukolla C. Täten $G = U_0 = U \cap G \subseteq U = \overline{G} \cap C \subseteq C$. Lisäksi $G \subseteq C$, jolloin $\overline{G} \subseteq \overline{C} = C$, sillä C on suljettu. Nyt $U = C \cap \overline{G} = \overline{G}$ ja $V = \overline{G} \setminus U = \overline{G} \setminus \overline{G} = \emptyset$. Päädymme ristiriitaan ja A on yhtenäinen.

Seuraavaksi todistamme väitteen A ei ole polkuyhtenäinen. Teemme vastaoletuksen: on olemassa polku $\gamma\colon [0, 1] \to A$, jossa $\gamma(0) \in G$ ja $\gamma(1) = (0, 1)$. Koska γ on jatkuva pisteessä $t = 1$, niin määritelmän 3.2 nojalla, kun $\epsilon = 1/2$, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $|t - 1| \leq \delta$, niin $|\gamma(t) - (0, 1)| < 1/2$. Nyt $1 - \delta \leq t \leq 1$. Merkitsemme $\gamma(1 - \delta) = (x_0, y_0)$ ja oletamme $x_0 > 0$. Tällöin $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ on jatkuva, joten lauseen 3.4 nojalla $\gamma_1(t)$ on jatkuva välillä $[1 - \delta, 1]$. Täten kaikilla x_1 välillä $\gamma_1(1) = 0$ ja $\gamma_2(1 - \delta) = x_0$, on olemassa jokin sellainen $t \in [1 - \delta, 1]$, että $\gamma_1(t) = x_1$. Tällöin $\gamma(t) = (x_1, \sin(1/x_1))$. Olkoon $x_1 = \frac{1}{2\pi N - \pi/2} \in [0, x_0]$, jos N on riittävän suuri. Tällöin $\gamma(t) = (x_1, \sin(2\pi N - \frac{\pi}{2})) = (x_1, -1) = (\frac{1}{2\pi N - \pi/2}, -1)$, mutta

$$
\begin{aligned}
|\gamma(t) - (0, 1)| &= \left| \left(\frac{1}{2\pi N - \frac{\pi}{2}}, -1 \right) - (0, 1) \right| \\
&= \left| \left(\frac{1}{2\pi N - \frac{\pi}{2}}, -2 \right) \right|
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi N - \frac{\pi}{2}}\right)^2 + 4}$$
$$\geq \sqrt{4} = 2 \nless 1/2.$$

Päädymme ristiriitaan ja täten A ei ole polkuyhtenäinen.

Lause 4.8. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ yhtenäinen joukko. Jos $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva, niin $F(A)$ on yhtenäinen.*

Todistus (vrt. [2, s. 110–111]). Oletamme, että $F(A)$ on epäyhtenäinen. Täten määritelmästä 4.7 seuraa, että on olemassa jotkin avoimet joukot $U, V \subset \mathbb{R}^m$, jotka erottavat joukon $F(A)$. Siis $F(A) \cap U \neq \emptyset$, $F(A) \cap V \neq \emptyset$, $(F(A) \cap U) \cap (F(A) \cap V) = \emptyset$ ja $(F(A) \cap U) \cup (F(A) \cap V) = F(A)$.

Koska $A \subset \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen, niin U ja V ovat avoimia joukkoja, jotka eivät erota joukkoa A. Lisäksi F on jatkuva, jolloin lauseen 4.2 nojalla $F^{-1}(U)$ ja $F^{-1}(V)$ ovat avoimia osajoukkoja aina, kun U ja V ovat avoimia osajoukkoja. Siis on olemassa jotkin $U_0, V_0 \in \mathbb{R}^n$, siten että $F^{-1}(U) = U_0 \cap A$ ja $F^{-1}(V) = V_0 \cap A$. Tehdään vastaoletus, että joukot U_0 ja V_0 erottavat joukon A.

1. Oletamme, että $\mathbf{u} \in F^{-1}(U) \cap F^{-1}(V)$. Täten $\mathbf{u} \in F^{-1}(U)$ ja $\mathbf{u} \in F^{-1}(V)$. Siis $F(\mathbf{u}) \in U$ sekä $F(\mathbf{u}) \in V$, josta seuraa, että $F(\mathbf{u}) \in U \cap V$, $F(\mathbf{u}) \in U \cap F(A)$ ja $F(\mathbf{u}) \in V \cap F(A)$. Siis $(U \cap F(A)) \cap (V \cap F(A)) \neq \emptyset$. Koska vastaoletuksen mukaan $(U \cap F(A)) \cap (V \cap F(A)) = \emptyset$, päädymme ristiriitaan ja $F^{-1}(U) \cap F^{-1}(V) = \emptyset$. Näin ollen $(U_0 \cap A) \cap (V_0 \cap A) = \emptyset$.

2. Olkoon $\mathbf{u} \in A$. Täten $F(\mathbf{u}) \in F(A)$. Koska $(F(A) \cap U) \cup (F(A) \cap V) = F(A)$, niin $F(\mathbf{u}) \in F(A) \cap U$ tai $F(\mathbf{u}) \in F(A) \cap V$. Siis $F(\mathbf{u}) \in U$ tai $F(\mathbf{u}) \in V$. Tästä seuraa, että $\mathbf{u} \in F^{-1}(U)$ tai $\mathbf{u} \in F^{-1}(V)$. Täten $\mathbf{u} \in F^{-1}(U) \cup F^{-1}(V) = (U_0 \cap A) \cup (V_0 \cap A)$. Koska $\mathbf{u} \in A$ on mielivaltaisesti valittu piste, niin $(U_0 \cap A) \cup (V_0 \cap A) = A$.

3. Koska $U \cap F(A) \neq \emptyset$, niin $F^{-1}(U) \neq \emptyset$, ja siten $U_0 \cap A \neq \emptyset$. Vastaavasti saamme, että $V_0 \cap A \neq \emptyset$.

Kohdista 1, 2 ja 3 seuraa, että $(U_0 \cap A) \cap (V_0 \cap A) = \emptyset$, $(U_0 \cap A) \cup (V_0 \cap A) = A$, $U_0 \cap A \neq \emptyset$ sekä $V_0 \cap A \neq \emptyset$. Täten määritelmän 4.7 nojalla joukot U_0 ja V_0 erottavat joukon A ja vastaoletuksemme pätee. Päädymme ristiriitaan ja alkuperäiden oletuksemme siitä, että $F(A)$ on epäyhtenäinen täytyy olla väärin. Täten $F(A)$ on yhtenäinen. □

Lähteet

[1] Fitzpatrick, P. *Advanced Calculus*, toinen painos. Rhode Island: American Mathematical Society, 2009. ISBN 978-1-4704-1118-3.

[2] Kumar, D. *Advanced Calculus of Several Variables*. Englanti: Alpha Science International, 2014. ISBN 978-1-7833-2027-1.

[3] Shurman, J. *Multivariable Calculus*. Oregon: Reed College, 2010.

[4] Tabrizian, P. *Topologist Sine Curve*. Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=pi-sS3lgszA , julkaistu 14.1.2021.