



# Du composant à l'automate hybride pour la modélisation et la simulation des systèmes en communication : application à l'électronique de puissance

Marius Zainea

## ► To cite this version:

Marius Zainea. Du composant à l'automate hybride pour la modélisation et la simulation des systèmes en communication : application à l'électronique de puissance. Automatique / Robotique. Université Rennes 1, 2008. Français. <tel-00351851>

**HAL Id: tel-00351851**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00351851>**

Submitted on 13 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3568

# Thèse

présentée devant

l'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Rennes 1**

Mention : *Traitement du signal*

par

ZAINEA Marius

Équipe d'accueil : IETR/Supélec – Équipe d'Automatique des Systèmes Hybrides

École doctorale : Matisse

Composante universitaire : Université de Rennes 1

## **Du composant à l'automate hybride pour la modélisation et la simulation des systèmes en commutation: application à l'électronique de puissance**

Soutenue le 20/11/2008 devant la commission d'Examen

*Composition du jury*

*Rapporteurs*

MME. Claire VALENTIN    Professeur des Universités – Université Claude Bernard Lyon I

M. Jamal DAAFOUZ        Professeur des Universités – INPL-ENSEM Nancy

*Examineurs*

M. Hervé GUEGUEN        Professeur SUPELEC Rennes – Directeur de Thèse

M. Hervé CORMERAIS      Professeur SUPELEC Rennes

M. Emmanuel GODOY      Professeur SUPELEC Gif-sur-Yvette – Co-Directeur de Thèse

M. Daniel THOUROUDE    Professeur des Universités – Université de Rennes 1



# Remerciements

Les travaux de la thèse se sont déroulés au sein des deux équipes d'accueil dans le domaine de l'automatique de Supélec : l'équipe d'Automatique des Systèmes Hybrides sur le campus de Rennes et le Département d'Automatique sur campus de Gif. Je tiens donc tout d'abord remercier aux messieurs Jean BUISSON et Hervé GUEGUEN, en tant qu'animateurs de l'équipe ASH, et à monsieur Patrick BOUCHER, en tant que directeur du Département Automatique, pour avoir initié et m'avoir proposé ce sujet, ainsi que pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont fait dans leurs équipes respectives.

J'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, monsieur Hervé GUEGUEN, pour son soutien tout au long de ces années. Je garderai toujours à l'esprit son sens de la méthode et sa ténacité qui m'ont aidé à dépasser les périodes difficiles afin de mener cette étude à bien. Je lui remercie aussi pour m'avoir fait confiance avec mon projet pédagogique et m'avoir aidé à le mettre en œuvre à Supélec. En même temps, j'accomplis ces travaux de thèse avec la satisfaction non uniquement d'avoir développé ensemble une très bonne relation professionnelle, mais, également, d'avoir gagné sa généreuse amitié.

Je remercie à monsieur Hervé CORMERAIS, mon encadrant, pour avoir partagé son expertise dans le domaine, pour ses encouragements, ainsi que pour sa patience, surtout lors de la relecture de mon manuscrit. Je garderai également un bon souvenir des échanges culturels qu'on a eu et des agréables parties d'échecs que nous avons joué ensemble. Je tiens à remercier aussi à mon co-directeur de thèse, monsieur Emmanuel GODOY, pour m'avoir fait partager sa large expérience dans le domaine de l'imagerie médicale, obtenue à l'occasion de ses collaborations avec l'industrie.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à monsieur Jean BUISSON pour son enthousiasme continu envers ce sujet. Ceci a conduit à des nombreuses discussions très riches en idées qui se retrouvent d'ailleurs dans ce manuscrit ou dans les articles publiés. Je lui remercie également pour m'avoir offert l'occasion de participer activement dans le cadre du projet HYCON.

Je remercie tout particulièrement à madame Claire VALENTIN et à monsieur Jamal DAAFOUZ pour avoir accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteurs ainsi que pour leurs remarques pertinentes qui m'ont permis d'améliorer mon manuscrit. J'adresse également mes remerciements à monsieur Daniel THOUROUDE pour l'intérêt qu'il a montré à l'égard de mon travail en acceptant de participer au jury en tant qu'examineur.

Je tiens à remercier à monsieur Ioan DUMITRACHE, président de la chaire d'Automatique et Génie des Systèmes de l'Université « Politehnica » de Bucarest, ainsi qu'à monsieur Dumitru POPESCU, doyen de la Faculté d'Automatique et d'Informatique de la même université pour leur accueil pendant neuf mois (septembre 2007 – juin 2008). Dans ce temps, j'ai pu continuer mes travaux de thèse en parallèle de mon activité pédagogique déroulée dans le cadre de la Faculté d'Automatique et d'Informatique.

Pendant mes trois années et quelque que j'ai passé à Rennes j'ai pu croisé le chemin de nombreux autres thésards Supélec, pris dans la tourmente de la thèse, tout comme moi. Cela a rendu l'expérience de la thèse plus vivable, entre deux soumissions d'articles, chapitres de thèse, etc. se faisant place pleins d'appéros, de barbecues, de parties de bowling et autres. Je vous remercie donc à tous : Olivier, Nico, Domtom, Cécile, Fred, Mihai, Guillaume, Jérôme, François, Yasser et Loïg. De plus, je suis reconnaissant spécialement à mes collègues et amis Guillaume et Mihai et à leurs partenaires de vie respectives, Evelyne et Nicoleta, pour avoir ouvert les portes de leurs appartements et m'avoir accueilli dans des moments très difficiles pour moi. Sans cette aide la fin aurait été, sinon impossible, au moins beaucoup plus difficile à atteindre.

Je dois également beaucoup au soutien continu de mes amis qui m'ont toujours été proches, même si parfois ils étaient loin géographiquement : Ioan et Queralt, Sorin et Mara, Vio et sa femme, Andreea.

Finalement, je remercie à ma femme, Andreea, pour son soutien inconditionnel et sa patience envers moi. Sans toi, je n'aurais jamais touché au but !

# Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Mise en perspective</b>	<b>5</b>
2.1 Vue d'ensemble de la problématique . . . . .	5
2.2 Approches énergétiques de modélisation . . . . .	6
2.2.1 Modélisation des systèmes physiques sans interrupteurs . . . . .	6
2.2.1.1 Approche bond graphs . . . . .	9
2.2.1.2 Approche port-Hamiltonienne . . . . .	11
2.2.2 Modélisation des systèmes physiques avec des interrupteurs . . . . .	12
2.2.2.1 Les Bond graphs commutés . . . . .	16
2.2.2.2 Formulation port-Hamiltonienne complémentaire . . . . .	19
2.2.2.3 Les Bond graphs hybrides . . . . .	21
2.2.2.4 Formulation port-Hamiltonienne à ports paramétrés . . . . .	23
2.3 Modèle automate hybride . . . . .	26
2.4 Simulation des systèmes physiques avec des interrupteurs . . . . .	27
2.5 Conclusion . . . . .	30
<b>3 Approche formelle de détermination du modèle automate hybride</b>	<b>31</b>
3.1 Vue d'ensemble . . . . .	31
3.2 Les bond graphs commutés . . . . .	32
3.2.1 Mise en équation . . . . .	32
3.2.2 Configurations permises . . . . .	35
3.2.3 Équations d'état implicites et explicites . . . . .	37
3.2.3.1 Équations d'état implicites . . . . .	38
3.2.3.2 Équations d'état explicites . . . . .	40
3.2.4 Équation de discontinuité de l'état implicite . . . . .	42
3.2.5 Forme explicite du vecteur de puissance imposé par le champ interrupteur par rapport aux vecteurs d'état . . . . .	46
3.2.6 Hypothèses simplificatrices usuelles . . . . .	49
3.3 Modèle de type automate pour les interrupteurs . . . . .	52

3.3.1	Switch Automata . . . . .	55
3.3.2	Composition des interrupteurs . . . . .	62
3.4	Modèle automate hybride . . . . .	68
3.4.1	Choix de l'état hybride . . . . .	68
3.4.2	Les entrées du modèle . . . . .	69
3.4.3	L'ensemble d'activités . . . . .	70
3.4.4	L'ensemble des invariants . . . . .	71
3.4.5	L'ensemble des transitions . . . . .	74
3.4.5.1	Transition entre deux modes à même causalité . . . . .	75
3.4.5.2	Transition entre deux modes à causalité différente . . . . .	77
3.4.6	Autres hypothèses de travail . . . . .	83
3.5	Conclusion . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Simulation des convertisseurs continu–continu à l'aide de Simulink</b>	<b>87</b>
4.1	Vue d'ensemble . . . . .	87
4.2	Simulation par détection d'événements . . . . .	88
4.3	Réalisation du modèle Simulink avec des blocs élémentaires . . . . .	91
4.3.1	Schéma général . . . . .	91
4.3.2	Le bloc <i>Dynamique</i> . . . . .	92
4.3.3	Le bloc <i>Automate</i> . . . . .	97
4.3.4	Le bloc <i>Invariants + Conditions d'impulsion</i> . . . . .	100
4.4	Réalisation du modèle Simulink à l'aide de S-fonctions . . . . .	102
4.5	Conclusion . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Application : Démarrage d'un convertisseur à double résonance</b>	<b>111</b>
5.1	Vue d'ensemble . . . . .	111
5.2	Le convertisseur à double résonance . . . . .	111
5.2.1	Fonctionnement normal du système . . . . .	113
5.2.2	Commande en boucle fermée . . . . .	115
5.2.3	Problématique du démarrage. Solution proposée . . . . .	117
5.3	Détermination hors-ligne de la séquence de démarrage en boucle ouverte	118
5.3.1	Formulation de la fonction de coût pour la séquence de démarrage	118
5.3.2	Implémentation du bloc de commande . . . . .	119
5.3.3	Résultats . . . . .	121
5.4	Conclusion . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>127</b>
	<b>Annexe</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Démonstration du lemme 3.9</b>	<b>131</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>133</b>

**Bibliographie**



# Chapitre 1

## Introduction

Les avancées des dernières décennies dans le domaine de l'électronique ont permis l'intégration plus facile des dispositifs de commande à base de convertisseur sur un plus grand nombre d'applications, des plus simples, tels que les sources d'alimentation des PCs, la téléphonie mobile, l'alimentation des moteurs à courant continu, aux plus complexes, tel que les technologies aérospatiales, les appareils à utilisation médicale, les TGVs etc. L'utilisation de ces dispositifs de commande offre des avantages importants au niveau de la dimension, de l'efficacité énergétique et de l'endurance, mais, en contrepartie, leur modèle dynamique présente une complexité accrue en particulier à cause des dynamiques hétérogènes des différents composants. Ainsi, en général, on retrouve une dynamique très rapide liée au changement de fonctionnement des composants électroniques et une dynamique du reste du système plus lente par rapport à la première.

Historiquement, la première solution employée pour résoudre le problème de commande des convertisseurs de puissance a été l'utilisation d'un modèle moyen qui est un modèle limite du système pour une fréquence infinie de commutation des éléments actifs, tel que les MOSFETs et les IGBTs, par exemple. En ce qui concerne la mise en œuvre, la solution technique consiste dans une modulation en largeur d'impulsion (MLI) du signal de commande continu, où la fréquence de la porteuse est considérablement plus élevée que la dynamique la plus rapide du système. Cependant, l'utilisation de cette méthode conduit à des comportements observés qui ne sont pas expliqués par le modèle moyen telle que l'apparition d'harmoniques secondaires par exemple.

Afin de mieux prendre en compte la complexité de tels systèmes, dans les dix dernières années, le nouveau paradigme des systèmes hybrides a été appliqué à la résolution de ce type de problèmes. En effet, dans ce cadre, il est possible de prendre en compte à la fois l'évolution en temps continu du système et ses dynamiques instantanées ou discrètes. Il est alors intéressant d'obtenir un modèle explicite du système afin de procéder aux étapes d'analyse et de commande. De tels modèles explicites sont alors semblables à des automates hybrides, et la difficulté pour obtenir un tel modèle pour un circuit d'électronique de puissance donné réside dans la prise en compte systématique de toutes les dynamiques, surtout discrètes, qui peuvent se produire lors

de l'évolution du système. Ainsi, même pour des circuits simples du point de vue du nombre de composants, les modèles équivalents peuvent être assez complexes, en particulier à cause des expressions compliquées des transitions. Ceci fait qu'une démarche algorithmique d'obtention du modèle explicite à partir des modèles simples des composants est une approche intéressante. Pour des systèmes continus purs, voire pour les systèmes avec des interrupteurs où la logique de commutation est négligée, il existe des méthodes dans le cadre des approches, telles que, par exemple, les bond graphs et les systèmes port-Hamiltoniens qui permettent, par l'interprétation des échanges énergétiques, d'obtenir un modèle d'état continu associé à chaque configuration du système et l'explicitation des changements de l'état continu lors des commutations. Par contre, ces démarches ne prennent pas en compte les conditions qui gouvernent ces commutations.

Dans ce contexte, l'objectif de la thèse est de proposer une démarche compositionnelle systématique qui, associant un modèle logique pour les conditions de commutation des interrupteurs en complément de leur aspect énergétique, permet d'obtenir un modèle complètement explicite : équations d'état associés à chaque configuration, équations de saut, contraintes de type invariant et conditions de commutation. Cette approche doit permettre un traitement unitaire dans les phases de modélisation et de simulation de tous les convertisseurs utilisés dans les applications, à partir des plus simples, tels que les convertisseurs « buck », « boost », « buckboost », « Ćuk », etc., jusqu'aux plus compliqués comme les convertisseurs résonants dont on trouvera un exemple dans ce document.

La présentation des travaux effectués pendant cette thèse débute, dans le chapitre 2, par un rappel sur les principales approches de modélisation modulaire et de simulation des systèmes en commutation. Ainsi sont présentés d'abord les principaux résultats de deux approches énergétiques de modélisation, telles que les bond graphs et les systèmes port-Hamiltoniens dans un contexte classique, sans interrupteurs. Ensuite, des extensions de ces approches pour prendre en compte les interrupteurs sont considérées : les bond graphs commutés, les bond graphs hybrides, la formulation port-Hamiltonienne complémentaire et la formulation port-Hamiltonienne à ports paramétrés. Enfin, on revient sur les approches principales pour obtenir un modèle de simulation pour les systèmes physiques avec des interrupteurs : l'approche non-idéale et l'approche idéale. C'est d'ailleurs cette dernière approche qui est analysée dans le détail, puisque l'obtention du modèle de simulation découle naturellement des résultats issus de la phase de modélisation discutée antérieurement.

Dans le chapitre 3, on présente le cœur des travaux effectués pendant cette thèse, à savoir, la détermination systématique du modèle automate hybride équivalent d'un système physique avec des interrupteurs. Pour ce faire, on commence par la présentation détaillée des principaux résultats obtenus précédemment dans le cadre de l'approche bond graph commuté, notamment par (Cormerais, 1998; Buisson *et al.*, 2002). Dans cette première partie, une attention spéciale est accordée à la mise en évidence des hypothèses de travail employés et à leurs influences sur la continuité de l'état et l'occurrence des impulsions dans le système. De plus, par rapport aux travaux

antérieurement cités, le vecteur des variables de puissance imposées aux interrupteurs est complètement explicité en fonction de l'état continu et des variables d'entrée de puissance. Dans une deuxième partie, un modèle complet d'interrupteur, de type automate, est introduit. Celui-ci prend en compte, à la fois, la partie puissance issue de l'approche bond graph commuté et, d'autre part, la logique de commutation. Finalement, le modèle automate hybride du système est obtenu par la composition des équations du système issues de l'approche bond graph commuté et des contraintes imposées par les modèles introduits pour les interrupteurs. La principale difficulté est ainsi d'obtenir systématiquement l'ensemble des invariants et l'ensemble des transitions (en particulier leur condition de garde).

Dans le chapitre 4, on utilise le modèle issu de la procédure précédente pour obtenir un modèle de simulation sous Simulink. En ce basant sur les principes présentés dans le chapitre 2, on propose un algorithme d'obtention du modèle de simulation tout en utilisant uniquement des blocs élémentaires pour la partie *continue* du modèle et un *Statechart* pour la partie *discrète*. On propose ainsi la définition d'un bloc générique pour la dynamique continue associée à un mode du système et, également, un autre bloc générique pour la condition de *sortie* par la *frontière* d'un mode. Cependant, bien qu'algorithmique, cette méthode demeure limitée à cause d'une certaine lourdeur intrinsèque due à l'utilisation d'un formalisme graphique, le *Statechart*, pour l'explicitation de la dynamique discrète et, aussi, par l'impossibilité de réutiliser les modèles obtenus. Pour corriger ces problèmes, on propose dans la suite du chapitre une procédure de mise en œuvre d'un modèle de simulation à l'aide d'une *S-fonction*. Cette utilisation des *S-fonctions* permet de plus un meilleur contrôle au niveau de la simulation, afin d'éviter la formation des boucles algébriques lors de l'étape de détermination du mode actif.

Le chapitre 5 présente le problème du démarrage d'un convertisseur double résonnant issu d'une application pratique d'imagerie médicale. Compte tenu du fait que la séquence de démarrage contient un nombre limité d'instantants de commutation, la solution proposée consiste dans la détermination de ceux-ci par une optimisation en boucle ouverte par rapport à une fonction de coût qui caractérise un comportement imposé. Cette solution tire profit des résultats obtenus dans les chapitres précédents pour disposer d'un modèle fin de simulation du système qui est nécessaire pour une évaluation fiable de la fonction de coût. Finalement, la thèse s'achève par un chapitre consacré aux conclusions générales et aux travaux futurs.



# Chapitre 2

## Mise en perspective

### 2.1 Vue d'ensemble de la problématique

Les activités liées à l'analyse et à la commande des systèmes dynamiques reposent pour l'essentiel sur la détermination d'un modèle de leur comportement. Ce modèle peut être déterminé expérimentalement, par exemple par identification entrées-sorties, ou à partir des connaissances des phénomènes physiques qui gouvernent ce comportement. Dans ce cas, il est particulièrement intéressant de pouvoir construire le comportement global du système en composant des modèles élémentaires des sous-systèmes afin d'en maîtriser la complexité. Pour pouvoir mener à bien cette opération de construction du modèle par composition, il est nécessaire, d'une part, que les modèles élémentaires possèdent une structure adéquate et, d'autre part, que les règles de compositions soient parfaitement définies. Si tel est le cas, le comportement global est implicitement défini par la composition. Cependant, il est généralement nécessaire, pour utiliser un tel modèle, qu'il soit mis sous une forme explicite. Le passage de la première forme à cette forme explicite demande la mise en œuvre d'un certain nombre de transformations dont il est, bien sûr, intéressant qu'elles soient systématisées et, idéalement, automatisées. La modélisation de connaissances des systèmes physiques par composition de modèles élémentaires demande donc la définition des moyens de modéliser les comportements élémentaires, de les composer et de transformer le premier modèle dans des modèles qui définissent le même comportement mais qui sont exprimés sous une forme plus explicite et, donc, plus facilement manipulable pour l'analyse, la simulation et la synthèse de la commande.

L'objectif de cette thèse est donc de proposer un tel ensemble cohérent pour la modélisation compositionnelle de connaissance des systèmes physiques à commutation. Au niveau élémentaire, ces systèmes sont composés d'éléments énergétiques continus et d'éléments commutants. Ce sont ces derniers qui possèdent des caractères logiques, en plus des caractéristiques énergétiques par lesquelles ils interagissent avec les autres éléments. D'un point de vue global, leur comportement se caractérise par l'apparition de modes qui définissent un comportement continu et d'événements de changement de mode qui sont liés, soit à des événements externes, soit au franchis-

sement de frontières dans l'espace d'état continu. Les automates hybrides (Alur *et al.*, 1995) sont un formalisme particulièrement adapté pour expliciter de tels comportements globaux. Ils permettent la mise en œuvre de certaines opérations d'analyse ou peuvent servir de pivot pour générer des modèles dans d'autres formalismes tels que PWA (Sontag, 1981), par exemple. L'objectif est donc de proposer des modèles élémentaires cohérents avec la modélisation compositionnelle et des procédures de transformation du modèle qui permettent d'obtenir un modèle explicite sous la forme d'un automate hybride. D'autre part, la simulation reste un moyen important de validation du modèle lui-même et de la commande conçue, une place particulière sera faite à l'obtention d'un modèle simulable avec Simulink.

Bien sur cette approche de modélisation compositionnelle n'est pas nouvelle, en particulier pour les systèmes physiques continus. Dans ce chapitre on se propose donc de présenter des approches basées sur des considérations énergétiques qui permettent une telle modélisation ainsi que leurs extensions pour prendre en compte l'aspect énergétique des éléments commutants (section 2.2). Dans la section 2.3 on rappelle les principes du formalisme des automates hybrides qui constitue l'objectif à atteindre dans la suite des travaux et dans la section 2.4 les problèmes liés à la simulation du comportement de tels systèmes. Enfin la section 2.5 permet de conclure sur les approches présentées et de souligner les points traités dans la suite.

## 2.2 Approches énergétiques de modélisation

### 2.2.1 Modélisation des systèmes physiques sans interrupteurs

L'étude systématique de la nature a fait l'objet de nombreux travaux depuis l'antiquité et jusqu'à nos jours. Sans vouloir faire ici une étude exhaustive de ce sujet, dans le cadre de cette section, on porte un intérêt particulier à deux approches énergétiques de modélisation, les *bond graph* et les systèmes *port-Hamiltoniens avec une structure de Dirac* (ou port-Hamiltonien tout court), qui mettent en avant le parallélisme entre différents domaines d'application (électricité, mécanique, thermodynamique, hydraulique, etc.). Ainsi, sans perte de généralité dans la démarche, on peut « morceler » un système physique quelconque en ses parties atomiques de type dipôle élémentaire (source, dissipation, stockage). A chaque partie atomique, on peut associer deux grandeurs dites de puissance, qu'on appelle de façon générique l'*effort*,  $e$ , et le *flux*,  $f$ , telles que la puissance reçue, pour les éléments récepteurs, ou la puissance générée, par les éléments générateurs, soient exprimées par le produit entre les deux grandeurs. De plus, pour les éléments de stockage d'énergie, on peut définir une grandeur, qu'on appelle de façon générique la variable d'*énergie*, comme étant l'intégrale d'une des grandeurs de puissance.

Compte tenu du fait que la seule contrainte imposée aux variables d'effort et de flux associées à chaque élément est le fait que leur produit représente une puissance, le choix pour ces variables n'est pas unique. Le choix le plus commun est fait de

telle sorte qu'on parvienne à une cohérence au niveau des variables d'effort/flux par rapport à leur signification physique. Ainsi, l'effort est représenté par la tension dans le domaine électrique, la force dans la mécanique de translation, le couple dans la mécanique de rotation, etc., tandis que le flux est représenté par le courant dans le domaine électrique, la vitesse de déplacement dans la mécanique de translation, la vitesse de rotation dans la mécanique de rotation. C'est ce choix qui est le plus souvent rencontré, que ce soit dans le cas du formalisme bond graphs (Karnopp *et al.*, 2000; Buisson, 1993) ou dans la plupart des travaux qui concernent l'approche port-Hamiltonienne avec une structure de Dirac (Escobar *et al.*, 1999; Magos, 2005; Valentin *et al.*, 2006).

Par rapport aux variables d'effort et de flux ainsi définies, on introduit deux types de variables d'énergie, dont la dénomination est héritée du domaine mécanique, le *déplacement*,  $q$ , comme étant l'intégrale du flux et le *moment*,  $p$ , comme étant l'intégrale de l'effort :

$$q(t) = \int^t f(\tau) d\tau \quad (2.1a)$$

$$p(t) = \int^t e(\tau) d\tau \quad (2.1b)$$

Ces variables correspondent dans le domaine électrique au flux électrique (le moment) et à la charge (le déplacement). Ainsi, on peut maintenant définir deux types de dipôle qui stockent de l'énergie : s'il existe une relation statique entre le déplacement et l'effort, alors on dit qu'il s'agit d'un dipôle *capacitif* et s'il existe une relation statique entre le moment et le flux, alors il s'agit d'un dipôle *inertiel*. Dans les deux cas, compte tenu du fait que, conformément aux relations (2.1), on trouve  $dq = f dt$  et  $dp = e dt$ , l'énergie stockée s'exprime sous les formes respectives suivantes :

$$E = E_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) f(\tau) d\tau = E_0 + \int_{q_0}^{q(t)} e(q) dq \quad (2.2a)$$

$$E = E_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) f(\tau) d\tau = E_0 + \int_{p_0}^{p(t)} f(p) dp, \quad (2.2b)$$

où  $E_0$  représente l'énergie stockée quand  $q = q_0$  et  $p = p_0$ . De plus, les expressions données pour l'énergie représentent, dans le domaine électrique, l'énergie électrique dans le cas (2.2a) et l'énergie magnétique dans le cas (2.2b), tandis que, dans le domaine mécanique, les mêmes expressions représentent l'énergie potentielle, (2.2a) et l'énergie cinétique, (2.2b). Si, en plus, on suppose l'hypothèse de linéarité pour ces

dipôles, ce qui dans le domaine électrique correspond à  $p = L \cdot f$  et  $q = C \cdot e$ , alors, pour un  $q_0 = 0$  et pour un  $p_0 = 0$ , l'énergie stockée s'exprime sous la forme :

$$E = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C e^2 \quad (2.3a)$$

$$E = \frac{p^2}{2L} = \frac{1}{2} L f^2 \quad (2.3b)$$

D'un point de vue global par rapport au champ d'éléments de stockage d'énergie, on peut définir une fonction Hamiltonienne,  $H$ , qui représente l'énergie totale stockée par ces éléments. Si on note  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{e}_E$  et  $\mathbf{f}_E$  les vecteurs de déplacement, de moment, d'effort et de flux correspondant au champ de stockage, alors la puissance absorbée est donnée par :

$$\dot{H} = \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^T H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{e}_E^T \mathbf{f}_E, \quad (2.4)$$

où on peut également identifier l'effort associé à la partie capacitive,  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$ , et le flux associé à la partie inertielle,  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ . Enfin, si on fait l'hypothèse de linéarité, dans le domaine électrique, l'énergie totale est donnée par :

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}, \quad (2.5)$$

où le vecteur  $\mathbf{x}$  est obtenu à partir des variables d'énergie de tous les dipôles du champ de stockage, qui est également appelé dans ce cas un réseau LC (Escobar *et al.*, 1999), et la matrice  $Q$  est définie positive, correspondant aux relations constitutives de chaque élément. De plus,  $Q$  est diagonale avec des éléments diagonaux du type  $1/C$  ou  $1/L$ , sauf dans le cas où il y aurait des inductances mutuelles dans le système.

En ce qui concerne les parties atomiques qui ont une fonction dissipative, celles-ci sont caractérisées par des relations statiques entre leur effort et leur flux. En règle générale, les éléments dissipatifs sont des consommateurs de puissance, donc la relation statique est définie uniquement dans les quadrants I et III. Si on fait l'hypothèse linéaire pour ce type d'élément, alors, dans le domaine électrique, on retrouve la loi d'Ohm :  $e = Rf$  et la puissance dissipée dans ce cas est représentée par :

$$P = ef = \frac{e^2}{R} = Rf^2 \quad (2.6)$$

Les parties atomiques qui ont une fonction de source sont de deux types : source de flux ou source d'effort. Cependant, d'un point de vue physique, ces éléments ne correspondent pas forcément à des sources réelles. Ils peuvent être le résultat de la décomposition d'un système en plusieurs sous-systèmes, et, dans ce cas, les variables d'effort/flux associées aux connexions entre sous-systèmes deviennent des variables d'interaction. Ainsi, implicitement, au niveau des sous-systèmes ces variables deviennent, de façon complémentaire pour les sous-systèmes connectés, pratiquement des sources.

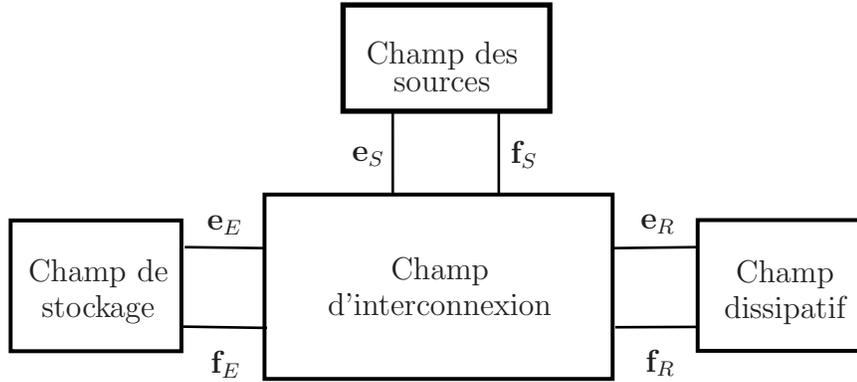


FIG. 2.1 – Schéma bloc générique d'interconnexion des trois champs d'un système physique

Finalement, pour avoir un système physique viable, il faut que les trois champs énumérés ci-dessus soient connectés, conformément à la figure 2.1. Le champ d'interconnexion, qu'on appelle dans l'approche bond graph *structure de jonction* et dans l'approche port-Hamiltonienne *structure de Dirac*, définit la topologie du système à l'aide d'éléments idéaux (connexions proprement dites, transformateurs et gyrateurs), c'est-à-dire des éléments qui canalisent les flux de puissance, sans jouer aucun rôle actif dans le bilan de puissances du système. Ainsi, ce dernier s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{e}_S^T \mathbf{f}_S - \mathbf{e}_E^T \mathbf{f}_E - \mathbf{e}_R^T \mathbf{f}_R = 0, \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{e}_E^T = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad \dot{\mathbf{p}} \right)$  et  $\mathbf{f}_E = \left( \dot{\mathbf{q}} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^T$ . La relation (2.7) exprime le fait que la puissance fournie par les sources se retrouve entièrement en tant qu'énergie stockée, par le champ de stockage, ou en tant qu'énergie dissipée, par le champ dissipatif.

Quant au champ d'interconnexion, il introduit des contraintes supplémentaires liées à la topologie du système et qui sont exprimées par les lois de Kirchhoff généralisées. Afin d'obtenir la mise en équation de ces contraintes, les deux approches discutées dans le cadre de cette section utilisent deux méthodes différentes avec deux résultats qualitativement différents.

### 2.2.1.1 Approche bond graphs

En ce qui concerne l'approche bond graphs <sup>(1)</sup>, on fait appel à une procédure, appelée assignation de la causalité, qui permet, par rapport à la structure de jonction, l'organisation en terme d'entrée/sortie des variables d'effort/flux associées aux connexions de chaque champ avec cette même structure de jonction. La procédure est la suivante :

1. on impose comme variable d'entrée l'effort, respectivement le flux, associé à une source d'effort, respectivement à une source de flux, tandis que la variable de puissance conjuguée associée à la même source (le flux, respectivement l'effort)

<sup>(1)</sup>Pour une introduction plus complète concernant l'approche bond graphs, voire, par exemple, (Karnopp *et al.*, 2000).

est imposée comme variable de sortie. On note  $\mathbf{u}$ , respectivement  $\mathbf{v}$ , le vecteur de puissance d'entrée, respectivement de sortie, associé aux sources ;

2. on maximise le nombre de variables d'effort, respectivement de flux, associées aux éléments de stockage inertiels, respectivement capacitifs, choisies en tant que sorties, tandis que les variables conjuguées de flux, respectivement d'effort, sont choisies en tant qu'entrées. On dit que les éléments de stockage pour lesquels ce choix a pu être fait sont indépendantes, et on note  $\dot{\mathbf{x}}_i = (\dot{\mathbf{p}}_i \quad \dot{\mathbf{q}}_i)^T$  le vecteur de variables de puissance de sortie, où le vecteur des variables conjuguées de puissance (d'entrée) est donné par  $Z_i = (\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i})^T$ . Les éléments de stockage pour lesquels le même choix n'a pas pu être fait sont dits dépendants, et on note  $\dot{\mathbf{x}}_d = (\dot{\mathbf{p}}_d \quad \dot{\mathbf{q}}_d)^T$  le vecteur de variables de puissance d'entrée, où le vecteur des variables conjuguées de puissance (de sortie) est donné par  $Z_d = (\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_d} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_d})^T$  ;
3. pour les variables de puissance associées aux éléments dissipatifs dont le choix n'a pas été imposé par les précédentes assignations (pour les sources et pour les éléments de stockage), on désigne de façon arbitraire les variables de puissance d'entrée et de sortie. De façon globale par rapport au champ dissipatif, on note  $D_i$  le vecteur des variables de puissance d'entrée et  $D_o$  le vecteur des variables de puissance de sortie.

On fait de plus l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.1** *A l'issue de la procédure d'assignation de la causalité, il n'y a pas de boucle causale de gain unitaire concernant une (quelconque) variable de puissance du système.*

Maintenant, soit  $Y = (\dot{\mathbf{x}}_i \quad Z_d \quad D_o \quad -\mathbf{v})^T$  le vecteur des termes qui représentent des sorties, et soit  $U = (Z_i \quad \dot{\mathbf{x}}_d \quad D_i \quad \mathbf{u})^T$  le vecteur des termes qui représentent des entrées, ceci permet d'aboutir à une mise en équation sous la forme entrée/sortie suivante :

$$Y = \mathcal{S}U, \quad (2.8)$$

où, conformément à la relation (2.7),  $\mathcal{S}$  est une matrice antisymétrique qui caractérise la topologie du système. La relation (2.8) est *minimale*, puisqu'elle a une dimension égale au nombre de dipôles et, pour un système dont la topologie est représenté par  $N$  nœuds et  $M$  mailles, elle est l'équivalent des lois de Kirchhoff pour  $N - 1$  nœuds et  $M - 1$  mailles.

**Remarque 2.2** *Dans une terminologie bond graph, on utilise plutôt les notions d'éléments de stockage en causalité intégrale, respectivement en causalité dérivée, à la place d'indépendant, respectivement dépendant. Ceci provient du fait que, lorsque la variable de puissance  $\dot{x}_i$  d'un élément de stockage est une variable de sortie, alors la variable d'énergie,  $x_i$ , est obtenue par intégration, tandis que lorsque la variable de puissance  $\dot{x}_d$  d'un élément de stockage est une variable d'entrée, le calcul de la différentielle de la variable d'énergie, qui coïncide avec sa dérivée dans le cas scalaire, est nécessaire pour retrouver la variable de puissance de sortie.*

### 2.2.1.2 Approche port-Hamiltonienne

En ce qui concerne l'approche port-Hamiltonienne, on applique, généralement, les mêmes principes d'organisation des variables en tant qu'entrées et sorties afin de retrouver une relation équivalente à (2.8), voir par exemple (Escobar *et al.*, 1999). De plus, il est aussi envisageable, conformément à (van der Schaft, 2006), de renoncer au choix homogène des variables d'effort/flux par rapport à leurs signification physique, ce qui conduit à une représentation homogène en terme de variables d'entrée et de sortie, pour définir les variables de puissance de façon homogène par rapport à leur présence dans  $Y$  et  $U$ . Ainsi, en gardant la même signification pour les variables d'énergie, on définit le flux associé au champ de stockage comme étant la différentielle de l'état,  $\mathbf{f}_E = \dot{\mathbf{x}}$ , tandis que l'effort est donné par  $\mathbf{e}_E = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ . De la même façon, on définit les vecteurs d'effort et de flux associés aux champs de sources et dissipatif, tel que, pour un système sans éléments dépendants, on a  $Y = (\mathbf{f}_E \quad \mathbf{e}_R \quad \mathbf{e}_S)^T$  et  $U = (\mathbf{e}_E \quad \mathbf{f}_R \quad \mathbf{f}_S)^T$ . Cependant, bien qu'intéressante à long terme, on écarte pour la suite de l'exposé ce type de notation homogène par rapport aux vecteurs d'entrée et de sortie, pour garder uniquement la notation homogène d'un point de vue signification physique.

Toutefois, une manière légèrement différente d'obtention de la mise en équations, a été introduite par (Magos, 2005). Dans ce cas, on utilise une représentation de type graphe (orienté) d'interconnexion de ports,  $G$ , pour un système à  $n_e$  dipôles. Formellement, ce graphe est décrit par l'ensemble non-vide de ces nœuds,  $\mathcal{V}(G)$ , avec  $n_v = \text{card}(\mathcal{V}(G))$ , et par l'ensemble non-vide de ces branches,  $\mathcal{E}(G)$ , où une branche,  $\mathbf{e}^G$ , connecte deux nœuds  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(G)$ , le nœud de départ, et  $\mathbf{v}' \in \mathcal{V}(G)$ , le nœud d'arrivée.

Le graphe  $G$  est dit *connexe* si, et seulement si, pour tout nœud  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(G)$ , il est connecté à au moins deux branches différentes du graphe, ce qu'on suppose par la suite être respecté pour tout tel graphe associé à un système physique. De plus, on suppose également que, pour tout système physique, on a une représentation *planaire*, c'est-à-dire que le plan est séparé par rapport à  $G$  en  $n_e - n_v + 2$  régions appelées *facettes*. On peut ainsi définir un graphe dual  $G^* = (\mathcal{V}(G^*), \mathcal{E}(G^*))$ , où les nœuds correspondent aux facettes de  $G$  et les branches de  $\mathcal{E}(G^*)$  connectent deux facettes de  $G$  (nœuds de  $G^*$ ) qui ont une branche (frontière) commune. Par rapport au graphe  $G$ , et de façon similaire par rapport au graphe  $G^*$ , on peut maintenant définir la matrice d'incidence, de dimension  $n_v \times n_e$ , élément par élément :

$$M_I^G(i, j) = \begin{cases} -1, \exists k \in \{1, \dots, n_v\}, \text{ t.q. } \mathbf{e}_j^G = (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i) \text{ et } \mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_k \\ 1, \exists k \in \{1, \dots, n_v\}, \text{ t.q. } \mathbf{e}_j^G = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k) \text{ et } \mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_k \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

A ce point, si à chaque branche de  $G$ , on associe les deux variables de puissance, l'effort et le flux, tel que le sens de la branche est en concordance avec le sens choisi pour le flux, alors on obtient, pour un système physique quelconque, la mise en équation suivante :

$$\begin{pmatrix} M_I^G \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \underline{\mathbf{f}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ M_I^{G*} \end{pmatrix} \underline{\mathbf{e}} = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

où  $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_E \ \mathbf{f}_R \ \mathbf{f}_S)^T$  et  $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_E \ \mathbf{e}_R \ \mathbf{e}_S)^T$ . Cette représentation est *non-minimale* puisqu'elle a  $(n_e + 2)$  équations, par rapport à  $n_e$ , le nombre d'équations de (2.8). Néanmoins, on peut obtenir une représentation minimale à partir de (2.10) si on élimine une ligne de la matrice  $M_I^G$  et une autre de la matrice  $M_I^{G*}$ .

Pour conclure cette sous-section dédiée à la modélisation des systèmes physiques sans interrupteurs, on fait la remarque que, indépendamment du choix de l'approche de modélisation, lorsque le champ dissipatif est linéaire et il n'y a pas d'élément de stockage dépendant ( $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ ), la mise en équation du système peut se faire sous la forme suivante (van der Schaft, 2006) :

$$\dot{\mathbf{x}} = (J - R) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + g\mathbf{u} \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{v} = g^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + g_S \mathbf{u}, \quad (2.11b)$$

où  $J = -J^T$  est la matrice d'interconnexion interne,  $g$  est la matrice d'interconnexion externe,  $g_S = -g_S^T$  est la matrice d'interconnexion des sources et  $R = R^T$  est liée à la dissipation du système. Autrement, s'il existe des éléments de stockage dépendants, alors, la mise en équation du système se fait sous la forme :

$$M\dot{\mathbf{x}} = A \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + g\mathbf{u} \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{v} = g_I \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} + g_D \dot{\mathbf{x}}_d + g_S \mathbf{u}, \quad (2.12b)$$

où la matrice  $M$  est singulière et  $g = (g_I \ g_D)^T$ .

### 2.2.2 Modélisation des systèmes physiques avec des interrupteurs

Les mêmes principes de modélisation des systèmes peuvent être répliqués dans le cas où des interrupteurs (dans le sens large d'éléments de commutation, non-limité uniquement au domaine électrique) font partie du système. Ainsi, du point de vue énergétique, en ce qui concerne le modèle d'interrupteur, on peut distinguer deux approches principales : une qui met l'accent sur l'aspect *élément commutateur*, qu'on appelle par la suite l'approche *idéale*, et une seconde qui met l'accent sur l'aspect *dissipatif*, qu'on appelle par la suite l'approche *non-idéale*. Du point de vue du principe de fonctionnement, ces deux approches se différencient également dans le traitement de la phase dite de commutation, qui assure en effet le passage entre deux, voir plus, régimes de fonctionnement. Dans le cadre de l'approche idéale, l'interrupteur commute

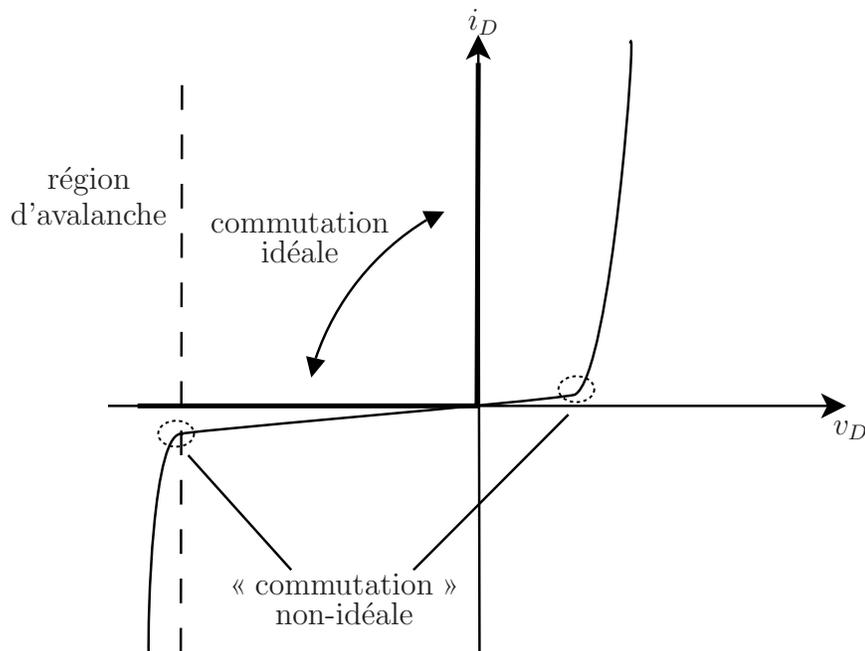


FIG. 2.2 – Caractéristiques de la diode dans l’espace des variables d’effort/flux associées, où la caractéristique idéale est donnée en traits plus gros que celle non-linéaire. On peut constater que la caractéristique linéaire ne prend pas en compte le phénomène d’avalanche

*instantanément* (durée nulle de commutation) entre un régime de fonctionnement où son flux est nul et un autre régime de fonctionnement où son effort est nul et vice versa, la puissance dissipée par l’interrupteur pendant un régime de fonctionnement (commutation exclue) est nulle. On peut donc associer à l’interrupteur, en plus des variables d’effort/flux, un état discret qui décrit le régime de fonctionnement. Par exemple, dans le domaine électrique, on dit qu’un interrupteur est *fermé* si son effort est nul et il est *ouvert* lorsque son flux est nul. Dans le cas de l’approche non-idéale, les régimes de fonctionnement ne sont plus à puissance nulle et la « commutation » n’est plus à durée nulle, bien que la dynamique dans cette région soit beaucoup plus rapide que la dynamique globale du système. A titre d’exemple, on donne figure 2.2 une comparaison entre les deux approches de modélisation pour un interrupteur du domaine électrique (la diode).

Dans le cadre de l’approche non-idéale, il est naturel d’avoir un modèle d’interrupteur de type résistance non-linéaire ou, encore, linéaire par morceaux, où la valeur de la résistance change dans la région de commutation d’une valeur très grande à une valeur très petite et vice versa (Dauphin-Tanguy and Rombaut, 1993). Ce choix permet de retrouver une mise en équation tout à fait similaire aux relations (2.8) et (2.10), déterminées antérieurement pour les systèmes sans interrupteurs. Néanmoins, bien que plus simple, puisque ne nécessitant pas une remise en question des formalismes

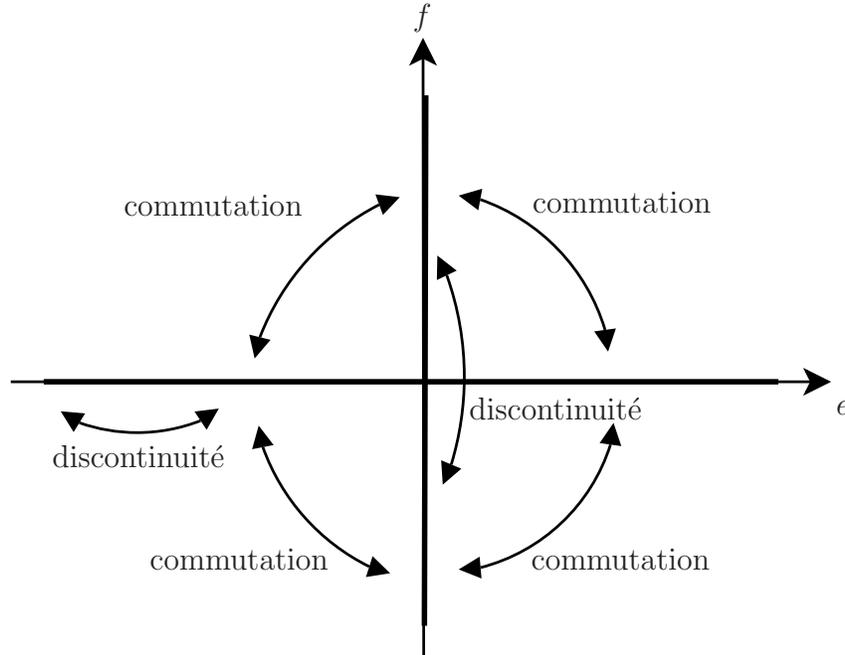


FIG. 2.3 – Caractéristique de l'interrupteur idéal à la commande. On peut observer que les variables de puissance peuvent être discontinues, même lorsque l'interrupteur ne commute pas

---

antérieurs, cette approche de modélisation trouve ces limites lors de son utilisation dans l'analyse, telle que, par exemple, la simulation (Cormerais, 1998).

Pour la suite de la section, on s'intéresse uniquement aux approches qui utilisent un modèle idéal d'interrupteur. Plus précisément, il s'agit principalement de l'interrupteur idéal à la commande, dont la caractéristique est donnée en figure 2.3. De façon générale, le rôle de l'interrupteur dans un système est de pouvoir offrir une souplesse dans l'acheminement de l'énergie des sources vers le champ dissipatif et le champ de stockage. De ce point de vue, une première solution consiste à intégrer les modèles d'interrupteurs dans le champ d'interconnexion et, par conséquent, garder le schéma de la figure 2.1. Toutefois, compte tenu du fait qu'il est possible, à des instants de temps ponctuels, d'avoir une dissipation finie et instantanée d'énergie (due à l'idéalité de la représentation de l'interrupteur), le champ d'interconnexion ne représente plus une structure conservatrice par rapport à l'équation de bilan des puissances (2.7). Ainsi, une deuxième solution consiste à garder la nature conservatrice du champ d'interconnexion par l'introduction d'un champ séparé pour les interrupteurs, conformément à la figure 2.4, en leurs conférant non seulement une dimension logique, mais aussi physique, de type dipôle. Dans ce cas, le bilan énergétique du système, pour une convention récepteur du champ interrupteur, s'écrit sous la forme :

$$E_S - E_E - E_R - E_I = 0, \quad (2.13)$$

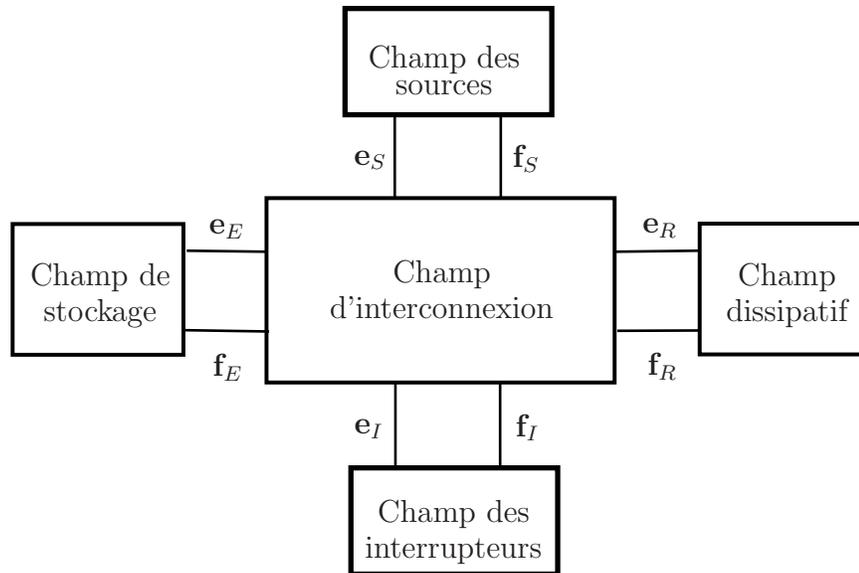


FIG. 2.4 – Schéma bloc générique d'un système physique avec des interrupteurs avec un champ d'interconnexion conservateur

où, pour un interrupteur, l'énergie dissipée est nulle, sauf à sa commutation si une des variables de puissance associée est impulsionnelle, tandis que l'autre est discontinue.

Pour résumer, les principales approches de modélisation analysées dans cette sous-section sont les suivantes :

- approches à champ d'interconnexion conservateur
  - les bond graphs commutés (l'interrupteur est modélisé par un élément spécifique de bond graph) (Buisson, 1993; Strömberg, 1994) ;
  - formulation port-Hamiltonienne complémentaire (Heemels *et al.*, 2003) ;
- approches à champ d'interconnexion ponctuellement dissipatif
  - bond graphs hybrides (l'interrupteur est modélisé par une jonction commandée) (Mösterman, 1997) ;
  - formulation port-Hamiltonienne à ports paramétrés (Magos, 2005).

**Remarque 2.3** *Dans certains cas particuliers, mais avec un champ d'application suffisamment important, on peut avoir un champ d'interconnexion conservateur, où les éléments commutateurs sont intégrés. Une telle situation correspond à la commutation par paire des interrupteurs, voir, par exemple, (Buisson et al., 2002), pour une approche bond graph, ou (Magos, 2005), pour une approche port-Hamiltonienne. Ainsi, si on note  $\rho$  le vecteur représentant l'état discret des paires d'interrupteurs, alors la mise en équation du système, pour un champ dissipatif linéaire, aboutit à une forme du même type que la relation (2.11), mais paramétrée par rapport à  $\rho$  :*

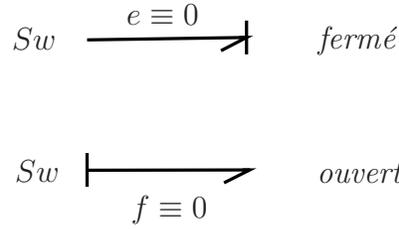


FIG. 2.5 – Élément bond graph à causalité variable modélisant l'interrupteur : source d'effort nulle quand il est *fermé* et source de flux nulle quand il est *ouvert* (convention générateur)

---

$$\dot{\mathbf{x}} = (J(\rho) - R(\rho)) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + g(\rho) \mathbf{u} \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{v} = g^T(\rho) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + g_S \mathbf{u} \quad (2.14b)$$

En plus, les matrices  $J(\rho)$ ,  $R(\rho)$  et  $g(\rho)$  ont une représentation affine par rapport à  $\rho$ .

### 2.2.2.1 Les Bond graphs commutés

Les bond graphs commutés sont des bond graphs classiques enrichis avec l'élément interrupteur (Buisson, 1993; Strömberg, 1994), ce qui permet de prendre en compte la dimension physique et énergétique de celui-ci. Ce nouvel élément est un dipôle modélisé comme une source de nature variable, conformément à la figure 2.5. Ainsi, quand l'interrupteur est fermé, l'élément bond graph interrupteur agit comme une source d'effort nulle. Autrement, quand l'interrupteur est ouvert, l'élément bond graph agit comme une source de flux nulle. Par rapport à l'assignation de la causalité, ces changements se traduisent par une variation de la causalité de l'élément interrupteur lors des commutations. Ceci fait qu'au moment où l'on considère que l'interrupteur est ouvert, son flux est la variable d'entrée dans la structure de jonction, tandis que son effort est une variable de sortie, et vice versa pour l'interrupteur fermé. Compte tenu du fait que l'énergie échangée entre les interrupteurs et le reste du système est nulle sauf, dans certains cas, à la commutation, le sens de la transmission de la puissance est choisi de l'interrupteur vers le reste du système (convention générateur).

On établit de cette manière un lien implicite entre l'état logique de l'interrupteur et les variables d'effort/flux associées au dipôle bond graph, par la contrainte imposée aux dernières. D'autre part, quand l'interrupteur est fermé, respectivement ouvert, le flux, respectivement l'effort, n'est soumis à aucune contrainte. Dans ce cas le flux, respectivement l'effort, est la variable libre associée à l'état logique fermé, respectivement ouvert, de l'interrupteur. Au moment de la commutation de l'interrupteur, la variable libre devient contrainte tandis que la variable contrainte devient libre.

Puisque la variable contrainte de l'interrupteur est toujours nulle, la puissance dissipée par l'interrupteur est presque toujours nulle. La seule exception est constituée au moment de la commutation, quand la variable libre peut avoir une composante impulsionnelle. Dans ce cas l'énergie dissipée à la commutation est non-nulle et l'échange avec le reste du système est instantané. La cause du phénomène impulsionnel et, implicitement, de l'échange instantané de l'énergie avec le système sont des conséquences de l'hypothèse d'idéalité introduite pour le modèle de l'interrupteur.

Compte tenu du fait que l'élément interrupteur est à causalité variable, on peut envisager une mise en équation du type (2.8) pour chaque configuration d'interrupteurs du système. Pour trouver ces mises en équation, on peut employer une procédure d'assignation de causalité pour chaque configuration d'interrupteurs, telle que SCAP, où les interrupteurs dans la configuration donnée sont lotis au champ des sources. Si lors de l'application de SCAP, pour une configuration d'interrupteurs donnée, on aboutit à un conflit causal qui ne peut pas être résolu, alors ceci est équivalent au fait que la dite configuration ne respecte pas les lois de Kirchhoff et, donc, elle n'est pas permise. Si  $l_j$  est une configuration pour laquelle l'assignation de la causalité est faisable et l'hypothèse 2.1 est valide quelle que soit  $l_j$ , alors la mise en équation associée peut se mettre sous la forme :

$$Y_j = \mathcal{S}_j U_j, \quad (2.15)$$

où la matrice  $\mathcal{S}_j$  garde la propriété d'antisymétrie et  $Y_j$ , respectivement  $U_j$ , représente le vecteur de sortie, respectivement d'entrée, de la structure de jonction. Ainsi, les vecteurs de sortie,  $Y_j$ , et d'entrée,  $U_j$ , compte tenu du fait que les sources sont des éléments à causalité fixe, peuvent se décomposer par rapport aux sorties et aux entrées de tous les champs :  $Y_j = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{ij} & Z_{dj} & D_{oj} & -T_{oj} & -\mathbf{v} \end{pmatrix}^T$  et  $U_j = \begin{pmatrix} Z_{ij} & \dot{\mathbf{x}}_{dj} & D_{ij} & T_{ij} & \mathbf{u} \end{pmatrix}^T$ , où les vecteurs  $\dot{\mathbf{x}}_{ij}$ ,  $Z_{dj}$ ,  $D_{oj}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $Z_{ij}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_{dj}$ ,  $D_{ij}$ ,  $\mathbf{u}$  ont la même signification par rapport à la mise en équation à topologie fixe (2.8), tandis que  $T_{oj}$ , respectivement  $T_{ij}$ , est le vecteur des variables de puissance d'entrée, respectivement de sortie, de la structure de jonction par rapport au champ des interrupteurs.

Par rapport à l'approche d'assignation de la causalité par une procédure SCAP pour chaque configuration, qui est une solution laborieuse, (Buisson *et al.*, 2002) propose une approche alternative de détermination algébrique des triplets  $(Y_j, \mathcal{S}_j, U_j)$  à partir d'un autre triplet  $(Y_r, \mathcal{S}_r, U_r)$ , associé à une configuration spéciale d'interrupteurs,  $l_r$ , appelée configuration de référence, et déterminée toujours par SCAP. Pour trouver cette configuration, on applique SCAP en considérant les interrupteurs comme des éléments dissipatifs, ce qui les rendent à causalité indifférente. La causalité des interrupteurs, autrement dit l'état ouvert/fermé, n'est affecté qu'après l'assignation de la causalité des sources et des éléments de stockage en ayant soin de maximiser le nombre d'élément à causalité intégrale. Cette configuration existe toujours, sauf dans des cas marginaux où aucune configuration n'est valide, et, compte tenu de l'hypothèse 2.1, on peut y associer ainsi les vecteurs des variables de puissance  $Y_r$  et  $U_r$  et la matrice de la structure de jonction  $\mathcal{S}_r$ , qui définissent une relation d'entrée/sortie de type (2.15).

Maintenant, une autre configuration d'interrupteurs quelconque,  $l_j$ , peut être définie par rapport à la configuration de référence, par l'intermédiaire d'une matrice diagonale  $\Lambda_j$  de dimension égale au nombre d'interrupteurs du système, où les éléments diagonaux sont égaux soit à 1, si l'interrupteur correspondant change de causalité par rapport à la configuration de référence, soit à 0, autrement. Il est possible à ce point, conformément à (Buisson *et al.*, 2002), en utilisant uniquement les matrices  $\mathcal{S}_r$  et  $\Lambda_j$ , de décider si la configuration  $l_j$  est permise ou non. Si la réponse est affirmative, alors les nouveaux vecteurs d'entrée/sortie par rapport au champ d'interrupteurs sont donnés par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} T_{ij} \\ T_{oj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \Lambda_j & \Lambda_j \\ \Lambda_j & \mathbf{I} - \Lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{ir} \\ T_{or} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

De façon similaire, les vecteurs d'entrée/sortie par rapport au champ dissipatif sont donnés par une relation du même type :

$$\begin{pmatrix} D_{ij} \\ D_{oj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \Delta_j & \Delta_j \\ \Delta_j & \mathbf{I} - \Delta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{ir} \\ D_{or} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

où  $\Delta_j$  représente une matrice diagonale de la même dimension que le nombre d'éléments dissipatifs, dont les éléments diagonaux qui sont égaux à 1 correspondent à des éléments dissipatifs qui ne changent pas de causalité par rapport à  $l_r$ , tandis que la situation contraire de point de vue causal est représentée par des éléments diagonaux nuls. Finalement, dans le même registre, en considérant en plus comme invariante la causalité des éléments de stockage dépendants de  $l_r$ , le passage des variables de  $\mathbf{x}_{ir}$  vers  $\mathbf{x}_{dj}$  est donné par :

$$\mathbf{x}_{ir} = \begin{pmatrix} P_{1j} & P_{2j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{x}_{idj} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{x}_{dj} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{idj} & \mathbf{x}_{dr} \end{pmatrix}^T$  et  $P_j = \begin{pmatrix} P_{1j} & P_{2j} \end{pmatrix}$  est une matrice de permutation.

Sans entrer ici dans le détail de la détermination de  $(Y_j, \mathcal{S}_j, U_j)$ , fournit par (Buisson *et al.*, 2002), on remarque que celle-ci passe également par la détermination des matrices inconnues  $\Delta_j$  et  $P_j$ . Plus précisément, il s'agit de déterminer les matrices  $\Delta_j$  et  $P_{2j}$  ( $P_{1j}$  étant directement liée à cette dernière) de rang minimal, telles que la représentation  $(Y_j, \mathcal{S}_j, U_j)$  soit bien définie. Toutefois, étant donné que le calcul de  $\Delta_j$  et  $P_{2j}$  n'est pas explicite par rapport à  $\mathcal{S}_r$  et  $\Lambda_j$ , on ne peut pas définir de façon explicite une transformation qui relie le triplet  $(Y_j, \mathcal{S}_j, U_j)$  au triplet de référence  $(Y_r, \mathcal{S}_r, U_r)$  et au  $\Lambda_j$ .

Dans le cas où le champ de stockage et le champ dissipatif sont linéaires, on peut définir de façon générique une transformation du vecteur des variables d'énergie :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{x}_{dj} \end{pmatrix} = Q_j \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1j} \\ \mathbf{x}_{2j} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

telle qu'on puisse isoler, à partir de (2.15), une équation dynamique explicite concernant  $\mathbf{x}_{1j}$  et une contrainte algébrique, toujours explicite, concernant  $\mathbf{x}_{2j}$ . En plus,

compte tenu du caractère conservateur de la structure de jonction, on peut expliciter également, lors des changements de configuration, les discontinuités éventuelles des variables d'énergie, ainsi que les éventuelles parties impulsionnelles des variables de puissance associée aux interrupteurs.

### 2.2.2.2 Formulation port-Hamiltonienne complémentaire

La formulation port-Hamiltonienne avec une structure de Dirac pour les systèmes physiques avec interrupteurs met en évidence, comme les bond graphs, le principe de conservation de la puissance dans le système. Le modèle mathématique du système port-Hamiltonien consiste dans un système d'équations global (indépendant de la configuration d'interrupteurs) qui décrit à la fois la dynamique du vecteur d'état, une relation de sortie, la relation entre le vecteur d'état et les variables d'effort/flux associées aux interrupteurs, et la relation d'orthogonalité entre les variables d'effort/flux associées au même interrupteur. Soit ainsi  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{y}$  les vecteurs des variables de puissance complémentaires, tels que la mise en équation globale du système est donnée par le système d'équations suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = [J(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x})] \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \mathbf{u} + g_I(\mathbf{x}) \mathbf{w} \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{v} = g^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + g_S \mathbf{u} + g_{IS} \mathbf{w} \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{y} = -g_I^T(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + g_{IS}^T \mathbf{u} + D_w \mathbf{w} \quad (2.20c)$$

$$\mathbf{y}_i \perp \mathbf{w}_i, \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (2.20d)$$

Les trois premières équations de ce système sont équivalentes à la mise en équation des bond graph commuté pour une configuration de référence, de type (2.15), où, en plus, on suppose que tous les éléments de stockage d'énergie sont indépendants, ce qui, dans le cadre de cette méthode, est considéré toujours vrai pour la configuration de référence choisie, et il n'y a pas de relation directe entre les variables de puissance associées aux éléments dissipatifs et le vecteur  $\mathbf{y}$  des variables de puissance associées aux interrupteurs. Finalement, la relation (2.20d), valable pour tous les modèles d'interrupteurs dont la représentation dans le plan des variables de puissance est incluse dans celle de la figure 2.3, est équivalente dans la formulation bond graph au fait que  $T_{ij} \equiv \mathbf{0}$  pour toute configuration  $l_j$ .

Une attention spéciale a été accordée aux systèmes linéaires avec des interrupteurs où les variables d'effort/flux associées au même interrupteur sont, en plus, positives (Heemels *et al.*, 2001; Heemels *et al.*, 2003). Dans ce cas, compte tenu du fait que les champs de stockage et dissipatif ont des équations caractéristiques linéaires et, donc, les matrices qui dépendaient de  $\mathbf{x}$ , à l'exception du hamiltonien, ne le sont plus, le système d'équations (2.20) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{w} + E\mathbf{u} \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{w} + F\mathbf{u} \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{v} = G\mathbf{x} + J\mathbf{w} + L\mathbf{u} \quad (2.21c)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{w} \leq \mathbf{0} \quad (2.21d)$$

Pour un tel système, appelé aussi *système linéaire complémentaire*, on peut énoncer un résultat important en ce qui concerne son évolution temporelle :

**Proposition 2.4** *La trajectoire du triplet  $(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{y})$ , associé à un système linéaire complémentaire conformément aux relations (2.21), est unique et continue dans l'intervalle  $[0, T]$ , excepté, éventuellement, à l'instant initial, quand  $\mathbf{x}$  peut être au maximum discontinu et  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{y}$  au maximum impulsions, si les conditions suivantes sont respectées :*

1. *le système est passif (dissipatif), c'est-à-dire, à tout moment  $t_1 > t_0$ , on a :*

$$H(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{v}(t) dt \geq H(\mathbf{x}(t_1)), \quad (2.22)$$

où  $H(\mathbf{x}(0)) \geq H(\mathbf{x}(0_+))$  ;

2. *le triplet  $(A, B, C)$  est minimal et la matrice  $B$  est de rang plein en colonne ;*
3. *la trajectoire du vecteur des entrées de puissance,  $\mathbf{u}$ , ne contient pas d'impulsion de Dirac.*

**Remarque 2.5** *L'amplitude des discontinuités de  $\mathbf{x}$  et des impulsions de  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{y}$  peut être explicitée dans le cadre de cette même mise en équation, conformément à (Heemels et al., 2001).*

Le résultat précédent peut être également étendu pour les systèmes (2.20) avec des interrupteurs de deux types : *idéaux*, dans le sens de la figure 2.3, et *positifs*, dans le sens de la quatrième relation de (2.21). Ainsi, on peut analyser l'unicité et la continuité de la solution pour chaque configuration admissible des interrupteurs *idéaux* sachant la mise en équation (2.21) associée (Morvan *et al.*, 2003). Puisque la proposition 2.4 ne conditionne pas l'existence par rapport à l'état initial, on peut conclure sur l'existence et l'unicité de la solution du système global si tout sous-système *linéaire complémentaire* a une solution unique. Cependant, il est difficile de toujours garantir l'existence d'une forme (2.21) pour toutes les configurations admissibles d'interrupteurs idéaux, mais il est possible de prouver dans ce cas (Camlibel *et al.*, 2003) qu'une solution unique existe dans des conditions similaires aux conditions requises pour les *systèmes linéaires complémentaires*.

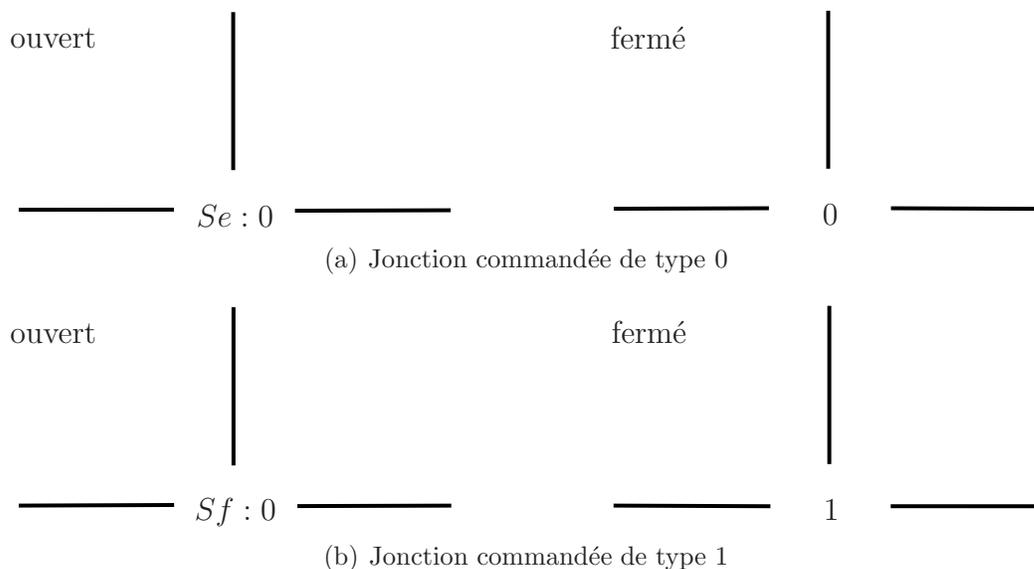


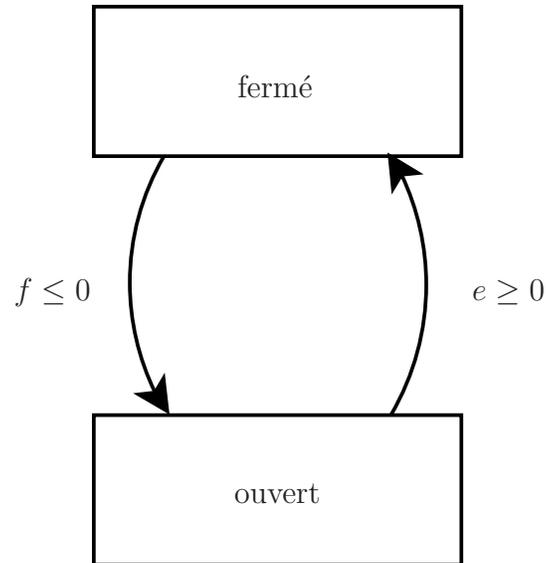
FIG. 2.6 – Représentation bond-graph des interrupteurs par l’intermédiaire des jonctions commandées

### 2.2.2.3 Les Bond graphs hybrides

L’approche bond graph hybride (Mösterman, 1997) considère les systèmes physiques avec des interrupteurs comme des systèmes à topologie variable, où la configuration d’interrupteurs désigne un état de connexion des autres éléments du système. Dans ce contexte, on intègre le modèle de l’interrupteur à une jonction 0 ou 1 suivant le cas, la jonction résultante devenant ainsi une jonction commandée. De cette façon, conformément à la figure 2.6, pour l’interrupteur intégré *fermé*, la jonction commandée (soit 0, soit 1) fonctionne normalement, tandis que pour l’interrupteur intégré *ouvert*, la jonction 0, respectivement la jonction 1, impose un effort, respectivement un flux nul à tous les liens incidents.

Pour gérer les commutations entre les deux modes de fonctionnement des jonctions commandées, un deuxième niveau a été ajouté au modèle des jonctions. Ce deuxième niveau consiste en un automate d’état fini qui modélise les conditions à la commutation à partir des entrées discrètes et des variables internes du système. A titre d’exemple, un tel modèle pour la diode idéale est donné figure 2.7. Dans le cadre de cette approche, de façon générale, les variables associées à l’automate sont soit des variables de puissance issues du bond graph, soit des signaux de commande externe. Le bond graph ainsi obtenu est hybride, puisque ce modèle exprime à la fois une dynamique continue et une dynamique discrète par les automates.

**Remarque 2.6** *Pour différencier une jonction normale d’une jonction commandée en mode fermé, on rajoute à cette dernière un indice inférieure, qui sert à identifier aussi le modèle de type automate associé. D’ailleurs, lorsqu’on construit le bond graph acausal, on le fait pour la configuration d’interrupteurs qui correspond à tous*




---

FIG. 2.7 – Modèle automate pour un interrupteur de type diode idéale

*les interrupteurs en mode fermé, et qui devient ainsi, de facto, la configuration de référence.*

En ce qui concerne l'affectation de la causalité pour ce type de bond graph, elle est liée à l'état discret dans lequel se trouve les interrupteurs. Ainsi, si on suppose également que toute jonction 0, respectivement jonction 1, est liée uniquement à des jonctions 1, respectivement à des jonctions 0, et à des éléments de type dipôle, alors, pour affecter la causalité pour une configuration donnée d'interrupteurs, on applique une procédure de type SCAP au bond graph obtenu par la désactivation de tous les liens incidents à des jonctions commandées dans l'état *ouvert*. Ceci est rendu possible par le fait que tout lien incident à une jonction 1 et dont l'effort a été forcé à 0 n'influence pas l'établissement de l'équilibre des efforts d'autres liens incidents à cette même jonction 1. Un raisonnement similaire est valable pour l'équilibre des flux incidents à une jonction 0. Dans certains cas particuliers, tel que, par exemple dans le domaine électrique, lorsque l'interrupteur est connecté à la masse, il est nécessaire de rajouter une source nulle. Dans le cas mentionné, il s'agit d'une source d'effort, pour assurer la propagation correcte des contraintes (par l'intermédiaire de la causalité) vers le reste du système lorsque l'interrupteur est *fermé*. Cette nécessité vient du fait que lors de la construction du bond graph acausal, on élimine une jonction 0 qui correspond d'habitude à la masse, ce qui fait qu'on aurait eu une borne de l'interrupteur non connectée.

Une fois l'affectation de la causalité résolue, la mise en équation du système par l'intermédiaire de cette méthode se fait de la même façon que dans le cas des bonds graphs classiques. Néanmoins, pour résoudre le problème des éventuelles discontinuités aux changements des états des interrupteurs, des sources impulsionnelles sont introduites pour expliciter les pertes d'énergie vers l'environnement et, ainsi, obte-

nir un bilan énergétique cohérent. De cette façon, puisque les valeurs des sources impulsionnelles ne sont généralement pas dépendantes de l'état du système avant le changement discret, contrairement, par exemple, à l'approche bond graph commuté, on peut modéliser par ce formalisme des systèmes comportant à la fois des chocs inélastiques et des chocs élastiques.

#### 2.2.2.4 Formulation port-Hamiltonienne à ports paramétrés

Le but de cette approche est de trouver formellement une mise en équation des systèmes physiques avec des interrupteurs, paramétrée par rapport à l'état discret des interrupteurs (Magos, 2005; Valentin *et al.*, 2006; Valentin *et al.*, 2007). Pour ce faire, on utilise toujours le graphe d'interconnexion, sauf que, maintenant, celui-ci doit tenir compte des interrupteurs. On définit ainsi le *graphe (orienté) d'interconnexion de ports dynamique*,  $G_w = (\mathcal{V}(G_w), \mathcal{E}(G_w), \mathcal{E}_w(G_w))$ , où  $\mathcal{V}(G_w)$ ,  $\text{card}(\mathcal{V}(G_w)) = n_v$ , représente l'ensemble de nœuds du système,  $\mathcal{E}(G_w)$ ,  $\text{card}(\mathcal{E}(G_w)) = n_e$ , représente l'ensemble des branches associées aux éléments des champs sources, stockage et dissipation, appelées aussi branches *fonctionnelles*, tandis que  $\mathcal{E}_w(G_w)$ ,  $\text{card}(\mathcal{E}_w(G_w)) = n_s$ , représente l'ensemble des branches associées aux interrupteurs, appelées aussi branches *virtuelles*. De plus, on associe à chaque interrupteur,  $Sw_k$ , une variable booléenne,  $w_k \in \mathbb{B}$ , pour exprimer l'état discret de l'interrupteur : si l'état discret est ouvert, alors  $w_k = 0$ , et, si l'état discret est fermé, alors  $w_k = 1$ . Ainsi, on peut décrire l'état discret du système par le vecteur des variables booléennes associées à tous les interrupteurs  $W = (w_1 \dots w_{n_s})^T$ .

Par similitude avec la solution qui permet la mise en équation des systèmes physiques sans interrupteur, on cherche à déterminer la matrice d'incidence du graphe  $G$ . Il a été ainsi montré dans (Valentin *et al.*, 2006) que cette matrice,  $M_I^{G_w}(W)$ , est obtenue à partir de la matrice d'incidence du sous-graphe fonctionnel  $G_f = (\mathcal{V}(G_w), \mathcal{E}(G_w))$ ,  $M_I^{G_f}$ , et d'une matrice de transformation,  $M_T^{G_w}(W)$ , c'est-à-dire :

$$M_I^{G_w}(W) = M_T^{G_w}(W) M_I^{G_f} \quad (2.23)$$

On peut remarquer ici que le graphe  $G_f$  est en effet une représentation fixe de la configuration où tous les interrupteurs seraient ouverts, ce qui constitue ainsi, *de facto*, la configuration de référence du système.

Si l'obtention de la matrice  $M_I^{G_f}$  se fait tout simplement à l'aide de la relation (2.9), le calcul de la matrice de transformation est plus laborieux. Soit ainsi, dans un premier temps, le sous-graphe virtuel,  $G_v(\mathcal{V}(G_w), \mathcal{E}_w(G_w))$  qui consiste dans la partie du graphe initial contenant tous les nœuds et toutes les branches virtuelles. Par rapport à ce graphe, on définit élément par élément la matrice de déconnexion-reconnexion associée à un interrupteur  $Sw_k$ , à qui correspond une branche virtuelle  $e_k^{G_v} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ , avec  $i, j \in \{1, \dots, n_v\}$ ,  $i \neq j$  et  $k \in \{1, \dots, n_s\}$  :

$$M_{DR}^{G_v}(w_k)(i', j') = \begin{cases} w_k, & \text{si } i' = j, j' = i \\ -w_k, & \text{si } i' = j' = i \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}, \forall i', j' \in \{1, \dots, n_v\} \quad (2.24)$$

Maintenant la matrice de transformation se calcule de façon récursive :

$$M_T^{G_w}(W) = \left[ \prod_{k=1}^{n_s-1} M_{T[k]}^{G_w}(W_k) \right] M_{T[n_s]}^{G_w}(w_{n_s}), \quad (2.25)$$

par l'accumulation des transformations intermédiaires :

$$M_{T[n_s]}^{G_w}(w_{n_s}) = \mathbf{I} + M_{DR}^{G_v}(w_{n_s}) \quad (2.26)$$

et,  $\forall k \in \{1, \dots, n_s - 1\}$  :

$$M_{T[k]}^{G_w}(W_k) = \mathbf{I} + \left[ \prod_{i=k+1}^{n_s} M_{T[i]}^{G_w}(W_i) \right] M_{DR}^{G_v}(w_k) \left[ \prod_{j=k+1}^{n_s} M_{T[j]}^{G_w}(W_j) \right]^T, \quad (2.27)$$

avec  $W_k = (w_k \ \dots \ w_{n_s})^T$ . De la même façon, on détermine la matrice d'incidence pour le graphe d'interconnexion dynamique dual,  $G_w^*$ , paramétrée par rapport à l'état discret dual du système,  $W^* = (w_1^* \ \dots \ w_{n_s}^*)^T$ , où  $w_k^* = 1 - w_k, \forall k \in \{1, \dots, n_s\}$ .

Une fois les matrices d'incidence déterminées, on est capable d'identifier quelles sont les configurations d'interrupteurs qui respectent les lois de Kirchhoff, c'est-à-dire les configurations pour lesquelles, en convention électricité, les conditions suivantes sont respectées :

1. il n'y a pas de source d'effort en court circuit ;
2. il n'y a pas de sources d'effort indépendantes connectées en parallèle ;
3. il n'y a pas de source de flux en circuit ouvert ;
4. il n'y a pas de sources de flux indépendantes connectées en série.

Soit maintenant les vecteurs  $\hat{\mathbf{e}}$  et  $\hat{\mathbf{f}}$  des variables d'effort et, respectivement, de flux associées aux ports de connexion avec les champs du système telles que les variables de puissance correspondant aux sources d'effort, en nombre de  $n_{se}$ , sont en premières positions et les variables de puissance associées aux sources de flux, en nombre de  $n_{sf}$ , sont en dernières positions :

$$\hat{\mathbf{e}} = \left( \mathbf{e}_{Se} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad \dot{\mathbf{p}} \quad \mathbf{e}_R \quad \mathbf{e}_{Sf} \right)^T \quad (2.28a)$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \left( \mathbf{f}_{Se} \quad \dot{\mathbf{q}} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \mathbf{f}_R \quad \mathbf{f}_{Sf} \right)^T \quad (2.28b)$$

Dans ce cas, les conditions d'avoir une bonne configuration d'un système physique avec des interrupteurs, configuration désignée par une valeur fixée  $W$ , sont équivalentes à :

1. si  $n_{se} \neq 0, \exists i \in \{1, \dots, n_v\}$  t.q.  $M_I^{G_w}(W)(i, j) \neq 0, \forall j \in \{1, \dots, n_{es}\}$  ;
2. si  $n_{se} > 0, \exists i \in \{1, \dots, n_v\}$  t.q.  $|M_I^{G_w}(W)(i, j)| \neq |M_I^{G_w}(W)(i, j')|, \forall j, j' \in \{1, \dots, n_{es}\}, j \neq j'$  ;

3. si  $n_{sf} \neq 0$ ,  $\exists i \in \{1, \dots, n_v\}$  t.q.  $M_I^{G^*}(W)(i, j) \neq 0$ ,  
 $\forall j \in \{n_e - n_{sf} + 1, \dots, n_e\}$ ;
4. si  $n_{sf} > 0$ ,  $\exists i \in \{1, \dots, n_v\}$  t.q.  $|M_I^{G^*}(W)(i, j)| \neq |M_I^{G^*}(W)(i, j')|$ ,  $\forall j, j' \in$   
 $\{n_e - n_{sf} + 1, \dots, n_e\}, j \neq j'$ ;

Ainsi, si une de ces conditions n'est pas respectée alors la configuration n'est pas permise. De plus, on peut dire qu'elle est la cause du problème.

**Remarque 2.7** *De la même façon que celle employée pour identifier les configurations permises, on peut trouver les configurations qui ont des éléments de stockage dépendants. Autrement dit, pour chaque élément inertiel on peut vérifier s'il est en circuit ouvert ou s'il y a un autre élément inertiel connecté en série avec celui-ci et pour chaque élément capacitif on peut vérifier s'il est en court-circuit ou s'il y a un autre élément inertiel connecté en parallèle avec celui-ci. Tout comme dans le cas des bond graphs, on garde la notation  $\mathbf{x}_i$  pour les éléments de stockage indépendants et  $\mathbf{x}_d$  pour les éléments de stockage dépendants, indépendamment de leur nature, inertiel ou capacitif.*

Finalement, quel que soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble de configurations qui respectent les lois de Kirchhoff, alors, pour toute valeur de  $W$  compatible avec  $\mathcal{C}$ , on retrouve une mise en équation implicite, du même type que (2.10), mais cette fois paramétrée par rapport au vecteur  $W$  :

$$\begin{pmatrix} M_I^{G^*}(W) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{f}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ M_I^{G^*}(W) \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Tout comme dans le cas sans interrupteurs, la relation (2.29) est une mise en équation non-minimale, de dimension  $n_e + n_s + 2$  (équations), par rapport à une dimension minimale qui elle en aurait eu  $n_e$ .

Pour les systèmes physiques avec des interrupteurs où le champ dissipatif serait linéaire, on peut trouver une mise en équation équivalente à (2.29), mais de dimension réduite,  $n_e + n_s + 2 - n_R$ , avec  $n_R$  le nombre d'éléments dissipatifs, et réécrite, après avoir effectué de simples permutations, sous la forme :

$$\hat{M}(W) \dot{\mathbf{x}} = \hat{A}(W) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \hat{g}(W) \mathbf{u} \quad (2.30a)$$

$$\hat{B}(W) \mathbf{v} = \hat{g}_I(W) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} + \hat{g}_D(W) \dot{\mathbf{x}}_d + \hat{g}_S(W) \mathbf{u} \quad (2.30b)$$

qui représente une mise en équation paramétrée par rapport à la mise en équation (2.12), cette dernière obtenue pour une configuration fixe d'interrupteurs. Néanmoins, par rapport à (2.12), (2.30) n'est plus minimale, d'où l'emploi des chapeaux dans la notation des différentes matrices qui y interviennent. De plus, par rapport à la mise en équation (2.14), les matrices de la relation (2.30) ne dépendent plus de façon linéaire du vecteur représentant la configuration du système,  $W$ .

## 2.3 Modèle automate hybride

L'automate hybride est une extension de l'automate fini par l'ajout des variables continues qui constituent le vecteur d'état continu. Une première définition pour des systèmes autonomes a été donnée par (Alur *et al.*, 1995) et a été étendue par (van der Schaft and Schumacher, 2000) pour les systèmes aux entrées. Par la suite, on utilise cette dernière définition, dans une forme légèrement modifiée, pour l'automate hybride :

**Définition 2.8** *Un automate hybride est totalement décrit par le  $n$ -uplet suivant  $H = (\mathcal{L}, \mathcal{X}, \mathcal{W}, \Sigma, Inv, Act, \mathcal{A})$ , où :*

- $\mathcal{L}$  est l'ensemble des situations (états discrets) ;
- $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  est l'espace continu ;
- $\mathcal{W}$  est l'ensemble où le vecteur  $\mathbf{w}$  des variables continues externes prend ses valeurs ;
- $\Sigma$  est l'ensemble des événements ;
- $Inv$  représente la fonction 'invariant', qui associe à chaque situation  $l \in \mathcal{L}$  une région dans l'espace état-entrée à laquelle les variables continues doivent nécessairement appartenir pour que la situation soit active ;
- $Act$ , appelé activité, associe à chaque situation une dynamique, qui, usuellement, est exprimée sous la forme d'une équation différentielle ;
- $\mathcal{A}$  est l'ensemble des transitions dont les éléments sont des quintuples du type  $(l, Guard_W, \sigma, Jump_W, l')$ , où :  $l, l' \in \mathcal{L}$  représentent la situation source et la situation cible ;  $Guard_W$  est une région à laquelle les variables continues doivent nécessairement appartenir pour que la transition se produise ;  $\sigma \in \Sigma$  est un événement associé avec la transition ;  $Jump_W$  est une fonction qui permet de réinitialiser l'état continu lors du franchissement de la transition.

**Remarque 2.9** *Dans la définition originale de (Alur et al., 1995), les invariants et les gardes (Guards) sont des ensembles définis par des prédicats. Cependant, par la suite, afin de d'éviter l'introduction de nouvelles notations, chacune de ces notions est employée, selon le contexte, comme un ensemble ou comme un prédicat.*

On appelle état du système hybride, ou état hybride, la paire  $(l, \mathbf{x})$ , qui peut avoir deux types d'évolution :

- soit par la progression du temps dans la situation courante, qui produit le changement de l'état continu par la dynamique  $Act : ((l, \mathbf{x}(t)) \rightarrow (l, \mathbf{x}(t + \Delta t)))$  ;
- soit par une transition instantanée qui change la situation et la valeur de l'état continu :  $((l, \mathbf{x}^-) \rightarrow (l', \mathbf{x}^+))$

De plus, soit  $\delta_i \in \mathbb{R}^+$  la durée pendant laquelle la situation  $l_i \in \mathcal{L}$  reste active, sa valeur étant remise à zéro après chaque transition instantanée. Maintenant, par rapport à la durée d'activité de la situation  $l_i$ , on considère la loi explicite d'évolution de l'état,  $X_i$ , ainsi que l'expression (explicite) de la loi d'évolution du vecteur d'entrée,  $W_i$ , dans le même intervalle. Dans ce contexte, la sémantique de l'automate hybride est définie de

façon précise par l'ensemble de ses trajectoires, où une trajectoire de l'automate peut être formellement exprimée par la séquence :

$$(l_0, \delta_0, X_0, W_0) \rightarrow (l_1, \delta_1, X_1, W_1) \rightarrow \dots \rightarrow (l_i, \delta_i, X_i, W_i) \rightarrow \dots \quad (2.31)$$

Pour rester cohérent avec la définition 2.8, les quadruplets  $(l_i, \delta_i, X_i, W_i)$  sont soumis aux contraintes suivantes :

$$\forall t \in [0, \delta_i], (X_i(t), W_i(t)) \in Inv(l_i) \quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned} \forall i, \exists (l_i, Guard_{l_i l_{i+1}}, \sigma, Jump_{l_i l_{i+1}}, l_{i+1}) \in \mathcal{A} \\ \text{où : } (X_i(\delta_i), W_i(\delta_i)) \in Guard_{l_i l_{i+1}} \quad (2.32b) \\ X_{i+1}(0) = Jump_{l_i l_{i+1}}(X_i(\delta_i), W_{i+1}(0)) \end{aligned}$$

**Remarque 2.10** *Il est aussi possible d'avoir une séquence finie de la trajectoire. Ceci se produit lorsque le système se trouve dans une situation à partir de laquelle l'évolution est purement continue ( $\delta_N \rightarrow \infty$ ).*

Par convention, on fait le choix de considérer que les variables d'état et d'entrée sont continues à droite, les instants de transitions inclus. Autrement dit, à tout moment  $t_i = \sum_{i'=1}^i \delta_{i'-1}$ , on a  $\mathbf{x}(t_i^-) = X_i(\delta_i)$  et  $\mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}(t_i^+) = X_{i+1}(0)$ , respectivement  $\mathbf{w}(t_i^-) = W_i(\delta_i)$  et  $\mathbf{w}(t_i) = \mathbf{w}(t_i^+) = W_{i+1}(0)$ , où l'indice supérieur + indique la limite à droite et l'indice supérieur - indique la limite à gauche.

## 2.4 Simulation des systèmes physiques avec des interrupteurs

De façon générale, la simulation des systèmes physiques avec des interrupteurs consiste dans le calcul des trajectoires à partir de tous les états initiaux et les entrées admissibles (Iung and Zanne, 2001). Afin de faire ceci, la plupart des solutions existantes utilisent deux approches concernant le modèle d'interrupteur : une première approche qui utilise un modèle non-idéal et une deuxième qui emploie le modèle idéal.

La première approche de simulation est basée sur des outils de simulation déjà existants et s'adressent surtout à la simulation des systèmes purement continus. Dans ce contexte, le modèle d'interrupteur est exclusivement représenté par sa caractéristique *lisse* dans le plan effort-flux, ce qui implique aussi une prépondérance de l'aspect dissipatif par rapport au caractère commutatif de celui-ci, ce qui est le cas du modèle non-idéal de la diode présenté figure 2.2. Ainsi, la simulation des systèmes physiques avec des interrupteurs est réduite à la simulation des systèmes physiques avec des éléments dissipatifs non-linéaires. Parmi les outils qui sont couramment utilisés dans la simulation de tels systèmes, on peut citer, sans donner une liste exhaustive, la boîte à outils dédiée à l'électronique de puissance sous *Matlab/Simulink (Power Electronics*

*Toolbox*), *Scilab/Scicos* et *20Sim*. L'avantage de cette méthode réside dans le fait que, de façon générale, tout système physique peut se mettre sous une telle forme. On peut alors bénéficier des connaissances accumulées dans les travaux concernant les systèmes continus sur l'existence et l'unicité des solutions. Cette étape est nécessaire avant de procéder à la simulation et après, sur la simulation même. Cependant, dans beaucoup de cas qui concernent des systèmes physiques avec des interrupteurs, afin d'assurer une bonne précision de la simulation, cette approche nécessite beaucoup de pas de simulation dans les régions de transition entre divers modes de fonctionnement, ce qui conduit à des temps de simulation très longs pour des phénomènes à dynamique très élevée dans la réalité.

L'utilisation du modèle idéal, dans le cadre de la deuxième approche, conduit à prendre en considération plusieurs modèles à dynamique continue qui décrivent l'évolution du système et dont un seul est actif à la fois. Par la suite, on appelle *événement* l'activation/désactivation d'un modèle dynamique associé au système et, donc, cette approche est appelée *simulation par détection d'événements* (van der Schaft and Schumacher, 2000). Selon la cause de l'occurrence d'un événement, on fait la différence entre les événements *internes* ou *autonomes*, générés, par exemple, par le franchissement d'un seuil par une variable continue interne, généralement l'état continu, et les événements *externes* ou *commandés*, générés par l'évolution des variables d'interaction discrètes, tel que l'occurrence d'événements de l'automate hybride associé ou un changement dans la valeur des variables booléennes associées au système.

D'un point de vue qualitatif, par rapport à cette approche, la simulation des systèmes physiques avec des interrupteurs consiste dans la simulation des dynamiques continues du système associées aux enchaînements de variables discrètes actives. Ainsi, chaque trajectoire continue a comme état initial une valeur qui dépend d'une manière précise (donnée par la transition discrète) de la valeur finale de la trajectoire associée à la variable discrète précédente. Bien qu'apparemment simple, l'obtention d'un modèle cohérent de simulation doit tenir compte d'un certain nombre de phénomènes moins évidents qui sont propres aux systèmes hybrides. Dans le contexte général des systèmes physiques, une analyse de ces phénomènes a été réalisée dans (Mösterman, 1999), qui peut être résumée par la liste suivante :

1. **événement autonome** Il est nécessaire de détecter le dépassement d'un certain seuil par une variable continue, et, en même temps, le moment temporel auquel cet événement se produit.
2. **événement commandé** Le moment où un événement dû aux variables discrètes est franchi est généralement connu *a priori* et peut être efficacement pris en compte en tant que seuil temporel.
3. **réinitialisation explicite contrainte** La valeur de l'état continu à l'instant de l'activation d'un état discret peut être exprimée par rapport à la valeur de l'état continu avant le changement d'état discret. Cependant, cette réinitialisation du vecteur d'état doit respecter les lois de conservation de l'énergie lors de la transition entre les états discrets.

4. **dynamique continue à dimension variable** Quand une transition est franchie, le changement de l'état discret peut conduire à un modèle dynamique pour la partie continue qui a une dimension différente par rapport à l'état discret précédent. Ceci est dû au fait que certaines variables du vecteur d'état deviennent contraintes ou ne le sont plus.
5. **impulsions de type Dirac** Les discontinuités dans les valeurs des variables continues peuvent conduire à des impulsions de type Dirac dans le système. Ces impulsions doivent être traitées de façon particulière par rapport à l'évolution non-impulsionnelle du système.
6. **invalidation de la condition de type invariant** Le calcul de la valeur initiale pour l'état continu peut conduire à des valeurs qui ne sont pas compatibles avec la condition d'invariance associée à l'état discret donné. Ceci implique que des changements supplémentaires dans la valeur de l'état discret sont nécessaires afin d'aboutir, pour l'état continu, à une valeur cohérente avec les contraintes associées.
7. **réticence ou *chattering*** Au moment où la simulation comporte des changements d'état discret successifs dans des intervalles temporels très étroits de type réticence, il est plus efficace d'éliminer cette dynamique rapide et de simuler uniquement la dynamique plus lente de type *mode glissant*.

Parmi les logiciels/boîtes à outils qui emploient l'approche idéale, on peut citer, par exemple, sans donner une liste exhaustive, *Dymola*, *Open Modelica*, *PLECS* pour *Matlab/Simulink* et *HyBrSim*. L'avantage de cette méthode consiste dans le traitement explicite et rapide des zones de commutation, ce qui permet de dépasser les problèmes au passage d'une zone à une autre de la caractéristique statique des interrupteurs. Cependant, dans certains cas, le modèle idéal conduit à des solutions où, à des instants de temps finis, il y a des points d'accumulation des commutations ou, autrement dit, un comportement de type *Zénon*. Ainsi, afin d'éviter le blocage de la simulation, il est nécessaire de définir des procédures spéciales qui sont capables de surpasser ces points d'accumulation, par exemple forcer un « saut » dans le voisinage proche du point problématique.

**Remarque 2.11** *Une troisième voie pour la simulation des systèmes dynamiques hybrides, appelé aussi time stepping, a été discutée par (van der Schaft and Schumacher, 2000). Cette voie consiste à construire un modèle de simulation à partir du modèle échantillonné du système, où les surfaces de commutations sont obtenues à partir des surfaces initiales par un paramétrage en fonction de la période d'échantillonnage. De cette manière, le problème de détection des événements autonomes devient beaucoup plus simple. Ainsi, pour une période d'échantillonnage suffisamment petite, la simulation du modèle échantillonné est très proche de la simulation du modèle dynamique à temps continu. Cependant, le problème du ralentissement de la simulation à l'extérieur du voisinage des surfaces de commutation persiste. De plus, il est nécessaire de vérifier de quelle manière cette approximation affecte la cohérence des surfaces de commutation introduite par une stratégie donnée de commande.*

## 2.5 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, on a passé en revue les principales approches qui concernent, en premier lieu, la modélisation des systèmes physiques avec des interrupteurs, ainsi que, la simulation de tels systèmes. Cependant, la suite des travaux développés dans cette thèse porte uniquement sur l'extension de l'approche bond graphs commutés afin d'obtenir un modèle modulaire des systèmes physiques en commutation où la logique de commutation est complètement décrite. La réalisation de cet objectif passe, dans une première phase, par l'introduction d'un nouveau modèle d'interrupteur, de type automate, et, ensuite, par l'explicitation de la composition avec le reste du système physique dans le cadre de l'obtention d'un modèle automate hybride équivalent. La validation de ces résultats consiste dans la construction systématique d'un modèle de simulation sous *Matlab/Simulink*, avec deux solutions proposées. La première repose sur le formalisme graphique mis à disposition sous *Simulink* et utilise les blocs élémentaires pour obtenir des schémas génériques pour les dynamiques continues associées à chaque mode ainsi que pour les blocs d'évaluation de la partie invariante, tandis que pour la dynamique discrète on a fait appel aux *Statecharts* disponibles par l'intermédiaire de la boîte à outils *Stateflow*. D'ailleurs, c'est cette solution qui a été employée pour une étude de cas concernant l'optimisation de la commande en boucle ouverte d'un convertisseur à double résonance. La seconde solution consiste dans une approche plus algorithmique de simulation et utilise les possibilités de programmation sous *Simulink* par l'écriture des *S-functions*.

# Chapitre 3

## Approche formelle de détermination du modèle automate hybride

### 3.1 Vue d'ensemble

Afin d'obtenir un modèle de type automate hybride d'un système physique linéaire avec des interrupteurs, on utilise comme point de départ la représentation bond graph commuté. Cette représentation permet de déduire, de manière formelle, à partir de l'équation caractérisant la structure de jonction dans une configuration donnée, les configurations permises, les équations dynamiques explicites et les fonctions d'initialisation de l'état lors d'un changement de configuration. A partir de la définition de l'automate hybride, on peut alors identifier certains attributs du modèle automate hybride des systèmes physiques avec interrupteurs directement à partir des résultats obtenus pour la représentation bond graph commuté.

Pour compléter l'obtention des attributs manquants, on introduit un modèle d'interrupteur de type automate, une attention spéciale étant dédiée au cas de l'électronique de puissance, domaine d'application avec une riche diversité d'interrupteurs.

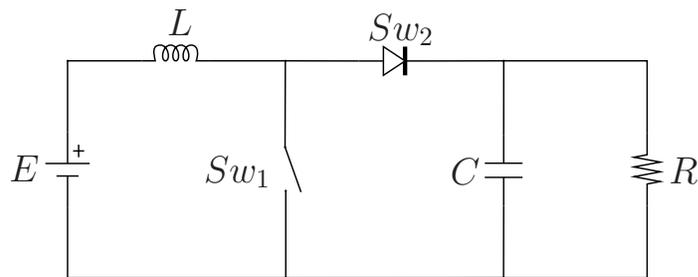
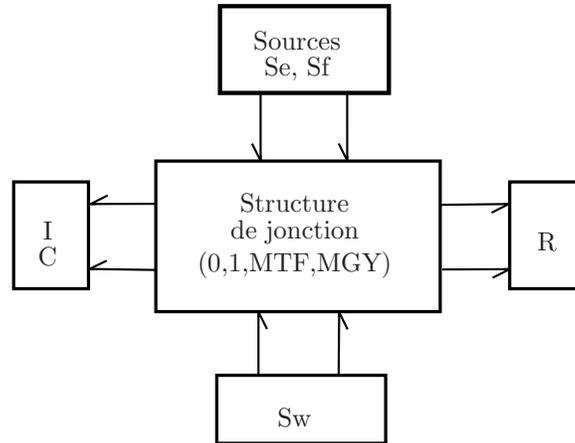


FIG. 3.1 – Le circuit électrique du convertisseur « boost »




---

 FIG. 3.2 – La structure générale d'un bond graph commuté
 

---

Ce nouveau modèle d'interrupteur complète ainsi le modèle initial utilisé lors de la modélisation bond graph commuté. Finalement, on déduit le reste des attributs du modèle automate hybride en intégrant le nouveau modèle d'interrupteur dans la structure déjà existante.

Tout au long de ce chapitre on illustre les méthodes présentées sur le cas concret du convertisseur « boost » (figure 3.1). On tient à préciser également qu'une partie des travaux présentés dans le présent chapitre ont fait l'objet des publications suivantes : (Buisson *et al.*, 2004; Zainea *et al.*, 2005b; Cormerais *et al.*, 2006; Cormerais *et al.*, 2007; Zainea *et al.*, 2008).

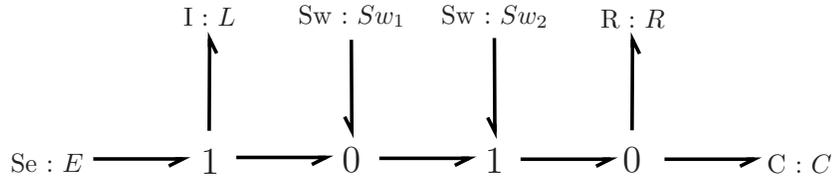
## 3.2 Les bond graphs commutés

La représentation bond graph commuté d'un système physique avec des interrupteurs est présentée figure 3.2. Quatre champs modélisent le comportement du système : - le champ des sources qui produisent de l'énergie ; - le champ résistif (R) qui dissipe de l'énergie ; - le champ des éléments qui stockent de l'énergie (I et C) ; - le champ des interrupteurs (Sw). Les liens entre ces quatre champs se font par la structure de jonction : structure qui distribue la puissance injectée par le champ des sources et le champ des interrupteurs vers le champ résistif et le champ de stockage d'énergie.

**Exemple** Dans le cas du convertisseur « boost », le bond graph acausal équivalent est représenté figure 3.3.

### 3.2.1 Mise en équation

Dans un contexte bond graph, la mise en équation du système est toujours précédée par l'affectation de la causalité. Ainsi, par une procédure systématique d'assignation de la causalité de type SCAP (Karnopp *et al.*, 2000), on arrive à organiser les variables d'effort et de flux des liens externes de la structure de jonction en terme




---

 FIG. 3.3 – Le bond graph acausal du convertisseur « boost »
 

---

d'entrée/sortie. Dans le cadre de la procédure SCAP, on considère les éléments interrupteurs comme des éléments à causalité indifférente, i.e. comme des éléments résistifs.

**Remarque 3.1** *Pour un système physique RLCGT respectant les lois de Kirchhoff généralisées l'application de la procédure SCAP aboutit toujours à l'affectation de la causalité pour tous les liens (Buisson et al., 2000).*

Après l'application de la procédure, les interrupteurs imposent soit l'effort (nul) au reste du système, ce qui implique que l'état logique est « fermé », soit le flux (nul) ce qui implique l'état logique « ouvert ». De cette façon, la configuration trouvée maximise le nombre d'éléments de stockage à causalité intégrale. Une telle configuration, appelée configuration de référence n'est en général pas unique. Par contre, au vue de la remarque 3.1, il existe toujours au moins une configuration de référence pour un système physique avec de interrupteurs.

**Remarque 3.2** *Par la suite, dans un contexte bond graph, l'état logique « fermé » est appelé aussi état E (source nulle d'effort) et l'état logique « ouvert » est appelé aussi état F (source nulle de flux).*

Déduit du bond graph causal, on obtient alors le schéma informationnel de la figure 3.4, où les variables ont les signification suivantes :

- le vecteur d'état  $\mathbf{x}_i$  est composé des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie à causalité intégrale ( $p$  pour les éléments inductifs et  $q$  pour les éléments capacitifs) ;  $Z_i$  est le vecteur complémentaire composé des variables de puissance associées aux mêmes éléments de stockage d'énergie ( $f$  pour les éléments inductifs et  $e$  pour les éléments capacitifs) ;
- le vecteur de pseudo-état  $\mathbf{x}_d$  est composé des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie à causalité dérivée ;  $Z_d$  est le vecteur complémentaire composé des variables de puissance associées aux mêmes éléments de stockage d'énergie ( $f$  pour les éléments inductifs et  $e$  pour les éléments capacitifs) ;
- les vecteurs  $D_i$  et  $D_o$  représentent respectivement les variables sortantes et entrantes du champ résistif ;
- $\mathbf{u}$  est le vecteur des variables de puissance imposées par les sources ;  $\mathbf{v}$  est le vecteur des variables de puissance imposées aux sources ;

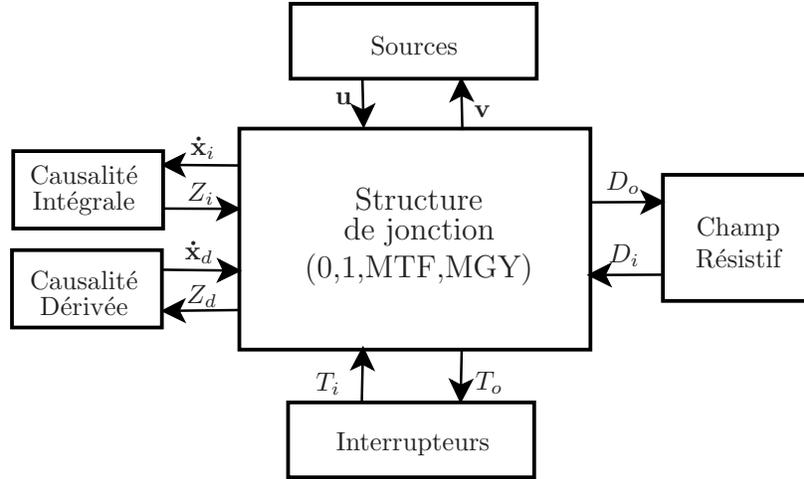


FIG. 3.4 – Schéma bloc causal du bond graph

- $T_i$  est le vecteur des variables (à valeur nulle pour la configuration donnée) imposées par les interrupteurs et le vecteur  $T_o$  des variables imposées aux interrupteurs (l'effort pour les interrupteurs en état F et le flux pour les interrupteurs en état E) dans la configuration donnée.

**Exemple** Pour le « boost » on présente le bond graph causal par la figure 3.5, où la configuration d'interrupteurs choisie (F,E) est une configuration de référence. L'autre choix possible de configuration de référence pour ce système est (E,F).

Par la suite, on suppose que le bond graph est construit de telle manière qu'on n'obtient pas de boucle causale de gain unitaire pour les variables de sortie. Ainsi, chaque sortie de la structure de jonction peut être exprimée en fonction de toutes les entrées, relation décrite par l'équation (3.1), où les matrices  $S_{ii}, \forall i = 1 \dots 5$  sont antisymétriques.

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ Z_d \\ D_o \\ T_o \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ -S_{12}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_{25} \\ -S_{13}^T & \mathbf{0} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14}^T & \mathbf{0} & S_{34}^T & S_{44} & S_{45} \\ S_{15}^T & S_{25}^T & S_{35}^T & -S_{45}^T & S_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_i \\ \dot{\mathbf{x}}_d \\ D_i \\ T_i \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

La forme de (3.1) est due au fait qu'on considère que la structure de jonction ne dissipe pas et ne stocke pas d'énergie, donc la puissance fournie par les générateurs est entièrement diffusée aux récepteurs. Autrement dit :

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} + T_i^T T_o - (Z_i^T \dot{\mathbf{x}}_i + \dot{\mathbf{x}}_d^T Z_d + D_i^T D_o) = 0, \quad (3.2)$$

De plus, la présence des matrices bloc-zéro est justifiée par la préférence accordée à la causalité intégrale pour les éléments de stockage dans le cadre de SCAP. Ainsi, s'il y avait eu des chemins causaux entre un élément de stockage à causalité dérivée et un autre élément de stockage à causalité dérivée ou un élément résistif, alors on

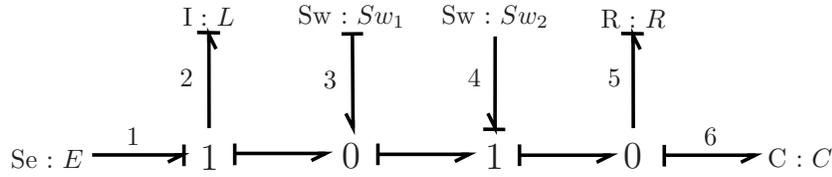


FIG. 3.5 – Le bond graph causal du convertisseur « boost » dans la configuration (F,E)

aurait pu inverser ces chemins causaux afin d'obtenir la causalité intégrale. Puisque la configuration choisie est une configuration de référence qui maximise le nombre d'éléments de stockage en causalité intégrale, on ne peut donc pas avoir de chemin causal entre un élément de stockage à causalité dérivée et un interrupteur.

**Exemple** Pour la configuration choisie dans la figure 3.5, l'équation (3.1) se met sous la forme donnée par (3.3), avec  $\mathbf{x}_i = (p_2 \ q_6)^T$ ,  $Z_i = (e_2 \ f_6)^T$ ,  $D_o = e_5$ ,  $D_i = f_5$ ,  $T_o = (e_3 \ f_4)^T$ ,  $T_i = (f_3 \ e_4)^T$ ,  $\mathbf{v} = f_1$  et  $\mathbf{u} = e_1$ .

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{q}_6 \\ e_5 \\ e_3 \\ f_4 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_5 \\ f_3 \\ e_4 \\ e_1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

On observe que pour cette configuration il n'y a pas d'élément de stockage à causalité dérivée, donc la deuxième ligne de (3.1) n'existe plus.

### 3.2.2 Configurations permises

Pour un système physique avec  $n$  interrupteurs le nombre maximal de configurations est  $2^n$ . Parmi ces configurations, dans le cas le plus général, il y en a certaines qui ne respectent pas les lois de Kirchhoff généralisées. Elles ne sont donc pas permises. D'un point de vue bond graph le non respect des lois de Kirchhoff généralisées se traduit par l'échec de l'affectation de la causalité pour l'ensemble du bond graph.

Une première approche pour déterminer les configurations permises/interdites serait d'utiliser toujours la procédure SCAP. Pour une configuration à analyser, la causalité des interrupteurs est fixée, du point de vue de la procédure SCAP, ils se comportent donc comme des sources. Si l'application de la procédure d'affectation de la causalité aboutit toujours sur un conflit causal, alors la configuration d'interrupteurs donnée est interdite. Par contre, si on aboutit à une affectation de la causalité sans conflit, alors la configuration est considérée permise. Cette procédure itérative de type essai/erreur devient vite laborieuse lorsque le nombre d'interrupteurs croît.

Une deuxième méthode utilise comme point de départ la configuration de référence choisie. Cette configuration est permise par construction, comme on l'a déjà précisé

en §3.2.1. De cette manière, on définit une nouvelle configuration,  $l_j$ , par rapport à la configuration de référence à l'aide de la matrice  $\Lambda_j \in \mathbb{R}^{n_{sw}}$ , où  $n_{sw}$  représente le nombre d'interrupteurs dans le système.  $\Lambda_j$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux ont la valeur 1 si l'interrupteur correspondant a changé d'état logique par rapport à la configuration de référence et 0 autrement. En éliminant les lignes nulles de la matrice  $\Lambda_j$  on peut construire une nouvelle matrice  $\Gamma_j$  telle que :

$$\begin{cases} \Gamma_j \Gamma_j^T = \mathbf{I} \\ \Gamma_j^T \Gamma_j = \Lambda_j \end{cases} \quad (3.4)$$

On peut alors énoncer le résultat suivant concernant les configurations permises (Buisson *et al.*, 2002) :

**Proposition 3.3** *Une configuration est permise si, et seulement si, la relation (3.5) est vérifiée.*

$$\text{rang} \left( \Gamma_j \begin{pmatrix} S_{14}^T & S_{34}^T & S_{44} \Gamma_j^T \end{pmatrix} \right) = \text{rang} (\Gamma_j), \quad (3.5)$$

où les matrices  $S_{14}$ ,  $S_{34}$  et  $S_{44}$  sont déterminées pour la configuration de référence choisie conformément à la relation (3.1).

De plus, on peut déduire à partir de la proposition 3.3 quels sont les éléments qui ont changé de causalité lors d'un changement de configuration. Si  $\text{rang} (\Gamma_j S_{44} \Gamma_j^T) = \text{rang} (\Gamma_j)$ , alors seuls des interrupteurs ont changé de causalité. Si  $\text{rang} (\Gamma_j S_{44} \Gamma_j^T) < \text{rang} (\Gamma_j)$ , mais  $\text{rang} (\Gamma_j \begin{pmatrix} S_{34}^T & S_{44} \Gamma_j^T \end{pmatrix}) = \text{rang} (\Gamma_j)$ , alors le changement de causalité sur les interrupteurs a déterminé un changement de causalité sur certains éléments résistifs. Dans les autres cas, la causalité intégrale des éléments de stockage d'énergie est affectée lors d'un changement de mode.

**Exemple** A partir de la configuration de référence (F,E) on peut vérifier que toutes les autres configurations sont permises. Pour illustrer la démarche, on montre que (F,F) est une configuration permise. Dans ce cas, la configuration des interrupteurs par rapport à la configuration de référence est donné par  $\Lambda_{FF}$ , d'où, en éliminant la ligne zéro, on obtient  $\Gamma_{FF}$  :

$$\Lambda_{FF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_{FF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Par l'application directe du critère énoncé par la proposition 3.3, on obtient que la configuration (F,F) est permise :

$$\text{rang} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right) = 1 = \text{rang} (\Gamma_{FF}) \quad (3.7)$$

De plus, on déduit qu'un élément de stockage a perdu la causalité intégrale par rapport à la configuration de référence.

**Remarque 3.4** *Par la suite, on ajoute l'indice  $r$  pour toutes les variables et les matrices concernant la configuration de référence choisie et on ajoute l'indice  $j$  pour désigner les variables et les matrices associées à une configuration permise,  $l_j$ , autre que la configuration de référence choisie.*

### 3.2.3 Équations d'état implicites et explicites

Pour toute configuration permise,  $l_j$ , on peut construire un schéma bloc équivalent à celui de la figure 3.4, où la composition des vecteurs d'entrée/sortie de la structure de jonction est différente de celle trouvée pour la configuration de référence. Tout comme pour la configuration de référence, on peut retrouver une relation entre les vecteurs d'entrée et les vecteurs de sortie de la structure de jonction, relation donnée par (3.8).

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{ij} \\ Z_{dj} \\ D_{oj} \\ T_{oj} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11j} & S_{12j} & S_{13j} & S_{14j} & S_{15j} \\ -S_{12j}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_{24j} & S_{25j} \\ -S_{13j}^T & \mathbf{0} & S_{33j} & S_{34j} & S_{35j} \\ S_{14j}^T & S_{24j}^T & S_{34j}^T & S_{44j} & S_{45j} \\ S_{15j}^T & S_{25j}^T & S_{35j}^T & -S_{45j}^T & S_{55j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{ij} \\ \dot{\mathbf{x}}_{dj} \\ D_{ij} \\ T_{ij} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

On observe qu'à partir de la mise en équation du schéma bloc pour une configuration permise quelconque, dans le cas général, on peut avoir des chemins causaux entre les éléments de stockage à causalité dérivée et les éléments interrupteurs, ce qui n'était pas le cas pour la configuration de référence choisie. En outre, les configurations de référence se caractérisent par le fait que  $S_{24j} = \mathbf{0}$ . Vu que les relations (3.1) et (3.8) expriment les lois de Kirchhoff généralisées, tant qu'aucune valeur n'est affectée au vecteur  $T_i$ , ces relations restent valables quelle que soit la configuration permise.

Une méthode directe d'obtention de l'équation (3.8) serait d'employer SCAP pour la configuration donnée afin d'obtenir l'affectation de la causalité et, ensuite, exprimer chaque variable de sortie en fonction des entrées. Bien qu'algorithmique, cette méthode a le désavantage d'éclipser les éventuels liens entre les variables de la structure de jonction dans différentes configurations. De plus, avec SCAP, l'affectation de la causalité pour tous les éléments peut ne pas être directe, des étapes de retour en arrière étant nécessaires si on aboutit à un conflit causal.

Une deuxième méthode, proposée par (Buisson *et al.*, 2002), permet de déterminer (3.8) pour tous les configurations possibles par des moyens purement algébriques, en mettant en évidence les relations qui existent entre les variables d'entrée/sortie d'une configuration donnée avec celles de la configuration de référence. Sans entrer dans les détails de cette méthode, on rappelle tout de même la relation entre les vecteurs d'entrée/sortie pour le champ de stockage. Dans le cas général, le changement de causalité des éléments interrupteurs par rapport à la configuration de référence peut, éventuellement, générer des changements de causalité pour les éléments résistifs et les éléments de stockage d'énergie, comme on l'a mis en évidence dans la sous-section précédente. Aussi, à partir de la proposition 3.3, on déduit que, parmi les éléments de stockage, le changement de causalité d'interrupteurs peut avoir comme seule conséquence directe le changement de causalité de certains éléments à causalité

intégrale. Donc, on peut considérer que l'ensemble des éléments de stockage à causalité dérivée dans la configuration de référence conserve cette causalité dérivée dans toutes les configurations permises. De cette façon, on peut relier les vecteurs  $\mathbf{x}_{ij}$  et  $\mathbf{x}_{dj}$  aux vecteurs  $\mathbf{x}_{ir}$  et  $\mathbf{x}_{dr}$  par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ir} \\ \mathbf{x}_{dr} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|c} P_{1j} & P_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{x}_{dj} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{x}_{dj} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{idj} & \mathbf{x}_{dr} \end{pmatrix}^T$ , avec  $\mathbf{x}_{idj}$  le vecteur des éléments de stockage qui ont changé la causalité intégrale pour la causalité dérivée par rapport à la configuration de référence, et  $\begin{pmatrix} P_{1j} & P_{2j} \end{pmatrix}$  est une matrice de permutation.

**Exemple** Pour la configuration (F,F), on retrouve la relation (3.8) sous la forme de (3.10), avec  $\mathbf{x}_{iFF} = q_6$ ,  $Z_{iFF} = e_6$ ,  $Z_{dFF} = f_2$ ,  $\mathbf{x}_{dFF} = p_2$ ,  $D_{oFF} = e_5$ ,  $D_{iFF} = f_5$ ,  $T_{oFF} = \begin{pmatrix} e_3 & e_4 \end{pmatrix}^T$  et  $T_{iFF} = \begin{pmatrix} f_3 & f_4 \end{pmatrix}^T$ .

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_6 \\ f_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_4 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_6 \\ p_2 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_4 \\ e_1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

De plus, on obtient que  $\mathbf{x}_{dFF} = \mathbf{x}_{idFF} = p_2$ ,  $P_{1FF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$  et  $P_{2FF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ .

### 3.2.3.1 Équations d'état implicites

Par la suite, on s'intéresse seulement au cas des systèmes physiques linéaires. L'hypothèse linéaire affirme que les relations constitutives des champs résistif et de stockage d'énergie sont représentées par des équations linéaires. Ainsi, pour le champ résistif l'équation constitutive peut être mise sous la forme :

$$D_{ij} = L_j D_{oj}, \quad (3.11)$$

où  $L_j$  est une matrice diagonale définie positive, tandis que pour le champ des éléments de stockage d'énergie on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} Z_{ij} \\ Z_{dj} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_j \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{x}_{dj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ij} & F_j \\ F_j^T & F_{dj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{x}_{dj} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{F}_j$  est symétrique définie positive.

**Lemme 3.5** *Le vecteur des variables de puissance imposées par le champ résistif à la structure de jonction,  $D_{ij}$ , dépend des autres vecteurs d'entrée de la structure de jonction par la relation (3.13), où  $H_j = L_j(\mathbf{I} - S_{33j}L_j)^{-1}$  existe pour tout système physique.*

$$D_{ij} = H_j \left( -S_{13j}^T Z_{ij} + S_{34j} T_{ij} + S_{35j} \mathbf{u} \right) \quad (3.13)$$

**Démonstration.** En utilisant (3.11), la troisième ligne de (3.8) dévient :

$$D_{oj} = (\mathbf{I} - S_{33j} L_j)^{-1} \left( -S_{13j}^T Z_{ij} + S_{34j} T_{ij} + S_{35j} \mathbf{u} \right), \quad (3.14)$$

d'où (3.13) résulte après la multiplication à gauche par  $L_j$ .

En introduisant les notations :

$$\tilde{M}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -S_{12j} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.15a)$$

$$\tilde{A}_j = \begin{pmatrix} K_j F_{ij} & K_j F_j \\ -S_{12j}^T F_{ij} - F_j^T & -S_{12j}^T F_j - F_{dj} \end{pmatrix}, \quad (3.15b)$$

$$\tilde{B}_j = \begin{pmatrix} S_{14j} + S_{13j} H_j S_{34j} \\ S_{24j} \end{pmatrix} \text{ et} \quad (3.15c)$$

$$\tilde{E}_j = \begin{pmatrix} S_{15j} + S_{13j} H_j S_{35j} \\ S_{25j} \end{pmatrix}, \quad (3.15d)$$

où  $K_j = (S_{11j} - S_{13j} H_j S_{13j}^T)$ , on énonce la proposition suivante :

**Proposition 3.6** *Pour tout système physique linéaire avec des interrupteurs, on peut écrire une équation différentielle implicite sous la forme :*

$$\tilde{M}_j \dot{\mathbf{x}}_j = \tilde{A}_j \mathbf{x}_j + \tilde{B}_j T_{ij} + \tilde{E}_j \mathbf{u}, \quad (3.16)$$

où  $\mathbf{x}_j = (\mathbf{x}_{ij} \quad \mathbf{x}_{dj})^T$ . De plus, la relation (3.16) est valide quelle que soit la configuration active du système.

**Démonstration.** La relation (3.16) est le résultat direct de l'application du lemme 3.5 aux deux premières lignes de (3.8). Bien que (3.16) soit écrite à partir des matrices associées à une configuration donnée, elle reste valable quelle que soit la configuration active. Ceci est une conséquence du fait que (3.8) est à son tour valable quelle que soit la configuration active.

Compte tenu du fait que  $T_{ij} \equiv \mathbf{0}$  si la configuration  $l_j$  est active, on énonce le corollaire suivant :

**Corollaire 3.7** *A chaque configuration active on peut associer une équation différentielle implicite du type :*

$$\tilde{M}_j \dot{\mathbf{x}}_j = \tilde{A}_j \mathbf{x}_j + \tilde{E}_j \mathbf{u} \quad (3.17)$$

Ainsi, le vecteur  $\mathbf{x}_j$  est appelé le vecteur d'état implicite associé à la configuration donnée.

**Remarque 3.8** *Par la suite, on appelle la deuxième ligne de (3.17), c'est-à-dire à la relation :*

$$\left( S_{12j}^T \quad \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_j \mathbf{x}_j - S_{25j} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

la contrainte algébrique implicite associée à la configuration donnée.

**Exemple** Si on considère la configuration (F,F), on retrouve les matrices suivantes qui définissent les deux formes implicites :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{FF} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{A}_{FF} &= \begin{pmatrix} -1/RC & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{B}_{FF} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \tilde{E}_{FF} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.2.3.2 Équations d'état explicites

A partir de la forme implicite (3.16), on cherche aussi à déduire des formes explicites équivalentes. Ainsi, compte tenu du fait que la matrice  $\mathbf{F}_j$  est définie positive, les matrices suivantes sont bien définies :

$$R_j^{-1} = \left( S_{12j}^T \quad \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_j \begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3.19a)$$

$$\hat{R}_j^{-1} = \left( \mathbf{I} \quad -S_{12j} \right) \hat{\mathbf{F}}_j \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -S_{12j}^T \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad (3.19b)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_j = \mathbf{F}_j^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{F}_{ij} & \hat{F}_j \\ \hat{F}_j^T & \hat{F}_{dj} \end{pmatrix} \quad (3.19c)$$

Avec ces notations on énonce le lemme de calcul suivant :

**Lemme 3.9** *Les matrices  $R_j$  et  $\hat{R}_j$  sont mises en relation par les relations (3.20a) et (3.20b).*

$$\hat{R}_j = F_{ij} - (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) \quad (3.20a)$$

$$R_j = \hat{F}_{dj} - \left( \hat{F}_j^T - \hat{F}_{dj} S_{12j}^T \right) \hat{R}_j \left( \hat{F}_j - S_{12j} \hat{F}_{dj} \right) \quad (3.20b)$$

**Démonstration.** Voir l'annexe A.

Enfin, avant d'énoncer la proposition 3.10, on introduit les notations :

$$Q_j = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & S_{12j} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3.21a)$$

$$A_j = K_j \hat{R}_j, \quad (3.21b)$$

$$B_j = S_{14j} + S_{13j} H_j S_{34j} + K_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j S_{24j} \text{ et} \quad (3.21c)$$

$$E_j = S_{15j} + S_{13j} H_j S_{35j} + K_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j S_{25j}, \quad (3.21d)$$

**Proposition 3.10** *En considérant, pour tout système physique linéaire avec des interrupteurs, le changement de variable suivant :*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{x}_{dj} \end{pmatrix} = Q_j \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1j} \\ \mathbf{x}_{2j} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

alors on peut y associer une équation différentielle explicite (3.23a) et une équation (contrainte) algébrique (3.23b).

$$\dot{\mathbf{x}}_{1j} = A_j \mathbf{x}_{1j} + B_j T_{ij} + E_j \mathbf{u} \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{x}_{2j} = R_j S_{24j} T_{ij} + R_j S_{25j} \mathbf{u} \quad (3.23b)$$

De plus, ces relations sont équivalentes à la relation (3.16).

**Démonstration.** Les équations (3.23) sont déduites de (3.16) en multipliant à gauche par la matrice :

$$M_j = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -K_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -R_j \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

et en utilisant le changement de variable (3.22). De plus, pour obtenir (3.23a), on utilise le premier résultat du lemme 3.9. Comme les matrices  $M_j$  et  $Q_j$  sont inversibles, à savoir :

$$M_j^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -R_j^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & K_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \text{ et} \quad (3.25a)$$

$$Q_j^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -S_{12j} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3.25b)$$

on en déduit l'équivalence entre (3.23) et (3.16).

De la même façon que pour la forme implicite, compte tenu du fait que  $T_{ij} \equiv \mathbf{0}$  quand la configuration  $l_j$  est active, on énonce le corollaire suivant :

**Corollaire 3.11** *A chaque configuration active on peut associer une équation différentielle explicite (3.26a) et une contrainte algébrique (3.26b).*

$$\dot{\mathbf{x}}_{1j} = A_j \mathbf{x}_{1j} + E_j \mathbf{u} \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{x}_{2j} = R_j S_{25j} \mathbf{u} \quad (3.26b)$$

Ainsi,  $\mathbf{x}_{1j}$  est appelé vecteur d'état explicite associé à la configuration donnée, tandis que  $\mathbf{x}_{2j}$  représente la variable contrainte du système associée à la configuration donnée.

**Exemple** Dans le cas de la configuration (F,F), la matrice de changement de variable,  $Q_{FF}$ , est la matrice identité, on trouve alors que  $\mathbf{x}_{1FF} = \mathbf{x}_{iFF} = q_6$  et  $\mathbf{x}_{2FF} = \mathbf{x}_{dFF} = p_2$ . Aussi, on trouve les matrices suivantes qui définissent les deux formes explicites :

$$A_{FF} = -\frac{1}{RC} \quad B_{FF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_{FF} = 0 \quad (3.27)$$

En ce qui concerne la contrainte algébrique, on trouve :

$$\mathbf{x}_{2FF} = \begin{pmatrix} -L & L \end{pmatrix} T_{iFF} + 0 \cdot \mathbf{u} \quad (3.28)$$

Pour la configuration de référence choisie, (F,E), dû au fait qu'il n'y a pas d'élément de stockage à causalité dérivée, les formes implicites et les formes explicites sont identiques. De plus, il n'y a pas de contrainte algébrique dans ce cas.

### 3.2.4 Équation de discontinuité de l'état implicite

Soit  $l_j$  la configuration atteinte après la commutation simultanée d'un certain nombre d'interrupteurs du système. Afin de pouvoir expliciter les éventuelles discontinuités, il est nécessaire de formuler des hypothèses de travail concernant les vecteurs d'entrée de la structure de jonction. Une première hypothèse concerne les systèmes physiques en général, c'est-à-dire :

**Hypothèse 3.12** *Il peut y avoir uniquement des quantités finies d'énergie échangées en temps fini entre les différents champs des systèmes physiques.*

Comme, en plus de cette hypothèse, on s'intéresse aux systèmes physiques linéaires, alors il résulte directement la proposition 3.13 qui explicite la nature des signaux d'entrée/sortie du champ résistif et du vecteur d'état implicite pour une configuration permise quelconque.

**Proposition 3.13** *Quelle que soit la mise en équation du système physique linéaire, les vecteurs d'entrée/sortie du champ résistif et le vecteur d'état implicite associé à cette mise en équation sont au maximum discontinus.* <sup>(1)</sup>

---

<sup>(1)</sup>Un signal qui est au maximum discontinu accepte uniquement des discontinuités lors de son évolution temporelle, alors qu'un signal qui est au maximum impulsionnel, en plus des discontinuités, accepte aussi des impulsions de Dirac.

Pour le champ interrupteurs, à partir du modèle choisi pour celui-ci, lors de l'activation de la configuration  $l_j$ , le vecteur  $T_{ij}$  est mis à zéro, ce qui fait que certains de ces composantes peuvent être, au maximum, discontinues. En ce qui concerne le vecteur d'entrée de puissance  $\mathbf{u}$ , on fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.14** *Par la suite, on considère que  $\mathbf{u}$  peut être au maximum impulsionnel. Ainsi, on peut écrire  $\mathbf{u}$  comme la somme entre sa partie impulsionnelle, représentée par :*

$$\mathbf{u}_p = \sum_k \tau_u^k \delta(t - t_k), \quad (3.29)$$

et sa partie non-impulsionnelle, représentée par :

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_c + \sum_i \Delta_u^i \mathbf{1}(t - t_i), \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{u}_c$  est continue et différentiable. Afin de rester cohérent avec la proposition 3.13, tenant compte de relations (3.8) et (3.23b), les amplitudes des impulsions doivent respecter la propriété suivante :

$$\tau_u^k \in \text{Ker}(S_{25j}) \cap \text{Ker}(S_{35j}), \quad \forall j, k \quad (3.31)$$

Une fois ces considérations faites, on peut expliciter l'équation de discontinuité du vecteur d'état implicite associé à la configuration  $l_j$ , quand cette configuration est active.

**Remarque 3.15** *Par la suite, on introduit les notations suivantes :*

$$w^+(t') = \lim_{t \searrow t'} w(t) \quad w^-(t') = \lim_{t \nearrow t'} w(t) \quad (3.32)$$

Par un souci de brièveté, quand il n'est pas nécessaire de différencier entre plusieurs instants, on note ces limites simplement par  $w^+$  et  $w^-$ .

**Proposition 3.16** *Soit  $t_k$  un instant de temps arbitrairement choisi dans l'intervalle d'activité de la configuration  $l_j$ . On peut décrire les éventuelles discontinuités du vecteur d'état implicite associé à la configuration donnée de la manière suivante :*

1. si  $\mathbf{u}_p(t_k) = \tau_u^k \delta(t - t_k)$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^+ &= \left[ \mathbf{I} - \begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_j \begin{pmatrix} S_{12j}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{F}_j \right] \mathbf{x}_j^- \\ &+ Q_j \begin{pmatrix} S_{15j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_j S_{25j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_u^k \\ \bar{\mathbf{u}}^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

2. si  $\mathbf{u}_p(t_k) = 0$ , alors :

$$\mathbf{x}_j^+ = \left[ \mathbf{I} - \begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_j (S_{12j}^T \ \mathbf{I}) \mathbf{F}_j \right] \mathbf{x}_j^- + \begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_j S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ \quad (3.34)$$

**Démonstration** On montre seulement la validité de la relation (3.33), la même démarche permettant de démontrer la relation (3.34). Compte tenu du fait que le vecteur  $T_{ij}$  est éventuellement discontinu à l'activation de la configuration donnée et devient nul après et, aussi, de (3.31), alors, par l'intégration de la première ligne de la relation (3.16) à l'instant  $t_k$ , on obtient :

$$\mathbf{x}_{ij}^+ = \mathbf{x}_{ij}^- + S_{12j} (\mathbf{x}_{dj}^+ - \mathbf{x}_{dj}^-) + S_{15j} \tau_u^k \quad (3.35)$$

Ensuite, à partir du changement de variable inverse (3.25b), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2j}^+ &= R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) \mathbf{x}_{ij}^+ + [\mathbf{I} - R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) S_{12j}] \mathbf{x}_{dj}^+ \\ &= \mathbf{x}_{dj}^+ + R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) (\mathbf{x}_{ij}^- - S_{12j} \mathbf{x}_{dj}^- + S_{15j} \tau_u^k) \end{aligned} \quad (3.36)$$

De plus,  $\mathbf{x}_{2j}^+$  doit respecter la contrainte algébrique (3.26b), donc on peut expliciter la discontinuité du vecteur  $\mathbf{x}_{dj}^+$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{dj}^+ &= R_j [S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ - (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) (\mathbf{x}_{ij}^- - S_{12j} \mathbf{x}_{dj}^- + S_{15j} \tau_u^k)] \\ &= \mathbf{x}_{dj}^- - R_j [(S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) (\mathbf{x}_{ij}^- + S_{15j} \tau_u^k) - (S_{12j}^T F_j + F_{dj}) \mathbf{x}_{dj}^-] \\ &\quad + R_j S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ \end{aligned} \quad (3.37)$$

Maintenant, si on remplace  $\mathbf{x}_{dj}^+$  dans (3.35), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ij}^+ &= [\mathbf{I} - S_{12j} R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T)] (\mathbf{x}_{ij}^- + S_{15j} \tau_u^k) \\ &\quad - S_{12j} R_j (S_{12j}^T F_j + F_{dj}) \mathbf{x}_{dj}^- + S_{12j} R_j S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ainsi, la relation (3.33) est le résultat du regroupement des relations (3.37) et (3.38) sous une forme compacte.

**Corollaire 3.17** *Soit  $t_k$  un instant de temps dans l'intervalle d'activité de la configuration référencée par  $j$ , l'initialisation incluse, tel que  $\mathbf{u}_p(t_k) \equiv \mathbf{0}$ . Dans ce cas, l'état implicite  $\mathbf{x}_j$  est continu à l'instant  $t_k$  si, et seulement si,  $\mathbf{x}_j^-$  respecte à  $t_k^+$  la contrainte algébrique implicite associée à la configuration donnée.*

**Démonstration** “ $\Rightarrow$ ” Si  $\mathbf{x}_j^-$  respecte (3.18) à  $t_k^+$ , dans ce cas, la relation suivante est respectée :

$$(S_{12j}^T \ \mathbf{I}) \mathbf{F}_j \mathbf{x}_j^- - S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ = \mathbf{0} \quad (3.39)$$

De plus, une forme équivalente de la relation (3.34) est donnée par :

$$\mathbf{x}_j^+ = \mathbf{x}_j^- - \begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_j [ ( S_{12j}^T \quad \mathbf{I} ) \mathbf{F}_j \mathbf{x}_j^- - S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ ] \quad (3.40)$$

d'où, en utilisant la relation précédente, on obtient la continuité de  $\mathbf{x}_j$ . "←" Si  $\mathbf{x}_j$  est continu à  $t_k$ , alors la relation (3.34) dévient :

$$\begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_j [ S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ - ( S_{12j}^T \quad \mathbf{I} ) \mathbf{F}_j \mathbf{x}_j^- ] = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

d'où, compte tenu de la positivité de la matrice  $R_j$ , on obtient que  $\mathbf{x}_j^-$  doit respecter la contrainte algébrique implicite à  $t_k^+$ .

**Corollaire 3.18** *Soit  $t_k$  un instant strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité de la configuration  $l_j$ , tel que  $\mathbf{u}_p(t_k) \equiv \mathbf{0}$ . Dans ce cas, l'état implicite  $\mathbf{x}_j$  est continu si, et seulement si, toute éventuelle discontinuité du vecteur  $\bar{\mathbf{u}}$  se trouve dans le noyau de la matrice  $S_{25j}$ .*

**Démonstration** Étant donnée la forme de  $\bar{\mathbf{u}}$ , il est vrai, pour tout  $t_k$  strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité de  $l_j$ , que :

$$( S_{12j}^T \quad \mathbf{I} ) \mathbf{F}_j \mathbf{x}_j^- - S_{25j} \mathbf{u}_c = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

"⇒" Si  $\Delta_u^k \in \text{Ker}(S_{25j})$ , alors la relation (3.34) devient :

$$\mathbf{x}_j^+ = \mathbf{x}_j^- - \begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_j [ ( S_{12j}^T \quad \mathbf{I} ) \mathbf{F}_j \mathbf{x}_j^- - S_{25j} \mathbf{u}_c ], \quad (3.43)$$

d'où, en utilisant (3.42), il résulte la continuité de  $\mathbf{x}_j$ .

"←" Si  $\mathbf{x}_j$  est continu à  $t_k$ , alors, compte tenu de (3.42), la relation (3.34) dévient :

$$\begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_j S_{25j} \Delta_u^k = \mathbf{0}, \quad (3.44)$$

d'où, compte tenu de la positivité de la matrice  $R_j$ , on obtient que  $\Delta_u^k \in \text{Ker}(S_{25j})$ .

**Exemple** Pour la configuration (F,F), respectivement pour la configuration (E,E), l'expression de l'équation de discontinuité à  $t_k$  de l'état implicite associé est donnée par :

$$\left( \begin{array}{c} q_6^+ \\ p_2^+ \end{array} \right) \Big|_{FF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_6^- \\ p_2^- \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

respectivement :

$$\left( \begin{array}{c} p_2^+ \\ q_6^+ \end{array} \right) \Big|_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2^- \\ q_6^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tau_u^k, \quad (3.46)$$

tandis que pour les configurations (F,E) et (E,F), on obtient :

$$\left( \begin{array}{c} p_2^+ \\ q_6^+ \end{array} \right) \Big|_{FE,EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2^- \\ q_6^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tau_u^k \quad (3.47)$$

### 3.2.5 Forme explicite du vecteur de puissance imposé par le champ interrupteur par rapport aux vecteurs d'état

Étant donné la nature des signaux d'entrée dans la structure de jonction, c'est-à-dire le fait que  $\mathbf{x}_j$  peut être discontinu pendant la période d'activité de la configuration  $l_j$ , que  $D_{ij}$  peut être uniquement discontinu et que, en même temps,  $\mathbf{u}$  peut être impulsionnel, alors, par la quatrième ligne de (3.8), le vecteur  $T_{oj}$  peut être à son tour impulsionnel pendant la même période d'activité de  $l_j$ . On peut, dans ce cas, décomposer l'évolution de  $T_{oj}$ , pendant la période d'activité de la configuration donnée, en une partie impulsionnelle,  $T_{oj}^p = \sum_k \tau_{oj}^k \delta(t - t_k)$ , et une partie non-impulsionnelle,  $\bar{T}_{oj}$ . On procède par la suite à l'explicitation par rapport aux vecteurs d'état et du vecteur d'entrée de puissance, en commençant par la partie impulsionnelle et en enchaînant sur la partie non-impulsionnelle.

L'amplitude de la partie impulsionnelle de  $T_{oj}$  est explicitée par la proposition suivante :

**Proposition 3.19** *Soit  $t_k$  un instant dans l'intervalle d'activité de la configuration  $l_j$ , tel que soit l'état implicite associé à cette configuration est discontinu, soit le vecteur d'entrée de puissance est impulsionnel, soit les deux. Alors, l'amplitude de la partie impulsionnelle de  $T_{oj}$  est donnée par :*

1. si  $\mathbf{u}_p(t_k) = \tau_u^k \delta(t - t_k)$ , alors :

$$\begin{aligned} \tau_{oj}^k &= -S_{24j}^T R_j \left( S_{12j}^T \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_j \mathbf{x}_j^- + S_{24j}^T R_j S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ \\ &\quad + [S_{45j} - S_{24j}^T R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T)] \tau_u^k \end{aligned} \quad (3.48)$$

2. si  $\mathbf{u}_p(t_k) = 0$ , alors :

$$\tau_{oj}^k = S_{24j}^T R_j [S_{25j} \bar{\mathbf{u}}^+ - (S_{12j}^T \mathbf{I}) \mathbf{F}_j \mathbf{x}_j^-] \quad (3.49)$$

**Démonstration** On déduit ici seulement la relation (3.48), la même approche pouvant être utilisée pour montrer également (3.49). Ainsi, par l'intégration à l'instant  $t_k$  de la quatrième ligne de (3.8), on obtient :

$$\tau_{oj}^k = S_{24j}^T (\mathbf{x}_{dj}^+ - \mathbf{x}_{dj}^-) + S_{45j} \tau_u^k \quad (3.50)$$

d'où, en utilisant (3.37), on retrouve (3.48).

**Corollaire 3.20** *Dans le cas où  $\mathbf{u}_p(t_k) = \mathbf{0}$ , alors  $\tau_{oj}^k \equiv \mathbf{0}$  pour toute configuration de référence ( $S_{24j} \equiv \mathbf{0}$  ou  $S_{24j} = \emptyset, \forall j$ ).*

**Corollaire 3.21** *Soit  $t_k$  un instant de temps où  $\mathbf{u}_p(t_k) \equiv \mathbf{0}$  et le vecteur d'état  $\mathbf{x}_j$  est continu. Dans ce cas, la partie impulsionnelle de  $T_{oj}$  à cet instant est nulle ( $\tau_{oj}^k = \mathbf{0}$ ).*

**Démonstration** Déduite directement par l'application du corollaire 3.17 à la relation (3.49).

**Exemple** Étant donné qu'il n'y a pas d'éléments à causalité dérivée pour les deux configurations de référence,  $S_{24FE} = S_{24EF} = \emptyset$ . En plus,  $S_{45FE} = S_{45EF} = \mathbf{0}$ , on obtient :

$$\tau_{oFE}^k = \tau_{oEF}^k \equiv \mathbf{0}, \forall t_k \quad (3.51)$$

Dans le cas de la configuration (F,F), compte tenu de (3.10), l'amplitude des impulsions à l'instant  $t_k$  est donnée par l'expression suivante :

$$\tau_{oFF}^k = - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} p_2^- + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tau_u^k \quad (3.52)$$

Dans le cas de la configuration (E,E), l'amplitude des impulsions à l'instant  $t_k$  est donnée par l'expression suivante :

$$\tau_{oEE}^k = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_6^- + \mathbf{0} \cdot \tau_u^k \quad (3.53)$$

Afin d'expliciter la partie non-impulsionnelle,  $\bar{T}_{oj}$ , par rapport au vecteur d'état explicite et du vecteur des entrées de puissance, il faut faire le lien entre ces deux vecteurs et les autres vecteurs qui apparaissent dans la quatrième ligne de la relation (3.8).

**Lemme 3.22** *Le vecteur des variables d'effort/flux associées aux éléments de stockage en causalité intégrale,  $Z_{ij}$ , peut s'exprimer en fonction du vecteur d'état explicite,  $\mathbf{x}_{1j}$ , et du vecteur d'entrée de puissance,  $\mathbf{u}$ , de la façon suivante :*

$$Z_{ij} = \hat{R}_j \mathbf{x}_{1j} + (F_{ij} S_{12j} + F_j) R_j (S_{24j} T_{ij} + S_{25j} \bar{\mathbf{u}}) \quad (3.54)$$

**Démonstration** A partir de la relation constitutive pour le champ d'éléments de stockage, (3.12), on obtient :

$$Z_{ij} = \begin{pmatrix} F_{ij} & F_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{x}_{dj} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

d'où, en utilisant la changement de variable (3.22), la contrainte algébrique explicite, (3.23b), et la propriété (3.31) on trouve que :

$$\begin{aligned}
Z_{ij} &= \begin{pmatrix} F_{ij} & F_j \end{pmatrix} Q_j \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1j} \\ R_j S_{24j} T_{ij} + R_j S_{25j} \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{ij} & F_j \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{I} - S_{12j} R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) \\ -R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) \end{pmatrix} \mathbf{x}_{1j} + \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} S_{12j} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_j (S_{24j} T_{ij} + S_{25j} \bar{\mathbf{u}}) \right] \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Finalemment, à l'aide du lemme 3.9, on obtient le résultat (3.54).

**Lemme 3.23** *Strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité de la configuration  $l_j$ , la dérivée du vecteur des variables d'état associées aux éléments de stockage à causalité dérivée,  $\dot{\mathbf{x}}_{dj}$ , peut s'exprimer en fonction du vecteur d'état explicite,  $\mathbf{x}_{1j}$ , et du vecteur d'entrée de puissance,  $\mathbf{u}$ , de la façon suivante :*

$$\dot{\mathbf{x}}_{dj} = -R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) (A_j \mathbf{x}_{1j} + E_j \mathbf{u}) + R_j S_{25j} \left( \dot{\mathbf{u}}_c + \sum_i \Delta_u^i \delta(t - t_i) \right) \quad (3.57)$$

**Démonstration** A partir du changement de variable (3.22), on obtient :

$$\mathbf{x}_{dj} = \begin{pmatrix} -R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1j} \\ \mathbf{x}_{2j} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Tenant compte que, strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité de  $l_j$ ,  $T_{ij} \equiv \mathbf{0}$ , alors, par différentiation de (3.58) et en utilisant (3.26) et (3.30), on trouve le résultat (3.58).

Avant d'énoncer le résultat principal concernant la forme explicite de  $\bar{T}_{oj}$  par rapport à  $\mathbf{x}_{1j}$  et  $\mathbf{u}$ , on introduit les notations suivantes :

$$A_{1j} = [S_{14j}^T - S_{24j}^T R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) K_j - S_{34j}^T H_j S_{13j}^T] \hat{R}_j \quad (3.59a)$$

$$\begin{aligned}
A_{uj} &= S_{45j} + S_{34j}^T H_j S_{35j} + (S_{14j}^T - S_{34j}^T H_j S_{13j}^T) (F_{ij} S_{12j} + F_j) R_j S_{25j} \\
&\quad - S_{24j}^T R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) E_j \quad (3.59b)
\end{aligned}$$

$$A_{pj} = S_{24j}^T R_j S_{25j} \quad (3.59c)$$

**Proposition 3.24** *La partie non-impulsionnelle du vecteur des variables de puissance imposées aux interrupteurs,  $\bar{T}_{oj}$ , strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité de la configuration  $l_j$ , est donnée par :*

$$\bar{T}_{oj} = A_{1j} \mathbf{x}_{1j} + A_{uj} \bar{\mathbf{u}} + A_{pj} \dot{\mathbf{u}}_c \quad (3.60a)$$

$$\bar{T}_{oj} = A_{1j} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -S_{12j} \end{pmatrix} \mathbf{x}_j + A_{uj} \bar{\mathbf{u}} + A_{pj} \dot{\mathbf{u}}_c \quad (3.60b)$$

**Démonstration** Le résultat (3.60a) est obtenu à partir de la quatrième ligne de (3.8) par l'utilisation des lemmes 3.5, 3.22 et 3.23, tout en prenant en compte le fait que  $T_{ij} \equiv \mathbf{0}$  et, aussi, en ne gardant que la partie non-impulsionnelle de  $\dot{\mathbf{x}}_{dj}$  et de  $\mathbf{u}$ . Finalement, on obtient (3.60b) à partir de (3.60a) en utilisant le changement de variable inverse, défini par (3.25b).

**Exemple** Pour la configuration de référence choisie, (F,E), la partie non-impulsionnelle du vecteur de puissance imposé aux interrupteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_3 \\ \bar{f}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_6 \end{pmatrix} + \mathbf{0} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_c \quad (3.61)$$

Pour la configuration (E,F),  $\bar{T}_{oEF}$  est donné par :

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_3 \\ \bar{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_6 \end{pmatrix} + \mathbf{0} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_c \quad (3.62)$$

Pour la configuration (F,F), on obtient à partir de (3.10) :

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_3 \\ \bar{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix} q_6 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_c \quad (3.63)$$

Finalement, pour la configuration (E,E), on obtient que :

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} p_2 + \mathbf{0} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{0} \cdot \dot{\mathbf{u}}_c \quad (3.64)$$

### 3.2.6 Hypothèses simplificatrices usuelles

Dans les sous-sections précédentes, on s'est occupé principalement de la représentation mathématique générale des systèmes physiques linéaires avec des interrupteurs. Toutefois, par rapport au cas général, dans beaucoup d'applications on peut prendre en compte des hypothèses (simplificatrices) supplémentaires, qui peuvent porter à la fois sur la nature du vecteur des entrées de puissance et sur la topologie du système. Une première hypothèse, qui a déjà été analysée partiellement, porte sur la nature non-impulsionnelle des entrées.

**Hypothèse 3.25 (Système global)** *Les entrées de puissance ne peuvent être qu'au maximum discontinues.*

Cette hypothèse peut apparaître comme évidente dans le cas où les sources de puissance sont effectivement des sources physiques. Ainsi, on ne pourrait pas envisager qu'une batterie puisse fournir une tension impulsionnelle. Toutefois, à l'inverse, l'hypothèse impulsionnelle n'est pas complètement sans intérêt : pour un système complexe, on pourrait envisager un découpage de celui-ci en sous-systèmes tel qu'une entrée du sous-système en aval soit une sortie du sous-système en amont et *vice versa*.

De ce fait, la nature des signaux échangés par des sous-systèmes dépend de la topologie de ceux-ci, où des composantes impulsionnelles ne peuvent pas être exclues *a priori*.

**Hypothèse 3.26 (Fonctionnement normal)** *Le vecteur des entrées de puissance est continu et de différentielle continue.*

Cette hypothèse est usuelle dans le domaine de l'électronique de puissance, dans le cas des convertisseurs continu-continu, où les sources sont mêmes constantes, et dans le cas des convertisseurs alternatif-continu, où les sources sont sinusoïdales. Néanmoins, le cas des sources discontinues n'est pas complètement sans intérêt : les batteries ou les alimentations par le réseau électrique peuvent être défailtantes par rapport au fonctionnement nominal et au moment de la défaillance, le niveau de tension peut être discontinu. De plus, en fonction du degré de finesse de la représentation du système qu'on choisit, ces discontinuités peuvent être représentées directement au niveau des sources ou par l'introduction d'interrupteurs commandés qui modulent le niveau d'une ou plusieurs sources continues. A titre d'exemple, on peut citer le cas du moteur d'une automobile et de sa boîte de vitesses, qui si on les considère comme un tout sont équivalentes à une source d'effort (couple) avec des possibles discontinuités, alors que si chaque élément est au contraire représenté à part, la source d'effort (le moteur) est continue, les discontinuités étant le résultat de la modulation par la boîte de vitesses.

Une classe particulière, mais assez importante du point de vue richesse d'applications est celle des convertisseurs continu-continu :

**Hypothèse 3.27 (DC-DC)** *Le vecteur de puissance imposé par les sources au système est constant dans le temps.*

Finalement, dans le domaine électrique, on fait une dernière hypothèse liée à la topologie, mais qui concerne la plupart des circuits utilisés dans la pratique.

**Hypothèse 3.28 (Topologie normale)** *Pour toute configuration permise  $l_j$ , il n'y a pas, en équivalent électrique, d'inductances en série avec une source de courant et il n'y a pas non plus de capacités en parallèle avec une source de tension. Autrement dit,  $S_{25j} \equiv \mathbf{0}$  ou  $S_{25j} \equiv \emptyset, \forall j$ .*

Comme on peut l'observer, en ce qui concerne les hypothèses faites sur les sources de puissance, certaines sont moins contraignantes que d'autres, donc le degré de simplification qu'on peut attendre de la part de chacune est différent. Ainsi, l'hypothèse 3.25 est moins contraignante que l'hypothèse 3.26 qui, à son tour, est moins contraignante que 3.27. Si la plupart des conséquences de la première hypothèse ont été déjà traitées précédemment, on mettra en évidence d'autres conséquences découlant de ces hypothèses.

**Proposition 3.29** *Si l'hypothèse de système global est respectée, alors, dans l'intervalle d'activité d'une configuration  $l_j$  quelconque, initialisation incluse, le vecteur d'état explicite  $\mathbf{x}_{1j}$  est continu.*

**Démonstration** Sachant que  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ , alors ce résultat est obtenu par intégration de la relation (3.23a).

**Proposition 3.30** *Si l'hypothèse de fonctionnement normal est respectée, alors, à l'intérieur strict de l'intervalle d'activité d'une configuration  $l_j$  quelconque, l'état implicite  $\mathbf{x}_j$  est continu, ainsi que le vecteur de puissance imposé aux interrupteurs,  $T_{oj}$ .*

**Démonstration** Sachant que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c$ , conformément au corollaire 3.18, on obtient la continuité de  $\mathbf{x}_j$ . Ensuite, dans un premier temps, compte tenu de la continuité de  $\mathbf{x}_j$  par l'application du résultat du corollaire 3.21,  $\tau_{oj}^k \equiv \mathbf{0}, \forall t_k$  strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité de la configuration  $l_j$ . La continuité de  $T_{oj}$  est obtenue par la suite à partir du résultat de la proposition 3.24, sachant que les signaux  $\mathbf{x}_{1j}$  (ou  $\mathbf{x}_j$ ),  $\mathbf{u}_c$ , et  $\dot{\mathbf{u}}_c$  sont continus.

**Proposition 3.31** *Si les hypothèses de topologie normale et de système global sont respectées, alors, strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité d'une configuration  $l_j$  quelconque, on obtient que :*

1. le vecteur d'état implicite  $\mathbf{x}_j$  est continu ;
2.  $\mathbf{x}_{2j} \equiv \mathbf{0}$  ;
3.  $\tau_{oj}^k \equiv \mathbf{0}, \forall t_k$ .

**Démonstration** Par la même argumentation que pour la démonstration de la proposition 3.30, on obtient la continuité du vecteur d'état implicite  $\mathbf{x}_j$  et, ensuite, le fait que  $\tau_{oj}^k \equiv \mathbf{0}, \forall t_k$ . De plus, par la relation (3.26b), compte tenu du fait que  $S_{25j} \equiv \mathbf{0}$  ou  $S_{25j} \equiv \emptyset, \forall j$ , on obtient que la composante algébrique du vecteur d'état explicite,  $\mathbf{x}_{2j}$ , est nulle.

**Corollaire 3.32** *Si les hypothèses de topologie normale et de système global sont respectées et, en plus, le vecteur des entrées de puissance est continu  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c$  (sans être nécessairement différentiable), alors, strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité d'une configuration  $l_j$  quelconque, le vecteur de variable de puissance imposé aux interrupteurs,  $T_{oj}$ , est continu.*

**Démonstration** Pour commencer, on remarque que les résultats précédents qui concernent  $T_{oj}$  ne sont pas affectés par une éventuelle non-différentiabilité du vecteur  $\mathbf{u}_c$ , parce que le vecteur  $S_{25j}\mathbf{u}_c$  garde son caractère différentiable. De ce fait, par la relation (3.60b) et la proposition 3.31, on obtient la continuité de  $T_{oj}$ .

L'hypothèse *DC-DC* n'amène pas de propriétés nouvelles en ce qui concerne le vecteur d'état ou le vecteur de variables de puissance imposées aux interrupteurs. Toutefois, cette hypothèse introduit des simplifications dans le calcul. Par exemple, elle rend nul le troisième terme de la relation (3.60b). La même simplification est obtenue si l'hypothèse de *topologie normale* est acquise, celle-ci ayant, de plus, des répercussions assez évidentes dans le calcul de  $E_j$  et de  $A_{uj}$ .

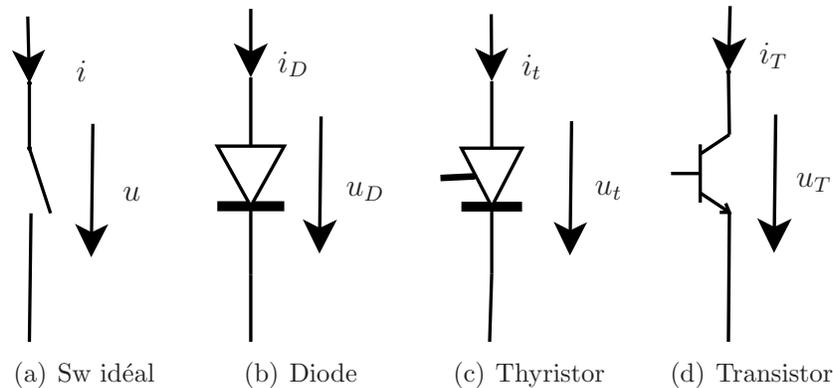


FIG. 3.6 – Interrupteur idéal à la commande et interrupteurs d'électronique de puissance en convention générateur

**Exemple** Ce circuit fait partie de la classe de convertisseurs *continu-continu*, ce qui est équivalent à dire que l'hypothèse *DC-DC* est respectée. Ainsi, conformément au résultat 3.30, entre deux commutations, le vecteur d'état implicite et le vecteur de variables de puissance associées aux interrupteurs sont continus. Néanmoins, étant donné que l'hypothèse de *topologie normale* est également acquise et, celle de *système global* aussi, alors le vecteur d'état est continu même si il y a une défaillance (discontinuité) de la source. En plus, dans le cas d'une source en *dents de scie* (continue, mais avec des points où elle n'est pas différentiable), le vecteur de variables de puissance imposées aux interrupteurs est également continu.

Enfin, en guise de conclusion de cette partie, on remarque que l'aspect systématique de la méthode a permis le développement d'un outil de calcul symbolique sous Mathematica, décrit par (Cormerais *et al.*, 2002), qui détermine les configurations valides et les matrices associées à la structure de jonction pour toutes ces configurations. De plus, par ce même outil, on obtient également les matrices associées aux équations dynamiques implicites et explicites et celles associées aux fonctions de saut. Finalement, par une simple extension de l'original, on arrive à calculer aisément les matrices associées à l'explicitation du vecteur des variables de puissance imposées aux interrupteurs, partie impulsionnelle et partie non-impulsionnelle, par rapport au vecteur d'état continu et au vecteur des entrées continues du système.

### 3.3 Modèle de type automate pour les interrupteurs

Le choix de représenter l'interrupteur par un élément de bond graph est en lui même assez contraignant. De ce fait, l'interrupteur est un dipôle qui est caractérisé à la fois par les variables de puissance et par sa représentation comme source d'effort ou

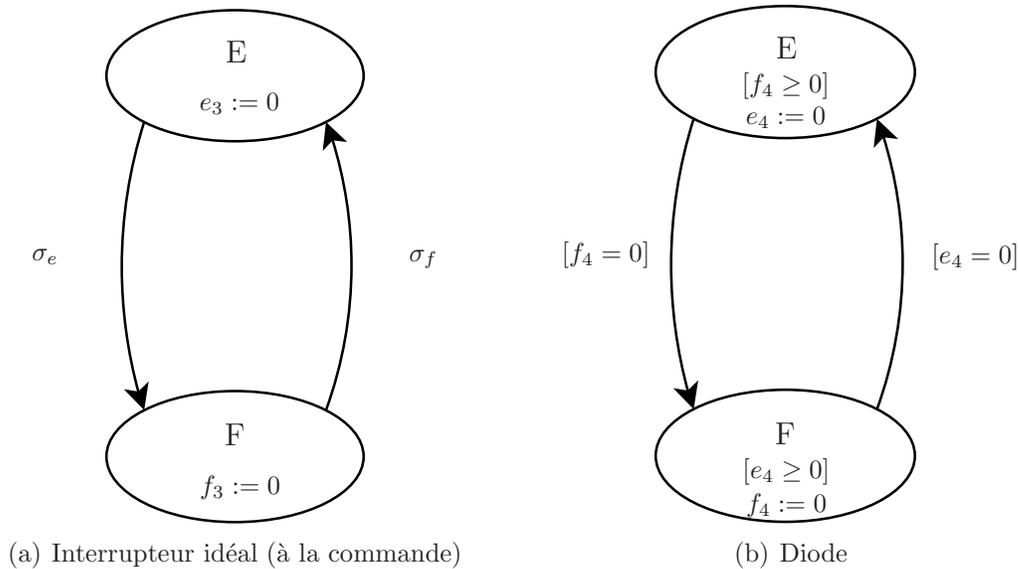


FIG. 3.7 – Représentation de type automate des interrupteurs présents dans le convertisseur « boost »

source de flux. Ainsi, les variables de puissances sont contraintes par l'état discret de l'interrupteur, effort nul quand l'interrupteur est en état E (*fermé*) et flux nul quand l'interrupteur est en état F (*ouvert*). Toutefois, ce modèle ne contient aucune information en ce qui concerne la dynamique discrète de l'interrupteur et, donc, un nouveau modèle doit être conçu pour combler ce manque. Afin de mieux expliquer l'introduction d'un nouveau modèle d'interrupteur, on discute premièrement le cas du convertisseur « boost ».

**Remarque 3.33** *Par la suite, à l'exception de l'interrupteur idéal à la commande, on s'intéresse uniquement aux interrupteurs issus de l'électronique de puissance, présentés figure 3.6 dans la convention générateur. Bien qu'on considère que l'approche analysée puisse s'étendre à d'autres domaines d'application, ce travail reste, néanmoins à faire.*

**Exemple** On présente figure 3.7 les modèles de type automate associés à l'interrupteur idéal (par rapport à la commande) et à la diode, modèles qui sont obtenus par la traduction des modèles de type réseau de Petri d'état interprété fournis par (Hautier and Caron, 1999). Déjà, sur ces deux modèles, on peut identifier deux façons différentes de gérer les transitions. Ainsi, dans le cas de l'interrupteur idéal, on constate la présence d'un signal extérieur de commande qui peut prendre les valeurs  $\sigma_e$ , commande d'ouverture de l'interrupteur, et  $\sigma_f$ , commande de fermeture de l'interrupteur. Contrairement à l'interrupteur idéal, dans le cas de la diode, les conditions de commutation portent uniquement sur les variables d'effort/flux associées à l'interrupteur. De cette manière, la diode

reste dans l'état E tant que son courant reste positif, le passage de E en F s'effectuant lorsque son courant devient nul, et elle reste en F tant que sa tension est positive (convention générateur), le passage de F à E s'effectuant lorsque sa tension devient nulle. Ce comportement correspond, par exemple, à la situation quand la configuration (F,E) est active et, donc, le passage décroissant du courant par zéro produit le blocage de la diode. Une fois dans la configuration (F,F), l'éventuel passage par zéro de la tension aux bornes de la diode (la tension aux bornes de la capacité devient égale à la tension de la source) met en conduction la diode, ce qui conduit de nouveau à la configuration (F,E).

Cependant, si on considère que la configuration (F,E) est active, avec une tension positive aux bornes de la capacité, et si on commande la fermeture de l'interrupteur idéal par l'intermédiaire de l'événement de commande  $\sigma_f$ , alors cela entraîne le blocage de la diode, ce qui fait que la nouvelle configuration active est (E,F). Effectivement, le système ne pourrait pas évoluer vers la configuration (E,E), puisque, conformément à (3.53), l'amplitude de la composante impulsionnelle de  $f_4$  serait négative, ce qui conduirait à une violation instantanée de la condition d'invariance associée à l'état E de la diode. De même, lorsque la configuration active est (E,F), avec un courant positif dans l'inductance, et que l'interrupteur idéal est commandé à l'ouverture par l'intermédiaire de l'événement  $\sigma_e$ , la diode devient passante, ce qui fait que la nouvelle configuration active est (F,E). Ceci est favorisé par le fait que la configuration (F,F) ne pourrait pas être active, puisque, conformément à (3.52), l'amplitude de la composante impulsionnelle de  $e_4$  serait négative, ce qui conduirait à une violation instantanée de la condition d'invariance associée à l'état F de la diode. Ainsi, on constate que dans les deux cas cités, la commutation de la diode ne se fait pas forcément lorsque son courant ou sa tension deviennent nulles, mais cela peut arriver aussi lorsque le reste du système impose des discontinuités aux variables d'effort/flux d'un interrupteur. On peut aussi retrouver une commutation de la diode sans que la condition de garde avant la commutation soit respectée si on se trouve dans la configuration (F,F). Si on suppose qu'une discontinuité de la tension de la source soit telle que  $C \cdot \bar{u}^+ > q_6^+$ , alors ceci ferait que le système soit forcé de commuter vers (F,E), la continuation dans la configuration (F,F) étant impossible compte tenu de la relation (3.63) et de la contrainte d'invariance associée à  $e_4$ .

Toutefois, la commutation des interrupteurs autrement que par la condition de garde peut avoir aussi des causes internes et non seulement des causes externes tel que c'est le cas pour le convertisseur « boost ». Pour justifier ceci, on utilise un deuxième exemple, cf. à la figure 3.8, qui est une forme simplifiée du convertisseur analysé par (Edström *et al.*, 1997).

**Exemple bis** Soit (E,F) la configuration active du système, telle que la partie oscillante a été *a priori* chargée et évolue avec une tension positive aux bornes de la capacité  $C_o$  et un courant positif dans la self  $L_o$ . Soit l'évolution de la partie oscillante telle qu'au moment où la tension aux bornes de la capacité devient nulle, le courant  $I_o$  soit positif et supérieur au courant  $I_m$ , positif à son tour.

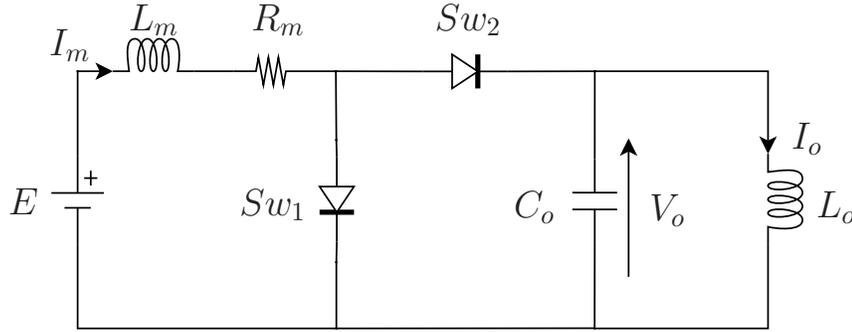


FIG. 3.8 – Exemple de circuit où l'évolution interne du système peut provoquer des changements d'état discret de diode, sans que ce changement soit dû au franchissement de la condition de garde

Ainsi, la diode  $Sw_2$  devient passante par le fait que la tension à ses bornes est nulle, ce qui entraîne également la commutation de la diode  $Sw_1$  et l'activation de la configuration (F,E). Effectivement, une évolution dans la configuration (E,E) serait contraire à la condition d'invariance de l'état E de la diode  $Sw_1$  : étant donné que les deux diodes sont passantes,  $V_o \equiv 0$  ce qui fait que  $I_{Sw_2} = I_o$  et, de ce fait,  $I_{Sw_1} = I_m - I_o < 0$ .

### 3.3.1 Switch Automata

Comme on a pu le constater dans les deux exemples cités, le modèle de la diode proposé figure 3.7(b) ne correspond pas à toutes les situations qui peuvent se produire lors de l'évolution d'un système quelconque. Ainsi, de manière générale, cette incohérence est due au fait qu'on ne peut pas utiliser la notion de garde classique (frontière de l'invariant) pour obliger le système à rester dans un état discret parce que les variables ne violent jamais l'invariant, mais ne sortent plus forcément par la frontière. Cependant, il est quand même utile de conserver la notion de garde pour décrire des transitions surtout parce que dans le cas de certains interrupteurs, comme le thyristor, on ne peut pas faire autrement. Tous ces considérations conduisent au nouveau modèle d'interrupteur introduit par la définition 3.34.

**Définition 3.34 (Switch Automaton)** *Un switch automaton est donc :*

$$SA = \{\mathcal{L}, \mathcal{W}, \mathcal{B}, Caus, Inv, \mathcal{A}, \Sigma\} \quad (3.65)$$

où :

- $\mathcal{L}$  est un ensemble fini de situations discrètes (modes), où  $\text{card}(\mathcal{L}) \geq 2$  ;
- $\mathcal{W} = \{w_e, w_f\}$  est un ensemble de variables d'interaction, où  $w_e$  représente l'effort et  $w_f$  représente le flux, avec  $\text{val}(w) \in \mathbb{R}$  ;

- $\mathcal{B}$  est l'ensemble de valeurs qui peuvent être prises par l'entrée booléenne  $b$ ,  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{B}^{\dim(b)}$ . Par convention, si  $\mathcal{B} = \emptyset$ , alors on considère qu'il n'y a pas d'entrée booléenne;
- $\text{Caus} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{W}$  correspond à la causalité de l'interrupteur et, donc, associe à toute situation  $l \in \mathcal{L}$  la variable de  $\mathcal{W}$  qui doit être mise à zéro. Dans ces conditions,  $\text{Caus}(l)$  représente la variable de sortie de l'interrupteur, tandis que l'autre variable de  $\mathcal{W}$ , notée alors par  $\overline{\text{Caus}}(l)$ , est une variable d'entrée;
- $\text{Inv}$  est un ensemble de conditions associées à chaque situation  $l \in \mathcal{L}$ , qui portent sur les entrées du système,  $\overline{\text{Caus}}(l)$  et  $b$ ;
- $\Sigma$  est l'ensemble des événements externes;
- $\mathcal{A}$  est un ensemble de transitions constitué de deux sous-ensembles :
  - $\mathcal{A}_s$  ensemble des transitions synchronisées où chaque élément est du type  $(l, \sigma, \text{guard}, l')$ , où :
    - $l, l' \in \mathcal{L}, l \neq l'$ ;
    - $\sigma \in \Sigma$ ;
    - $\text{guard}$  est une condition qui porte sur  $\overline{\text{Caus}}(l)$ ;
  - $\mathcal{A}_c$  ensemble des transitions de secours dont chaque élément est du type  $(l, l')$ .

**Remarque 3.35** *Un tel modèle n'est pas compatible avec le modèle de I/O hybrid automata (Lynch et al., 2001) parce que les variables sont selon le mode ou bien des entrées ou bien des sorties. De plus, par rapport à la définition générale de l'automate hybride 2.8, le switch automaton n'a pas d'état continu et d'équations dynamiques associées à celui-ci.*

La condition d'invariance définit également une région d'invariance dans l'espace des variables d'entrée (entrée booléenne et variable de puissance d'entrée). On peut ainsi définir, pour un mode  $l_j \in \mathcal{L}$  quelconque, l'ensemble des valeurs de  $b$  compatibles avec la région d'invariance,  $\mathcal{B}(l_j) \subseteq \mathcal{B}$ , et l'ensemble des valeurs de  $\overline{\text{Caus}}(l_j)$  compatibles avec la même région,  $\mathcal{D}(l_j) \subseteq \mathbb{R}$ . Autrement dit :

- $\forall b \in \mathcal{B}(l_j), \exists \overline{\text{Caus}}(l_j) \in \mathcal{D}(l_j)$  t.q.  $\text{Inv}(l_j, \overline{\text{Caus}}(l_j), b) = \text{true}$ ;
- $\forall \overline{\text{Caus}}(l_j) \in \mathcal{D}(l_j), \exists b \in \mathcal{B}(l_j)$  t.q.  $\text{Inv}(l_j, \overline{\text{Caus}}(l_j), b) = \text{true}$ ;
- $\nexists (\overline{\text{Caus}}(l_j), b) \notin \mathcal{D}(l_j) \times \mathcal{B}(l_j)$  t.q.  $\text{Inv}(l_j, \overline{\text{Caus}}(l_j), b) = \text{true}$ .

De plus, par la suite, pour simplifier, on utilise la même notation,  $\text{Inv}$ , pour désigner, en fonction du contexte, soit la condition d'invariance, soit la région d'invariance, cette simplification s'appliquant pour la condition de garde et, également, pour toute autre condition de ce type qui sera ainsi définie.

**Remarque 3.36** *On peut constater que  $\text{Inv}(l_j, \overline{\text{Caus}}(l_j), b) \subseteq \mathcal{D}(l_j) \times \mathcal{B}(l_j)$ . En plus, si  $\mathcal{D}(l_j)$  convexe, alors  $\mathcal{D}(l_j) \times \mathcal{B}(l_j)$  représente l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\text{Inv}(l_j, \overline{\text{Caus}}(l_j), b)$ .*

En ce qui concerne l'ensemble de transitions, on rajoute qu'on fait, par la suite, dans le cas général, la distinction entre une transition du modèle *switch automaton* et une commutation de l'interrupteur. Ainsi, par convention, la dernière est équivalente

à une transition qui implique un changement de causalité. Dans ce contexte, on a une équivalence totale entre les deux pour tous les modèles qui ont  $\text{card}(\mathcal{L}) = 2$ . De plus, de façon similaire à la condition d'invariance, on peut définir une région  $\mathcal{G}(l, l')$  telle que, pour une transition  $a = (l, \sigma, \text{guard}, l') \in \mathcal{A}_s$ , la condition  $\text{guard}$  se met sous la forme :  $\text{guard} = \overline{[\text{Caus}(l) \in \mathcal{G}(l, l')]}$ .

Ce nouveau modèle d'interrupteur représente une version enrichie du modèle de l'interrupteur tel qu'il a été utilisé dans un contexte bond graph. En effet, dans les deux cas, on retrouve la notion de causalité qui peut prendre uniquement deux valeurs, ce qui détermine la nature en terme d'entrée/sortie des variables d'effort/flux. De plus, la notion d'état logique est étendue, on peut avoir plusieurs situations associées à chaque valeur de causalité et on a rajouté des entrées logiques et événementielles. Par l'intermédiaire de l'attribut  $Inv$ , on impose des contraintes au domaine dynamique des variables d'interaction, alors que par l'intermédiaire de  $\mathcal{A}$  on définit la dynamique discrète de l'interrupteur. De façon plus précise, la sémantique d'un tel automate est définie par ses trajectoires, conformément à la définition 3.37.

**Définition 3.37** *Une trajectoire du switch automaton SA est une séquence,*

$$\begin{aligned} & (l_0, \tau_0, (w_e, w_f), b), (l_1, \tau_1, (w_e, w_f), b), \dots, \\ & (l_i, \tau_i, (w_e, w_f), b), (l_{i+1}, \tau_{i+1}, (w_e, w_f), b), \dots, \end{aligned} \quad (3.66)$$

qui respecte les contraintes suivantes ( $\forall i \geq 0$ ) :

1.  $l_i, l_{i+1} \in \mathcal{L}$  et  $l_i \neq l_{i+1}$  ;
2.  $\tau_{i+1} - \tau_i > 0$  ;
3.  $\forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$

$$\text{Caus}(l_i)(t) = 0, \quad (3.67a)$$

$$\text{Inv}(l_i, \overline{[\text{Caus}(l_i)(t)]}, b(t)) = \text{true}; \quad (3.67b)$$

4.  $\exists a \in \mathcal{A}$ , tel que :

$$\begin{aligned} & [a = (l_i, \sigma, \text{guard}, l_{i+1}) \in \mathcal{A}_s \wedge \sigma \in \Sigma \\ & \wedge \text{guard}(\overline{[\text{Caus}(l_i)(\tau_{i+1}^-)}) = \text{true}] \\ & \vee a = (l_i, l_{i+1}) \in \mathcal{A}_c \end{aligned} \quad (3.68)$$

L'ensemble de toutes les trajectoires de l'automate SA est noté par  $T(SA)$ .

**Remarque 3.38** *La deuxième contrainte imposée à la trajectoire du switch automaton implique que, si on se place dans le domaine mécanique, on ne peut pas modéliser les chocs élastiques.*

**Remarque 3.39** *Par rapport à l'évolution globale des variables de puissance, on peut distinguer deux types de transitions. Ainsi, soit l'enchaînement du mode  $l_i$  par le mode  $l_{i+1}$  à l'instant  $\tau_{i+1}$ . Alors, si  $\overline{Caus}(l_i)$  est continu à  $\tau_{i+1}$ , on dit que l'on a à faire à une transition douce, autrement il s'agit d'une transition dure. Par ailleurs, s'il y a aussi un changement de causalité, alors, pour avoir une transition (commutation) douce, il faut que  $\overline{Caus}(l_i)(\tau_{i+1}^-) = Caus(l_{i+1})(\tau_{i+1}^+) = 0$ .*

Au vu de ces considérations, il est possible d'introduire des modèles de type *switch automaton* pour les principaux interrupteurs de l'électronique de puissance, conformément à la figure 3.9, où on donne également un modèle alternatif de l'interrupteur idéal, celui de la figure 3.7(a) restant toujours valable. Ainsi, les trajectoires possibles des variables d'effort/flux, qui sont décrites dans l'analyse des deux exemples au-dessus, respectent la sémantique du modèle *switch automaton* de la diode.

**Remarque 3.40** *Il est nécessaire de faire quelques précisions liées à la « pratique » par rapport aux modèles présentés en figure 3.9 :*

1. *Ces modèles ne sont pas exhaustifs et, donc, ils prennent en compte uniquement une évolution dite « normale ». Ainsi, par exemple, dans le cas de la diode, on ne modélise pas l'effet d'avalanche lorsque la tension (inverse) dépasse un certain seuil et, dans le cas du transistor, la tension doit rester négative lorsqu'on se trouve en mode bloqué.*
2. *La commande à la fermeture du thyristor se fait par l'injection d'un courant de gâchette, pourvu qu'on arrive à obtenir la bonne polarisation entre l'anode et le cathode du thyristor. Une fois le thyristor passant, le courant de gâchette n'est plus nécessaire pour assurer la conduction, donc, l'injection du courant de gâchette est assimilée à l'occurrence de l'événement  $\sigma_E$ .*
3. *La commande à la fermeture du transistor consiste dans l'application d'une tension d'une valeur supérieure à un seuil soit entre la base et l'émetteur, dans le cas du transistor bipolaire, soit entre la grille et la source, dans le cas du MOSFET, soit entre la grille et l'émetteur, dans le cas de l'IGBT. Pour garder le transistor passant, cette commande doit être maintenue, d'où l'assimilation de ce signal à un booléen. Si le transistor se trouve dans l'état passant et son courant s'annule, alors le transistor peut se bloquer mais, conformément aux caractéristiques des divers transistors, la tension est forcée de rester à zéro tant qu'il y a une commande ( $b = 1$ ).*

Mis à part les attributs du modèle *switch automaton*, il est utile de définir certaines notions complémentaires, telles que la frontière de l'invariant et la condition d'incompatibilité de l'entrée booléenne. Afin de pouvoir définir ces notions de manière simple, par rapport à la condition d'invariance, on doit introduire une forme canonique d'écriture pour cette dernière. Ceci se justifie par le fait qu'on peut avoir plusieurs formes de mise en équation de la condition d'invariance : par exemple, la condition d'invariance du mode F du transistor peut s'écrire aussi sous la forme  $[(b = 0 \wedge w_e > 0) \vee (b \in \mathbb{B} \wedge w_e = 0)]$ .

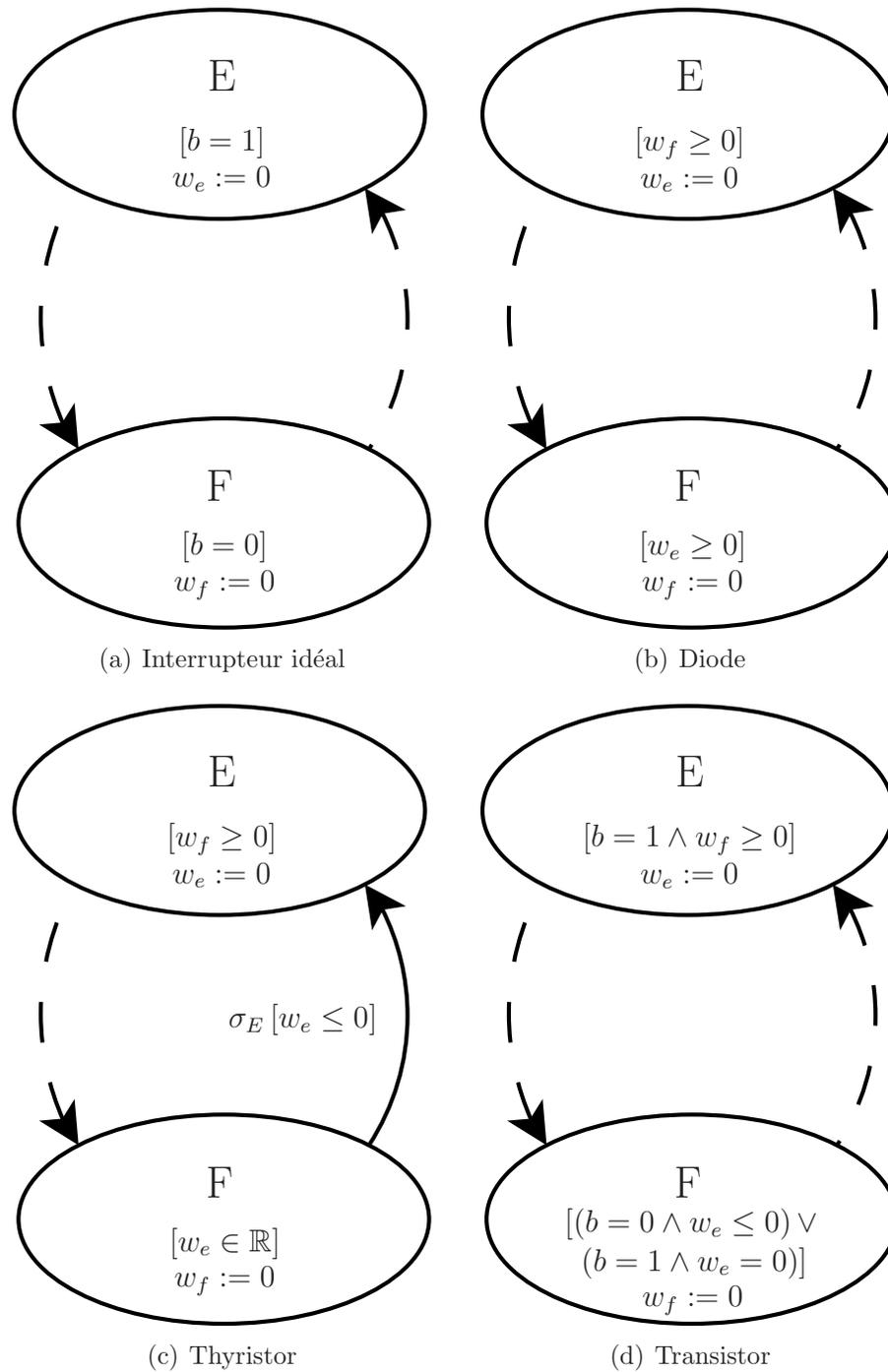


FIG. 3.9 – Modèles *switch automata* de l'interrupteur idéal à la commande et des principaux interrupteurs d'électronique de puissance, où les transitions synchronisées sont représentées par des traits continus, tandis que les transitions de secours sont représentées par des traits discontinus

**Définition 3.41 (Forme canonique de l'invariant)** *Pour un mode  $l_j \in \mathcal{L}$  quelconque, soient  $\mathcal{B}(l_j) \subseteq \mathcal{B}$  et, respectivement,  $\mathcal{D}(l_j) \subseteq \mathbb{R}$  les deux ensembles de valeurs de l'entrée booléenne, respectivement de l'entrée de puissance, compatibles avec la région d'invariance associée. Alors, pour  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  :*

$$Inv(l_j, \overline{Caus}(l_j), b) = \bigvee_{i=1}^k [b \in \mathcal{B}_i(l_j) \wedge \overline{Caus}(l_j) \in \mathcal{D}_i(l_j)] \quad (3.69)$$

est en forme canonique si :

1.  $\mathcal{B}_1(l_j) \cup \mathcal{B}_2(l_j) \cup \dots \cup \mathcal{B}_k(l_j) = \mathcal{B}(l_j)$  ;
2.  $\mathcal{B}_i(l_j) \cap \mathcal{B}_{i'}(l_j) = \emptyset, \forall i \neq i', (i, i' = 1 \dots k)$  ;
3.  $\mathcal{D}_1(l_j) \cup \mathcal{D}_2(l_j) \cup \dots \cup \mathcal{D}_k(l_j) = \mathcal{D}(l_j)$  ;
4.  $\mathcal{D}_i(l_j) \neq \mathcal{D}_{i'}(l_j), \forall i \neq i', (i, i' = 1 \dots k)$ .

Autrement, la forme canonique est représentée par :

$$Inv(l_j, \overline{Caus}(l_j)) = [\overline{Caus}(l_j) \in \mathcal{D}(l_j)] \quad (3.70)$$

**Remarque 3.42** *S'il n'y pas de risque de confusion, pour simplifier, on peut omettre de rajouter, lors de l'écriture de la forme canonique de l'invariant, les conditions de type  $\overline{Caus}(l_j) \in \mathcal{D}_i(l_j)$  si  $\mathcal{D}_i(l_j) = \mathbb{R}$ .*

**Proposition 3.43** *Pour tout mode  $l_j \in \mathcal{L}$ , il existe pour l'invariant associé une forme d'écriture canonique du type introduit par la définition 3.41 et celle-ci est unique.*

**Démonstration** On montre l'existence de façon constructive pour  $\mathcal{B}(l_j) \neq \emptyset$ , sinon la forme canonique existe par définition. Étant donné que l'ensemble  $\mathcal{B}(l_j)$  a un nombre fini d'éléments, dans un premier temps, on peut en construire une partition formée par des ensembles avec un seul élément :  $\mathcal{B}(l_j) = \bigcup_{i=1}^{\text{card}(\mathcal{B}(l_j))} \bar{\mathcal{B}}_i(l_j)$ , où les ensembles  $\bar{\mathcal{B}}_i(l_j)$  sont disjoints par construction. Dans ces conditions, on peut mettre la condition d'invariance sous la forme :

$$Inv(l_j, \overline{Caus}(l_j), b) = \bigvee_{i=1}^{\text{card}(\mathcal{B}(l_j))} [b \in \bar{\mathcal{B}}_i(l_j) \wedge \overline{Caus}(l_j) \in \bar{\mathcal{D}}_i(l_j)], \quad (3.71)$$

où  $\mathcal{D}(l_j) = \bigcup_{i=1}^{\text{card}(\mathcal{B}(l_j))} \bar{\mathcal{D}}_i(l_j)$ . Ainsi, la forme d'écriture introduite par l'équation (3.71) respecte les trois premières conditions imposées à la forme canonique. Pour en obtenir aussi la quatrième, il suffit de regrouper les conditions qui ont le même  $\bar{\mathcal{D}}_i(l_j)$  pour arriver à (3.69).

Pour montrer l'unicité, soit une autre partition de  $\mathcal{D}(l_j) \times \mathcal{B}(l_j)$ , pour  $\mathcal{B}(l_j) \neq \emptyset$ , qui respecte au moins les premières trois conditions de la définition 3.41, telle que :

$$Inv(l_j, \overline{Caus}(l_j), b) = \bigvee_{\eta=1}^{k'} [b \in \mathcal{B}'_{\eta}(l_j) \wedge \overline{Caus}(l_j) \in \mathcal{D}'_{\eta}(l_j)]. \quad (3.72)$$

Soit  $i \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $\mathcal{B}_i(l_j) \neq \mathcal{B}'_{\eta}(l_j), \forall \eta \in \{1, \dots, k'\}$  et soit  $\mathcal{I}_i \subseteq \{1, \dots, k'\}$  un ensemble d'indices au nombre minimum d'éléments tel que  $\mathcal{B}_i(l_j) \subseteq \bigcup_{\eta \in \mathcal{I}_i} \mathcal{B}'_{\eta}(l_j) = \hat{\mathcal{B}}_i(l_j)$ . Alors, on peut distinguer deux situations :

1. si  $card(\mathcal{I}_i) > 1 \Rightarrow \mathcal{D}'_{\eta}(l_j) = \mathcal{D}'_{\eta'}(l_j) = \mathcal{D}_i(l_j), \forall \eta, \eta' \in \mathcal{I}_i \Rightarrow (3.72)$  n'est pas en forme canonique ;
2. si  $card(\mathcal{I}_i) = 1 \Rightarrow \mathcal{B}_i(l_j) \subset \hat{\mathcal{B}}_i(l_j) \Rightarrow \exists \hat{\mathcal{I}}_i \subseteq \{1, \dots, k\}$  au nombre minimum d'éléments tel que  $\hat{\mathcal{B}}_i(l_j) \setminus \mathcal{B}_i(l_j) \subseteq \bigcup_{i' \in \hat{\mathcal{I}}_i} \mathcal{B}_{i'}(l_j) \Rightarrow \mathcal{D}_i(l_j) = \mathcal{D}_{i'}(l_j), \forall i' \in \hat{\mathcal{I}}_i$  ce qui est absurde par rapport au fait que (3.69) soit en forme canonique.

On peut donc conclure à l'unicité de la forme canonique.

Maintenant, on peut définir la frontière de l'invariant et la condition d'incompatibilité.

**Définition 3.44 (Frontière de l'invariant)** *Pour un mode  $l_j \in \mathcal{L}$  quelconque, dont la condition d'invariance est mise sous forme canonique, dans le cas où  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , la frontière de l'invariant est définie comme étant :*

$$Front(l_j) = Front_1(l_j) \vee Front_2(l_j) \vee \dots \vee Front_k(l_j), \quad (3.73)$$

où  $Front_i(l_j) = [b \in \mathcal{B}_i(l_j) \wedge \overline{Caus}(l_j) \in Fr(\mathcal{D}_i(l_j))], \forall i \in \{1, \dots, k\}$  et  $Fr(\mathcal{D})$  est la frontière finie du domaine  $\mathcal{D}$  ( $Fr(\mathbb{R}) = \emptyset$ ). Autrement, pour  $\mathcal{B} = \emptyset$ , la frontière est définie par :

$$Front(l_j) = [\overline{Caus}(l_j) \in Fr(\mathcal{D}(l_j))]. \quad (3.74)$$

**Définition 3.45 (Condition d'incompatibilité)** *Pour un modèle de type switch automaton tel que  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , on peut associer à tout mode  $l_j \in \mathcal{L}$  quelconque, dont la condition d'invariance est mise sous forme canonique, une condition d'incompatibilité qui est définie comme étant :*

$$Inc(l_j) = Inc_1(l_j) \vee Inc_2(l_j) \vee \dots \vee Inc_k(l_j) \vee [b \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}(l_j) \wedge \overline{Caus}(l_j) \in \mathcal{D}(l_j)], \quad (3.75)$$

où  $Inc_i(l_j) = [b \in \mathcal{B}_i(l_j) \wedge \overline{Caus}(l_j) \in \mathcal{D}(l_j) \setminus \mathcal{D}_i(l_j)], \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .

A titre d'exemple, dans le cas du transistor, présenté figure 3.9(d), on déduit que, pour le mode E, la frontière de l'invariant est représentée par  $Front(E) = [b = 1 \wedge w_f = 0]$  et la condition d'incompatibilité est représentée par  $Inc(E) = [b = 0 \wedge w_f \geq 0]$ , tandis que pour le mode F, on a  $Front(F) = [b \in \mathbb{B} \wedge w_e = 0]$  et  $Inc(F) = [b = 1 \wedge w_e < 0]$ . Sans entrer dans le même niveau de détail pour les autres interrupteurs présentés figure 3.9, on constate qu'il n'y a pas de frontière pour les deux modes de l'interrupteur idéal, ainsi que pour le mode F du thyristor, et qu'il n'y a pas non plus de condition d'incompatibilité pour la diode et le thyristor. En plus, pour tous les interrupteurs de la figure 3.9, tous les invariants sont clos, c'est-à-dire que, d'un point de vue ensemble, pour un mode  $l_j$  quelconque on a  $Front(l_j) \subseteq Inv(l_j)$ . D'ailleurs, par la suite, on considère que tous les modèles de type *switch automata* dont on discute ont des invariants clos.

D'un point de vue qualitatif, l'existence de la frontière de l'invariant pour un mode  $l_j \in \mathcal{L}$  donné atteste le fait que ce mode pourrait être quitté par l'unique évolution de la variable de puissance d'entrée. Dans ce cas, on dit qu'une *transition autonome* est disponible s'il existe une transition de secours qui a  $l_j$  comme mode source ( $\exists a \in \mathcal{A}_c$  t.q.  $a = (l_j, l_{j'})$ ). Dans le même registre, en ce qui concerne la condition d'incompatibilité, on peut dire que lorsque la variable de puissance d'entrée se trouve dans un certain domaine, si l'entrée booléenne change d'une façon particulière, alors, ce changement doit être accompagné par une évolution du mode de l'interrupteur. Dans ce cas, on dit qu'une *transition commandée* est disponible si  $\exists a \in \mathcal{A}_c$  t.q.  $a = (l_j, l_{j'})$ .

**Remarque 3.46** *Comme on l'a déjà discuté en début de la sous-section 3.3 sur les exemples, on peut avoir des transitions à la fois autonomes et douces, tout comme on peut avoir des transitions à la fois autonomes et dures. Tout de même, en vertu de la remarque 3.39, une particularité des interrupteurs présentés figure 3.9 est qu'une transition effectuée à partir de la frontière de l'invariant (là où elle existe) est nécessairement douce.*

### 3.3.2 Composition des interrupteurs

Une fois les modèles d'interrupteurs élémentaires définis, on peut obtenir de nouveaux modèles *switch automata* par des associations particulières de ces interrupteurs. Par la suite, on analyse deux type d'association : anti-parallèle et série, conformément à la figure 3.10.

**Proposition 3.47** *L'association anti-parallèle ou série de deux interrupteurs peut être remplacée par un seul interrupteur équivalent.*

**Démonstration** On commence par montrer l'équivalence dans le cas anti-parallèle.

Ainsi, conformément à la figure 3.10(a), cette association introduit les contraintes suivantes :

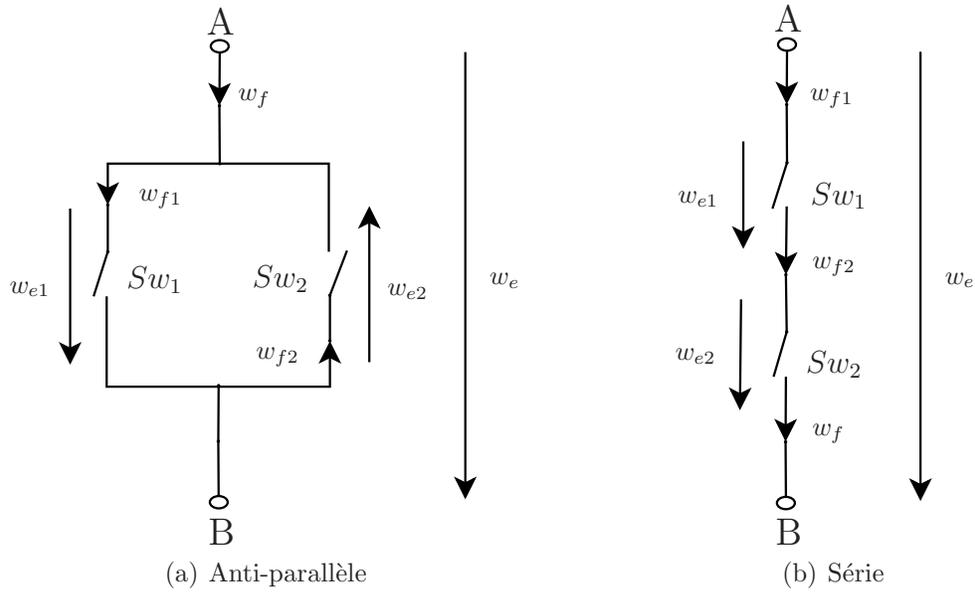


FIG. 3.10 – Deux types particuliers d’association d’interrupteurs : anti-parallèle et série, dans l’électricité

$$w_e = w_{e1} = -w_{e2} \quad (3.76a)$$

$$w_f = w_{f1} - w_{f2} \quad (3.76b)$$

De cette manière, quand un des interrupteurs est en causalité source d’effort,  $w_e := 0$ , et quand les deux interrupteurs sont en causalité source de flux, alors  $w_f := 0$ . De la même façon, conformément à la figure 3.10(b), l’association série introduit les contraintes suivantes :

$$w_e = w_{e1} + w_{e2} \quad (3.77a)$$

$$w_f = w_{f1} = w_{f2}, \quad (3.77b)$$

ce qui fait que  $w_f := 0$ , si un des interrupteurs est en source de flux et  $w_e := 0$ , si les deux interrupteurs sont en source d’effort. De plus, on ne peut pas avoir les deux interrupteurs en source d’effort, dans le cas de l’association anti-parallèle, ou les deux en source de flux, dans le cas de l’association série, parce que, d’un point de vue bond graph, ceci conduirait à un conflit causal, conformément à la figure 3.11.

**Remarque 3.48** *Dans le cas de l’association anti-parallèle, compte tenu de l’équation (3.76b), quand l’interrupteur équivalent est en causalité source d’effort, le flux  $w_f$  est à la fois déterminé par le flux de l’interrupteur  $Sw_1$ , lorsque celui-ci est en*

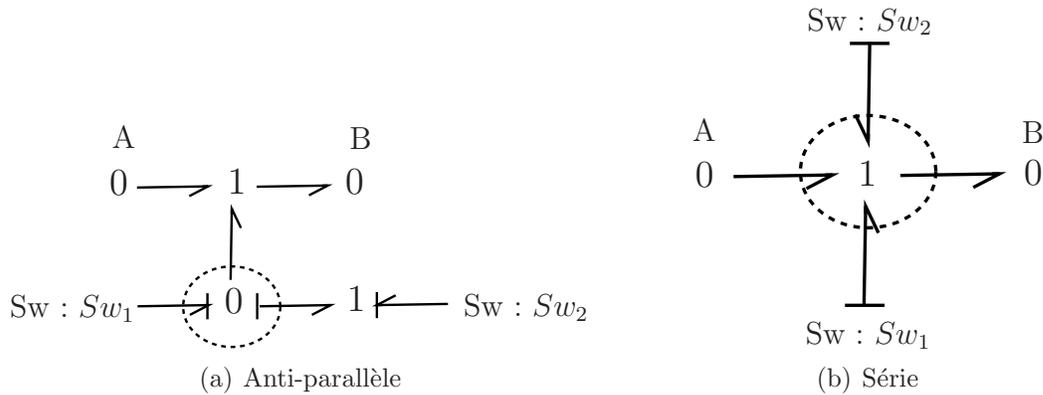
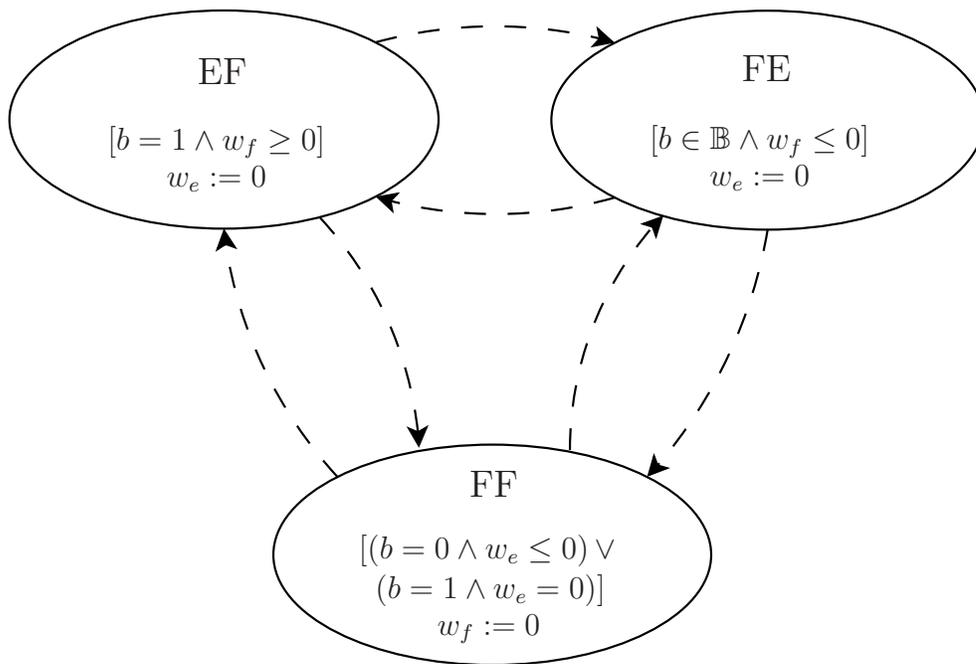


FIG. 3.11 – Conflits à l’assignation de la causalité pour les associations anti-parallèle et série des interrupteurs (les jonctions où les conflits se produisent étant mises en évidence par le contour pointillé), quand on essaie d’avoir les deux interrupteurs en source d’effort, dans le cas anti-parallèle ou les deux interrupteurs en source de flux, dans le cas série

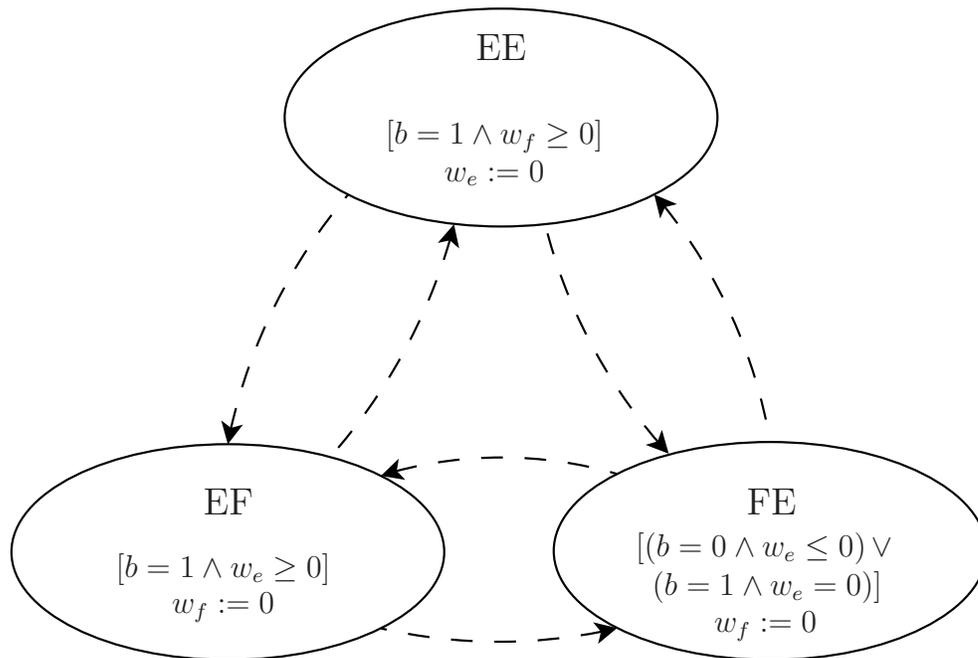
source d’effort, et à la fois par le flux de l’interrupteur  $Sw_2$ , lorsque celui-ci est en source d’effort. De même, dans le cas de l’association série, compte tenu de (3.77a), quand l’interrupteur équivalent est en causalité source de flux, l’effort  $w_e$  est à la fois déterminé par l’effort de l’interrupteur  $Sw_1$ , lorsque celui-ci est en source de flux, et à la fois par l’effort de l’interrupteur  $Sw_2$ , lorsque celui-ci est en source de flux.

Dans ce contexte, on peut définir les associations anti-parallèle et série entre un transistor et une diode. Dans le premier cas, on peut retrouver dans un premier temps, un modèle équivalent à trois modes, conformément à la figure 3.12(a), où les modes à causalité source d’effort, EF et, respectivement, FE, correspondent au transistor en mode E et à la diode en mode F et, respectivement, au transistor en mode F et la diode en mode E. Ainsi, les conditions d’invariance associées à chaque mode sont obtenues par la conjonction des conditions d’invariance associées à chaque mode correspondant dans les modèles du transistor et de la diode, de la façon suivante :

- l’entrée booléenne associée au transistor devient l’entrée booléenne de l’interrupteur équivalent et les conditions qui portaient sur cette entrée dans le modèle du transistor se retrouvent en tant que telles dans le nouveau modèle ;
- lorsque la causalité de l’interrupteur équivalent est en source d’effort :
  - pourvu que l’origine de l’espace des variables d’effort/flux soit contenue par les régions définies par les conditions d’invariance, compte tenu de (3.76a), les conditions d’invariance associées aux variables d’effort sont implicitement respectées ;
  - en vertu de la remarque 3.48, les conditions d’invariance associées aux modes E, qui portaient dans les modèles initiaux sur les variables de flux associées à chaque interrupteur, peuvent être exprimées en fonction de la variable de flux de l’interrupteur équivalent ;



(a) Association anti-parallèle



(b) Association série

FIG. 3.12 – Modèles *switch automata* à trois modes des associations anti-parallèle et série du transistor et de la diode

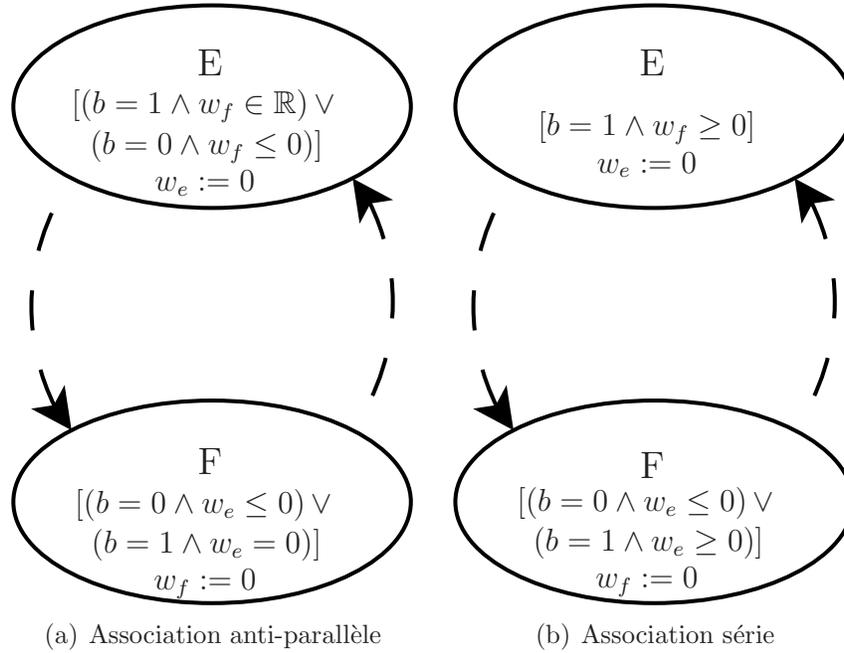


FIG. 3.13 – Modèles *switch automata* à deux modes des associations anti-parallèle et série du transistor et de la diode

- lorsque la causalité de l'interrupteur équivalent est en source de flux, toujours à partir de (3.76a), on arrive à exprimer les conditions d'invariance associées aux modes F, qui portaient dans les modèles initiaux sur les variables d'effort associées à chaque interrupteur, en fonction de la variable d'effort de l'interrupteur équivalent.

D'ailleurs, on peut simplifier ce modèle en faisant fusionner les modes EF et FE dans un unique mode E, où l'invariant de ce nouveau mode est la disjonction des conditions d'invariance de EF et de FE, conformément à la figure 3.13(a). De la même façon, on obtient dans le cas de l'association série, dans un premier temps un modèle à trois modes, conformément à la figure 3.12(b), où les modes EF et FE sont à causalité source de flux, tandis que le mode EE est à causalité source d'effort. Dans un deuxième temps, on obtient un modèle réduit à deux modes, conformément à la figure 3.13(b), où l'invariant du nouveau mode F est obtenu par la disjonction des conditions d'invariance associées aux modes EF et FE du modèle initial, à trois modes.

Le fait qu'on puisse obtenir des modèles équivalents à deux modes dans les cas des associations anti-parallèle et série du transistor et de la diode est possible parce que, dans les deux cas, les transitions entre les deux modes ayant la même causalité sont des transitions de secours et elles existent dans les deux sens. Ceci n'est pas toujours le cas, un contre-exemple étant fourni par l'association anti-parallèle du thyristor et de la diode. Le modèle de cette association est présenté figure 3.14 et, comme on peut

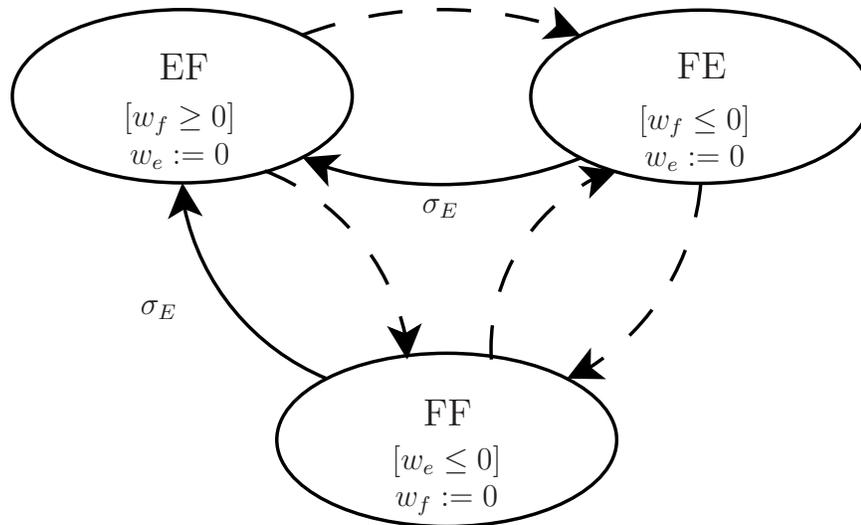


FIG. 3.14 – Modèle *switch automaton* de l'association anti-parallèle du thyristor et de la diode

le constater, le passage entre le mode FE et le mode EF peut se faire uniquement par une transition gardée.

**Remarque 3.49** *Par rapport à la transition gardée du modèle du thyristor, les transitions gardées du modèle donné figure 3.14 ne dépendent plus de la variable d'effort associée à l'interrupteur. Ceci est dû au fait que la condition présente dans le modèle du thyristor est implicitement respectée : soit par l'intermédiaire de la condition d'invariance du mode source, dans le cas de la transition de FF à EF, soit par l'intermédiaire de la contrainte de causalité associée au mode source, comme c'est le cas de la transition de FE à EF.*

**Remarque 3.50** *Il est nécessaire de faire quelques précisions d'ordre « pratique » par rapport aux associations anti-parallèle et série d'interrupteurs :*

1. *L'intérêt de l'association anti-parallèle du transistor et de la diode, ainsi que celle du thyristor et de la diode, est d'obtenir un nouvel interrupteur qui est bidirectionnel en courant. Toutefois, dans le cas de l'association du thyristor et de la diode, on perd la bidirectionnalité initiale en tension du thyristor.*
2. *L'intérêt de l'association série du transistor et de la diode est d'obtenir un nouveau interrupteur qui est bidirectionnel en tension. De ce fait, il n'y a pas de raison pour définir un nouvel interrupteur obtenu par la mise en série du thyristor et de la diode.*
3. *Dans bon nombre d'applications, l'utilisation du transistor est telle que son ouverture doit se faire par une transition autonome douce. Ceci peut se réaliser uniquement par la frontière du mode E ( $[b = 1 \wedge w_f = 0]$ ), ce qui implique qu'à l'activation du mode F, la condition d'invariance  $[b = 1 \wedge w_e = 0]$  doit être respectée dans un intervalle non-nul de temps. Ainsi, la présence de la diode, appelée aussi dans ce cas diode de « roue libre », en association anti-parallèle avec*

le transistor assure par sa fermeture, dans le cas de l'ouverture douce de ce dernier, la chute de tension nulle nécessaire. En plus, dans le cas de l'interrupteur équivalent, les transitions autonome et commandée disponibles à partir du mode  $E$  vers le mode  $F$  se font avec  $b = 0$  ( $Front(E) = [b = 0 \wedge w_f = 0]$  et  $Inc(E) = [b = 0 \wedge w_f > 0]$ ). De ce fait, la possibilité d'avoir la condition  $[b = 1 \wedge w_e = 0]$  respectée dans le mode  $F$  est très mince : il faudrait une évolution dans ce sens pendant la période d'activité du mode  $F$ , ce qui, normalement, devrait pouvoir être évité. Un exemple d'application utilisant cet interrupteur équivalent sera présentée dans le chapitre 5.

### 3.4 Modèle automate hybride

Comme on l'a déjà énoncé, le nouveau modèle d'interrupteur est obtenu par l'enrichissement du modèle bond graph d'interrupteur, ce qui fait que le modèle complet du système est obtenu par la réunion du modèle bond graph et des modèles de ses interrupteurs. Compte tenu du fait que le modèle proposé d'interrupteur est hybride, dans le sens où il y a des variables discrètes, comme le mode de l'interrupteur, et continues, comme les variables de puissance associées à l'interrupteur, et que ces variables interagissent, on peut envisager que le résultat de la composition puisse être représenté par un modèle de type automate hybride. Par la suite, on identifie un par un les attributs de cette représentation de type automate hybride associée à un système physique linéaire avec  $n_w$  interrupteurs, en commençant par l'état hybride pour finir par l'ensemble des transitions. Toutefois, on fait cette analyse sous l'hypothèse de *fonctionnement normal*, alors qu'une discussion en ce qui concerne la relaxation et/ou le renforcement de cette hypothèse est présentée en fin de section.

**Remarque 3.51** *Par la suite, on dénote par un indice supérieur tout ce qui a à faire avec le modèle d'un interrupteur : par exemple,  $\mathcal{L}^j$  représente l'ensemble des modes de l'interrupteur  $Sw_j$  et  $l_i^j$  représente le mode  $l_i$  du même interrupteur  $Sw_j$ .*

#### 3.4.1 Choix de l'état hybride

Étant donné que les seules composantes à dynamique discrète sont les interrupteurs, on choisit de représenter l'état discret ou mode du système par  $l = (l^1, l^2, \dots, l^{n_w})$ , où  $l^j, \forall j \in \{1, \dots, n_w\}$  est la variable discrète associée à l'interrupteur  $j$ . On remarque ici qu'une distinction doit être faite entre le mode du système et la configuration d'interrupteurs : la dernière représente uniquement l'état causal des interrupteurs et pour que les deux soient identiques il faut avoir  $card(\mathcal{L}^j) = 2, \forall j \in \{1, \dots, n_w\}$ . Soit  $\bar{\mathcal{C}}$  l'ensemble de toutes les configurations possibles ( $card(\bar{\mathcal{C}}) = 2^{n_w}$ ), et, ainsi, on définit, de façon similaire au modèle *switch automaton*, une relation  $Caus : \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^2 \times \dots \times \mathcal{L}^{n_w} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  entre tous les modes possibles du système et les configurations d'interrupteurs :

$$Caus(l) \stackrel{def}{=} (Caus^1(l^1), Caus^2(l^2), \dots, Caus^{n_w}(l^{n_w})) \quad (3.78)$$

Cependant, comme on l'a montré par le résultat de la proposition 3.3, il y a des configurations d'interrupteurs qui ne respectent pas les lois de Kirchhoff et, donc, elles ne sont pas permises. Si on note par  $\mathcal{C}$  l'ensemble des configurations d'interrupteurs qui sont permises, alors on parvient à définir l'ensemble des modes (permis) du système par :

$$\mathcal{L} = \{l \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^2 \times \dots \times \mathcal{L}^{n_w} \mid Caus(l) \in \mathcal{C}\} \quad (3.79)$$

Pour la suite, soit  $\mathcal{I} = \{1, \dots, card(\mathcal{L})\}$  et  $\hat{\mathcal{I}} = \{1, \dots, card(\mathcal{C})\}$  les deux ensembles d'indices définis par rapport à  $\mathcal{L}$  et à  $\mathcal{C}$ . En plus, on définit la partition de  $\mathcal{I}$  par rapport à  $\hat{\mathcal{I}} : \mathcal{I} = \bigcup_{\hat{i} \in \hat{\mathcal{I}}} \mathcal{I}_{\hat{i}}$  tel que  $\forall i, j \in \mathcal{I}_{\hat{i}}, Caus(l_i) = Caus(l_j)$ . Ainsi, par un

raccourci de notation, l'utilisation de l'indice  $\hat{i}$  fait référence à tous les modes  $l_i$  tels que  $i \in \mathcal{I}_{\hat{i}}$ .

En ce qui concerne le choix de l'état continu, on a discuté en sous-section 3.2.3 qu'à chaque configuration on associe un vecteur d'état implicite et un vecteur d'état explicite, pour un système donné, les deux étant, *a priori*, différents d'une configuration à l'autre. Cependant, si le vecteur d'état explicite change de composition et de dimension, conformément à l'équation (3.9), les vecteurs d'état implicites ont les mêmes composantes, seul leur ordonnancement dans le cadre de chaque vecteur change. Ainsi, on choisit comme vecteur d'état continu (global) le vecteur d'état implicite dans la configuration de référence :  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ir} & \mathbf{x}_{dr} \end{pmatrix}^T$ .

**Exemple** Pour le convertisseur « boost », compte tenu du fait que les interrupteurs utilisés sont à deux modes, on a une équivalence entre les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{L}$ . Comme on l'a déjà déterminé, toutes les configurations du système sont permises, donc  $card(\mathcal{L}) = 4$ . Finalement, le vecteur d'état continu est donné par le vecteur d'état implicite dans le mode (la configuration) de référence, c'est-à-dire qu'on a  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_2 & q_6 \end{pmatrix}^T$ .

### 3.4.2 Les entrées du modèle

On peut identifier deux types d'entrées pour les systèmes physiques linéaires avec des interrupteurs : des entrées à temps continu, représentées par le vecteur des entrées de puissance,  $\mathbf{u}$ , et des entrées logiques, représentées par la totalité des entrées booléennes et des entrées événementielles des modèles individuels de chaque interrupteur. Ainsi, si on considère  $n_b \leq n_w$  tel que  $\mathcal{B}^i = \emptyset, \forall i > n_b$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \mathcal{B}^1 \times \mathcal{B}^2 \times \dots \times \mathcal{B}^{n_b} \\ \Sigma &= \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots \cup \Sigma^{n_w} \end{aligned} \quad (3.80)$$

et on dénote par  $b = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 & \dots & b^{n_b} \end{pmatrix}^T$  l'entrée booléenne du système. En ce qui concerne le vecteur des entrées de puissance,  $\mathbf{u}$ , par l'hypothèse de *fonctionnement normal*, celui-ci est continu et à différentielle continue et, en plus, on considère que  $\dot{\mathbf{u}}$  est connue *a priori*.

### 3.4.3 L'ensemble d'activités

Dans un premier temps, il est important de remarquer, par la mise en équation opérée en sous-section 3.2.3, qu'on peut associer à chaque configuration deux équations dynamiques équivalentes : l'une implicite et l'autre explicite. Ainsi, pour une configuration  $c_i \in \mathcal{C}$ , compte tenu du fait que la relation (3.9) est inversible :

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} P_{1i}^T & \mathbf{0} \\ P_{2i}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (3.81)$$

on peut obtenir une dynamique implicite à partir de l'équation (3.17) par rapport à la variable d'état  $\mathbf{x}$ . Cependant, pour bon nombre d'applications, telles que, par exemple, la simulation, il est plus utile que la dynamique soit exprimée par des équations explicites. Pour y parvenir, il faut donc exprimer le vecteur d'état explicite associé à la configuration donnée,  $\mathbf{x}_{1i}$ , par rapport au vecteur d'état  $\mathbf{x}$  et vice versa. Pour la relation directe, on emploie le changement inverse de variable défini par (3.25b), pour obtenir  $\mathbf{x}_{1i}$  par rapport à  $\mathbf{x}_i$ , et, ensuite, la relation (3.81) pour obtenir la relation qui définit  $\mathbf{x}_{1i}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{x}_{1i} = K_{1i} \mathbf{x}, \quad (3.82)$$

où :

$$K_{1i} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -S_{12i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1i}^T & \mathbf{0} \\ P_{2i}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Pour la relation inverse, on emploie le changement direct de variable (3.21a), pour obtenir, compte tenu aussi de (3.26b),  $\mathbf{x}_i$  par rapport à  $\mathbf{x}_{1i}$  et à  $\mathbf{u}$ , et, ensuite la relation (3.9) pour obtenir la relation qui définit  $\mathbf{x}$  par rapport à  $\mathbf{x}_{1i}$  et à  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{x} = K_{3i} \mathbf{x}_{1i} + K_{2i} \mathbf{u}, \quad (3.84)$$

où :

$$K_{2i} = \begin{pmatrix} P_{1i} & P_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{12i} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_i S_{25i} \quad (3.85a)$$

$$K_{3i} = \begin{pmatrix} P_{1i} & P_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} - S_{12i} R_i (S_{12i}^T F_{ii} + F_i^T) \\ -R_i (S_{12i}^T F_{ii} + F_i^T) \end{pmatrix} \quad (3.85b)$$

On peut maintenant, compte tenu des relations (3.82), (3.26a) et (3.84), exprimer l'activité associée à un mode quelconque  $l_i \in \mathcal{L}$  :

$$Act_i : \begin{cases} \mathbf{x}_{1i} = K_{1i} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}}_{1i} = A_i \mathbf{x}_{1i} + E_i \mathbf{u} \\ \mathbf{x} = K_{3i} \mathbf{x}_{1i} + K_{2i} \mathbf{u} \end{cases} \quad (3.86)$$

**Remarque 3.52** *Par la nature des changements de variable faits, l'état continu  $\mathbf{x}$  respecte, de façon implicite, à tout moment la contrainte algébrique implicite associée à la configuration donnée. Effectivement, si on remplace  $\mathbf{x}_{1\hat{i}}$  en utilisant (3.82) en (3.84), on obtient, par une mise en forme convenable, la relation suivante :*

$$\begin{pmatrix} P_{1\hat{i}} & P_{2\hat{i}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{12\hat{i}} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} R_{\hat{i}} \left[ \begin{pmatrix} S_{12\hat{i}}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{F}_{\hat{i}} \begin{pmatrix} P_{1\hat{i}}^T & \mathbf{0} \\ P_{2\hat{i}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{x} - S_{25\hat{i}} \mathbf{u} \right] = \mathbf{0}, \quad (3.87)$$

qui, sachant que la matrice  $R_{\hat{i}}$  est définie positive, est respectée si, et seulement si, la condition suivante est à son tour respectée :

$$\begin{pmatrix} S_{12\hat{i}}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{F}_{\hat{i}} \begin{pmatrix} P_{1\hat{i}}^T & \mathbf{0} \\ P_{2\hat{i}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{x} - S_{25\hat{i}} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.88)$$

Or, cette dernière relation est, compte tenu de (3.81), précisément la contrainte algébrique implicite associée à la configuration donnée, (3.18).

**Exemple** Dans un premier temps, compte tenu qu'il n'y a pas d'élément à causalité dérivée dans les modes (F,E) et (E,F), la matrice  $K_2$  associée est vide et les matrices  $K_1$  et  $K_3$  sont égales à la matrice identité. A titre d'exemple, on donne ces matrices pour le mode (F,F) :  $K_{1FF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $K_{2FF} = 0$  et  $K_{3FF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ , mode pour lequel, conformément à (3.27), on a déjà calculé les matrices nécessaires pour l'équation dynamique explicite.

### 3.4.4 L'ensemble des invariants

La condition d'invariance associée à un mode du système représente un ensemble de contraintes qu'on impose à l'état continu et aux entrées du système. De ce fait, on peut distinguer deux sources de contraintes : les modèles des interrupteurs et la topologie du système. Ainsi, pour un mode  $l_j \in \mathcal{L}$ , on considère :

$$Inv(l_j) = Inv_{Sw}(l_j) \wedge Inv_T(l_j) \quad (3.89)$$

Dans un premier temps, on commence par expliciter le premier terme de (3.89). Ainsi, lors de la définition du modèle *switch automata* pour les interrupteurs, on a associé une condition d'invariance à chaque mode du modèle de l'interrupteur. Donc, pour un mode quelconque du système,  $l_j \in \mathcal{L}$ , la contrainte due aux interrupteurs est représentée par la conjonction des conditions d'invariance associée aux modes correspondants de chaque interrupteur :

$$Inv_{Sw}(l_j) = Inv^1(l_j^1) \wedge Inv^2(l_j^2) \wedge \dots \wedge Inv^{n_w}(l_j^{n_w}), \quad (3.90)$$

où, par souci de brièveté, on a omis les arguments liés aux entrées des modèles des interrupteurs. Si on considère que toutes les conditions d'invariance sont en forme canonique, conformément à la définition 3.41, alors la relation (3.90) peut se développer par la suite sous la forme :

$$Inv_{Sw}(l_j) = \bigwedge_{i=1}^{n_b} \left\{ \bigvee_{i'=1}^{k_j^i} \left[ b^i \in \mathcal{B}_{i'}^i(l_j^i) \wedge \overline{Caus}^i(l_j^i) \in \mathcal{D}_{i'}^i(l_j^i) \right] \right\} \wedge \bigwedge_{\bar{i}=n_b+1}^{n_w} \left[ \overline{Caus}^{\bar{i}}(l_j^{\bar{i}}) \in \mathcal{D}^{\bar{i}}(l_j^{\bar{i}}) \right] \quad (3.91)$$

Ensuite, par le regroupement convenable des termes de la relation précédente et compte tenu du fait que  $T_{o\hat{j}} = \left( \overline{Caus}^1(l_j^1) \dots \overline{Caus}^{n_w}(l_j^{n_w}) \right)^T$ , on obtient :

$$Inv_{Sw}(l_j) = \bigvee_{i_1=1}^{k_j^1} \left\{ \dots \bigvee_{i_{n_b}=1}^{k_j^{n_b}} \left[ b \in \mathcal{B}_{i_1}^1(l_j^1) \times \dots \times \mathcal{B}_{i_{n_b}}^{n_b}(l_j^{n_b}) \wedge T_{o\hat{j}} \in \mathcal{D}_{i_1}^1(l_j^1) \times \dots \times \mathcal{D}_{i_{n_b}}^{n_b}(l_j^{n_b}) \times \mathcal{D}^{n_b+1}(l_j^{n_b+1}) \times \dots \times \mathcal{D}^{n_w}(l_j^{n_w}) \right] \dots \right\} \quad (3.92)$$

$$= \bigvee_{i=1}^{k_j} \left[ b \in \mathcal{B}_i(l_j) \wedge T_{o\hat{j}} \in \mathcal{D}_i(l_j) \right], k_j = \prod_{i'=1}^{n_b} k_j^{i'}$$

Par la relation (3.92), on est arrivé à exprimer la contrainte due aux interrupteurs associée à un mode  $l_j$  par rapport au vecteur des entrées booléennes et au vecteur des variables de puissance associées à la configuration correspondante. Cependant, pour que cette contrainte soit utilisable dans le contexte automate hybride, il est nécessaire de remplacer la partie exprimée par rapport à  $T_{o\hat{j}}$  par des conditions équivalentes, mais exprimées par rapport au vecteur d'état  $\mathbf{x}$  et aux entrées du système. Ainsi, dans un premier temps, compte tenu du fait qu'on a assumé l'hypothèse de *fonctionnement normal*, il est important de remarquer que, conformément à la proposition 3.30, strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité du mode  $l_j$ ,  $T_{o\hat{j}}$  est continu et, donc,  $\tau_{o\hat{j}}^k \equiv \mathbf{0}, \forall t_k$ . Ensuite, en utilisant (3.60a) et (3.82), on détermine la partie continue de  $T_{o\hat{j}}$  :

$$\bar{T}_{o\hat{j}} = A_{r\hat{j}}\mathbf{x} + A_{u\hat{j}}\mathbf{u} + A_{p\hat{j}}\hat{\mathbf{u}}, \quad (3.93)$$

où on a utilisé la notation  $A_{r\hat{j}} = A_{1\hat{j}}K_{1\hat{j}}$ . Maintenant, on peut récrire la relation (3.92) sous une forme explicite par rapport à l'état continu et aux entrées du système :

$$Inv_{Sw}(l_j) = \bigvee_{i=1}^{k_j} \left[ b \in \mathcal{B}_i(l_j) \wedge (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathcal{D}_i^*(l_j) \right] \quad (3.94)$$

**Remarque 3.53** *Même si  $\tau_{o_j}^k \equiv \mathbf{0}$  strictement à l'intérieur de l'intervalle d'activité de  $l_j$ , il n'est pas exclu que  $\tau_{o_j}^k \neq \mathbf{0}$  si  $t_k$  correspond au moment de l'activation du mode. Cependant, comme le montre la relation (3.49),  $\tau_{o_j}^k$  dépend de l'état continu implicite avant la commutation, donc l'analyse du respect de la part de  $\tau_{o_j}^k$  des contraintes d'invariance doit se faire avant la commutation, conformément à la discussion de la sous-section suivante.*

En ce qui concerne les contraintes imposées par la topologie du système, on a constaté qu'à chaque configuration on associe une contrainte algébrique implicite. Conformément à (3.88), cette contrainte peut s'exprimer par rapport aux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{u}$ , ce qui fait qu'on peut la mettre sous la forme :

$$Inv_T(l_j) = [(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \in \mathcal{K}(l_j)] \quad (3.95)$$

Finalement, compte tenu de (3.89), (3.94) et (3.95), la condition d'invariance associée à un mode  $l_j$  devient :

$$Inv(l_j) = \bigvee_{i=1}^{k_j} [b \in \mathcal{B}_i(l_j) \wedge (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \in \mathcal{D}_i^*(l_j) \cap \mathcal{K}(l_j)] \quad (3.96)$$

**Remarque 3.54** *De façon similaire au modèle switch automaton, par rapport à la région d'invariance associée au mode  $l_j$ , on définit les ensembles  $\mathcal{B}(l_j)$  et  $\mathcal{D}^*(l_j)$  :*

$$\mathcal{B}(l_j) = \mathcal{B}_1(l_j) \cup \dots \cup \mathcal{B}_{k_j}(l_j) \quad (3.97a)$$

$$\mathcal{D}^*(l_j) = \mathcal{D}_1^*(l_j) \cup \dots \cup \mathcal{D}_{k_j}^*(l_j), \quad (3.97b)$$

tels que  $Inv(l_j) \subseteq \mathcal{B}(l_j) \times (\mathcal{D}^*(l_j) \cap \mathcal{K}(l_j))$ , à l'exception du fait que la partition (3.97a) n'est plus formée par des ensembles disjoints.

**Exemple** Pour tous les modes, on obtient la matrice  $A_r$  correspondante à partir des relations (3.61) – (3.64) :

$$A_{rFE} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{rEF} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \quad (3.98a)$$

$$A_{rFF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \quad A_{rEE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.98b)$$

Sachant que pour les modes (F,E) et (E,F) il n'y a pas de contrainte algébrique, il résulte que la région  $\mathcal{K}$  correspondante occupe tous l'espace  $\mathbb{R}^2$ . En plus, étant donné que seulement pour la diode on a une relation d'invariance par rapport à

la variable de puissance d'entrée, l'interrupteur n'introduisant aucune contrainte à ce niveau, on obtient pour ces deux modes les relations d'invariance suivantes :

$$Inv(F, E) = [b = 0 \wedge (p_2 \geq 0, q_6 \in \mathbb{R})] \quad (3.99a)$$

$$Inv(E, F) = [b = 1 \wedge (p_2 \in \mathbb{R}, q_6 \geq 0)] \quad (3.99b)$$

En ce qui concerne les modes (F,F) et (E,E), il faut rajouter aussi les contraintes algébriques associées, ce qui fait qu'on obtient :

$$Inv(F, F) = [b = 0 \wedge (p_2 = 0, q_6 \geq E \cdot C)] \quad (3.100a)$$

$$Inv(E, E) = [b = 1 \wedge (p_2 \in \mathbb{R}, q_6 = 0)] \quad (3.100b)$$

### 3.4.5 L'ensemble des transitions

L'ensemble des transitions désigne la dynamique discrète de l'automate hybride. Il est donc normal qu'on cherche à identifier cette dynamique par rapport à la dynamique discrète des interrupteurs. De ce fait, compte tenu qu'un élément de l'ensemble des transitions,  $a \in \mathcal{A}$ , a la forme suivante :  $a = (l_j, Guard_{jj'}, \Sigma_{jj'}, Jump_{jj'}, l_{j'})$ , on procède par la suite à l'identification un par un des éléments le définissant.

Toutefois, avant de se lancer dans la détermination proprement dite de l'ensemble des transitions, compte tenu de la généralité du modèle *switch automaton* pour les interrupteurs, il est nécessaire de faire quelques précisions supplémentaires par rapport à la dynamique de ces dernières dans le cadre de la composition avec le reste des composantes. Ainsi, si pour un interrupteur, dans l'état  $l_j^i$ , il existe une transition de secours  $a = (l_j^i, l_{j'}^i)$  et que, d'autre part, l'activité du système est telle que cet interrupteur puisse rester dans le même état, l'automate peut évoluer selon deux trajectoires : soit en continuant dans le même mode  $l_j$  soit en commutant dans dans le mode  $l_{j'}$ , pourvu qu'après le changement de mode toutes les contraintes soient respectées. Donc, afin de bien définir cette dynamique discrète par rapport à ce qu'on peut juger comme étant un comportement physique du système global, on introduit une hypothèse supplémentaire à la commutation des interrupteurs.

**Hypothèse 3.55 (Interrupteurs inertiels)** *Un interrupteur ne franchit une transition de secours qu'aux instants où il ne peut plus faire autrement. C'est-à-dire qu'à chaque instant, s'il existe une trajectoire qui lui permet de rester dans le même état, il ne franchit pas de transition de secours.*

Cette hypothèse qui est utilisée dans la composition peut être interprété comme le fait qu'à chaque instant l'état d'un *switch automaton* est susceptible d'évoluer selon trois types de transitions : une transition discrète synchronisée, une transition continue et une transition discrète de secours et qu'il existe une relation de priorité entre ces trois types de transition, les transitions de secours étant les moins prioritaires.

**Hypothèse 3.56 (Priorité à la transition)** *Lorsque plusieurs transitions de secours peuvent être franchies, le switch automaton privilégie celles qui ne modifient pas sa causalité.*

Le premier pas à effectuer dans l'identification de l'ensemble des transitions est de savoir si entre deux modes quelconques,  $l_j, l_{j'} \in \mathcal{L}$ , où  $l_j$  est le possible mode source et  $l_{j'}$  est le possible mode cible, il existe la possibilité d'avoir une transition. Ainsi, si on considère que  $l_j = (l_j^1, \dots, l_j^{n_w})$  et  $l_{j'} = (l_{j'}^1, \dots, l_{j'}^{n_w})$ , alors on peut dire qu'il existe la possibilité d'avoir une transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  si dans le modèle de tout automate  $Sw_i$  tel que  $l_j^i \neq l_{j'}^i$ , il existe une transition qui a comme mode source  $l_j^i$  et comme mode cible  $l_{j'}^i$ . De plus, pour la suite, on définit les ensembles d'indices  $\mathcal{J}_c$  tel que  $\forall i \in \mathcal{J}_c, \exists a^i = (l_j^i, l_{j'}^i) \in \mathcal{A}_c^i$  avec  $\mathcal{B}^i \neq \emptyset$  (donc une transition commandée peut être disponible),  $\mathcal{J}_a$  tel que  $\forall i \in \mathcal{J}_c, \exists a^i = (l_j^i, l_{j'}^i) \in \mathcal{A}_c^i$  avec  $\mathcal{B} = \emptyset$  (donc uniquement une transition autonome peut être disponible),  $\mathcal{J}_s$  tel que  $\forall i \in \mathcal{J}_s, \exists a^i = (l_j^i, Guard_{jj'}^i, \sigma^i, l_{j'}^i) \in \mathcal{A}_s^i$  et  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_c \cup \mathcal{J}_a \cup \mathcal{J}_s$ .

Une fois prise la décision qu'il est possible d'avoir une transition entre le mode  $l_j$  et le mode  $l_{j'}$ , elle devient vraiment faisable et, donc, peut être incluse dans l'ensemble des transitions du système, si on peut y associer une condition de garde compatible avec les modèles d'interrupteurs du système et qui n'est pas toujours fausse. En plus, en parallèle avec la détermination de la condition de garde, on cherche à déterminer aussi les autres attributs de la transition. Pour montrer la faisabilité de la transition, on commence par discuter quelles sont les causes qui peuvent pousser le système à quitter le mode  $l_j$  ou, autrement dit, quelles sont les causes qui peuvent faire qu'un ou plusieurs interrupteurs change de mode. Toutefois, avant tout, il est important de constater que par l'hypothèse de *fonctionnement normal*, conformément au résultat de la proposition 3.30, le vecteur  $T_{o\hat{j}}$  est continu entre deux commutations. Ainsi, à ce point de la discussion, d'un point de vue causal, on peut identifier deux situations distinctes : la première représente le cas où  $Caus(l_j) = Caus(l_{j'})$  et la seconde représente le cas où  $Caus(l_j) \neq Caus(l_{j'})$ .

### 3.4.5.1 Transition entre deux modes à même causalité

Si on se trouve dans la situation où les causalités sont égales, donc  $j, j' \in \mathcal{I}_{\hat{j}}$ , alors, compte tenu du fait que le moment  $t$  où il y aurait une éventuelle transition entre le mode  $l_j$  et le mode  $l_{j'}$  se trouve forcément entre deux commutations, alors on a  $T_{o\hat{j}}$  continu à  $t$ . Si en plus, on tient compte aussi de l'hypothèse sur *les interrupteurs inertiels*, alors il résulte que, pour avoir une transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  au moment  $t$ , les conditions suivantes doivent être respectées :

1. pour chaque interrupteur  $Sw_i, \forall i \in \mathcal{J}_s$ , une transition synchronisée est disponible,  $a^i = (l_j^i, Guard_{jj'}^i, \sigma^i, l_{j'}^i)$  ;
2. pour chaque interrupteur  $Sw_i, \forall i \in \mathcal{J}_c \cup \mathcal{J}_a$ , il est impératif de quitter le mode courant  $l_j^i$ , lorsque l'évolution de  $\overline{Caus}^i(l_j^i)$ , sous l'action de la dynamique  $Act_{\hat{j}}$ , est telle que celle-ci se trouve sur la frontière,  $(b^i(t), \overline{Caus}^i(l_j^i)(t)) \in$

$Front^i(l_j^i)$ , et il existe une durée  $\Delta t > 0$  tel que  $(b^i(t + \varepsilon), \overline{Caus}^i(l_j^i)(t + \varepsilon)) \notin Inv^i(l_j^i), \forall \varepsilon \in (0, \Delta t)$ ;

3. pour chaque interrupteur  $Sw_i, \forall i \in \mathcal{J}_c$ , il est impératif de quitter le mode courant  $l_j^i$ , lorsque l'évolution de  $b^i$  est telle que, si la trajectoire de l'automate continuerait en gardant le mode  $l_j^i$  actif, alors  $(b^i(t), \overline{Caus}^i(l_j^i)(t)) \in Inc^i(l_j^i)$  et, donc,  $(b^i(t), \overline{Caus}^i(l_j^i)(t)) \notin Inv^i(l_j^i)$ .

Ces conditions, quand un interrupteur peut ou doit changer le mode, sont appelées par la suite les conditions limites par rapport au mode donné. Dans un premier temps, on peut exprimer la contribution de chacune de ces conditions à la condition de garde  $Guard_{jj'}$ , pour un interrupteur  $Sw_i, \forall i \in \mathcal{J}$  donné, par rapport aux entrées locales de chaque modèle *switch automata* associé. En ce qui concerne la première condition, cette contribution est représentée simplement par l'expression :

$$Guard_{jj'}^i = [\overline{Caus}^i(l_j^i) \in \mathcal{G}^i(l_j^i, l_{j'}^i)], \forall i \in \mathcal{J}_s \quad (3.101)$$

Pour les interrupteurs  $Sw_i$  tels que  $i \in \mathcal{J}_c$ , les automates peuvent changer de mode selon les conditions limites 2 et 3. Donc, à partir de (3.73) et (3.75), on trouve :

$$\begin{aligned} Guard_{jj'}^i &= Front^i(l_j^i) \vee Inc^i(l_j^i) \\ &= \bigvee_{i'=1}^{k^i} \left[ b^i \in \mathcal{B}_{i'}^i(l_j^i) \wedge \overline{Caus}^i(l_j^i) \in Fr(\mathcal{D}_{i'}^i(l_j^i)) \cup \mathcal{D}^i(l_j^i) \setminus \mathcal{D}_{i'}^i(l_j^i) \right] \\ &\quad \vee \left[ b^i \in \mathcal{B}^i \setminus \mathcal{B}^i(l_j^i) \wedge \overline{Caus}^i(l_j^i) \in \mathcal{D}(l_j^i) \right], \forall i \in \mathcal{J}_c \end{aligned} \quad (3.102)$$

Enfin, pour les interrupteurs  $Sw_i$  tels que  $i \in \mathcal{J}_a$ , les automates peuvent changer de mode uniquement par le respect de la deuxième condition limite. Donc, à partir de (3.74), on trouve pour la contribution à la condition de garde :

$$Guard_{jj'}^i = [\overline{Caus}^i(l_j^i) \in Fr(\mathcal{D}^i(l_j^i))], \forall i \in \mathcal{J}_a \quad (3.103)$$

**Remarque 3.57** *Pour les interrupteurs qui peuvent changer de mode selon la condition limite 2, on ne spécifie pas de condition explicite en ce qui concerne la sortie imminente du mode  $l_j^i$ , parce que cette condition supplémentaire est prise en compte implicitement par l'hypothèse sur les interrupteurs inertiels.*

Maintenant, compte tenu du fait que  $\overline{Caus}^i(l_j^i) = e_i^T T_{o_j}$ , où  $e_i^T$  est le vecteur de la base canonique tel que  $e_i^T(i) = 1$ , et de la relation (3.95), on peut expliciter, toutefois sans détailler cela ici, chacune des relations (3.101)–(3.103) par rapport à l'état continu et aux entrées. Ainsi, avec les  $Guard_{jj'}^i$  explicités dans l'espace  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ , on détermine la condition de garde de la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  par :

$$Guard_{jj'} = \bigwedge_{i \in \mathcal{J}} Guard_{jj'}^i \quad (3.104)$$

Dans ce contexte, on peut affirmer à la suite de l'évaluation de la relation (3.104) qu'il existe une transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  uniquement si, d'un point de vue ensemble,  $Guard_{jj'} \cap Inv(l_j) \neq \emptyset$ . En ce qui concerne les autres attributs de la transition, l'ensemble des événements conditionnant la transition est donné par :

$$\Sigma_{jj'} = \bigcup_{i \in \mathcal{J}_s} \{\sigma^i\} \quad (3.105)$$

tandis que pour retrouver la fonction de saut on emploie toujours le résultat de la proposition 3.30. De ce fait, l'état continu implicite est continu entre deux instants de commutation et, donc, compte tenu de (3.81), l'état continu global,  $\mathbf{x}$ , est continu à son tour dans cet intervalle, ce qui fait que :

$$Jump_{jj'} = \mathbf{I} \quad (3.106)$$

### 3.4.5.2 Transition entre deux modes à causalité différente

Quand il s'agit de trouver les attributs de la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  lorsque cela implique également un changement de causalité, il faut prendre en compte le fait qu'au moment  $t$  de la commutation, le vecteur  $T_{oj'}$  peut être discontinu et même impulsionnel. Tout comme dans le premier cas, le vecteur  $T_{oj}$  est continu avant la commutation dans un intervalle de temps de largeur non-nulle et, donc, à l'origine de la transition se trouve toujours le fait que certains interrupteurs ont atteint leurs conditions limites. Cependant, cette fois, pour avoir un changement de causalité, il faut que, au moins pour une partie de ces interrupteurs ayant atteint leurs conditions limites, une commutation soit disponible et, par la suite, on appelle ces interrupteurs des *interrupteurs déclencheurs*. Ainsi, compte tenu du comportement discontinu et impulsionnel de  $T_{oj'}$  au moment  $t$  de la commutation, d'autres interrupteurs peuvent changer de mode par des transitions autonomes, même s'ils ne satisfaisaient pas la deuxième condition limite, puisqu'une continuation dans le même mode ne serait pas cohérente avec la condition d'invariance associée. Avant de déterminer comment on peut associer une condition de garde à une telle transition, on introduit les notations supplémentaires suivantes :  $\tilde{\mathcal{J}}$  est l'ensemble d'indices correspondant aux interrupteurs qui changent de causalité lors du franchissement de la transition,  $\tilde{\mathcal{J}} = \{i \in \mathcal{J} \mid Caus^i(l_j) \neq Caus^i(l_{j'})\}$ ,  $\mathcal{B}_F^i(l_j)$  est l'ensemble d'entrées booléennes de l'interrupteur  $Sw_i$  pour lesquelles la condition de frontière de  $l_j^i$  n'est pas toujours fausse,  $\mathcal{B}_F^i(l_j) = \bigcup_{i' \in \mathcal{J}^i} \mathcal{B}_{i'}^i(l_j)$ , où  $\mathcal{J}^i = \{i' \mid Fr(\mathcal{D}_{i'}^i(l_j)) \neq \emptyset\}$ , et l'ensemble d'indices

$\mathcal{J}_c^F \subseteq \mathcal{J}_c$  qui correspond aux interrupteurs qui ont des entrées booléennes et une frontière non-vide,  $\mathcal{J}_c^F = \{i \in \mathcal{J}_c \mid \mathcal{B}_F^i(l_j) \neq \emptyset\}$ .

Un trait distinctif d'une transition qui comporte un changement de causalité par rapport à une transition qui ne comporte pas un tel changement est que le vecteur des

variables de puissance d'entrée (par rapport aux modèles *switch automata*) change de composition. De ce fait, on peut s'attendre à ce que la condition de garde soit déterminée à la fois par rapport aux conditions limites liées au mode  $l_j$ , ce qu'on appelle par la suite la condition de garde *en amont*,  $\overrightarrow{Guard}_{jj'}$ , et par rapport aux conditions de cohérence de la partie impulsionnelle de  $T_{oj'}$ , ce qu'on appelle par la suite la condition de garde *en aval*,  $\overleftarrow{Guard}_{jj'}$ . Ainsi, la condition de garde de  $l_j$  à  $l_{j'}$  est obtenue par la conjonction des conditions *en amont* et *en aval*.

**Remarque 3.58** *En ce qui concerne l'évolution de la partie non-impulsionnelle du vecteur  $T_{oj'}$ , tout comme dans le cas d'une transition sans changement de causalité, on n'introduit aucune condition supplémentaire liée à la cohérence de celle-ci avec  $Inv(l_{j'})$ , puisque cette étape de validation est résolue au niveau de la sémantique de l'automate hybride.*

Pour déterminer la condition de garde *en amont* de la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$ , il faut, dans un premier temps, identifier les interrupteurs qui peuvent changer de mode uniquement par le franchissement des conditions limites ou, autrement dit, ceux pour lesquels il n'y a pas de transition autonome disponible. Ainsi, dans ce cas se trouvent les interrupteurs qui changent de mode par une transition synchronisée, donc tous ceux pour lesquels  $i \in \mathcal{J}_s$ , leurs contributions à la condition de garde de la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  étant donnée toujours par la relation (3.101), et les interrupteurs pour lesquels  $\mathcal{B}_F^i(l_j^i) \equiv \emptyset, \forall i \in \mathcal{J}_c$ , dont la contribution à la condition de garde est donnée par la relation :

$$Guard_{jj'}^i = Inc^i(l_j^i), \forall i \in \mathcal{J}_c \setminus \mathcal{J}_c^F, \quad (3.107)$$

ce qui est équivalent à la relation (3.102) pour  $Front^i(l_j^i) \equiv false$ .

Maintenant, par rapport à l'ensemble des interrupteurs qui changent de mode uniquement par le franchissement des conditions limites, on a deux cas de figure : le premier où il existe au moins un interrupteur déclencheur,  $\bar{\mathcal{J}} \cap (\mathcal{J}_s \cup (\mathcal{J}_c \setminus \mathcal{J}_c^F)) \neq \emptyset$ , et le deuxième qui représente la situation contraire, où il n'y en a aucun qui change de causalité,  $\bar{\mathcal{J}} \cap (\mathcal{J}_s \cup (\mathcal{J}_c \setminus \mathcal{J}_c^F)) = \emptyset$ . Dans la première situation, pour les interrupteurs  $Sw_i, \forall i \in \mathcal{J}_a$ , compte tenu du fait que leurs changements de mode peuvent se faire sans passer par la deuxième condition limite, il n'y a pas de contribution explicite à la condition de garde. En ce qui concerne les interrupteurs  $Sw_i, \forall i \in \mathcal{J}_c^F$ , ceux-ci peuvent changer de mode soit de façon autonome, si la frontière est disponible, soit de façon commandée, si la troisième condition limite est respectée. Ainsi, la contribution de l'interrupteur  $Sw_i, \forall i \in \mathcal{J}_c^F$ , est donnée par :

$$Guard_{jj'}^i = [b^i \in \mathcal{B}_F^i] \vee Inc^i(l_j^i) \quad (3.108)$$

Finalement, en utilisant (3.101), (3.107) et (3.108), la condition de garde *en amont* de la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  est donnée par :

$$\overrightarrow{Guard}_{jj'} = \bigwedge_{i \in \mathcal{J}_s \cup \mathcal{J}_c} Guard_{jj'}^i, \quad (3.109)$$

qui peut, à son tour, s'expliciter en fonction de l'état continu et des entrées du système. Dans la deuxième situation, il faut qu'au moins un interrupteur  $Sw_i, \forall i \in \bar{\mathcal{J}} \cap (\mathcal{J}_c \cup \mathcal{J}_a)$ , devienne un interrupteur déclencheur pour la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$ , c'est-à-dire qu'il doit franchir la condition limite correspondante donnée par une des relations (3.102) et (3.103). Pour les autres interrupteurs, leurs contributions à la condition de garde de la transition restent les mêmes, et donc, pour cette dernière, tenant compte aussi de (3.101), (3.107) et (3.108), on trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Guard}_{jj'} = & \left\{ \bigvee_{i \in \bar{\mathcal{J}} \cap \mathcal{J}_c^F} \left\{ [Inc^i(l_j) \vee Front^i(l_j)] \wedge \bigwedge_{\bar{i} \in \mathcal{J}_c^F \setminus \{i\}} Guard_{jj'}^{\bar{i}} \right\} \vee \right. \\ & \left. \bigvee_{i' \in \bar{\mathcal{J}} \cap \mathcal{J}_a} \left[ Front^{i'}(l_j) \wedge \bigwedge_{\bar{i}' \in \mathcal{J}_c^F} Guard_{jj'}^{\bar{i}'} \right] \right\} \wedge \\ & \bigwedge_{i'' \in \mathcal{J}_s \cup (\mathcal{J}_c \setminus \mathcal{J}_c^F)} Guard_{jj'}^{i''}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

qu'on peut toujours expliciter par rapport à l'état continu et aux entrées du système.

**Exemple** Compte tenu du fait que l'interrupteur idéal n'a pas de frontière et que toute transition implique aussi une commutation, on obtient que pour les transitions qui implique la commutation de l'interrupteur idéal la condition de garde en amont est donnée par la condition limite de celui-ci. Par exemple, pour passer de (F,E) à (E,F) ou (E,E) on trouve que :

$$\overrightarrow{Guard}_{FE,EF} = \overrightarrow{Guard}_{FE,EE} = [b = 1] \quad (3.111)$$

En ce qui concerne les transitions qui n'impliquent pas la commutation de l'interrupteur idéal, celles-ci doivent se faire par le franchissement de la frontière associée au mode correspondant de la diode. Par exemple, pour passer de (F,E) à (F,F) on trouve la condition suivante :

$$\overrightarrow{Guard}_{FE,FF} = [p_2^- = 0] \quad (3.112)$$

Pour conclure cette partie liée à la détermination de la condition de garde *en amont* de la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$ , il est intéressant de solutionner dans cette phase de modélisation un cas particulier où, même si la condition limite est franchie, un interrupteur ne peut pas être déclencheur pour une transition. Plus précisément, il s'agit du cas où, pour un interrupteur  $Sw_i$ , on aurait :

$$\mathcal{D}^*(l_j) \subseteq Ker(e_i^T (A_{r\hat{j}} \ A_{u\hat{j}} \ A_{p\hat{j}})) \quad (3.113)$$

Donc, cela conduit à  $\overrightarrow{Caus}^i(l_j) \equiv 0$  pendant la période d'activité du mode  $l_j$ . Si, en plus,  $\exists b^i \in \mathcal{B}_F^i(l_j)$  tel que  $(b^i, 0) \in Front^i(l_j), \forall i \in \mathcal{J}_c^F$  ou  $0 \in Fr(D^i), \forall i \in \mathcal{J}_a$ ,

alors la frontière serait respectée  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \in \mathcal{D}^*(l_j^i)$ . Cependant, cela ne fait pas que la deuxième condition limite soit franchie, puisque l'activité associée au mode ne « pousse » pas la trajectoire en dehors de l'invariant à travers cette frontière. Donc, il est justifié de considérer que l'interrupteur  $Sw_i$  ne peut pas être un interrupteur déclencheur par la deuxième condition limite et que sa contribution à la relation (3.110) soit éliminée. Néanmoins, ceci n'empêche pas l'interrupteur d'être « entraîné » dans la transition par d'autres interrupteurs déclencheurs.

**Exemple** On trouve qu'une transition entre le mode (E,E) et le mode (E,F) ne peut pas avoir lieu, parce que, compte tenu de (3.64)  $\bar{f}_4 \equiv 0$  et le fait d'avoir franchi la frontière n'est pas suffisant dans ce cas.

Pour déterminer la condition de garde *en aval* de la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$ , il faut expliciter en quelles conditions la partie impulsionnelle de  $T_{o\hat{j}'}$ , dont le poids est donné par  $\tau_{o\hat{j}'}$  (par simplicité et pour éviter tout malentendu, on a renoncé à l'indice supérieur), respecte la condition d'invariance du mode  $l_{j'}$ . A ce point, pour un interrupteur  $Sw_i, \forall i \in \{1, \dots, n_w\}$ , on peut expliciter la contrainte sur la composante impulsionnelle de  $\overline{Caus}^i(l_{j'}^i), Imp^i(l_{j'}^i)$ , à partir de la forme canonique de l'écriture de l'invariant. Ainsi, si  $\mathcal{B}^i \neq \emptyset$ , alors on trouve :

$$Imp^i(l_{j'}^i) = \bigvee_{i'=1}^{k_{j'}^i} [b^i \in \mathcal{B}_{i'}^i(l_{j'}^i) \wedge e_i^T \tau_{o\hat{j}'} \in \mathcal{P}_{i'}^i(l_{j'}^i)], \quad (3.114)$$

où les ensembles  $\mathcal{P}_{i'}^i(l_{j'}^i)$ , sont définis tels que :

$$\mathcal{P}_{i'}^i(l_{j'}^i) = \begin{cases} \mathbb{R}^+, & \text{si } \mathcal{D}_{i'}^i(l_{j'}^i) \supseteq \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{R}^-, & \text{si } \mathcal{D}_{i'}^i(l_{j'}^i) \supseteq \mathbb{R}^- \\ \mathbb{R}, & \text{si } \mathcal{D}_{i'}^i(l_{j'}^i) = \mathbb{R} \\ \{0\}, & \text{autrement} \end{cases}, \quad (3.115)$$

tandis que pour  $\mathcal{B}^i = \emptyset$ , on trouve :

$$Imp^i(l_{j'}^i) = [e_i^T \tau_{o\hat{j}'} \in \mathcal{P}^i(l_{j'}^i)], \quad (3.116)$$

où  $\mathcal{P}^i(l_{j'}^i)$  est défini par rapport à  $\mathcal{D}^i(l_{j'}^i)$  d'une façon similaire à l'équation (3.115). Donc, la condition de garde *en aval* de la transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  devient :

$$\overleftarrow{Guard}_{jj'} = Imp^1(l_{j'}^1) \wedge Imp^2(l_{j'}^2) \wedge \dots \wedge Imp^{n_w}(l_{j'}^{n_w}), \quad (3.117)$$

d'où, par un procédé de calcul similaire à l'obtention de (3.92) à partir de (3.90), on obtient :

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{Guard}_{jj'} &= \bigvee_{i_1=1}^{k_{j'}} \left\{ \dots \bigvee_{i_{n_b}=1}^{k_{j'}^{n_b}} \left[ b \in \mathcal{B}_{i_1}^1(l_{j'}) \times \dots \times \mathcal{B}_{i_{n_b}}^{n_b}(l_{j'}) \wedge \tau_{o\hat{j}'} \in \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mathcal{P}_{i_1}^1(l_{j'}) \times \dots \times \mathcal{P}_{i_{n_b}}^{n_b}(l_{j'}) \times \mathcal{P}^{n_b+1}(l_{j'}^{n_b+1}) \times \dots \times \mathcal{P}^{n_w}(l_{j'}^{n_w}) \right] \dots \right\} \quad (3.118) \\
&= \bigvee_{i=1}^{k_{j'}} \left[ b \in \mathcal{B}_i(l_{j'}) \wedge \tau_{o\hat{j}'} \in \mathcal{P}_i(l_{j'}) \right], k_{j'} = \prod_{i'=1}^{n_b} k_{j'}^{i'}
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant les équations (3.49) et (3.81), on peut déterminer le poids de la partie impulsionnelle de  $T_{o\hat{j}'}$  par rapport à l'état continu avant la commutation et aux entrées continues :

$$\tau_{o\hat{j}'} = G_{r\hat{j}'} \mathbf{x}^- + G_{u\hat{j}'} \mathbf{u}, \quad (3.119)$$

où

$$G_{r\hat{j}'} = -S_{24\hat{j}'}^T R_{\hat{j}'} \begin{pmatrix} S_{12\hat{j}'}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{F}_{\hat{j}'} \begin{pmatrix} P_{1\hat{j}'}^T & \mathbf{0} \\ P_{2\hat{j}'}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.120a)$$

$$G_{u\hat{j}'} = A_{p\hat{j}'} = S_{24\hat{j}'}^T R_{\hat{j}'} S_{25\hat{j}'} \quad (3.120b)$$

En conséquence, on peut récrire la relation (3.118) sous une forme explicite par rapport à l'état continu et aux entrées du système :

$$\overleftarrow{Guard}_{jj'} = \bigvee_{i=1}^{k_{j'}} \left[ b \in \mathcal{B}_i(l_{j'}) \wedge (\mathbf{x}^-, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \in \mathcal{P}_i^*(l_{j'}) \right] \quad (3.121)$$

Dans ce contexte, on conclut qu'il existe une transition de  $l_j$  à  $l_{j'}$  si la condition de garde qu'on y a associée,  $\overrightarrow{Guard}_{jj'} = \overrightarrow{Guard}_{jj'} \wedge \overleftarrow{Guard}_{jj'}$ , a une intersection non-vide avec l'invariant du mode source,  $Inv(l_j)$ .

**Exemple** Pour les transitions qui ont comme cible un mode qui n'a pas d'élément de stockage à causalité dérivée, c'est-à-dire (F,E) et (E,F), il n'y a pas de partie impulsionnelle du vecteur  $T_o$ . Donc, la condition en aval dans ce cas est toujours vraie. Pour les transitions qui ont comme cible les modes (F,F) et (E,E), compte tenu aussi de (3.52) et de (3.53) et du fait que pour une diode  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) = \mathbb{R}^+$ , on trouve les conditions suivantes :

$$\overleftarrow{Guard}_{*,FF} = [p_2^- \leq 0] \quad (3.122a)$$

$$\overleftarrow{Guard}_{*,EE} = [q_6^- \leq 0] \quad (3.122b)$$

En ce qui concerne les autres attributs de la transition, pour l'ensemble d'événements  $\Sigma_{jj'}$ , on trouve la même expression (3.105), tandis que pour la fonction de saut, on utilise la transformation (3.81) et les notations (3.85), pour obtenir à partir de (3.34) la relation suivante :

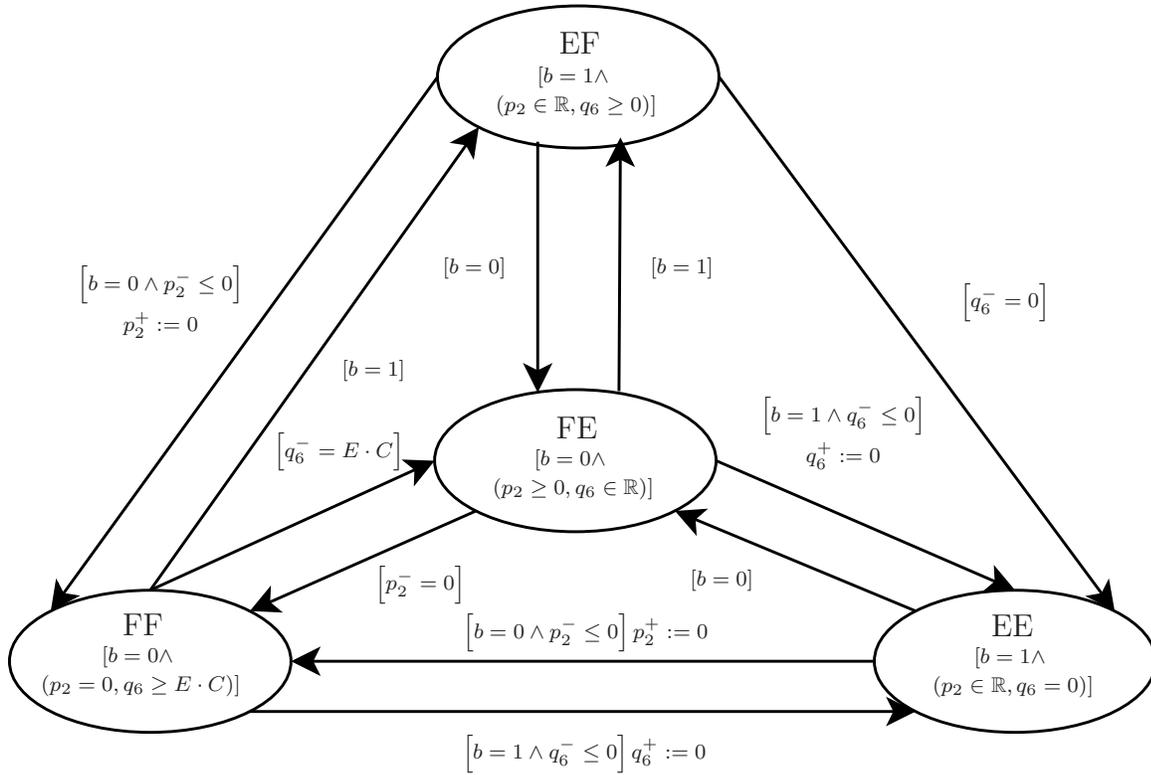
$$Jump_{jj'} = K_{3\hat{j}}K_{1\hat{j}'}\mathbf{x}^- + K_{2\hat{j}'}\mathbf{u} \quad (3.123)$$

**Exemple** En utilisant les valeurs des matrices  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ , on trouve que pour les transitions qui ont comme modes cibles (F,E) et (E,F), l'état  $\mathbf{x}$  est continu :  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^-$ . Pour les transitions qui ont comme mode cible les autres deux modes, on trouve que :

$$Jump_{*,FF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.124a)$$

$$Jump_{*,EE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.124b)$$

En conclusion de cette sous-section, on peut remarquer que, même si l'hypothèse sur la *priorité à la transition* ne joue aucun rôle direct dans la détermination de l'ensemble de transitions, celle-ci, également avec l'hypothèse sur les *interrupteurs inertiels*, s'ajoute à l'ensemble de contraintes respectées par la sémantique de l'automate hybride. Ceci permet de restreindre l'ensemble des transitions qui peuvent être effectivement franchies à un instant  $t$  donné par rapport à une interprétation classique de la sémantique. Ainsi, sans entrer dans une analyse exhaustive de l'implication de la prise en compte des deux hypothèses supplémentaires au niveau sémantique, on donne à titre d'exemple un cas particulier, où une relation d'ordre précise existe entre deux modes cibles possibles : soit  $l_j$  le mode source et  $l_{j'}$  et, respectivement,  $l_{j''}$  les modes cibles tels qu'on a les ensembles d'indices  $\mathcal{J}'$  et, respectivement,  $\mathcal{J}''$  associés aux interrupteurs qui changent de mode entre le mode source et les modes cibles, avec  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}''$ . De ce fait, si on se trouve dans la situation où on a  $Caus(l_j) = Caus(l_{j'}) = Caus(l_{j''})$ , alors on trouve que  $Guard_{jj'} \supseteq Guard_{jj''}$  et, par conséquence, quand  $Guard_{jj''} = true$ , on a les deux transitions possibles. Toutefois, compte tenu du fait que tous les interrupteurs du  $\mathcal{J}''$  ont atteint leurs conditions limites, le mode le plus probable à devenir la cible est le mode  $l_{j''}$ . Le contraire pourrait se produire uniquement si les conditions suivantes étaient valides : l'invariant du mode  $l_{j'}$  est satisfait et il y a une continuation à durée non-nulle dans ce mode (*interrupteurs inertiels*),  $\mathcal{J}'_s = \mathcal{J}''_s$  (*priorité à la commutation*) et il n'y a pas un troisième mode,  $l_{j'''}$ , avec  $\mathcal{J}''' \subset \mathcal{J}'$  et  $Caus(l_j) = Caus(l_{j'''})$ , qui respecte les deux conditions précédentes (*interrupteurs inertiels*). Si la situation est telle que  $Caus(l_j) \neq Caus(l_{j'}) \neq Caus(l_{j''})$ , alors on trouve uniquement  $\overrightarrow{Guard}_{jj'} \supseteq \overrightarrow{Guard}_{jj''}$ , ce qui fait qu'on peut avoir un problème de choix du mode cible seulement si, en plus,  $\overleftarrow{Guard}_{jj'} \cap \overleftarrow{Guard}_{jj''} \neq \emptyset$ . Dans ce cas, sachant que  $Caus(l_{j'}) \neq Caus(l_{j''})$ , le mode cible le plus probable, conformément à l'hypothèse sur la *priorité à la transition*, est  $l_{j'}$ , puisque  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}''$ .




---

 FIG. 3.15 – Modèle automate hybride du convertisseur « boost »
 

---

**Remarque 3.59** *En ce qui concerne l'unicité de la trajectoire du modèle automate hybride obtenu, celle-ci n'est pas a priori garantie et le seul résultat utilisable pour donner une réponse à cette question est dans les cas où un modèle LCP (linear complementary problem) est disponible.*

**Exemple** En mettant ensemble les informations déterminées pour le convertisseur « boost », on trouve l'automate hybride de la figure 3.15, où, par un souci de brièveté, les fonctions de saut apparaissent de façon explicite uniquement sur les transitions où la continuité de l'état n'est pas triviale.

### 3.4.6 Autres hypothèses de travail

Lors de la détermination des attributs de l'automate hybride, on a supposé l'hypothèse de *fonctionnement normal*, ce qui a eu comme principale conséquence la continuité entre deux commutations du vecteur des variables de puissance d'entrée (dans le sens de *switch automata*) associées aux interrupteurs. À partir de ce point, on a pu formuler la condition d'invariance associée à chaque mode et les conditions limites associées à chaque interrupteur, ce qui a mené finalement à la détermination des conditions de garde. Par la suite, on se propose donc de discuter, cependant sans un développement de la même envergure, les implications de la relaxation et du renforcement de la dite hypothèse.

Soit, dans un premier temps, une relaxation de l'hypothèse de départ dans le sens de prendre en compte des sources discontinues. Alors, ceci implique, dans le cas général et pour un mode  $l_j$  quelconque, des discontinuités au niveau du vecteur d'état continu,  $\mathbf{x}$ , et des impulsions au niveau du vecteur des variables de puissances d'entrée,  $T_{o\hat{j}}$ , même entre deux instants de commutation. Dans ces conditions, pour garantir que les trajectoires des *switch automata* sont admissibles, il faut rajouter, au niveau de la condition d'invariance associée à un mode donné, la condition (3.121) qui doit ainsi être valide tout au long de l'intervalle d'activité du mode et non seulement à son initialisation. En plus, étant donné que le vecteur  $\mathbf{u}$  peut être discontinu, cela peut produire des discontinuités au niveau de  $T_{o\hat{j}}$ , ce qui fait que des transitions autonomes peuvent être franchies sans passer par les conditions limites formulées antérieurement et sans une commutation d'un (autre) interrupteur déclencheur. Dans ce cas il est alors nécessaire d'explicitier les éventuelles discontinuités apparaissant suite à cet événement. Finalement, le fait de permettre au vecteur  $\mathbf{u}$  d'avoir une composante impulsionnelle joue uniquement au niveau de l'expression de la partie impulsionnelle de  $T_{o\hat{j}}$  sans avoir d'influence sur une éventuelle discontinuité de ceci, puisque la partie impulsionnelle de  $\mathbf{u}$  se trouve dans le  $Ker(S_{25\hat{j}}), \forall \hat{j}$ .

En ce qui concerne un renforcement de l'hypothèse de départ, le fait de rajouter l'hypothèse de *topologie normale* permet de réduire la dimension de l'espace dans lequel on définit les conditions d'invariance et les conditions de garde, puisque, pour un mode  $l_j$  quelconque,  $A_{p\hat{j}} \equiv \mathbf{0}$ . En plus, les fonctions de saut et les conditions de garde *en aval* sont indépendantes de la valeur du vecteur  $\mathbf{u}$ . Si on suppose aussi l'hypothèse *DC-DC*, alors les conditions d'invariance et de garde dépendent uniquement de la variable d'état, le vecteur  $\mathbf{u}$  représentant un paramètre du système. Dans ces conditions, le modèle automate hybride obtenu pour les circuits de type DC-DC est plus proche de la définition donnée par (Alur *et al.*, 1995) pour des systèmes hybrides autonomes, conformément à (Buisson *et al.*, 2004). Par ailleurs, si l'hypothèse *DC-DC* est faite, on peut calculer la différentielle de la partie non-impulsionnelle du vecteur des variables de puissance d'entrée associées aux interrupteurs qui dépend, donc, uniquement de l'état continu et du paramètre  $\mathbf{u}$ . Pour ce faire, on utilise comme point de départ l'équation (3.93) et, compte tenu aussi de (3.86) et du fait que pour une *topologie normale*  $K_{2\hat{j}} \equiv \mathbf{0}$ , on obtient :

$$\dot{T}_{o\hat{j}} = A_{1\hat{j}} (A_{\hat{j}} K_{1\hat{j}} \mathbf{x} + E_{\hat{j}} \mathbf{u}) \quad (3.125)$$

Ainsi, on est maintenant capable d'explicitier dans l'espace d'état continu quelle région de la frontière d'un invariant constitue vraiment une condition limite, c'est-à-dire une région où l'activité du mode « pousse » l'état vers l'extérieur de la région d'invariance. En plus, on peut intégrer le calcul de cette dérivée lors de l'explicitation de la sémantique de l'automate, afin d'éviter les comportements de type singleton, lors de l'initialisation du vecteur d'état continu sur une frontière de la région d'invariance d'un possible mode cible d'une transition.

Finalement, pour les systèmes à *topologie normale*, il est intéressant de discuter du cas où le vecteur  $\mathbf{u}$  serait constant par morceaux. Ainsi, si les interrupteurs du

système sont du même type que les interrupteurs usuels de l'électronique de puissance présentés figures 3.9, 3.13 et 3.14, alors les domaines  $\mathcal{D}_i^i(l_j^i)$  sont représentés par des inégalités à zéro. Par conséquent, les domaines  $\mathcal{D}_i^*(l_j)$  et les domaines associées aux conditions de garde *en amont* sont, dans l'espace d'état, des polyèdres paramétrés par le vecteur  $\mathbf{u}$ , tandis que les domaines  $\mathcal{P}_i^*(l_j)$  sont des cônes, puisque la partie impulsionnelle de  $T_{oj}$  est indépendante de  $\mathbf{u}$ . Si on se réfère à la représentation duale des polyèdres (Chernikova, 1965; Wilde, 1994), pour un domaine  $\mathcal{D}_i^*(l_j)$  quelconque, alors le changement du paramètre  $\mathbf{u}$  conduit uniquement au changement des sommets du polyèdre, les rayons et les droites restant les mêmes : le polyèdre « gonfle » ou se rétrécit en gardant sa forme. Alors, compte tenu du fait que le vecteur d'état est continu entre deux instants de commutation, on peut définir une nouvelle condition limite pour un interrupteur  $Sw_i$ , en fonction de la distance jusqu'à la frontière correspondante de l'invariant dans l'espace d'état, par rapport à une variation  $\Delta\mathbf{u}$  qui conduirait au franchissement d'une transition autonome.

### 3.5 Conclusion

Le but de ce chapitre a été de montrer comment on peut obtenir un modèle de type automate hybride pour les systèmes physiques linéaires avec des interrupteurs, où une attention particulière a été portée au domaine de l'électronique de puissance. On a utilisé comme point de départ la représentation bond graph commuté d'un tel système et à partir de la mise en équation associée à une configuration dite de référence, on a pu déduire l'ensemble de toutes les configurations valides. Pour chacune de ces configurations, on déduit une équation dynamique implicite, à laquelle on associe un vecteur d'état implicite, et une équation dynamique explicite, à laquelle on associe un vecteur d'état explicite. En introduisant une hypothèse sur le vecteur d'entrée de puissance, qui ne peut être qu'au maximum impulsionnel, on arrive à expliciter également l'expression des discontinuités des vecteurs d'état implicite et explicite et l'expression du vecteur des variables de puissance imposées aux interrupteurs (par la structure de jonction) par rapport aux vecteurs d'état (implicite et explicite) et au vecteur d'entrée de puissance, avec ses composantes impulsionnelle et non-impulsionnelle. Pour enrichir le modèle bond graph de l'interrupteur, on a défini un nouveau formalisme, *switch automata*, dont la principale caractéristique est l'utilisation de deux types de transitions : synchronisée et de secours. Dans le cadre de ce formalisme, on a introduit les modèles des interrupteurs basiques de l'électronique de puissance et on a déduit, par rapport aux derniers, les modèles des interrupteurs équivalents obtenus par la mise en anti-parallèle et en série de deux interrupteurs basiques. Finalement, l'automate hybride a été obtenu par identification de chaque attribut pour le cas où on a supposé l'hypothèse de *fonctionnement normal* pour le vecteur des entrées de puissance et les hypothèses d'*interrupteurs inertiels* et de *priorité à la transition* en ce qui concerne la dynamique des *switch automata*, où les principaux points concernent l'identification de l'état hybride, de l'ensemble invariant et de l'ensemble des transitions. L'état discret du système a été identifié avec le mode du système, obtenu par l'association de

tous les modes de chaque interrupteur, sauf les associations qui correspondent à des configurations interdites, tandis que l'état continu a été identifié avec l'état implicite dans la configuration de référence. Pour déterminer l'ensemble des conditions d'invariance, on a utilisé la continuité entre deux commutations du vecteur des variables de puissance d'entrée dans le champ interrupteur et, en même temps, les conditions d'invariance associées à chaque mode de chaque interrupteur correspondant au mode donné du système global. En ce qui concerne l'ensemble des transitions, l'utilisation des hypothèses a permis de formuler des conditions limites par rapport à la transition de certains interrupteurs et, à partir de ces conditions limites, on a pu identifier les conditions de garde associées aux transitions dans le cas où il n'y aurait pas de changement de causalité lors de la transition et, également, dans le cas où un tel changement se produit.

Dans le cas général, le modèle automate hybride obtenu pour un système physique linéaire avec des interrupteurs a une complexité élevée, qui est due principalement à la combinatoire introduite par les interrupteurs. Ainsi, la dimension de l'ensemble des configurations est usuellement proche de la limite supérieure,  $\text{card}(\mathcal{C}) \leq 2^{n_w}$ , puisque le nombre de configurations interdites est généralement réduit et, donc, la dimension de l'ensemble des modes est aussi proche de la limite supérieure  $\text{card}(\mathcal{L}) \leq \prod_{i=1}^{n_w} \text{card}(\mathcal{L}^i)$ . Dans le même sens, la dimension de l'ensembles des transitions est proche de la limite supérieure,  $\text{card}(\mathcal{A}) \leq \text{card}(\mathcal{L}) \cdot (\text{card}(\mathcal{L}) - 1)$ , puisqu'en jouant sur les conditions limites de tous les interrupteurs on peut passer, a priori, de n'importe quel mode vers n'importe quel autre mode. Ainsi, dans un but de simulation du système, on peut se formuler comme objectif de renoncer à la détermination explicite des conditions de garde, ce qui implique, comme on l'a déjà énoncé, un coût hors-ligne significatif. Dans ce cas, on peut envisager de déterminer le mode cible de façon dynamique lors de la simulation, en implémentant la sémantique de l'automate et en faisant les inférences uniquement quand des conditions limites sont atteintes. C'est d'ailleurs cette solution qu'on a choisi pour implémenter un modèle de simulation dans le chapitre suivant.

Mise à part l'utilisation du modèle automate hybride obtenu dans la simulation des systèmes physiques linéaires avec des interrupteurs, on peut envisager également de l'employer dans d'autres applications telles que le calcul de cycles limites, conformément à (Zainea *et al.*, 2007c). Dans ce cas là, il s'agit surtout de connaître uniquement une partie du modèle, celle concernée par le cycle lui même. En tant que travaux futurs, on peut envisager l'utilisation du modèle obtenu dans la commande des systèmes. Plus précisément, il s'agit des cas où l'on a à faire ayant des systèmes à un nombre élevé d'interrupteurs, mais pour lesquels on connaît, par l'intermédiaire de l'avis d'un expert, les configurations d'interrupteurs utiles pour la commande. Dans ce cas, le modèle de type automate obtenu peut fournir les contraintes nécessaires pour choisir parmi les exécutions intéressantes du point de vue de l'objectif de commande formulé, celles qui sont cohérentes avec les configurations imposées.

# Chapitre 4

## Simulation des convertisseurs continu–continu à l’aide de Simulink

### 4.1 Vue d’ensemble

Dans le chapitre précédent, on a discuté de l’obtention du modèle automate hybride pour les systèmes physiques linéaires avec des interrupteurs. Pour ce faire, on a supposé, en ce qui concerne les entrées de puissance du système, l’hypothèse de *fonctionnement normal*, c’est-à-dire où le vecteur  $\mathbf{u}$  est continu et de différentielle continue. Cependant, le champ principal d’application auquel on s’intéresse est celui des convertisseurs continu–continu et, donc, par la suite, on suppose l’hypothèse *DC-DC* : le vecteur des variables de puissance imposées par les sources est constant ( $\mathbf{u} \equiv \text{const}$ ). De plus, en ce qui concerne les interrupteurs, on s’intéresse uniquement à la typologie des interrupteurs issus de l’électronique de puissance, c’est-à-dire que, par rapport à la variable de puissance d’entrée, les régions d’invariance sont définies, pour tous les modes, soit par des inégalités à zéro, soit par  $\mathbb{R}$  lui-même.

Une simulation ayant comme point de départ le modèle automate hybride complet du système est envisageable, mais cela a l’inconvénient de la complexité du calcul de l’ensemble des transitions. Une solution alternative qu’on choisit par la suite est de déterminer de façon dynamique le mode cible d’une transition ayant le mode actif comme mode source, lorsque celui-ci doit être quitté, tout en considérant le reste des attributs du modèle automate hybride comme étant prédéterminé. Pour obtenir le modèle de simulation du système, on utilise une approche de simulation par détection d’événements, qui, comme on l’a discuté en section 2.4, consiste à prévoir une procédure spéciale lors de la détection d’événements.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont partiellement fait l’objet des publications suivantes : (Zainea *et al.*, 2005c; Zainea *et al.*, 2005a; Cormerais *et al.*, 2006).

## 4.2 Simulation par détection d’événements

Dans le cas des convertisseurs continu–continu, l’occurrence des événements est liée aux évolutions des grandeurs du modèle des interrupteurs. Donc, afin de bien décrire le processus de détection d’événements, il est impératif de bien décrire les interactions entre les grandeurs du modèle d’interrupteur, ainsi que les interactions des interrupteurs avec le reste du système. Ainsi, le modèle d’interrupteur proposé au chapitre 3 possède à la fois une dimension physique et à la fois une dimension logique. La dimension physique est issue de la description de l’interrupteur en tant que dipôle, tandis que la dimension logique est issue de la description de l’interrupteur par un modèle de type automate.

Au niveau de la dimension physique, l’interrupteur est décrit par deux ensembles : l’ensemble formé par les états causaux ouvert/fermé (source d’effort/source de flux) de l’interrupteur, et l’ensemble des variables de puissance associées, c’est-à-dire l’effort et le flux. Comme on l’a vu, ces deux ensembles ne sont pas indépendants, l’état discret imposant une valeur nulle pour une des variables de puissance, en la rendant contrainte, tandis que l’autre variable de puissance reste libre. Au niveau de la dimension logique, l’interrupteur est décrit par un automate à plusieurs modes. A chaque mode est associée une condition d’invariance et, aussi, généralement, à chaque transition est associée une condition de garde. Dans le cadre de l’automate, l’évaluation du mode actif dépend des valeurs prises par l’ensemble des conditions d’invariance et des conditions de garde. Les deux dimensions de l’interrupteur interagissent à leur tour par le fait qu’il existe une application surjective entre l’ensemble des modes et l’ensemble des états discrets, et aussi par le fait que l’ensemble des conditions d’invariance et de garde dépend, généralement, de la variable libre.

En ce qui concerne les interactions d’un tel modèle avec le reste du système, on a vu que l’équation dynamique, ainsi que l’initialisation de l’état lors de chaque commutation, dépendent de la configuration active du système. Dans le sens inverse, la variable libre est imposée par le reste du système à l’interrupteur selon une relation dépendant de l’état et du vecteur des entrées de puissance. De plus, les paramètres de cette relation sont susceptibles de changer si la configuration du système change, même si l’état discret de l’interrupteur concerné ne change pas. D’autre part, les entrées événementielles et booléennes du système peuvent influencer les conditions d’invariance et de garde.

La totalité de ces interactions est résumée dans le diagramme donné figure 4.1. Même si sur ce diagramme on peut constater la présence de boucles entre les différentes variables du modèle, il est possible d’obtenir une simulation du système donné, en initialisant, par exemple, l’état continu du système et le mode actif de chaque interrupteur, pourvu qu’on respecte à ce moment l’initialisation de l’ensemble des contraintes.

A partir de ces considérations et des modèles *switch automata* associés aux interrupteurs, on peut définir un événement de simulation comme étant la réunion, à un certain moment, de l’ensemble de causes qui produisent un changement de mode au niveau de l’automate d’au moins un interrupteur. Ainsi, selon la cause de leur

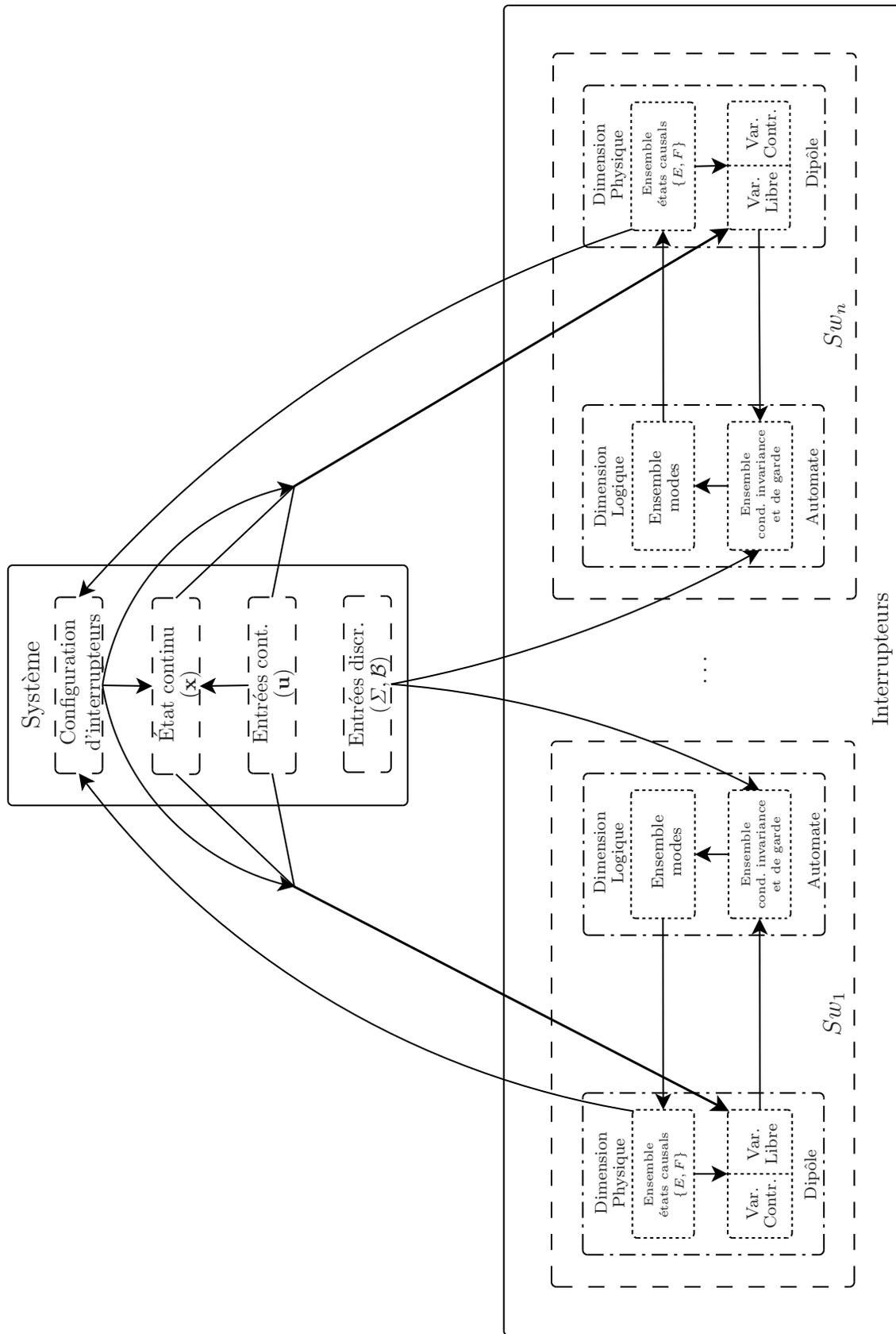


FIG. 4.1 – Diagramme d'interaction entre les modèles d'interrupteurs et le modèle du reste du système physique, où le sens des flèches représente le sens des interactions entre les différents éléments des modèles

déclenchement, les événements de simulation peuvent être classifiés de la façon similaire au type de transitions :

**Autonome** : déclenché par le fait que l’évolution de la variable libre de l’interrupteur est telle que celle ci ne respecterait plus la condition d’invariance associée au mode courant, ce qui est considéré comme un événement interne au modèle ;

**Commandé** : déclenché par une action externe au modèle, c’est-à-dire une discontinuité qui survient lors de l’évolution du vecteur des entrées booléennes,  $b \in \mathcal{B}$ , ou, encore, l’occurrence d’un événement  $\sigma \in \Sigma$ , éventuellement conjuguée avec une condition supplémentaire sur la variable libre de l’interrupteur.

**Remarque 4.1** *Si on prend en considération une relaxation de l’hypothèse DC-DC en permettant au vecteur des entrées de puissance  $\mathbf{u}$  d’être discontinu, alors, une telle discontinuité peut constituer aussi un événement, pourvu que cette discontinuité génère une transition à cause d’une possible invalidation de la condition d’invariance. Bien que  $\mathbf{u}$  soit une variable d’entrée, il est rare qu’elle soit une variable sur laquelle on puisse agir. Ainsi, dans ce registre, on devrait considérer que le possible événement généré par une discontinuité de  $\mathbf{u}$  soit autonome.*

Cependant, étant donnée la possible complexité des causes de déclenchement des événements, on définit l’événement de simulation comme l’occurrence d’une seule cause qui pourrait conduire à un changement de mode. De ce fait, les événements de simulation sont déclenchés soit par le passage par zéro, dans les deux sens, des variables libres associées aux interrupteurs, soit par un changement dans l’évolution des entrées booléennes  $b$  ou l’occurrence d’un événement  $\sigma$ . On constate également que, selon la cause du déclenchement, ces événements de simulation peuvent être autonomes ou commandés.

Une fois qu’un événement de simulation est détecté, il faut vérifier si ceci est véritablement un événement, c’est-à-dire s’il produit un changement de mode. Afin de montrer ceci, il faut que les conditions d’activation d’une transition d’un automate soient réunies et, en plus, que la condition d’invariance du mode cible soit valide. Cette étape constitue l’évaluation de la dynamique discrète du système, tandis qu’entre deux instants de déclenchement d’événements, on évalue la dynamique continue. Ainsi, une exécution du modèle de simulation est constituée par un enchaînement d’évaluations de la dynamique discrète et de la dynamique continue selon le schéma indiqué.

Dans la suite, on présente deux solutions de mise en œuvre sous Simulink du modèle présenté figure 4.1 : l’une quand on utilise uniquement des blocs Simulink de base et l’autre quand on utilise les S-fonctions. Néanmoins, dans les deux cas, on tient compte des hypothèses suivantes :

**Hypothèse 4.2** *Par la suite, sauf précision contraire, on considère que les modèles d’interrupteur utilisés sont tels que le nombre de mode est égal au nombre d’état discrets, c’est-à-dire égal à deux. De ce fait, l’emploi des termes « état causal » et « mode » (état discret) est équivalent.*

**Hypothèse 4.3** *Par la suite, sauf précision contraire, on considère que les événements autonomes et les événements commandés ne peuvent pas se synchroniser.*

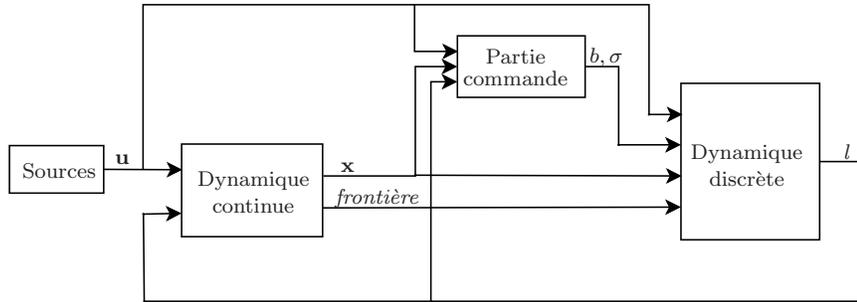


FIG. 4.2 – Schéma de principe de la simulation par l'unique utilisation des blocs élémentaires

## 4.3 Réalisation du modèle Simulink avec des blocs élémentaires

### 4.3.1 Schéma général

De façon générale, un système hybride comporte deux types de dynamique : une continue et une discrète. De ce fait, à partir du schéma générique d'interactions donné figure 4.1, on peut formuler le schéma de principe de la simulation, qui est donné en figure 4.2. On y retrouve le fait que la dynamique continue, responsable de l'évolution de l'état continu global du système,  $\mathbf{x}$ , dépend du vecteur de puissance injectée par les sources,  $\mathbf{u}$ , et, aussi, de la configuration des interrupteurs, qui correspond à l'état discret du système,  $l$ . A son tour, la dynamique de ce dernier est influencée par le vecteur de variables libres associées aux interrupteurs (donc par  $\mathbf{x}$ ), par  $\mathbf{u}$  et par les entrées booléennes,  $b$  et événementielles,  $\sigma$ . Comme on l'a déjà précisé, les évolutions de  $b$  et de  $\sigma$ , éventuellement conjuguées à l'évolution de  $\mathbf{x}$  représentent des événements *commandés*, tandis que l'évolution de  $\mathbf{x}$ , en fonction des contraintes imposées par les interrupteurs, peut générer des événements *autonomes*, représentés par *frontière*. Étant donné que les interrupteurs représentent les moyens d'action de l'extérieur sur le système, la synthèse de la loi de commande implique, généralement, la génération de  $b$  et de  $\sigma$  en fonction de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $l$ .

Le schéma général de simulation, présenté figure 4.3, est une translation sous Simulink du schéma de principe donné figure 4.2. De ce fait, le bloc *Dynamique* est l'implémentation de la dynamique continue, tandis que *Invariants + Conditions d'impulsion* et *Automate* sont responsables de la simulation de la dynamique discrète du système. Plus précisément, les variables continues du système, c'est-à-dire l'état continu (représenté par  $x_r$  en figure 4.3) et les variables libres associées aux interrupteurs,  $T_o$ , sont évaluées par le bloc *Dynamique* en même temps qu'on assure la détection des événements autonomes, *inv*. L'état discret du système, c'est-à-dire la variable *loc*, est évalué par le bloc *Automate*, obtenu à partir des modèles *switch automata* de chaque interrupteur. Le bloc *Automate* est activé uniquement quand un événement de simulation est détecté, en même temps que le bloc *Invariants +*

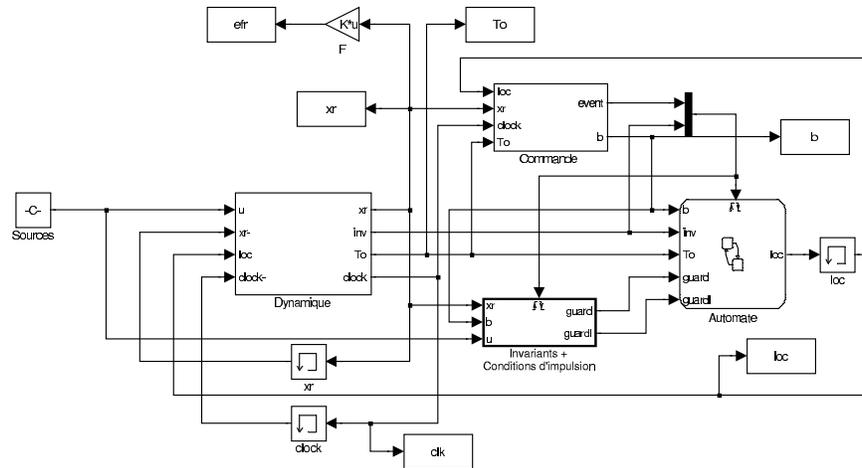


FIG. 4.3 – Schéma général de simulation sous Simulink

*Conditions d'impulsion.* A ce moment, une transition interne au bloc *Automate* peut s'effectuer si les conditions nécessaires évaluées par *Invariants + Conditions d'impulsion* sont valides.

Cependant, on est obligé d'introduire des blocs de retard afin d'éliminer les boucles algébriques qui se forment. Par exemple, la variable *loc* joue sur le calcul de l'état continu,  $\mathbf{x}$ , et, implicitement, sur la génération des événements internes, *inv*, et les variables libres des interrupteurs,  $T_o$ , qui, à leur tour, déterminent la valeur de *loc*. En plus, afin d'assurer le synchronisme du calcul de l'état avec la valeur de *loc*, il faut ajouter un bloc de retard sur le retour d'état aussi. De ce fait, le calcul de l'état continu et du mode du système est correct, mais décalé dans le temps. A cause de ceci, il est important de garder le temps réel, *clock*, différent du temps de simulation biaisé par les retards successifs. Cependant, si les pas de calcul sont suffisamment petits autour de chaque moment de déclenchement d'un événement de simulation, le résultat global peut être considéré comme précis. Au cas contraire, une phase de correction des résultats doit suivre la simulation pour éliminer les pas introduits par les retards.

Dans les sous-sections suivantes, on décrit un par un la réalisation des blocs *Dynamique*, *Invariants + Conditions d'impulsion* et *Automate*.

### 4.3.2 Le bloc *Dynamique*

Comme on l'a précisé antérieurement, les fonctionnalités du bloc *Dynamique* sont d'évaluer la dynamique continue d'état et de calculer ainsi à chaque pas de simulation la valeur de l'état continu,  $\mathbf{x}$ , et du vecteur des variables libres associées à la configuration active des interrupteurs,  $T_o$ . De plus, sachant que les événements autonomes sont exprimés par rapport aux variables libres des interrupteurs, on peut détecter au niveau de ce bloc ces événements, tout ceci étant pris en compte par la variable de

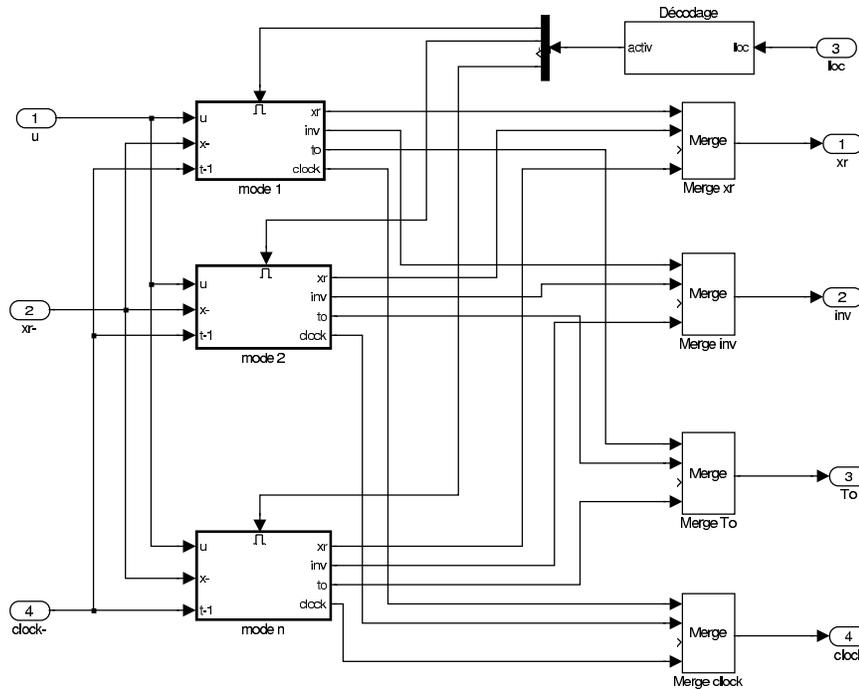


FIG. 4.4 – Réalisation du bloc *Dynamique* dont les principales fonctionnalités sont le calcul des grandeurs continues, telles que  $\mathbf{x}$  ( $xr$  sur le schéma) et  $T_o$ , la détection des événements internes,  $inv$ , et l'enregistrement du temps réel,  $clock$

sortie  $inv$ . La dernière sortie du bloc,  $clock$ , représente la valeur du temps réel qui est différente de la valeur du temps de simulation biaisée par l'introduction des blocs de retard.

Afin de réaliser les fonctionnalités décrites précédemment, on associe à chaque configuration valide du système un bloc de type *Enabled*, un seul bloc étant activé à la fois. Le signal d'activation/inhibition est obtenu dans le bloc *Décodage* à partir de la variable d'entrée  $loc$ . Ainsi, pour le bloc correspondant à la configuration active, on génère 1 et pour les autres blocs on génère  $-1$ . Les blocs *Merge* transmettent aux sorties du bloc *Dynamique* uniquement les entrées qui ont été actualisées au pas courant, c'est-à-dire les sorties du bloc correspondant à la configuration active.

Le bloc *mode k*,  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$  est réalisé de manière générique, en s'appuyant sur les résultats obtenus dans le chapitre 3. Dans ce contexte, conformément à la figure 4.5, il est possible d'explicitier l'équation dynamique associée à chaque configuration d'interrupteurs et, de même, le calcul du vecteur des variables libres en fonction de l'état explicite et des entrées de puissance. De plus, le temps réel est calculé par une simple intégration de l'unité. L'introduction du bloc de retard dans la boucle de retour (cf. figure 4.3) compense, lors du changement de configuration, le décalage d'un pas de calcul. Les deux intégrateurs actualisent leur condition initiale chaque fois que le bloc *mode k* est activé, tandis que lorsque le bloc est désactivé les sorties sont maintenues constantes, aux niveaux de la dernière évaluation.

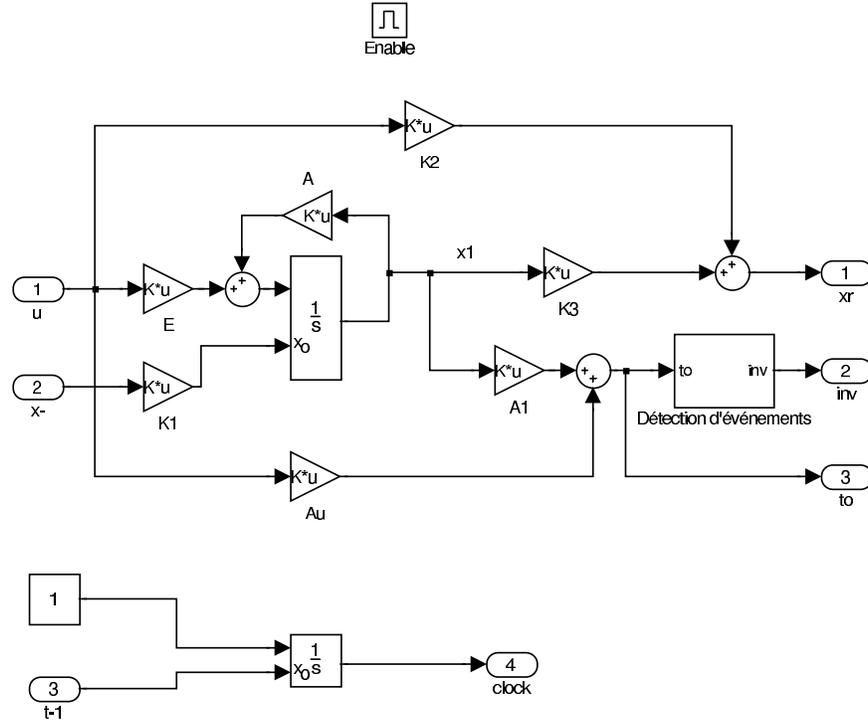
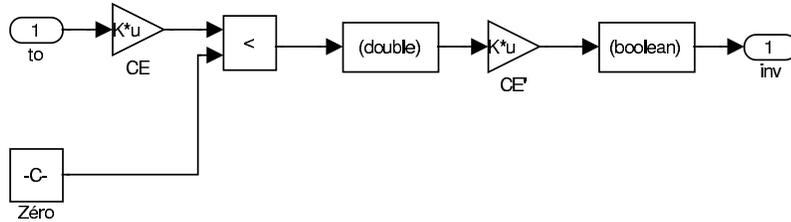


FIG. 4.5 – Réalisation du bloc *mode k* associé à une configuration quelconque et valide du système

**Remarque 4.4** *Le bloc Merge est capable de faire le bon choix entre une entrée (constante) provenant d'un bloc inactif et une entrée constante provenant d'un bloc actif.*

Une fois le vecteur des variables libres associées aux interrupteurs calculé, on peut envisager d'effectuer au niveau local de chaque bloc *mode k* la détection des événements autonomes. On propose en figure 4.6 un schéma de détection d'événements, où l'on suppose qu'on peut définir une matrice  $CE$  telle que les événements autonomes se produisent uniquement au passage décroissant par zéro de  $CE \cdot T_o$ . Pour décrire la façon dont on obtient la matrice  $CE$ , on considère au début une matrice diagonale de dimension égale au nombre d'interrupteurs. Les éléments diagonaux de cette matrice sont définis en fonction de la façon dont la variable libre associée à l'interrupteur correspondant déclenche un événement interne. Ainsi, on a 1 sur la diagonale, si la variable libre correspondante déclenche un événement autonome lors du passage décroissant par zéro,  $-1$  si la variable libre correspondante déclenche un événement autonome lors du passage croissant par zéro et 0 si la variable libre correspondante ne déclenche pas d'événement autonome. Finalement, la matrice  $CE$  est obtenue par l'élimination des lignes nulles à partir de cette matrice diagonale. Maintenant, la détection des événements autonomes se réalise simplement par la comparaison du résultat de la multiplication  $CE \cdot T_o$  avec zéro (vecteur). Afin de conserver invariante




---

 FIG. 4.6 – Réalisation du bloc de détection d'événements autonomes
 

---

la dimension du vecteur  $inv$  de sortie, on multiplie le résultat de la comparaison précédente avec  $abs(CE)^T$ .

**Remarque 4.5** *Au moment où un événement autonome est détecté, à cause de la mise en œuvre de la détection, la composante de  $CE \cdot T_o$  qui a déclenché cet événement est strictement négative. Ainsi, même si le dépassement en négatif est suffisamment petit (dépendant des paramètres de tolérance de Simulink), à ce moment, la condition d'invariance associée à l'interrupteur correspondant est invalide.*

A titre d'exemple on donne figure 4.7 l'évolution qualitative, autour du moment d'occurrence d'un événement de simulation, de l'état continu,  $\mathbf{x}$ , de l'état discret,  $loc$ , et du temps réel,  $clock$  ou  $t_r$ . Soit ainsi  $t_k$  l'instant associé à un événement de simulation tel que la dynamique discrète du système produit un changement de la variable discrète de  $l_i$  à  $l_j$ . A cause du retard d'un pas de simulation sur la transmission de la variable  $loc$  à l'entrée du bloc *Dynamique*, ce dernier continue d'intégrer la dynamique  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  associée à l'état discret  $l_i$ , ce qui est représenté par une ligne discontinue entre  $\mathbf{x}_k$  et  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ . Néanmoins, dû au fait que le retour d'état continu est aussi retardé d'un pas de simulation, lorsque la valeur actualisée de l'état discret est disponible, on calcule la valeur de l'état continu à  $t_{k+1}$  :

$$\mathbf{x}_{k+1} = Jump(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}) = K_{3j}K_{1j}\mathbf{x}_k + K_{2j}\mathbf{u}. \quad (4.1)$$

A l'affichage dans un bloc *Scope* sous Simulink, la trajectoire d'état continu entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$  est obtenue par interpolation linéaire, conformément à la figure 4.7. De cette manière, si le premier pas de simulation après la détection de l'événement est suffisamment petit, on obtient directement au *Scope* un affichage d'une précision satisfaisante. Cependant, on peut agir sur le paramètre de simulation concernant l'erreur relative,  $RelTol$ , et essayer de trouver un bon compromis entre la précision d'affichage et le nombre de pas de calcul nécessaire à la simulation. Sinon, il faut ajuster l'affichage en concordance avec les critères de performance requis.

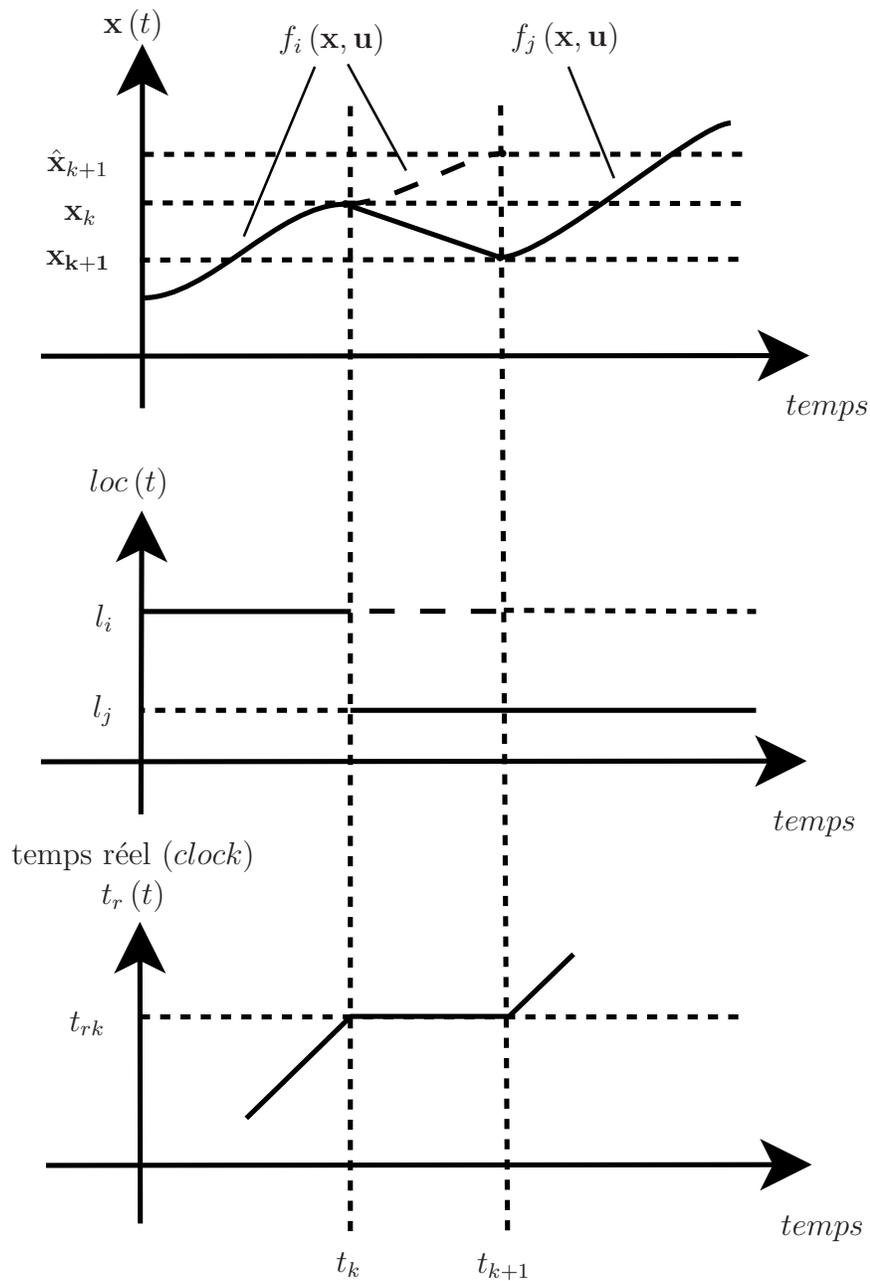


FIG. 4.7 – Évolution des différentes grandeurs lors de la détection d'un événement de simulation, où ici, par abus de notation, l'indice associé à l'état continu est lié au pas de calcul et non plus à la configuration du système

### 4.3.3 Le bloc *Automate*

La principale fonctionnalité du bloc *Automate* est d'évaluer la dynamique discrète du système, à partir des données fournies par les autres blocs. De plus, la conception de ce bloc est faite à partir des modèles *switch automata* de tous les interrupteurs du système. Comme on l'a déjà discuté précédemment, ce bloc est activé uniquement quand un événement de simulation est détecté. De plus, on fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 4.6** *Par la suite, on considère que la cause de tout changement d'état discret du système est uniquement due au changement imminent d'état discret d'un seul interrupteur, qu'on appelle interrupteur « déclencheur ».*

De cette manière, on considère qu'on peut avoir un changement simultané d'état discret de plusieurs interrupteurs, mais, néanmoins, il y en a qu'un seul qui est la cause de ce changement.

Le choix fait pour la réalisation est d'utiliser le formalisme *Statechart*. L'avantage du formalisme *Statechart* est qu'il est proche d'une représentation de type automate. Ainsi, un *chart* a des états discrets, où le changement d'état discret est régi par des transitions qui sont conditionnées par des événements et/ou des conditions de garde. Cependant, le formalisme *Statechart* est dépourvu d'un attribut similaire à l'invariant. De ce fait, il est nécessaire de trouver un correspondant de l'invariant pour les *charts*. La solution qu'on propose est de ramener la condition d'invariance associée à l'état discret en tant que supplément de la condition de garde. Ceci consiste à traduire les deux emplois de la condition d'invariance :

**à l'activation d'un état discret :** bien qu'une transition soit activée, son franchissement est conditionné par le respect de la condition d'invariance à l'activation du mode cible. Afin de respecter cette contrainte, un essai *a priori* de la condition d'invariance est nécessaire. Ceci est réalisé par le bloc *Invariants + Conditions d'impulsion* qui évalue, dans le vecteur *guard*, pour chaque état discret du système, la condition d'invariance proprement dite, ainsi que la condition sur les impulsions si l'état discret donné était activé ;

**à la sortie d'un état discret :** au moment où une des conditions limites (concernant soit la condition d'incompatibilité, soit la frontière) associée à un interrupteur devient valide, l'état discret d'un automate est quitté par une transition de secours, s'il y en a une. Afin de réaliser ceci, on ajoute une transition dans le *chart* pour chaque condition limite correspondant à l'état discret courant de chaque interrupteur du système.

A titre d'exemple, on donne figure 4.8 la mise en œuvre de la traduction de la contrainte d'invariance associée à l'interrupteur « déclencheur »  $Sw_j$  quand l'état discret source analysé est le *mode k*. Ainsi, une fois que la condition représentée par  $[cond\_limite\_modek [j]]$  devient valide, on doit quitter le *mode k* et le nouvel état discret est choisi parmi les états discrets cibles possibles en concordance avec la validité de sa condition d'invariance. Afin d'éviter toute divergence, on assure l'unicité dans

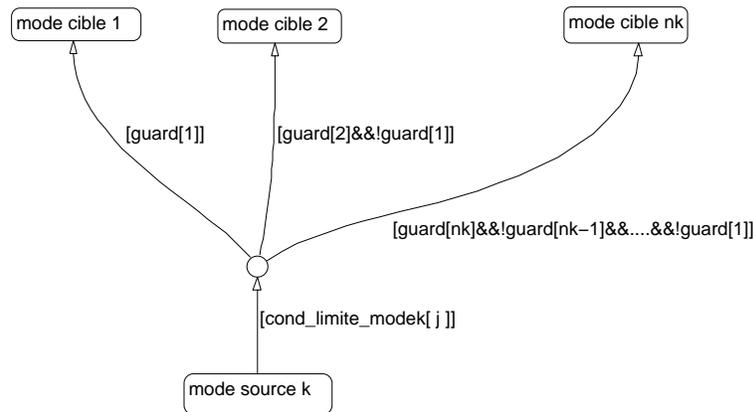


FIG. 4.8 – Réalisation de la condition d’invariance pour les *charts*, où on prend en compte uniquement la frontière correspondant à l’interrupteur « déclencheur »  $Sw_j$ .

le choix, en favorisant *a priori* certains états discrets par rapport aux autres. L’ensemble des états discrets cibles possibles est défini par la totalité des états discrets atteignables par des changements autonomes au niveau de l’état discret de chaque interrupteur, pour le jeu donné des entrées booléennes et événementielles.

De la même façon, on construit les transitions conditionnées par des événements, c’est-à-dire en déterminant l’ensemble des états discrets cibles et en remplaçant la condition  $[cond\_limite\_modek[j]]$  par la condition requise pour quitter l’état discret courant de l’interrupteur « déclencheur » donné. De ce fait, en construisant pour chaque état discret du système la totalité des transitions obtenues pour tous les interrupteurs « déclencheurs » (*a priori* tous), on arrive à déterminer le *chart* qui donne la dynamique discrète du système.

**Exemple :** Dans un *Statechart*, les conditions  $cond\_limite$  dans le cas de l’interrupteur composé obtenu par l’association en antiparallèle d’un IGBT et d’une diode sont les suivantes ( $i$  et  $u$  représentant le courant et la tension aux bornes de l’interrupteur équivalent) :

**mode E :**  $[b == 0 \&\& i > 0]$  (condition d’incompatibilité), par rapport au booléen de commande, et  $[b == 0 \&\& i == 0]$  (frontière), par rapport à la variable libre  $i$  ;

**mode F :**  $[b == 1]$  (condition d’incompatibilité), par rapport au booléen de commande, et  $[u == 0]$  (frontière), par rapport à la variable libre.

De plus, on peut construire un *chart* à plusieurs niveaux afin de rendre le modèle obtenu plus lisible. Ainsi, on considère que le niveau supérieur est construit à partir des modèles d’interrupteurs qui contiennent des entrées booléennes et/ou événementielles,

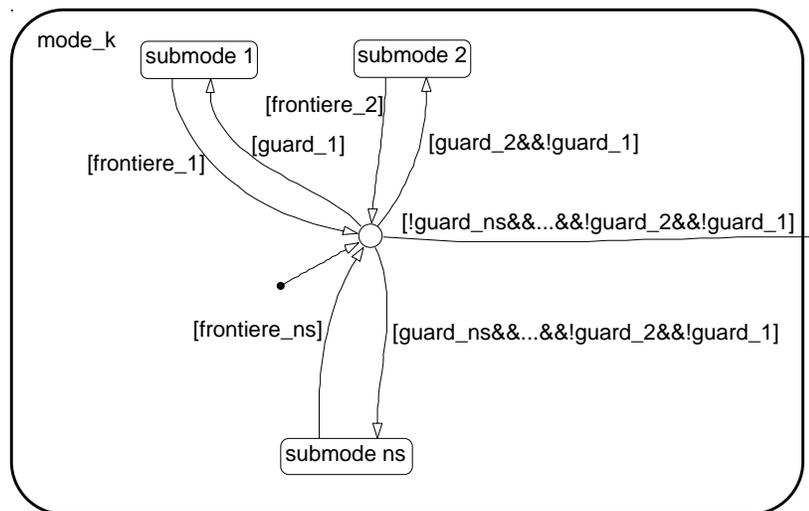
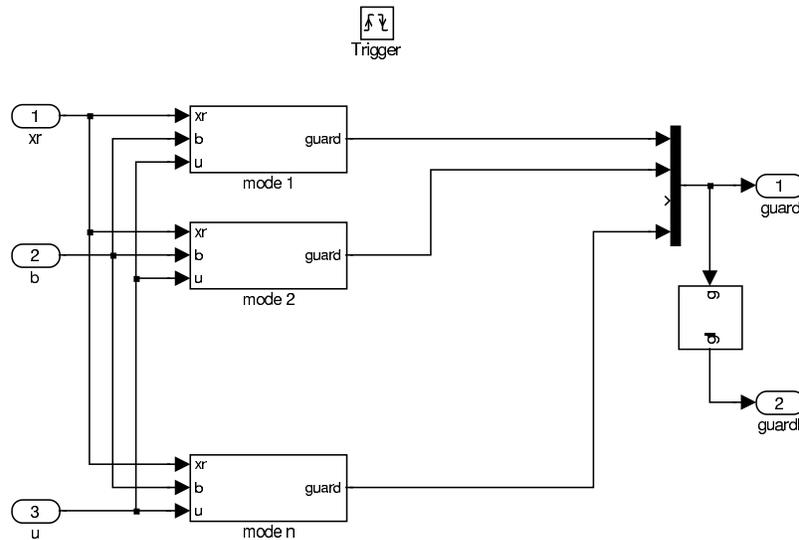


FIG. 4.9 – *Chart* correspondant au niveau inférieur de *mode k*, un état discret du niveau supérieur

tandis que le niveau inférieur est construit uniquement à partir des interrupteurs dont les contraintes dépendent seulement de la variable libre. Donc, à chaque état discret du *chart* du niveau supérieur, il correspond au niveau inférieur un *chart* déterminé pour l'ensemble des interrupteurs qui ne dépend pas directement des entrées booléennes et événementielles. Si l'interrupteur « déclencheur » est au niveau inférieur, on cherche alors à trouver des modes cibles à ce niveau. Néanmoins, si au niveau supérieur l'état discret courant peut être quitté par une transition autonome, il faut prévoir des transitions de sortie du niveau inférieur vers le niveau supérieur afin d'assurer un éventuel changement simultané des interrupteurs au niveau inférieur et au niveau supérieur (cf. figure 4.9). A cause du fait qu'au niveau inférieur les interrupteurs peuvent changer d'état discret uniquement de manière autonome, on peut traiter de manière unitaire le problème du choix de l'état discret cible. De plus, prenant en compte la remarque 4.5, on ne peut pas obtenir des évolutions cycliques quand un événement autonome est détecté, parce qu'alors la condition *guard* associée à l'état discret source n'est plus valide.

Quant au *chart* du niveau supérieur, il se construit de la manière indiquée figure 4.8, sachant que les conditions de type  $[guard[k]]$  sont remplacées par des conditions qui portent sur *guardl*. L'entrée *guardl* est un vecteur de booléens qui a une dimension égale au nombre d'états discrets au niveau supérieur et la valeur de chaque composante est 1, s'il y a au moins un état discret au niveau inférieur dont la condition d'invariance et la condition sur les impulsions sont vraies, et 0 autrement.




---

 FIG. 4.10 – Réalisation du bloc *Invariants + Conditions d'impulsion*

#### 4.3.4 Le bloc *Invariants + Conditions d'impulsion*

Comme son nom l'indique, ce bloc assure la vérification des conditions d'invariance et d'impulsion. Cette vérification est faite d'une façon *a priori* pour tous les modes possibles à l'activation du bloc lors de l'occurrence d'un événement de simulation. D'une manière similaire au bloc *Dynamique*, on assigne un bloc à chaque mode (cf. figure 4.10) qui détermine en fonction de l'état continu,  $\mathbf{x}$ , du vecteur des entrées booléennes,  $\mathbf{b}$ , et du vecteur des entrées de puissance si les conditions d'invariance et de type impulsion associées au mode donné sont satisfaites au moment de l'analyse de l'événement. Pour ce bloc, tous les sous-blocs sont actifs en même temps. De ce fait, la sortie *guard* du bloc *Invariants + Conditions d'impulsion* est un vecteur de booléens de la même dimension que le nombre de modes. Ainsi, on retrouve pour  $guard(k)$  la valeur 1 si les conditions d'invariance et d'impulsion sont respectées simultanément et la même composante a la valeur 0 autrement. En plus, la sortie *guardl* est un vecteur dont la dimension est égale au nombre de modes qu'on retrouve au niveau supérieur du *chart* du bloc *Automate*. La  $k$ -ième composante de ce vecteur a la valeur 1 si pour au moins un des modes qui se trouve au niveau inférieur les conditions d'invariance et d'impulsion sont respectées simultanément et elle a la valeur 0 autrement.

On présente en figure 4.11 la réalisation du bloc *mode k*, générique. De ce fait, on évalue la valeur du vecteur  $T_{ok}^+$  associé à ce mode selon l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T_{ok}^+ &= A_{1k} \mathbf{x}_{1k}^+ + A_{uk} \mathbf{u} \\ &= A_{1k} K_{1k} \mathbf{x}^+ + A_{uk} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

Puisque les interrupteurs utilisés sont des interrupteurs d'électronique de puissance, alors, on déduit, compte tenu de l'écriture en forme canonique de l'invariant, par

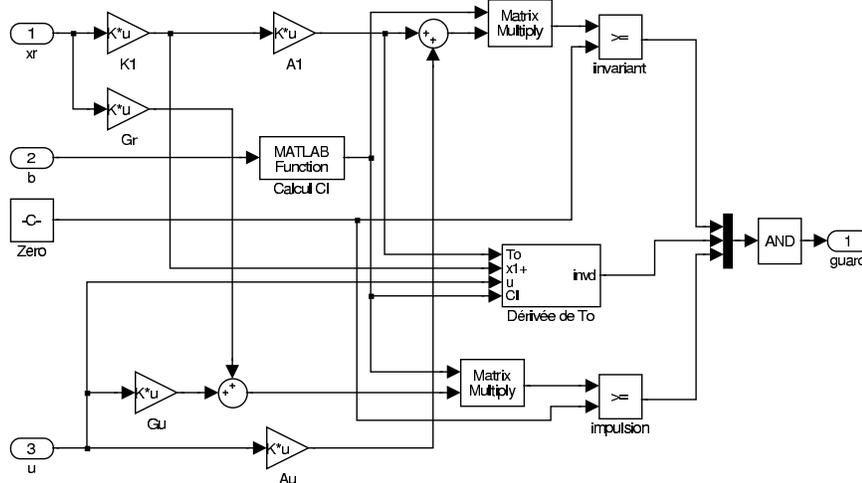


FIG. 4.11 – Réalisation de l'évaluation des conditions d'invariance et d'impulsion pour un *mode k* quelconque

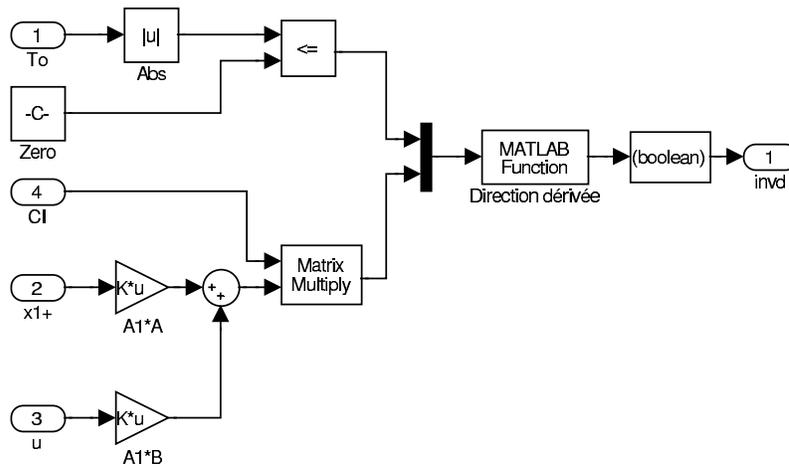
rapport aux valeurs du vecteur des entrées booléennes,  $b$ , une matrice diagonale  $CI_k$ , de dimension égale au nombre d'interrupteurs, telle que la condition d'invariance peut être évaluée uniquement par rapport au vecteur des variables de puissance imposées aux interrupteurs :  $CI_k(b) \cdot T_{ok}^+ \geq 0$ . Par exemple, afin d'obtenir l'élément diagonal correspondant à l'interrupteur équivalent obtenu par l'association d'un IGBT et d'une diode mise en antiparallèle, quand l'état discret en cause est fermé, on a 0, si  $b = 1$ , parce que le courant peut prendre une valeur quelconque, et on a  $-1$ , si  $b = 0$ , parce que dans ce cas le courant peut être uniquement négatif. De plus, à cause de la forme particulière des régions d'invariance, conformément à la relation (3.115), on obtient que les domaines  $\mathcal{P}$  sont identiques aux domaines  $\mathcal{D}$  correspondants. Donc, en utilisant la même matrice  $CI_k$ , on peut exprimer d'une façon équivalente la condition d'impulsion (cf. figure 4.11).

Une situation spéciale est celle où une ou plusieurs composantes du vecteur  $T_{ok}^+$  sont nulles. Il est possible dans ce cas que cette valeur nulle se trouve sur la frontière d'une région d'invariance. Il est donc important de savoir si le champ vectoriel est tel que la composante nulle de  $T_{ok}^+$  soit « poussée » à l'extérieur de l'invariant ou qu'elle soit « gardée » à l'intérieur de l'invariant. De ce fait, on veut éviter d'activer une configuration dont la période d'activité soit nulle. Dans ce contexte, le bloc *Dérivée de To* (figure 4.12), comme le nom l'indique, évalue le signe de la dérivée à droite des composantes nulles de  $T_{ok}^+$ . Formellement, en utilisant aussi l'hypothèse *DC-DC*, on obtient :

$$\dot{T}_{ok}^+ = A_{1k} (A_k \mathbf{x}_{1k}^+ + B_k \mathbf{u}) \quad (4.3)$$

De cette manière, *invd* est un booléen qui a la valeur 0 si :

$$\exists j \text{ t.q. } T_{ok}^+(j) = 0 \text{ et } (CI_k \cdot \dot{T}_{ok}^+)(j) < 0 \quad (4.4)$$




---

 FIG. 4.12 – Réalisation du bloc *Dérivée de  $T_o$* 

et 1 autrement.  $invd$  est calculé par le bloc de fonction Matlab *Direction dérivée* qui analyse le signe de la dérivée seulement pour les composantes de  $T_{ok}^+$  nulles.

## 4.4 Réalisation du modèle Simulink à l'aide de S-fonctions

Dans la section précédente, on a décrit comment on peut obtenir de manière systématique, et avec des moyens assez simples, un modèle de simulation pour les systèmes physiques linéaires avec des interrupteurs. Néanmoins, la réalisation du bloc *Automate* reste manuelle (bien que systématique). Ainsi, pour des systèmes avec un nombre élevé d'interrupteurs, cette réalisation devient difficile et illisible, un exemple en ce sens étant le *chart* de la figure 4.13 qui représente le niveau supérieur d'un système correspondant au fonctionnement de deux IGBTs. Il y a besoin ainsi d'une autre méthode, toujours systématique, afin d'éviter l'inconvénient de la définition graphique de la dynamique discrète. La solution qu'on propose ici est d'utiliser les S-fonctions pour la réalisation des modèles.

Plus précisément, l'objectif est de construire une S-fonction qui soit capable de simuler le fonctionnement global d'un système quelconque qui respecte les hypothèses formulées précédemment. De ce fait, le nouveau schéma de principe de la simulation prend la forme donnée en figure 4.14. Ici,  $y_S$  représente la concaténation du vecteur d'état continu global et de l'état discret du système.

De façon générale, la simulation d'un bloc Simulink, les blocs S-fonctions inclus, consiste dans l'évaluation de la sortie en fonction de l'entrée et de l'état, ce qui comporte plusieurs étapes, conformément à la figure 4.15. Dans ce contexte, plusieurs solutions sont envisageables quand il s'agit de la mise en œuvre des S-fonctions. Pour des raisons subjectives, on a pris en compte uniquement l'implémentation sous M et

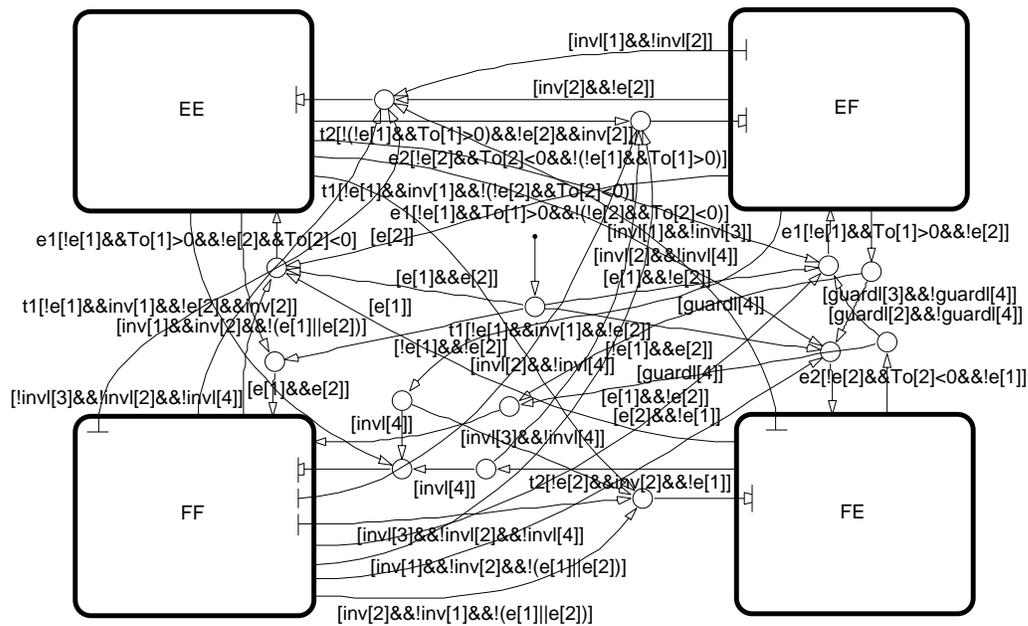


FIG. 4.13 – Chart du niveau supérieur d'un système qui correspond au cas où les interrupteurs pris en compte sont deux IGBTs

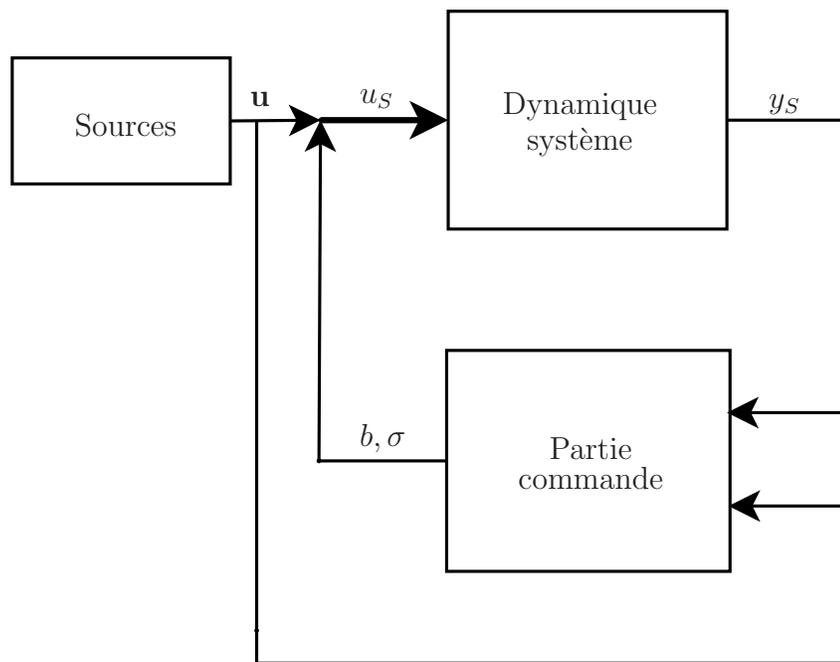


FIG. 4.14 – Schéma de principe de la simulation à l'aide de S-fonctions

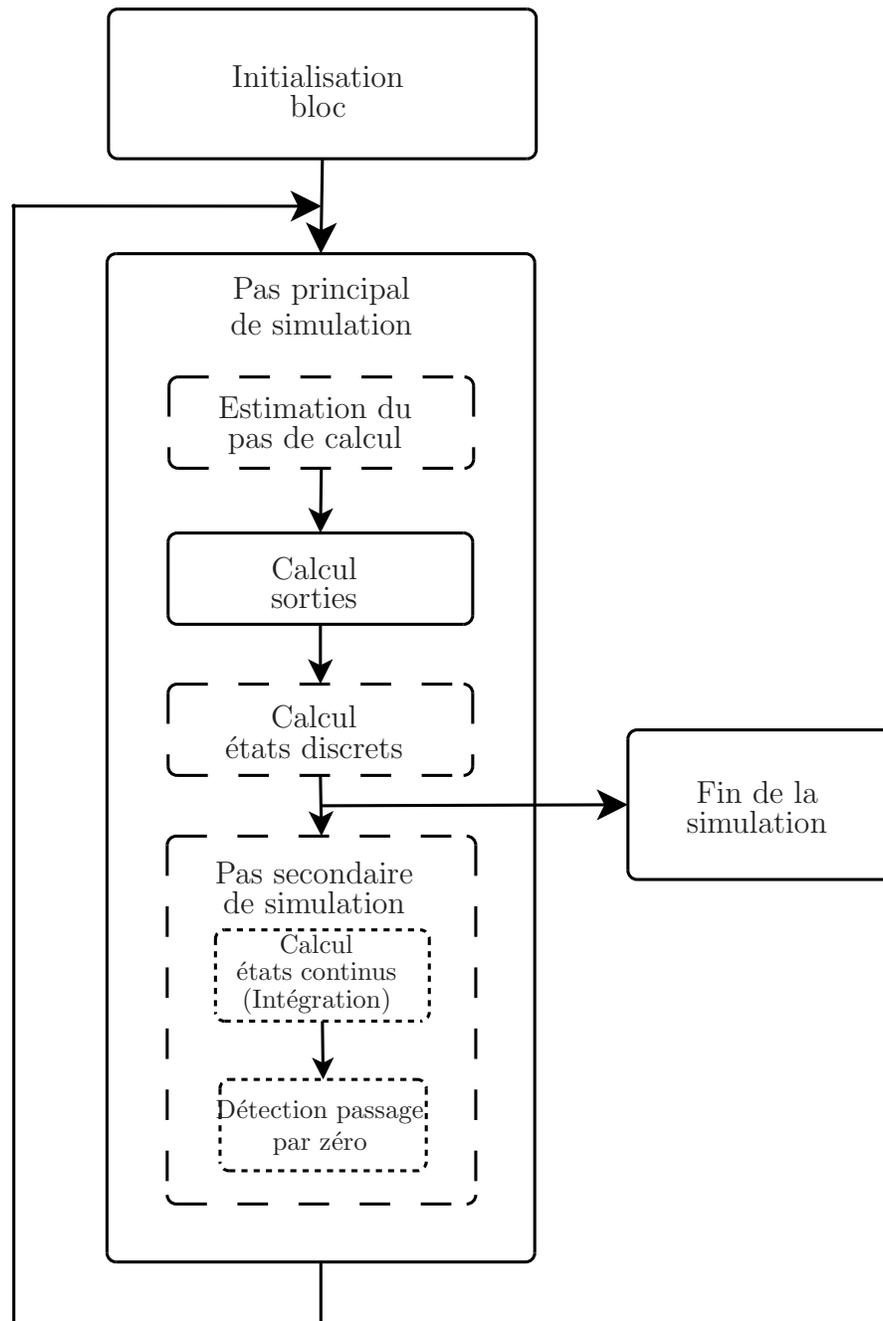


FIG. 4.15 – Schéma général de simulation des blocs par Simulink. Les cadres continus représentent les fonctionnalités toujours mises en œuvre par tous les blocs, tandis que les cadres discontinus représentent les fonctionnalités qui peuvent être mises en œuvre par certains blocs

C. Cependant, dès le début, on s'est aperçu, pour la version 6.5 de Matlab, ce qui correspond à une version 5.0 de Simulink, que l'implémentation sous C des S-fonctions offre davantage de maîtrise sur le processus de simulation, comme, par exemple, pour la détection des passages à zéro de certaines variables auxiliaires.

Pour la simulation d'un système physique linéaire avec des interrupteurs à l'aide d'une S-fonction, on définit de la façon suivante l'entrée, l'état et la sortie du bloc Simulink :

**entrée :** le vecteur  $u_S$  est la concaténation du vecteur des entrées de puissance,  $\mathbf{u}$ , du vecteur des entrées booléennes,  $b$ , et du vecteur des entrées événementielles,  $\sigma$  ;

**état :** le vecteur d'état continu,  $x_S$ , et la variable d'état discrète  $x_{dS}$  qui représente le codage en décimal de l'état discret du système,  $l$  ;

**sortie :** le vecteur  $y_S$  a une composante continue qui est égale au vecteur d'état continu global,  $y_S^c = \mathbf{x}$ , et une composante discrète qui est égale au vecteur d'état discret,  $y_S^d = x_{dS}$ .

Ainsi, dans l'étape d'initialisation du bloc, on utilise la méthode *mdlInitializeSizes* afin d'initialiser la dimension de  $u_S$ ,  $x_S$  et  $y_S$ , où  $x_{dS}$  est un scalaire. De plus, on emploie la même méthode pour initialiser la dimension du signal dont on veut tester le passage par zéro, de façon générale cette dimension est égale au nombre d'interrupteurs dans le système. Toujours dans l'étape d'initialisation, on emploie la méthode *mdlInitilizeSampleTimes* pour indiquer que la simulation doit s'effectuer à pas variable. Finalement, on utilise la méthode *mdlInitializeConditions* pour préciser les valeurs initiales de l'état discret,  $x_{dS0}$ , et de l'état continu correspondant,  $x_{S0}$ .

Le pas principal consiste dans la simulation proprement dite du système sur un pas de calcul, où un solveur à pas variable (*ode45 - Dormand-Prince*) est employé et le temps de la simulation est considéré comme « continu ». Cette dernière option fait que l'étape de l'estimation du pas de calcul est implicitement résolue par Simulink et il n'y a pas besoin d'implémenter de manière explicite une méthode spécifique. Soit  $t_k$  le moment temporel de début du pas principal courant,  $x_{dS}(t_k^-) \leftarrow l_i$  l'état discret calculé au pas principal antérieur et  $x_S^i(t_k^-)$  l'état continu calculé en fin de pas principal antérieur. Par la suite, on décrit chaque étape de simulation :

**Calcul des sorties** On actualise la valeur du vecteur de sortie selon les expressions suivantes :

$$y_S^c(t_k) = K_{3i}x_S^i(t_k^-) + K_{2i}\mathbf{u} \quad (4.5a)$$

$$y_S^d(t_k) = x_{dS}(t_k^-), \quad (4.5b)$$

ces opérations sont implémentées dans la méthode *mdlOutputs*. En plus, la valeur de  $y_S$  est enregistrée comme la valeur définitive au pas courant, ce qui revient à dire que si la sortie du bloc S-fonction est connectée à un bloc d'affichage et/ou de mémorisation, alors cette valeur est affichée et/ou mémorisée.

**Calcul des états discrets** Cette étape doit s’effectuer uniquement si on détecte un événement de simulation, tel qu’il a été défini en section 4.2. Tout comme dans la solution avec des blocs élémentaires, les événements de simulation sont déclenchés par des variables externes telles que  $b$  et  $\sigma$  ou par le passage par zéro de certaines variables internes, ceci est discuté en détail dans l’étape *Détection passage par zéro*. Si un tel événement est détecté et une transition est obligatoire, alors l’état discret cible est déterminé d’une manière similaire à celle décrite en sous-sections 4.3.3 et 4.3.4. Néanmoins, cette fois on n’est plus obligé de vérifier tous les modes cibles possibles. On s’arrête au premier qui respecte les conditions présentées dans les deux sous-sections citées. De plus, afin de minimiser le coût de calcul de la recherche du mode cible, on ordonne de manière décroissante les modes cibles possibles selon la dimension de l’état continu (local). Si toutes les conditions pour le changement du mode sont réunies alors soit  $x_{dS}(t_k^+) \leftarrow l_j$  le mode cible trouvé. Dans ce cas, la valeur de l’état continu doit elle aussi être actualisée :

$$x_S^j(t_k^+) = K_{1j} y_S^c(t_k^-) \quad (4.6)$$

Si la dimension du vecteur d’état continu local est strictement inférieure à la dimension du vecteur d’état global, alors on complète jusqu’à la dimension de celui-ci avec des zéros. Autrement, s’il n’y a pas eu de changement de mode, alors on considère, implicitement,  $x_S^i(t_k^+) = x_S^i(t_k^-)$ . Toutes ces opérations sont implémentées dans la méthode *mdlUpdate*.

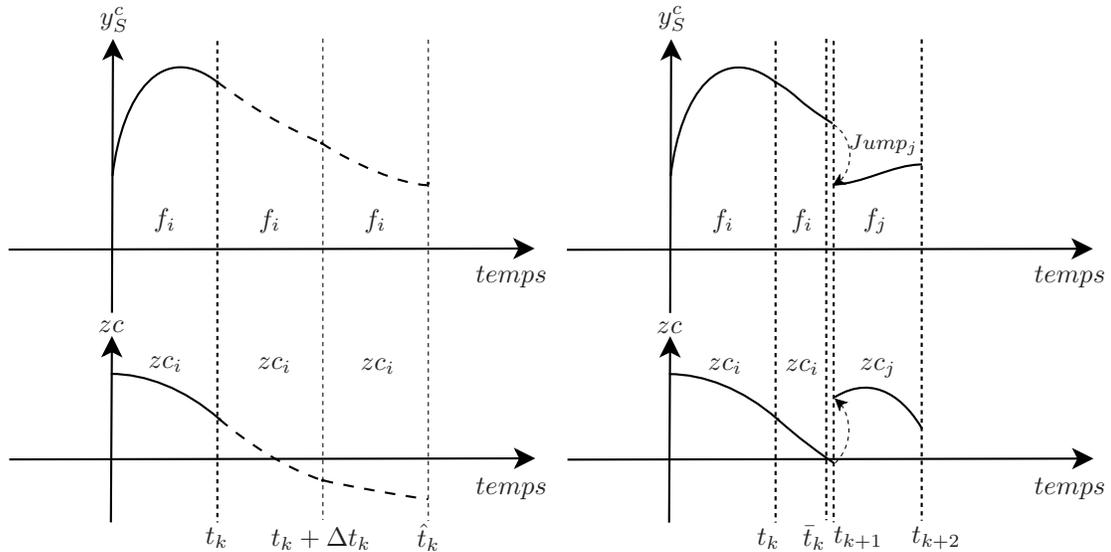
**Pas secondaire – Calcul de l’état continu** Soit  $l_i$  le mode actif trouvé à la fin de l’étape précédente, alors ce calcul consiste à son tour en deux étapes : la détermination d’un instant  $t_{k+1}$  et l’intégration de la dynamique de l’état continu sur l’intervalle  $[t_k, \hat{t}_k]$  afin de calculer  $x_S^i(\hat{t}_k^-)$ . Soit  $\Delta t_k$  une estimation de la dimension du pas, dont la première estimation est un paramètre *a priori* de la simulation. Si cette estimation se trouve dans un intervalle défini par le pas minimum et le pas maximum, tous les deux également des paramètres de la simulation établis *a priori*, alors on procède à l’intégration de la dynamique continue sur cet intervalle temporel, en utilisant le solveur préétabli. La dynamique continue doit être mise sous une forme explicite (*ODE*) dont il faut uniquement préciser la partie droite, c’est à dire  $f_i(x_S^i, \mathbf{u})$ . Si  $f_i$  a une dimension inférieure à la dimension de l’état continu global, alors il faut compléter avec des zéros jusqu’à atteindre celle-ci. De cette manière, on s’assure qu’il n’y a pas de dépassement dû à une intégration non-contrôlée. Afin d’initialiser la partie droite de l’équation dynamique, on utilise la méthode *mdlDerivatives*. A la fin du processus d’intégration, on trouve la valeur de l’état continu  $x_S^i(t_k + \Delta t_k)$  et Simulink fait appel encore une fois à la méthode *mdlOutputs* pour calculer le vecteur de sortie. Si cette valeur ne respecte pas les contraintes imposées par les paramètres d’erreur, relative et absolue, alors Simulink prend la décision de refaire les calculs avec  $\Delta \hat{t}_k < \Delta t_k$  jusqu’au moment où on arrive à avoir un résultat convenable. Autrement, Simulink prend la décision d’augmenter le pas

de simulation jusqu'à avoir finalement, si le résultat de l'intégration est toujours convenable, un pas égal au pas maximum. Les valeurs intermédiaires du vecteur de sortie obtenues sont propagées à travers tout le modèle de simulation, mais, toutefois, ces résultats intermédiaires ne sont ni enregistrés et ni affichés.

**Pas secondaire – Détection des passages par zéro** Dans cette étape, on teste le passage par zéro de certaines variables auxiliaires. On définit ces variables auxiliaires dans la méthode *mdlZeroCrossings* comme étant le vecteur des variables libres associées aux interrupteurs susceptibles de produire des événements autonomes de simulation dans le mode actif courant,  $zc_i = CE_i \cdot T_{oi}$ , cf. à la sous-section 4.3.2. Simulink fait l'évaluation de  $zc_i$  à l'instant  $t_k$  et à l'instant  $\hat{t}_k$ , déterminé à l'étape précédente. Si au moins une des composantes change de signe en passant de positif à négatif, alors le mécanisme de détection de passage par zéro de Simulink est activé. Ce mécanisme cherche à encadrer avec précision le moment où le premier changement de signe a eu lieu en déterminant deux instants,  $\bar{t}_k$  et  $t_{k+1} \in [t_k, \hat{t}_k]$ . Ces deux instants sont enregistrés comme des moments où des pas principaux doivent être effectués : à l'instant  $\bar{t}_k$ , Simulink exécute uniquement les étapes de *calcul de sorties* et de *calcul des états discrets*, tandis qu'à l'instant  $t_{k+1}$  toute la boucle est exécutée de la même façon qu'au moment  $t_k$ . C'est à ce moment que l'événement autonome peut produire le changement d'état discret lors de l'exécution de l'étape *calcul des états discrets*. Autrement, si dans l'intervalle  $[t_k, \hat{t}_k]$  il n'y a eu aucun passage par zéro de positif à négatif d'une composante de  $zc_i$ , alors  $t_{k+1} = \hat{t}_k$ .

On présente en figure 4.16, un scénario pour l'évolution qualitative de l'état global,  $y_S^c$ , et de la variables auxiliaire,  $zc$ , lors de la simulation d'un système, conformément au schéma général de la figure 4.15. Soit ainsi  $t_k$  le moment qui correspond au pas principal courant et  $y_S^d \leftarrow l_i$  le codage décimal de l'état discret du système, obtenu lors de l'exécution de l'étape *calcul des états discrets*. En figure 4.16(a), on présente la recherche d'une meilleure estimation de  $y_S^c$  en terme de précision et de longueur du pas de simulation. Puisque la variable auxiliaire  $zc_i$  change de signe, passant de positif à négatif, en figure 4.16(b), Simulink trouve les instants  $\bar{t}_k$  et  $t_{k+1}$  qui encadrent le moment effectif du passage par zéro. De plus, Simulink considère ces instants particuliers comme des moments où un pas principal doit s'effectuer. De ce fait, à l'étape *calcul des sorties*, le calcul de  $y_S^c$  se fait selon le mode de calcul associé à  $l_i$ . A l'étape *calcul des états discrets*, le nouvel état discret,  $x_{dS} \leftarrow l_j$ , est déterminé et, en plus, la valeur de l'état continu local,  $x_S^j$ , est actualisée, ce qui correspond, implicitement, à l'application de *Jump<sub>j</sub>* au niveau de  $y_S^c$ . Lors du pas secondaire de calcul de l'état continu, la dynamique  $f_j$  est intégrée et les calculs intermédiaires du vecteur de sortie sont faits en concordance avec le nouvel état discret :  $y_S^d \leftarrow l_j$ , bien que cette valeur ne soit pas associée de manière permanente à  $y_S^d$  qu'au moment où le pas principal à l'instant  $t_{k+2}$  est exécuté.

Par rapport à l'évolution donnée en figure 4.7, on peut constater que l'évolution donnée en figure 4.16 ne nécessite plus de pas supplémentaire de calcul lors du changement d'état discret. Ce pas supplémentaire était le résultat de l'introduction des blocs



(a) Évolution de  $y_S^c$  dans le cadre de l'étape du pas secondaire correspondant au calcul de l'état continu. On distingue cette évolution hypothétique, postérieure au moment  $t_k$ , représentée par une courbe discontinue, de l'évolution réelle, résultat du pas principal de calcul antérieur au moment  $t_k$ , représentée par une courbe continue. On donne aussi la possible évolution de  $z_c$ , qui n'est pas calculée par Simulink

(b)  $\bar{t}_k$  et  $t_{k+1}$  représentent les moments associés aux pas principaux de calcul qui encadrent le passage par zéro de la variable auxiliaire  $z_c$ . Ce passage produit un changement d'état discret qui génère un saut instantané dans l'évolution de  $y_S^c$  par la fonction  $Jump_j$ . L'évolution de  $y_S^c$  de  $t_{k+1}$  à  $t_{k+2}$  est donc obtenue par l'intégration de la nouvelle dynamique  $f_j$ .

FIG. 4.16 – Évolution qualitative de l'état global,  $y_S^c$ , et de la variable auxiliaire,  $z_c$ , lors de la simulation d'un système par Simulink

de retard qui coupaient la boucle algébrique formée par l'influence de l'état discret sur la dynamique continue et celle de l'évolution de l'état continu sur la dynamique discrète. Dans le cas de l'emploi d'une S-fonction, cette boucle algébrique est résolue implicitement par la séquentialité des étapes de simulation. Toujours dans le même registre, en utilisant une S-fonction, il n'est plus nécessaire d'introduire un retard au bouclage de la variable d'état discret vers le bloc *Commande* comme c'était le cas dans la solution avec des blocs élémentaires. Ceci est possible parce que, en effet,  $b$  et  $\sigma$  sont uniquement utilisés dans l'étape *calcul des états discrets*, ce qui coupe l'éventuelle boucle qui aurait pu se former entre ceux-ci et  $y_S$ .

## 4.5 Conclusion

Dans le cadre de ce chapitre, on a traité, à l'aide de Simulink, le problème de la simulation des systèmes physiques avec interrupteurs. On a analysé les interactions entre les différentes grandeurs du système, en mettant en évidence les liens entre la dynamique continue et la dynamique discrète qui se tissent autour du modèle des interrupteurs. Lors de la mise en œuvre, on a identifié deux solutions : la première qui utilise uniquement des blocs élémentaires et une deuxième qui utilise les S-fonctions.

La solution qui emploie seulement des blocs élémentaires est une solution simple qui repose, en ce qui concerne la dynamique continue, sur la définition d'un bloc générique associé à un état discret. De ce fait, ceci peut être multiplié pour obtenir tous les blocs nécessaires qui définissent la dynamique continue globale du système. La dynamique discrète est le résultat des différentes transitions qui existent entre les modes du système. Ainsi, une transition peut être franchie si les conditions de déclenchement et les conditions de validité du mode cible sont réunies. Au niveau de l'implémentation de la dynamique discrète, on emploie un bloc Stateflow activé uniquement lors de l'occurrence des événements de simulation, où les conditions de validité sont fournies par un bloc supplémentaire. Ce dernier est activé en même temps que le bloc Stateflow auquel il fournit l'information suivante : à savoir quels modes à l'instant donné peuvent être des modes cibles valides. Néanmoins, cette solution a le désavantage de créer des modèles qui ne sont pas réutilisables d'un système à l'autre. De plus, bien que la procédure soit systématique, la réalisation du bloc Stateflow n'est pas automatisée et pour des systèmes à nombre d'interrupteurs élevé, la lisibilité du *chart* est réduite.

Pour pallier ces désavantages, on a proposé une deuxième solution qui emploie une S-fonction pour simuler la dynamique complète du système. Cette fois, lors de la simulation de la dynamique discrète, on n'est plus obligé d'analyser tous les modes, mais on vérifie la validité des modes dans l'ordre décroissant de la dimension de l'état continu local et on choisit comme mode cible le premier qui respecte toutes les conditions. De plus, grâce à une meilleure utilisation de la boucle de simulation Simulink, on évite l'introduction de blocs de retard afin de couper certaines boucles algébriques qui se formaient quand la première solution était employée.

Les deux solutions proposées dans ce chapitre résident sur la présence dans la mémoire de toute l’information nécessaire, c’est-à-dire les matrices qui définissent la dynamique continue de tous les modes, les matrices qui définissent les conditions d’invariance, d’impulsion, les modes interdits, etc. De ce fait, quand le nombre d’interrupteurs et la dimension de l’état continu global sont élevés, le problème de la mémoire occupée par l’information nécessaire peut devenir critique. Une solution possible à ce problème a été proposée par (Beers *et al.*, 2006), en utilisant comme point de départ le bond-graph du système. Elle consiste dans l’obtention en cours de la simulation des différentes matrices associées au mode actif et de leur mémorisation au fur et à mesure de l’avancement de la simulation. Toutefois, pour l’instant, rien n’est précisé à l’égard des évolutions par des modes où la dimension de l’état continu local n’est pas la même. Aussi, on prend en compte uniquement des événements de simulation commandés.

De plus, mis à part le problème de la mémoire, les travaux à venir devront prendre en considération la propagation des erreurs numériques. Ici, on peut citer au moins deux sous-problèmes : un premier lié à la commutation et un deuxième lié à la contrainte algébrique associée à l’état continu global. Le premier cas survient lors des commutations autonomes, telles que présentées figure 4.16(b), où l’on peut observer que la variable auxiliaire  $z_c$  devient négative, alors que la commutation est censée se faire toujours à zéro. En même temps, l’état continu du système évolue lui aussi au-delà de la valeur où le système aurait dû changer d’état discret et, par conséquent, la valeur de l’état continu après la commutation est à son tour affectée. Une évaluation des effets de cette chaîne de propagation des erreurs reste donc à étudier. Dans le deuxième cas, soit à cause des erreurs d’intégration, soit à cause du mauvais conditionnement des matrices reliées à la contrainte algébrique, il se peut que celle-ci ne soit pas respectée à l’intérieur de la période d’activité d’un état discret. Bien que l’évaluation de la contrainte algébrique ne soit pas présente explicitement dans la simulation, son non-respect peut entraîner, comme on l’a vu dans le chapitre précédent, des fausses impulsions et discontinuités de l’état qui, à leur tour, peuvent invalider des modes cibles qui normalement auraient été valides.

# Chapitre 5

## Application : Commande au démarrage d'un convertisseur à double résonance

### 5.1 Vue d'ensemble

Ce chapitre traite de la mise au point d'une commande en boucle ouverte sur un système physique avec des interrupteurs présentant une complexité élevée, le convertisseur à double résonance. Plus précisément il s'agit de déterminer une séquence d'instantanés de commutation telle qu'on obtient certaines performances dynamiques lors du démarrage avec des conditions initiales nulles. Cette séquence est déterminée hors-ligne par la formulation d'un problème d'optimisation où la fonction de coût est définie par rapport aux performances dynamiques désirées. La réalisation de la solution repose sur l'existence d'un modèle fin de simulation, dont la procédure d'obtention a été décrite dans le chapitre précédent.

Une présentation générale du convertisseur à double résonance (les contraintes de fonctionnement, la modalité de commander en boucle fermée et la problématique du démarrage) est donnée en section 5.2. Ensuite, en section 5.3, on analyse le principe de calcul de la séquence de démarrage. Ceci consiste dans l'évaluation d'une fonction de coût suivie par la mise en œuvre du bloc de commande du modèle de simulation en concordance avec les contraintes formulées en section 5.2 et, en fin de section, on discute les résultats obtenus. Le chapitre est complété par la section 5.4 de conclusions. Enfin, les travaux présentés dans ce chapitre ont été partiellement publiés en (Zainea *et al.*, 2006).

### 5.2 Le convertisseur à double résonance

L'analyse de la fréquence de commutation est une façon très répandue de classer les convertisseurs à courant continu (Papafotiou and Morari, 2005). Ainsi, il existe des convertisseurs à fréquence de commutation fixe, tel que, par exemple, le convertis-

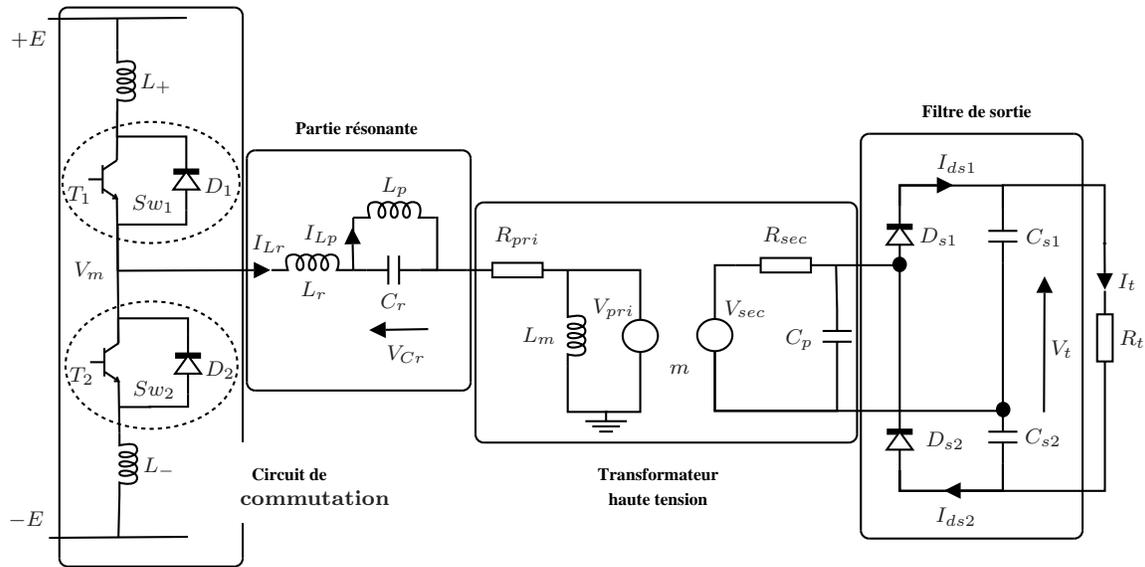
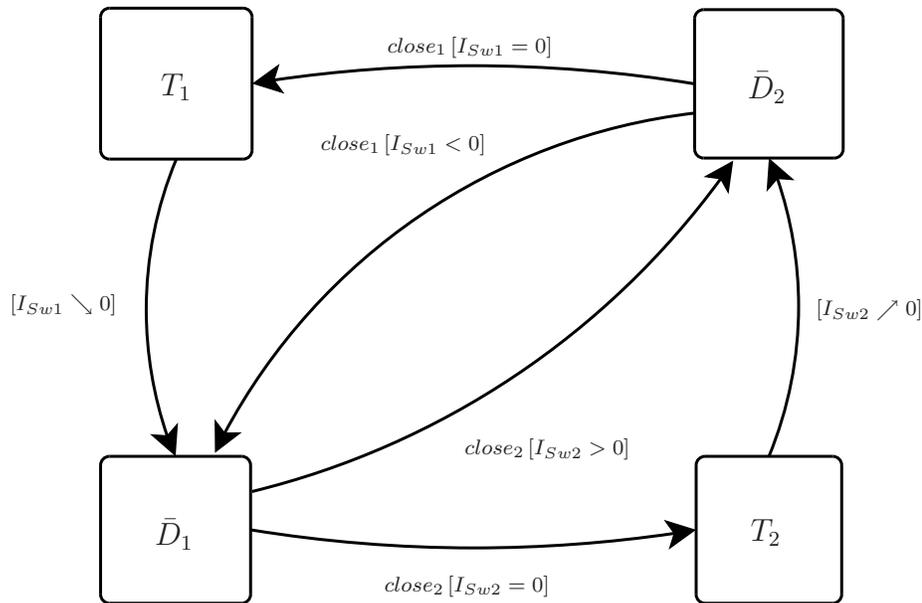


FIG. 5.1 – Circuit électrique du convertisseur double résonant à demi pont. Ce convertisseur est utilisé dans l'imagerie médicale, la résistance  $R_t$  modélisant le tube à rayons X. Les transistors  $T_1$  et  $T_2$  sont réalisés en technologie IGBT

seur « boost » et des convertisseurs à fréquence variable, appelés aussi convertisseurs résonants, catégorie à laquelle appartient aussi le convertisseur à double résonance donné figure 5.1. L'avantage principal des convertisseurs résonants par rapport aux convertisseurs à fréquence fixe est qu'ils produisent des pertes minimales, quasiment nulles, lors des commutations d'interrupteurs. L'inconvénient de ces structures est d'une part la complexité des modèles et d'autre part les difficultés dans la conception des lois de commande. De plus, la fréquence variable de commutation nécessite l'utilisation de filtres plus performants pour minimiser l'impact des interférences électromagnétiques.

D'un point de vue qualitatif, le fonctionnement du convertisseur à double résonance doit assurer le transfert d'énergie à partir des sources vers la charge, ce qui se réalise principalement par l'intermédiaire de l'oscillateur. Ainsi, quand un IGBT est en conduction, l'énergie est transférée vers l'oscillateur et pour que ce procédé soit efficace, les phases de l'oscillateur doivent être synchronisées avec le signe des sources. Autrement, si on considère par exemple qu'on arrive à fermer l'IGBT  $T_1$  lorsque  $V_{Cr} > E_+ > 0$ , alors le courant dans l'IGBT s'« écrase » rapidement menant ainsi à son blocage. Une partie de l'énergie stockée par le circuit résonant est transférée à son tour à la charge, aux bornes de laquelle on retrouve la tension alternative induite par l'oscillateur, modulée par le transformateur et redressé par le filtre de sortie. Une autre partie de cette énergie retourne aux sources lorsqu'au moins une des diodes est en conduction.




---

 FIG. 5.2 – Automate de commande de la partie « Circuit de commutation »
 

---

### 5.2.1 Fonctionnement normal du système

L'application du convertisseur étudié dans le cadre de ces travaux est l'alimentation d'un tube à rayons X utilisé dans le domaine de l'imagerie médicale. Ce type d'application fait appel à des puissances élevées délivrées dans des délais très courts, ce qui entraîne des contraintes fortes en ce qui concerne l'application de la loi de commande. Ces contraintes de fonctionnement peuvent être décrites de la façon suivante :

- C1. les deux IGBTs ne peuvent pas être en conduction simultanément, ce qui constituerait un quasi court-circuit sur les sources c'est-à-dire une augmentation rapide des courants dans les IGBTs qui, en plus, favorise uniquement l'échange d'énergie entre les sources ;
- C2. si un des deux IGBTs est en conduction alors il ne peut pas être ouvert par une commande externe, ce qui produirait des commutations dures dans le système (ceci entraînerait une discontinuité au niveau du courant dans l'inductance située sur la même branche et, donc, une discontinuité de la variable d'état associée). Cet emploi des interrupteurs commandés est aussi connu sur le nom de commutation à courant nul (ZCS – *zero current switch*).

En plus des contraintes de fonctionnement, la manière souhaitée de réaliser la commande du système, c'est-à-dire de connecter alternativement les sources à la partie résonante, introduit un ensemble supplémentaire de contraintes, synthétisé par l'automate de commande donné figure 5.2. Ainsi, l'évolution de cet automate peut être décrite en terme de contraintes de la façon suivante :

- S1. les IGBTs doivent alterner leur état discret passant, la durée entre le blocage du premier et la mise en conduction de l'autre étant strictement positive en raison

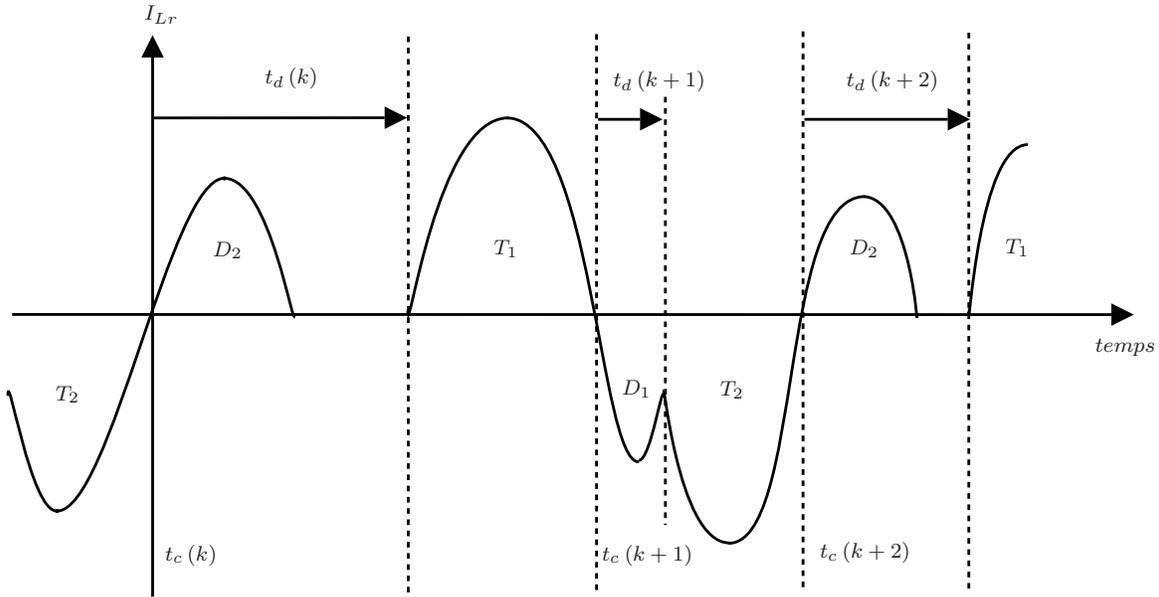


FIG. 5.3 – Mise en évidence de la variable de commande  $t_d$  sur l'évolution du courant  $I_{Lr}$

du retard naturel entre la détection du blocage d'un et l'enclenchement de la fermeture de l'autre. Cette contrainte est représentée en figure 5.2 par le fait que le passage de l'état discret  $T_1$  vers l'état discret  $T_2$  et vice versa se fait par l'état discret  $\bar{D}_1$  et, respectivement,  $\bar{D}_2$  ;

- S2. une fois  $T_1$ , respectivement  $T_2$ , passé en mode bloqué à cause du passage par zéro de son courant, alors la commande externe d'ouverture de l'IGBT doit survenir avant le blocage de la diode  $D_1$ , respectivement  $D_2$ , afin de ne pas remettre en question l'alternance des conductions d'IGBT. Sur l'automate de la figure 5.2 ceci se traduit par l'absence d'une transition entre  $\bar{D}_1$  et  $T_1$  et entre  $\bar{D}_2$  et  $T_2$  ;
- S3. si la commande de fermeture de l'IGBT  $T_1$ , respectivement  $T_2$ , est forcée lorsque la diode  $D_1$ , respectivement la diode  $D_2$ , est en conduction, alors cette commande doit être ignorée, mais considérée comme étant appliquée toujours pour ne pas perturber l'alternance des conductions d'IGBT. Les transitions de  $\bar{D}_1$  vers  $\bar{D}_2$  et de  $\bar{D}_2$  vers  $\bar{D}_1$  sont le résultat de l'application de cette contrainte.

Une fois l'ensemble des contraintes énoncé, on peut remplacer les variables de commande d'action directe sur les IGBTs,  $close_1$  et  $close_2$ , par le temps écoulé entre le blocage de  $T_1$ , respectivement le blocage de  $T_2$ , et la mise en conduction de  $T_2$ , respectivement la mise en conduction de  $T_1$ . Autrement dit, la variable de commande se traduit par le temps d'activité de l'état discret  $\bar{D}_1$ , respectivement  $\bar{D}_2$ . En plus, on peut faire figurer cette variable de commande, qu'on appelle par la suite  $t_d$  (temps de délai), sur l'évolution du courant  $I_{Lr} = I_{Sw1} + I_{Sw2}$ , comme le montre la figure 5.3.

Sur la figure 5.3 on peut distinguer deux types de fonctionnement : conduction discontinue, quand il arrive que  $Sw_1$  et  $Sw_2$  soient bloqués en même temps, et conduction

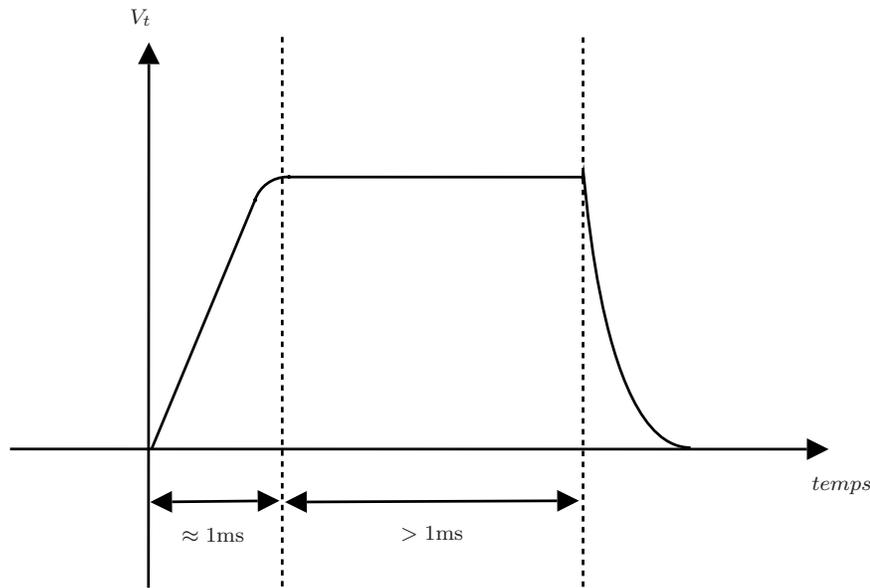


FIG. 5.4 – Évolution souhaitée de la tension aux bornes du tube à rayons X dans le but de faire une radiographie

continue, quand  $Sw_1$  et  $Sw_2$  ne sont jamais bloqués en même temps. En conduction continue, il se peut qu'il arrive, pour des périodes courtes, que  $T_1$  et  $D_2$ , respectivement  $T_2$  et  $D_1$ , soient en conduction en même temps. Ceci n'est pas contraire à la première contrainte, parce qu'ici les sources n'échangent pas directement de l'énergie, mais cet échange passe par l'oscillateur, ce qui fait qu'il n'y a pas un emballement du courant dans  $T_1$  ou  $T_2$ .

### 5.2.2 Commande en boucle fermée

L'application la plus connue de la radiologie est la radiographie standard qui consiste en la prise d'images, sur un film ou sur un écran, d'une partie du corps humain. Afin de pouvoir prendre cette image, il est nécessaire d'assurer un certain niveau (moyen) de tension aux bornes du tube, le profil désiré de la tension étant présenté figure 5.4. On y identifie deux phases : une phase de montée suivie par le ralliement de la valeur finale souhaitée et une phase de descente qui correspond à la décharge de l'énergie stockée dans le convertisseur par la résistance du tube. Ce type d'application peut exiger une puissance instantanée importante, jusqu'à 150kW, suivant différents paramètres, un des plus importants étant l'épaisseur des tissus à radiographier.

(Croulard, 2003) propose une commande en boucle fermée basée sur le suivi des trajectoires du même type que celle donnée en figure 5.4. Afin de réaliser ce suivi, on définit un quadrillage de points d'équilibre dans l'espace d'état, tel qu'il est possible de trouver des lois de commande locales qui stabilisent le système autour de ces points. Ainsi, il est possible de traduire le profil de la trajectoire à suivre dans un enchaînement de points qui appartiennent à la grille. Maintenant, pourvu que la grille

soit suffisamment dense telle que le domaine stabilisable par la loi de commande locale associée à un point donné contienne tous les points voisins à ce point, on peut assurer le suivi de la trajectoire donnée en choisissant convenablement l'enchaînement des lois de commandes locales à appliquer. Par la suite, on décrit brièvement les principales étapes de cette méthode, ainsi que les principales hypothèses prise en compte.

Étant donné le fonctionnement normal décrit dans la section 5.1, le régime stationnaire est caractérisé par une évolution périodique, qu'on appelle aussi cycle (limite). Si on considère uniquement les cycles où on applique le même  $t_d$  à la mise en conduction de l'IGBT  $T_1$  et à la mise en conduction de l'IGBT  $T_2$ , alors la valeur moyenne du courant  $I_{Lr}$  est nulle ; de plus, on constate que les instants de début des temps de délai,  $t_c$  (cf. figure 5.3), se trouve précisément au début, au milieu et à la fin du cycle. A ces instants là on trouve aussi que :

$$|V_{Cr}(t_c(k+1))| = |V_{Cr}(t_c(k))| \quad (5.1a)$$

$$|I_{Lp}(t_c(k+1))| = |I_{Lp}(t_c(k))| \quad (5.1b)$$

$$V_t(t_c(k+1)) = V_t(t_c(k)) \quad (5.1c)$$

pour tout  $k > N$ , où  $t_c(N)$  est le début de l'évolution cyclique.

Soit  $\bar{x} = (V_t \ |I_{Lp}| \ |V_{Cr}|)^T$ , avec  $\bar{x}_0 = \bar{x}(t_c(k))$ ,  $\forall k > N$  et soit la variable de commande  $t_d$ , avec  $t_{d0}$  la valeur qui correspond au cycle considéré. Dans ce cas, on peut définir dans le voisinage de  $(\bar{x}_0, t_{d0})$  le modèle linéaire échantillonné tangent suivant :

$$x(k+1) = F_{bf}x(k) + G_{bf}u(k), \quad (5.2)$$

où  $x = \bar{x} - \bar{x}_0$ ,  $u = t_d - t_{d0}$  et la période d'échantillonnage est égale à la moitié de la durée du cycle, qui dépend à son tour de  $(\bar{x}_0, t_{d0})$ . Les matrices  $F_{bf}$  et  $G_{bf}$  sont déterminées par une méthode numérique à partir de la simulation du système autour du point d'équilibre. De cette manière, en définissant un quadrillage uniforme de l'espace tension – courant du tube, qui définit à son tour un quadrillage de l'espace état – commande introduit par  $(\bar{x}, t_d)$ , on peut définir un ensemble de modèles du type (5.2), chaque modèle étant associé au point d'équilibre correspondant sur la grille.

Il s'avère que ce modèle réduit d'état est suffisant pour les besoins de conception de la commande en boucle fermée. Différentes stratégies de commande ont été ainsi développées en (Croulard, 2003), tel que la commande par placement de pôles, la commande LQ (*Linear Quadratic*), la commande  $H_\infty$  et la commande QFT (*Quantitative Feedback Theory*). Par exemple, en ce qui concerne la commande LQ, celle ci étant la commande qui a donné les meilleurs résultats dans l'implémentation pratique, il est possible de vérifier que toutes les paires  $(F_{bf}, G_{bf})$  trouvées antérieurement sont stabilisables. Ainsi, on peut déterminer pour chaque modèle du type (5.2) une loi optimale de commande par retour d'état,  $u(k) = Kx(k)$ , qui stabilise le système à l'origine. De plus, connaissant le profil de la tension  $V_t$  aux bornes du tube (cf. figure 5.4) et le fait que le tube peut être modélisé par une résistance, on en déduit le profil

à suivre par le vecteur d'état  $\bar{x}$ . Comme on l'a déjà énoncé, à partir de ce profil et des lois de commande définies localement, on peut assurer le suivi global de la trajectoire.

Néanmoins, pour que la commande soit faisable, il est nécessaire qu'en plus le quadrillage de l'espace d'état soit fait de telle sorte que les régimes transitoires entre deux points adjacents soient suffisamment courts. Ceci est dû au fait qu'entre deux points d'équilibre la valeur moyenne du courant  $I_{Lr}$  n'est plus nulle et une durée excessivement longue du régime transitoire peut conduire à une évolution oscillante de  $I_{Lr}$ , mais par des valeurs strictement positives, respectivement strictement négatives. Ainsi, il est évident qu'une telle évolution, vu le fonctionnement normal décrit en sous-section 5.2.1, rend le système impossible à commander et, donc, en dehors des hypothèses de travail formulées.

**Remarque 5.1** *Afin d'obtenir une radiographie, il est nécessaire d'imposer un certain niveau de tension aux bornes du tube (cf. figure 5.4). Comme précisé antérieurement, le régime permanent est caractérisé par une évolution cyclique des grandeurs d'état, tandis que l'asservissement déterminé par la méthode LQ assure un niveau de tension en début, au milieu et en fin de cycle. Néanmoins, étant donné le fait que la durée du cycle est de l'ordre de quelques microsecondes, tandis que la constante de temps du système formé par la capacité équivalente du filtre de sortie et la résistance du tube est de 0,5ms pour les fortes puissances à quelques dizaines de millisecondes aux faibles puissances, on peut faire l'hypothèse que la tension aux bornes du tube est constante sur la durée d'un cycle de commande.*

### 5.2.3 Problématique du démarrage. Solution proposée

L'utilisation de la commande en boucle fermée telle qu'on l'a présenté en sous-section 5.2.2 est conditionnée par le respect des hypothèses faites. Ainsi, une fois dans le voisinage d'un des points d'équilibre sur la grille, il est possible de ramener la tension du tube au niveau imposé selon un profil continu souhaité. Toutefois, il est impossible de définir des modèles de type (5.2) autour de  $\bar{x} = 0$  avec des valeurs de  $t_{d0}$  significatives du point de vue des contraintes demandées en temps de réponse du système en boucle fermée, la période (éventuelle!) des cycles étant trop importante. En plus, la durée du régime transitoire pour stabiliser le système autour du point le plus proche de la grille, avec des conditions initiales nulles, fait qu'il est impossible de garantir la faisabilité de la loi de commande, telle qu'on l'a déjà discuté antérieurement. D'ailleurs, on arrive à constater pratiquement qu'une application directe de la loi de commande en boucle fermée, sans aucune précaution, peut conduire à ce type d'évolution critique.

Pour surmonter ce problème on cherche une séquence limitée de cycles de commande qu'on applique en boucle ouverte telle que l'évolution du système sur la durée du démarrage à partir des conditions initiales nulles assure un suivi de trajectoire pour la tension  $V_t$ , ainsi qu'une évolution quasi périodique et centrée autour du zéro de  $I_{Lr}$ , afin de pouvoir enchaîner ensuite avec la commande en boucle fermée. De cette manière, on peut envisager d'extraire parmi l'ensemble des séquences de démarrage possible celle minimisant une fonction de coût dépendant de  $I_{Lr}$  et  $V_t$ .

Plus précisément, la solution proposée est d'utiliser un processus d'optimisation non-linéaire, où la fonction de coût est calculée par simulation. Toutefois, pour ce faire, étant donné qu'on ne peut plus utiliser un modèle échantillonné comme lors de la détermination de la commande en boucle fermée, il est impératif d'utiliser un modèle plus fin du système, tel que le modèle de simulation déterminé selon la méthode décrite dans le chapitre 4.

### 5.3 Détermination hors-ligne de la séquence de démarrage en boucle ouverte

Par la suite, afin de déterminer la séquence des instants de démarrage, la fonction de coût est définie de manière rigoureuse en sous-section 5.3.1. En plus, pour que le modèle de simulation proposé en chapitre 4 soit opérationnel, il faut préciser la mise en œuvre du bloc de commande en fonction des besoins de l'application. Ainsi, la sous-section 5.3.2 présente la construction de ce bloc telle que les contraintes de fonctionnement définies soient respectées. Les résultats de l'optimisation sont présentés et discutés en sous-section 5.3.3.

#### 5.3.1 Formulation de la fonction de coût pour la séquence de démarrage

Comme on l'a déjà précisé, la fonction de coût doit prendre en compte l'évolution de  $V_t$  et de  $I_{Lr}$ . Pour être encore plus précis en ce qui concerne  $V_t$ , en phase de démarrage, son évolution doit suivre une pente de 100kV/ms. Ainsi, à partir du circuit du convertisseur à double résonance on en déduit que :

$$V_t = V_{Cs1} + V_{Cs2} \quad (5.3)$$

d'où on obtient par dérivation, cf. figure 5.1, que :

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= \dot{V}_{Cs1} + \dot{V}_{Cs2} \\ &= I_{Cs1}/C_{s1} + I_{Cs2}/C_{s2} \\ &= I_{Ds1}/C_{s1} + I_{Ds2}/C_{s2} - I_t (1/C_{s1} + 1/C_{s2}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Au démarrage, le courant dans le tube,  $I_t$ , est négligeable par rapport à  $I_{Ds1}$  ou  $I_{Ds2}$ , en effet pendant cette phase de fonctionnement une part importante de ces courants sert à « charger » les capacités du filtre de sortie. En faisant ceci, on réduit l'influence de la résistance du tube sur le processus d'optimisation, sachant que la résistance du tube est liée à la puissance souhaitée et, donc, à l'application médicale. La valeur moyenne de la pente de  $V_t$  au démarrage à conditions initiales nulles est alors donnée par :

$$\bar{V}_t = \frac{1}{C_{s1}t_f} \int_0^{t_f} I_{Ds1} dt + \frac{1}{C_{s2}t_f} \int_0^{t_f} I_{Ds2} dt, \quad (5.5)$$

où  $t_f$  dénote la durée totale du processus de démarrage.

En ce qui concerne la nécessité d'avoir un courant  $I_{Lr}$  périodique, ceci peut se traduire, dû au conservatisme des contraintes de fonctionnement, par une condition de minimisation du module de la valeur moyenne :

$$|\bar{I}_{Lr}| = \left| \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} I_{Lr} dt \right|. \quad (5.6)$$

Maintenant la fonction de coût globale pour le processus de démarrage est donnée par :

$$L = \alpha \left| \bar{V}_t^r - \bar{V}_t \right| + |\bar{I}_{Lr}|, \quad (5.7)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de pondération qui sert à la mise à l'échelle,  $\bar{V}_t^r = 10^8 \text{V/s}$  est la valeur de référence pour la pente de la tension du tube et  $\bar{V}_t$ , respectivement  $\bar{I}_{Lr}$ , est calculé à partir de (5.5), respectivement (5.6).

### 5.3.2 Implémentation du bloc de commande

La réalisation du bloc de commande résulte de la traduction directe de l'automate donné figure 5.2 adaptée au problème du démarrage. Cette traduction mène à l'automate de commande réalisé sous la forme d'un diagramme Statechart, présentée figure 5.5. Étant donné la façon alternée de commander les IGBTs, les variables de commande,  $close_1$  et  $close_2$ , peuvent être représentées par une seule variable,  $close$ . Ainsi, chaque fois que l'événement  $close$  se produit, on impose la commutation en mode passant d'un des IGBTs et la variable  $nc$ , qui représente le nombre de commutations commandées, est incrémentée. Quand  $nc$  prend la même valeur que  $n$ , qui est initialisé à la valeur désirée pour la longueur du démarrage, exprimée en nombre de temps de délai, la variable de sortie  $stop$  prend la valeur 1, ce qui entraîne par la suite l'arrêt de la simulation. Une fois qu'un IGBT est en mode passant, le seul événement qui peut se produire est le passage par zéro du courant  $I_{Lr}$  :  $llrn$  dénote le passage décroissant par zéro, tandis que  $llrp$  dénote le passage croissant par zéro. Le moment de l'occurrence d'un de ces événements est enregistré par la variable  $tc = clock$ , qui représente le début du  $t_d$  courant, conformément à la figure 5.3. Maintenant, soit une évolution du système qui conduit à l'activation de la situation D1ON, ce qui correspond au passage en mode fermé de la diode  $D_1$ , tout en gardant l'interrupteur  $Sw_2$  ouvert. Dans ce cas, si  $nc$  est égale à  $n$ , alors la situation end est activée et la simulation est arrêtée. Sinon, il y a deux possibilités :

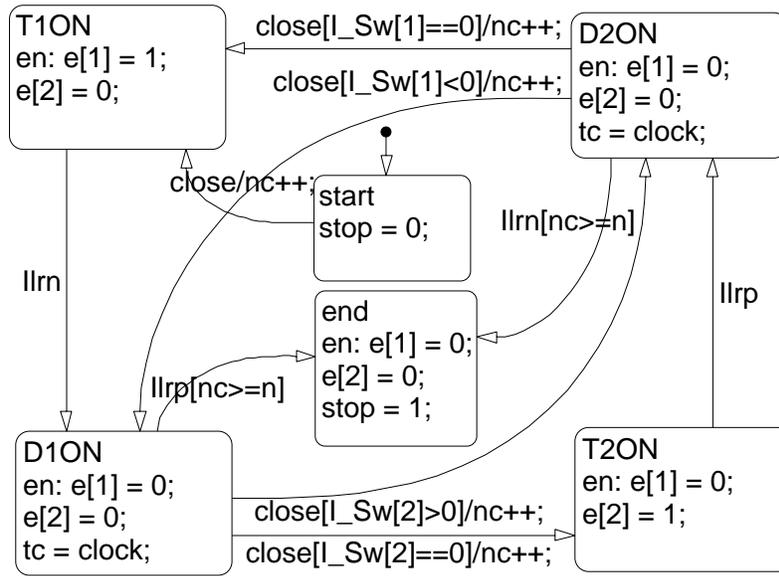


FIG. 5.5 – Modèle de l'Automate de commande sous Stateflow. Les évolutions possibles sont en concordance avec les contraintes précisées en section 5.1

- soit  $Sw_2$  reste ouvert ( $I_{Sw_2} = 0$ ) jusqu'au moment où l'événement *close* se produit et dans cette situation l'interrupteur  $T_2$ , et implicitement l'interrupteur  $Sw_2$ , devient passant, la situation T2ON devenant active;
- soit  $Sw_2$  est déjà devenu passant ( $I_{Sw_2} > 0$  dû au fait que  $D_2$  est devenue passante), lors de l'occurrence de l'événement *close* il ne se produit plus la fermeture de  $T_2$ , donc la commande est ignorée, la situation D2ON devenant active.

**Remarque 5.2** L'utilisation des étiquettes D1ON et D2ON peut être trompeuse. Ainsi, au moment où l'événement *close* se produit  $Sw_1$ , respectivement  $Sw_2$ , peut être déjà bloqué. Donc, l'appellation T1OFF, respectivement T2OFF, aurait été plus exacte que D1ON, respectivement D2ON, mais moins explicite par rapport à l'évolution décrite dans la figure 5.3, ce cas là ne changeant pas la logique de commande.

Le bloc *Automate de commande* est activé seulement quand un événement de commande se produit ou lorsqu'un passage par zéro de  $I_{Lr}$  est détecté (figure 5.6). L'événement de commande est généré à partir de l'évolution du temps réel, *clock*, et du tableau des temps de délai, a priori déterminé. Afin de pouvoir adresser correctement le tableau, l'indice du temps de délai à appliquer est nécessaire, ce qui est fourni par *nc*, et, aussi, le moment du début de l'intervalle de temps, *tc*. Les blocs de retard sont utilisés pour supprimer la boucle algébrique qui se forme lors du calcul des variables *nc* et *tc*. Toutefois, l'utilisation de ces blocs ne changent pas le fonctionnement global du système parce que les temps de délai sont strictement supérieures à

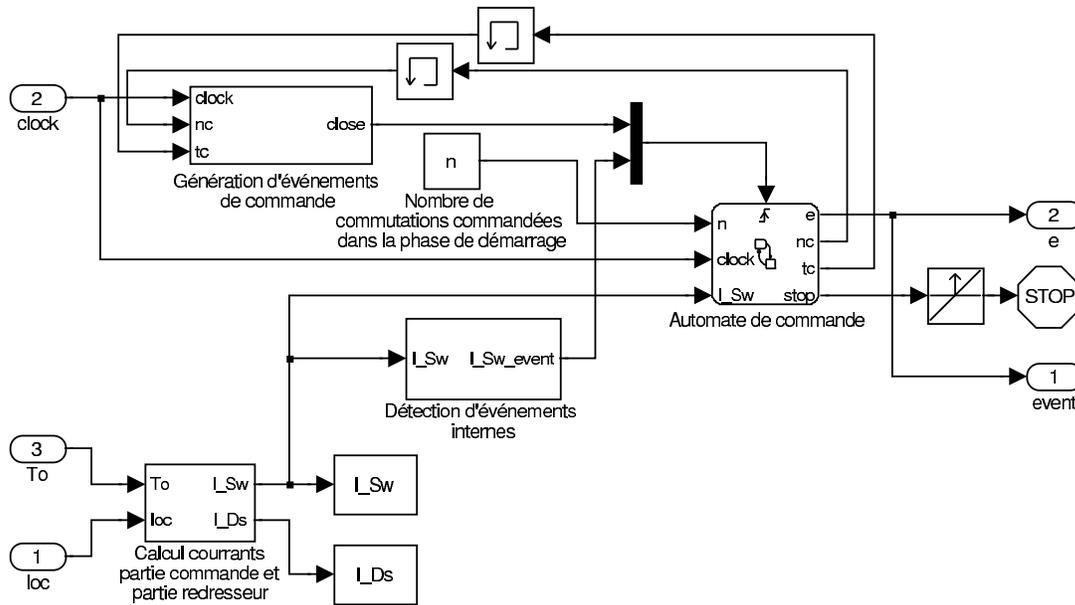


FIG. 5.6 – Réalisation du bloc *Commande*. Tout comme dans le cas du modèle de simulation, les blocs de mémoire coupent les boucles algébriques qui se forment autour du bloc *Automate de commande*.

zéro. Finalement, pour détecter les passages par zéro de  $I_{Lr}$  et étant donné que  $I_{Sw1}$  et  $I_{Sw2}$  sont également requis par l'*Automate de commande*, on compose  $I_{Lr}$  comme la somme de ces deux courants.

### 5.3.3 Résultats

Avant de donner les résultats obtenus, on précise que pour des raisons de stabilité et de robustesse de la solution, il est nécessaire de considérer une séquence « courte » de démarrage. Ainsi, tenant compte aussi de l'expérience pratique avec le système réel, la séquence de démarrage consiste dans la fermeture 3 fois de chaque IGBT, ce qui revient à une séquence de durée  $6 t_d$ . Cependant, sachant que le démarrage se fait à conditions initiales nulles, la valeur du premier  $t_d$  est arbitraire. Donc, on construit le vecteur  $T_d = (t_d(1) \dots t_d(5))^T$  des variables de commande, ou chaque  $t_d$  est limité inférieurement par  $10^{-7}$ s et supérieurement par  $10^{-5}$ s. A chaque itération du processus d'optimisation, on utilise dans la simulation du système le  $T_d$  de l'itération antérieure afin d'évaluer la fonction de coût et, de cette manière, obtenir le nouveau  $T_d$ .

Le processus d'optimisation est effectué à l'aide de la boîte à outils *Optimisation* de Matlab. Plus précisément, la fonction employée est *fmincon* qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation non-linéaires sous contraintes. La fonction de coût est évaluée selon (5.7), où un pas de simulation est nécessaire afin de pouvoir estimer (5.5)

et (5.6), sachant qu'on a choisi  $\alpha = C_{s1} = C_{s2}$ . L'initialisation de l'algorithme est faite avec une séquence de démarrage déterminée par l'emploi des heuristiques issues de l'expérience :  $T_d^0 = (15 \ 60 \ 7 \ 48 \ 51)^T \cdot 10^{-7}s$ , séquence utilisée en pratique. De plus, on considère le début du démarrage à  $t = 20 \cdot 10^{-7}s$ . L'estimation de la fonction de coût correspondante donne  $L_0 = 32,02$  pour une durée totale du démarrage de  $t_f^0 = 5,615 \cdot 10^{-5}s$  et une valeur finale de la tension du tube de  $V_t^0 = 5515V$ .

Le processus d'optimisation par rapport à la fonction de coût définie converge vers la valeur  $T_d^{fin} = (21,19 \ 57,71 \ 14,50 \ 35,48 \ 44,62)^T \cdot 10^{-7}s$ . Cette séquence de démarrage correspond à une évaluation de la fonction de coût de  $L_{fin} = 0,44$  pour une durée totale de  $t_f^{fin} = 5,746 \cdot 10^{-5}s$  et une valeur finale de la tension du tube de  $V_t^{fin} = 5655V$ . L'effort principal dans le processus d'optimisation a été concentré dans l'amélioration de la symétrie du courant  $I_{Lr}$ . Cette amélioration de l'évolution du courant  $I_{Lr}$  est entièrement due au choix des instants de commutation et n'est aucunement le résultat d'une compression de la durée du démarrage. On présente figure 5.7 les évolutions initiales et finales du courant  $I_{Lr}$ , de la tension du tube  $V_t$  et du courant  $I_{Lp}$ . En même temps, l'enchaînement des modes est le même entre la séquence initiale et la solution trouvée (figure 5.7(d)), les deux évolutions se situant dans le cadre du fonctionnement continu. A titre d'exemple, on présente en figure 5.8(a) l'évolution du courant  $I_{Lr}$  pour la séquence de démarrage optimale, en mettant en évidence la conduction des interrupteurs de la partie commande.

**Remarque 5.3** *Par expérience, il est possible de constater que la perte de synchronisation due à une évolution du courant  $I_{Lr}$  qui ne traverse plus zéro est précédée par une évolution du même type du courant  $I_{Lp}$ . Par conséquent, dans les méthodes utilisés jusqu'à présent, plutôt que d'analyser le décentrement du courant  $I_{Lr}$ , on analysait le décentrement du courant  $I_{Lp}$ . Ainsi, même de ce point de vue, on constate figure 5.7(c) que la séquence trouvée par le processus d'optimisation est meilleure par rapport à ce critère que la séquence initiale.*

Étant donné que la fonction de coût n'est pas convexe par rapport à  $T_d$ , la convergence du processus d'optimisation ne garantit pas de trouver l'optimum global. Ainsi, un phénomène intéressant se produit si la recherche s'effectue dans une région de l'espace où certaines valeurs de  $t_d$  sont proches de la limite supérieure. Dans ce cas, il est possible que le fonctionnement du système soit discontinu (figure 5.8(b)), ce qui entraîne la convergence vers un minimum local dont la fonction de coût est supérieure à  $L_{fin}$ . Un tel minimum est représenté par  $T_d^l = (33,36 \ 55,18 \ 1 \ 88,65 \ 100)^T \cdot 10^{-7}s$  auquel il lui correspond une fonction de coût  $L_l = 1,39$ .

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, il a été présenté une solution pour la détermination du démarrage en boucle ouverte du convertisseur à double résonance. Ce démarrage en boucle ouverte

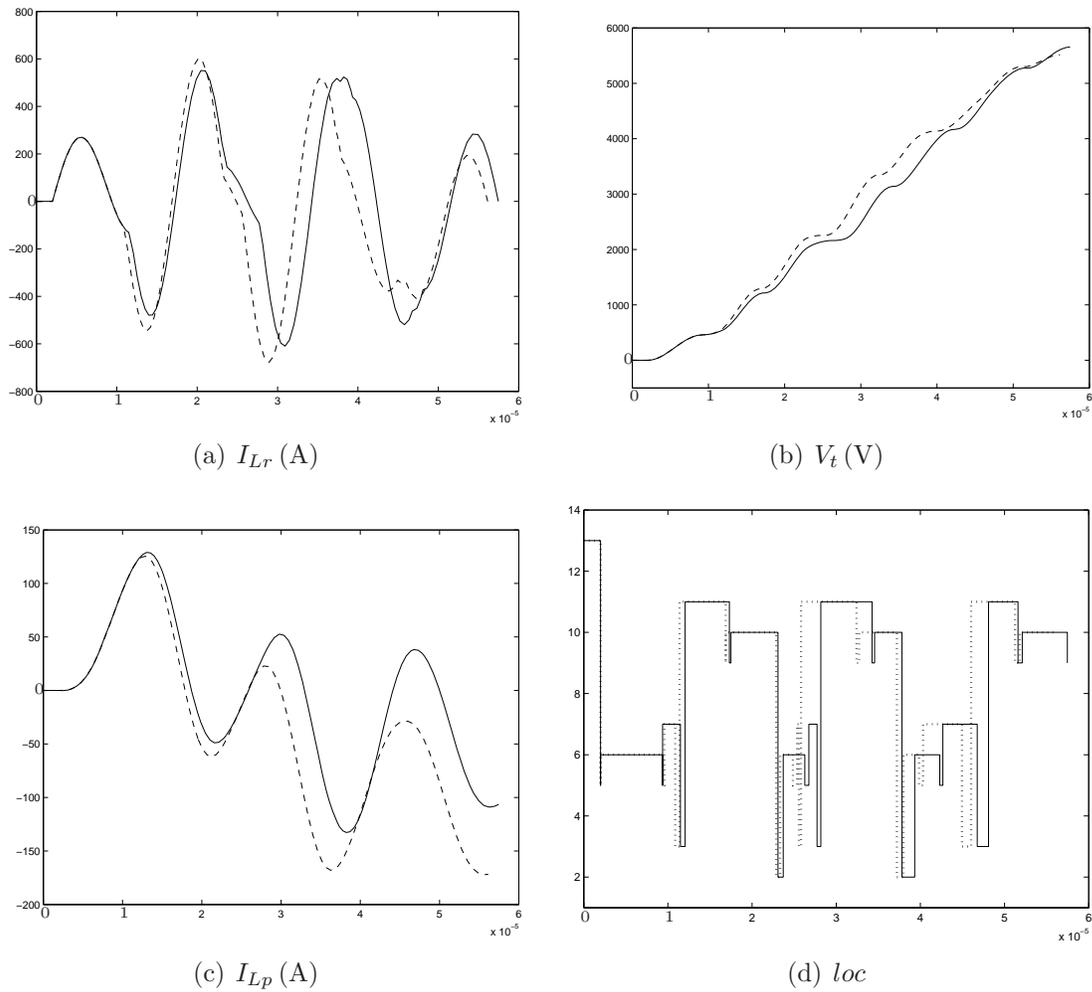
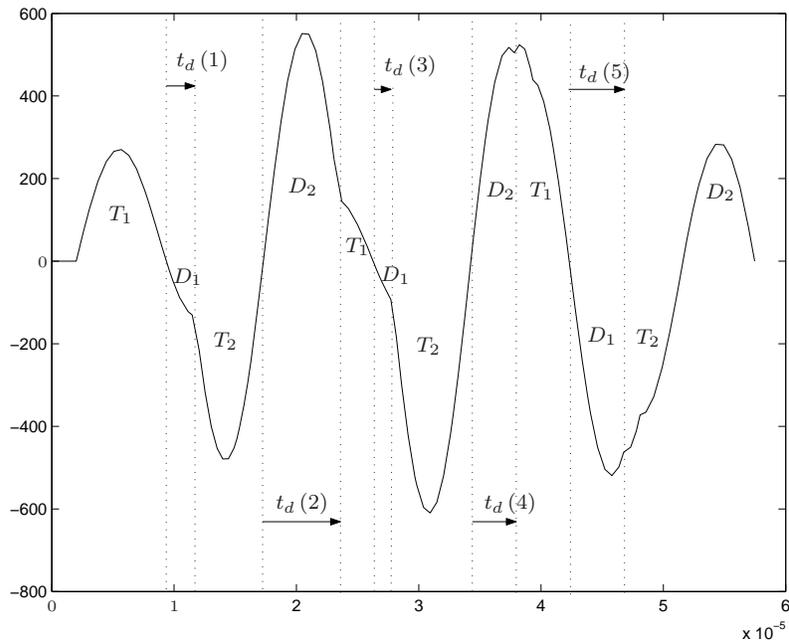
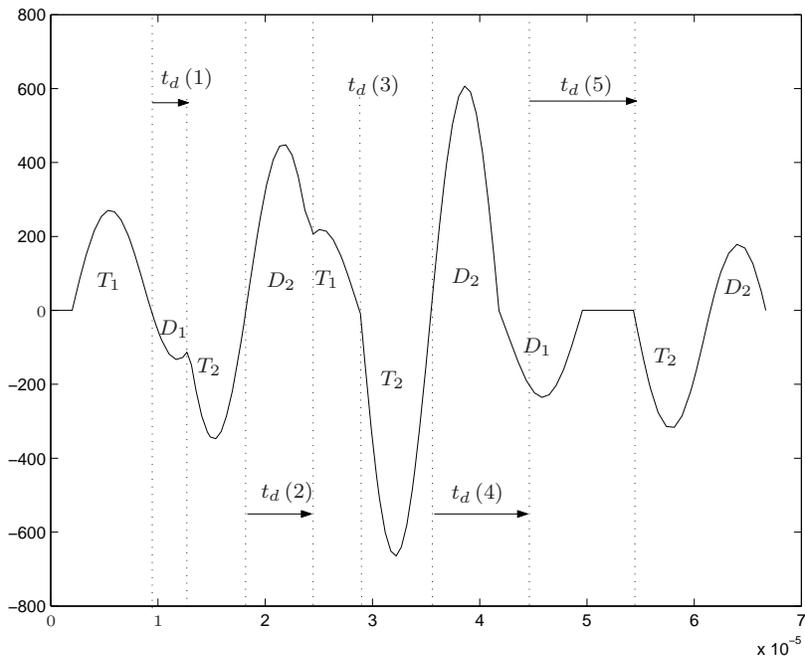


FIG. 5.7 – Évolutions du courant  $I_{Lr}$ , de la tension  $V_t$  et du courant  $I_{Lp}$  lorsqu'on applique les séquences optimale (courbes continues) et initiale (courbes discontinues) de démarrage. En plus, on donne aussi l'enchaînement des configurations lorsqu'on applique les séquences optimale (courbe continue) et initiale (courbe pointillée). La configuration du système, où l'ordre des interrupteurs est  $Sw_1$ ,  $Sw_2$ ,  $D_{s1}$  et  $D_{s2}$ , est représentée par la conversion en décimal,  $loc - 1$ , du codage booléen de la différence par rapport à la configuration de référence,  $Sw_1$  et  $Sw_2$  fermés,  $D_{s1}$  et  $D_{s2}$  ouverts



(a) Fonctionnement continu



(b) Fonctionnement discontinu

FIG. 5.8 – Évolution du courant  $I_{Lr}$  (A) dans deux cas de figure : lorsqu'on applique la séquence optimale de démarrage, et lorsqu'on applique une séquence sous-optimale de démarrage

est nécessaire afin de ramener le système dans un voisinage du régime oscillant stationnaire à partir de conditions initiales nulles. La solution proposée est de déterminer une séquence limitée de commandes au démarrage par un processus d'optimisation non-linéaire avec contraintes, où l'estimation de la fonction de coût imposée se fait par simulation. Cette solution, assez simple du point de vue de la conception de la loi de commande, a été rendue possible par la complexité et la flexibilité du modèle de simulation.

En ce qui concerne la robustesse de la séquence de démarrage par rapport à la résistance du tube et, donc, de la zone du corps à radiographier, on constate qu'une modification de l'ordre d'un facteur 10 et même 100 de  $R_t$  ne change pas l'évolution de l'état au démarrage. Néanmoins, une étude plus avancée est nécessaire afin de confirmer cette conclusion dans tout l'intervalle de variation de  $R_t$ .

Une autre direction d'amélioration de la méthode présentée est liée au processus d'optimisation. Ainsi, il est possible que le calcul du gradient de la fonction de coût soit mal conditionné quand la séquence d'enchaînement de modes change, la fonction de coût pouvant ne pas être lisse ou, même, continue. Néanmoins, des travaux plus récents (Yunt and Barton, 2006) offrent des pistes intéressantes pour résoudre ce genre de problèmes.

On aurait pu, évidemment, envisager l'utilisation d'autres approches hybrides, d'autant plus que la commande optimale dans le domaine des systèmes hybrides connaît actuellement un essor incontestable. Toutefois, l'application des méthodes formelles, telles que énoncées par (Corona *et al.*, 2004; Geyer *et al.*, 2004; Riedinger *et al.*, 1999; Xu and Antsaklis, 2002) est mise en difficulté par la présence des diodes dans le système qui peuvent commuter à tout moment, ce qui rend la séquence de démarrage a priori inconnue et les moments de commutation désynchronisés de toute horloge externe. D'autres difficultés supplémentaires sont introduites par le fait que les commutations autonomes entraînent souvent des changements au niveau de la dimension du vecteur d'état explicite. En même temps, la formalisation des contraintes fonctionnelles imposées par la pratique est loin d'être triviale. Toutes ces considérations font des convertisseurs résonants des études de cas très intéressantes pour ouvrir davantage le champ d'application des systèmes hybrides.



# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse a été de proposer une démarche compositionnelle systématique qui associant un modèle logique pour les conditions de commutation des interrupteurs en complément de leur aspect énergétique a permis d'obtenir un modèle complètement explicite de type automate hybride pour des systèmes physiques en commutation tels que les convertisseurs en électronique de puissance. Le point de départ de la méthode a été constitué par les résultats obtenus dans le cadre du formalisme de modélisation compositionnelle tel que les bond graphs commutés. Il était alors possible de trouver les configurations permises du système et d'explicitier les dynamiques continues associées à chaque configuration permise d'interrupteurs ainsi que l'expression des fonctions de saut lors des commutations. Afin d'aboutir à l'objectif fixé, on a dû accomplir deux pas intermédiaires : l'explicitation du vecteur des variables de puissance imposées aux interrupteurs par rapport à l'état continu et aux entrées de puissance dans le système et une explicitation de la logique de commutation au niveau de l'interrupteur. Ce deuxième pas a conduit à la définition d'un nouveau modèle d'interrupteur de type automate qui prend en compte les deux aspects de celui-ci : l'aspect énergétique et l'aspect logique. Il a ainsi été possible de déterminer, par composition de la dimension énergétique et de la dimension logique du système, les autres attributs du modèle automate hybride équivalent, à savoir, l'ensemble invariant et l'ensemble des transitions avec l'ensemble des événements et des conditions de garde. Pour mieux illustrer la démarche, le cas du convertisseur « boost » a été traité, du schéma électrique à l'automate hybride. Finalement, dans le cadre du paradigme de simulation par détection d'événements, le modèle automate hybride obtenu a été employé pour déterminer, par une procédure systématique, un modèle de simulation sous Simulink. C'est d'ailleurs par cette méthode qu'un modèle de simulation a été réalisé pour un convertisseur à double résonance qui a permis la détermination d'une séquence de démarrage de celui-ci.

Les principaux avantages de la méthode exposée ici consistent dans son degré de généralité et dans son côté systématique. Cependant, le caractère exhaustif du modèle automate hybride constitue son principal défaut : la complexité accrue de la représentation rend difficile, sinon impossible dans le cas le plus général, la résolution des problèmes importants tels que l'analyse de la stabilité ou la commande. Ainsi,

il est possible qu'une simplification du modèle soit nécessaire, sous certaines hypothèses, afin de rendre la représentation utilisable. Néanmoins, comme on l'a vu dans le chapitre dédié à l'application, des approches qui considèrent les interrupteurs comme toujours commandables peuvent conduire à l'échec, puisque le franchissement des transitions autonomes peut conduire à l'impossibilité d'appliquer certaines commandes. Donc, la nécessité du modèle exhaustif reste pour la bonne compréhension du comportement du système, mais une étude future est nécessaire pour bien poser les hypothèses de travail compatibles avec des formalismes de commande appropriés. À ce sujet, certains travaux ont été déjà effectués, en dehors des travaux de thèse, tels que dans l'étude des cycles limites (Zainea *et al.*, 2007c) ou dans la commande stabilisante des convertisseurs de puissance quand des lignes de transmission sont présentes, (Zainea *et al.*, 2007a; Zainea *et al.*, 2007b).

Le même problème de la complexité, cette fois combinatoire, se pose également pour la simulation des systèmes physiques avec des interrupteurs, le principal désavantage de la méthode proposée dans le cadre de cette thèse étant la quantité de mémoire nécessaire pour stocker toutes les données du système. Comme on l'a déjà discuté dans les conclusions du chapitre 4, une solution alternative peut être le stockage successif au fur et à mesure de l'évolution du système dans les différents modes. Toutefois, à cause des transitions autonomes possibles, ce nombre peut également devenir assez vite un problème. En effet pour évaluer si un mode est une cible possible d'une transition, il doit être entièrement déterminé. De plus, le gain en mémoire se traduit par un coût supplémentaire de calcul en ligne.

Finalement, une attention particulière devrait être prêtée à l'analyse des résultats fournis par les principales approches compositionnelles qui ont comme but une représentation explicite dans chaque configuration du système : les bond graphs commutés et la formulation port-Hamiltonienne à ports paramétrés. Ainsi, si, par exemple, l'approche bond graph possède l'avantage de conduire à la détermination des équations dynamiques explicites associées à chaque mode, la formulation port-Hamiltonienne compte une représentation explicite par rapport aux variables logiques associées à la configuration d'interrupteurs. D'ailleurs, en ce qui concerne l'approche port-Hamiltonienne, une première avancée pour l'obtention du modèle automate hybride a été déjà faite (Valentin *et al.*, 2006). Des travaux au sujet de la comparaison des deux approches ont été déjà effectués, tels que (Cormerais *et al.*, 2007), et on estime en ce moment que les deux approches sont interchangeable, les points manquant d'une approche par rapport à l'autre pouvant être comblés. Étant donné le caractère quasi concomitant du déroulement des travaux de cette thèse et des travaux concernant la formulation port-Hamiltonienne, beaucoup reste encore à faire.

# Annexe



# Annexe A

## Démonstration du lemme 3.9

On montre uniquement la validité de la relation (3.20a), la même procédure pouvant être utilisée pour montrer également la validité de la relation (3.20b). De plus, par un souci de brièveté, on écarte ici l'indice  $j$  correspondant à la configuration en question. En utilisant comme point de départ la relation (3.20a), compte tenu du lemme d'inversion :

$$(A - BCD)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(C^{-1} - DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{A.1})$$

et de la relation de définition pour  $R$ , on trouve que :

$$\begin{aligned} [F_i - (F + F_i S_{12}) R (S_{12}^T F_i + F^T)]^{-1} &= F_i^{-1} + F_i^{-1} (F + F_i S_{12}) [S_{12}^T F_i S_{12} + \\ &F^T S_{12} + S_{12}^T F + F_d - (S_{12}^T F_i + F^T) F_i^{-1} (F + F_i S_{12})]^{-1} (S_{12}^T F_i + F^T) F_i^{-1} \\ &= F_i^{-1} + F_i^{-1} F (F_d - F^T F_i^{-1} F)^{-1} F^T F_i^{-1} + S_{12} (F_d - F^T F_i^{-1} F)^{-1} F_i^{-1} F + \\ &F_i^{-1} F (F_d - F^T F_i^{-1} F)^{-1} S_{12}^T + S_{12} (F_d - F^T F_i^{-1} F)^{-1} S_{12}^T \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Par calcul direct, on peut montrer que :

$$\begin{pmatrix} F_i & F \\ F^T & F_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i^{-1} + F_i^{-1} F \bar{F}^{-1} F^T F_i^{-1} & -F_i^{-1} F \bar{F}^{-1} \\ -\bar{F}^{-1} F_i^{-1} F & \bar{F}^{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{I}, \quad (\text{A.3})$$

où  $\bar{F} = (F_d - F^T F_i^{-1} F)$  et, par conséquence, compte tenu de l'unicité de l'inverse, on obtient à partir de (A.2) la relation qu'on cherchait à montrer, (3.20a).



# Table des figures

2.1	Schéma bloc générique d'interconnexion des trois champs d'un système physique . . . . .	9
2.2	Caractéristiques de la diode dans l'espace des variables d'effort/flux associées . . . . .	13
2.3	Caractéristique de l'interrupteur idéal à la commande . . . . .	14
2.4	Schéma bloc générique d'un système physique avec des interrupteurs avec un champ d'interconnexion conservateur . . . . .	15
2.5	Élément bond graph à causalité variable modélisant l'interrupteur : source d'effort nulle quand il est <i>fermé</i> et source de flux nulle quand il est <i>ouvert</i> (convention générateur) . . . . .	16
2.6	Représentation bond-graph des interrupteurs par l'intermédiaire des jonctions commandées . . . . .	21
2.7	Modèle automate pour un interrupteur de type diode idéale . . . . .	22
3.1	Le circuit électrique du convertisseur « boost » . . . . .	31
3.2	La structure générale d'un bond graph commuté . . . . .	32
3.3	Le bond graph acausal du convertisseur « boost » . . . . .	33
3.4	Schéma bloc causal du bond graph . . . . .	34
3.5	Le bond graph causal du convertisseur « boost » dans la configuration (F,E) . . . . .	35
3.6	Interrupteur idéal à la commande et interrupteurs d'électronique de puissance en convention générateur . . . . .	52
3.7	Représentation de type automate des interrupteurs présents dans le convertisseur « boost » . . . . .	53
3.8	Exemple de circuit où l'évolution interne du système peut provoquer des changements d'état discret de diode, sans que ce changement soit dû au franchissement de la condition de garde . . . . .	55
3.9	Modèles <i>switch automata</i> de l'interrupteur idéal à la commande et des principaux interrupteurs d'électronique de puissance . . . . .	59
3.10	Deux types particuliers d'association d'interrupteurs : anti-parallèle et série, dans l'électricité . . . . .	63
3.11	Conflits à l'assignation de la causalité pour les deux type d'association d'interrupteurs : anti-parallèle et série . . . . .	64

3.12	Modèles <i>switch automata</i> à trois modes des associations anti-parallèle et série du transistor et de la diode . . . . .	65
3.13	Modèles <i>switch automata</i> à deux modes des associations anti-parallèle et série du transistor et de la diode . . . . .	66
3.14	Modèle <i>switch automaton</i> de l'association anti-parallèle du thyristor et de la diode . . . . .	67
3.15	Modèle automate hybride du convertisseur « boost » . . . . .	83
4.1	Diagramme d'interaction entre les modèles d'interrupteurs et le modèle du reste du système physique . . . . .	89
4.2	Schéma de principe de la simulation par l'unique utilisation des blocs élémentaires . . . . .	91
4.3	Schéma général de simulation sous Simulink . . . . .	92
4.4	Réalisation du bloc <i>Dynamique</i> dont les principales fonctionnalités sont le calcul des grandeurs continues . . . . .	93
4.5	Réalisation du bloc <i>mode k</i> associé à une configuration quelconque et valide du système . . . . .	94
4.6	Réalisation du bloc de détection d'événements autonomes . . . . .	95
4.7	Évolution des différentes grandeurs lors de la détection d'un événement de simulation . . . . .	96
4.8	Réalisation de la condition d'invariance pour les <i>charts</i> en considérant uniquement la frontière d'un seul interrupteur « déclencheur » . . . . .	98
4.9	<i>Chart</i> correspondant au niveau inférieur de <i>mode k</i> , un état discret du niveau supérieur . . . . .	99
4.10	Réalisation du bloc <i>Invariants + Conditions d'impulsion</i> . . . . .	100
4.11	Réalisation de l'évaluation des conditions d'invariance et d'impulsion pour un <i>mode k</i> quelconque . . . . .	101
4.12	Réalisation du bloc <i>Dérivée de To</i> . . . . .	102
4.13	<i>Chart</i> du niveau supérieur d'un système qui correspond au cas où les interrupteurs pris en compte sont deux IGBTs . . . . .	103
4.14	Schéma de principe de la simulation à l'aide de S-fonctions . . . . .	103
4.15	Schéma général de simulation des blocs par Simulink . . . . .	104
4.16	Évolution qualitative de l'état global, $y_S^c$ , et de la variable auxiliaire, $z_c$ , lors de la simulation d'un système par Simulink . . . . .	108
5.1	Circuit électrique du convertisseur double résonant à demi pont qui est utilisé dans l'imagerie médicale . . . . .	112
5.2	Automate de commande de la partie « Circuit de commutation » . . . . .	113
5.3	Mise en évidence de la variable de commande $t_d$ sur l'évolution du courant $I_{Lr}$ . . . . .	114
5.4	Évolution souhaitée de la tension aux bornes du tube à rayons X dans le but de faire une radiographie . . . . .	115
5.5	Modèle de l' <i>Automate de commande</i> sous Stateflow . . . . .	120
5.6	Réalisation du bloc <i>Commande</i> . . . . .	121

5.7	Évolutions du courant $I_{Lr}$ , de la tension $V_t$ et du courant $I_{Lp}$ lorsqu'on applique les séquences optimale et initiale de démarrage . . . . .	123
5.8	Évolution du courant $I_{Lr}$ (A) dans deux cas de figure : lorsqu'on applique la séquence optimale de démarrage, et lorsqu'on applique une séquence sous-optimale de démarrage . . . . .	124



# Bibliographie

- Alur, R., C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T.A. Henzinger, P.H. Ho, X. Nicollin, A. Olivero, J. Sifakis and S. Yovine (1995). The algorithmic analysis of hybrid systems. *Theoretical Computer Science* **138**, 3–34.
- Beers, Christopher D., Eric-J. Manders, Gautam Biswas and Pieter Mösterman (2006). Building efficient simulations from hybrid bond graphs model. In : *Proc of 2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS'06)*. Alghero. pp. 71–76.
- Buisson, Jean (1993). Analysis of switching devices with bond graph. *Journal of the Franklin Institute* **330**(6), 1165–1175.
- Buisson, Jean, Hervé Cormerais and Pierre-Yves Richard (2000). Using trees to build non-singular bond graphs from electric circuit graphs. *Journal of the Franklin Institute* **337**(5), 543–554.
- Buisson, Jean, Hervé Cormerais and Pierre-Yves Richard (2002). Analysis of the bond graph model of hybrid physical systems with ideal switches. *Journal of Systems and Control Engineering* **216**(1), 47–72.
- Buisson, Jean, Hervé Cormerais, Marius Zainea, Hervé Guéguen and Emmanuel Godoy (2004). Formal approach to compute hybrid automata models for linear switching systems. In : *Proc. of IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei. pp. 47–52.
- Camlibel, M.K., W.P.M.H Heemels, A.J. van der Schaft and J.M. Schumacher (2003). Switched networks and complementarity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems. Part I : Regular Papers* **50**(8), 1036–1046.
- Chernikova, N.V. (1965). Algorithm for finding a general formula for the non-negative solutions of a system of linear inequalities. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **5**(2), 228–233.
- Cormerais, Hervé (1998). De l'application des bond-graphs à causalité variable dans la modélisation multimodèle des systèmes dynamiques hybrides. PhD thesis. Université de Rennes 1. Rennes.
- Cormerais, Hervé, Jean Buisson, Sylvain Leirens and Pierre-Yves Richard (2002). Calcul symbolique de l'ensemble des équations d'état pour les bond graphs en commutation. In : *Annales de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*. Nantes.

- Cormerais, Hervé, Marius Zainea and Jean Buisson (2006). The modelling of hybrid switching systems. In : *Final Report on Modelling Tools, Benchmarks and Control Methods* (Manfred Morari, Ed.). Chap. 5, pp. 70–104. Network of Excellence, HyCON FP6 IST-511368. [http://www.ist-hycon.org/deliverables/HYCON-D4a31\\_v2.pdf](http://www.ist-hycon.org/deliverables/HYCON-D4a31_v2.pdf).
- Cormerais, Hervé, Claire Valentin, Marius Zainea, Miguel Magos-Rivera and Jean Buisson (2007). Modélisation des systèmes physiques à commutations par approche énergétique. application à un convertisseur dc-dc. *Journal Européen des Systèmes Automatisés* **41**(7–8), 775–818.
- Corona, Daniele, Alessandro Giua and Carla Seatzu (2004). Optimal control of hybrid automata : design of semiactive suspension. *Control Engineering Practice* **12**(10), 1305–1318.
- Croulard, Vincent (2003). Commande multi-critères d'un générateur à double résonance. PhD thesis. Université de Paris XI. Orsay.
- Dauphin-Tanguy, G. and C. Rombaut (1993). Why a unique causality in the elementary commutation cell bond graph model of power electronics converter. In : *Proc. of IEEE International Conference on SMC*. Le Touquet. pp. 257–263.
- Edström, Krister, Jan-Erik Strömberg, Ulf Söderman and Jan Top (1997). Modelling and simulation of a switched power converter. In : *Proc. of the 3rd International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'97)* (J. Granda and G. Dauphin-Tanguy, Eds.). Vol. 29 of *Simulation*. SCS publishing. pp. 195–200.
- Escobar, Gerardo, Arjan J. van der Schaft and Romeo Ortega (1999). A hamiltonian viewpoint in the modeling of switching power converters. *Automatica* **35**(3), 445–452.
- Geyer, Tobias, George Papafotiou and Manfred Morari (2004). On the optimal control of switch-mode dc-dc converters. In : *Proc. of 7th International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control* (R. Alur and G. Pappas, Eds.). Vol. 2993 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer. pp. 342–356.
- Hautier, J.-P. and J.-P. Caron (1999). *Convertisseurs statiques. Méthodologie causale de modélisation et de commande*. Méthodes & Pratiques de l'Ingénieur. Technip. Paris.
- Heemels, W.P.M.H., M.K. Camlibel and J.M. Schumacher (2001). On event-driven simulation of electrical circuits with ideal diodes. *Journal Européen des Systèmes Automatisés* **35**(4), 467–488.
- Heemels, W.P.M.H., M.K. Camlibel, A.J. van der Schaft and J.M. Schumacher (2003). Modelling, well-posedness and stability of switched electrical networks. In : *Proc. of 6th International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control* (O Maler and A. Pnueli, Eds.). Vol. 2623 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. pp. 249–266.

- Iung, Claude and Christiane Zanne (2001). Simulation des systèmes hybrides. In : *Systèmes dynamiques hybrides* (Janaan Zaytoon, Ed.). Chap. 9, pp. 195–210. Systèmes Automatisés. Hermès Science Publications. Paris.
- Karnopp, D.C., D.L. Margolis and R.C. Rosenberg (2000). *System Dynamics : Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*. 3rd ed.. Wiley-Interscience. New York.
- Lynch, Nancy, Roberto Segala and Fritz Vaandrager (2001). Hybrid i/o automata revisited. In : *4th Hybrid Systems Computation and Control (HSCC) 2001, LNCS2034*. Rome, Italy. pp. 403–417.
- Magos, Miguel (2005). Sur la modélisation des systèmes dynamiques à topologie variable : une formulation Hamiltonienne à ports paramétrée. PhD thesis. Université Claude Bernard. Lyon.
- Morvan, Cécile, Hervé Cormerais, Jean Buisson and Pierre-Yves Richard (2003). Bond graph formalism and linear complementarity problem for hybrid systems with ideal diodes. In : *Proc of 1st IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS'03)*. Saint Malo.
- Mösterman, P.J. (1997). Hybrid Dynamic Systems : A Hybrid Bond Graph Modeling Paradigm and Its Application in Diagnostics. PhD thesis. Vanderbilt University. Nashville.
- Mösterman, P.J. (1999). An overview of hybrid simulation phenomena and their support by simulation packages. In : *Proc. of 2nd International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control* (F.W. Vaandrager and J.H. van Schuppen, Eds.). Vol. 1569 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer. Berlin/Heidelberg. pp. 165–177.
- Papafotiou, George and Manfred Morari (2005). Definition of benchmark examples for the stability analysis and hybrid control of switch-mode dc-dc converters. In : *Draft Survey Report on Modelling Tools, Benchmarks and Control Methods* (Manfred Morari, Ed.). Chap. 13, pp. 177–196. Network of Excellence, HyCON FP6 IST–511368. <http://www.ist-hycon.org/deliverables/HYCON-D4a21.pdf>.
- Riedinger, P., C. Zanne and F. Kratz (1999). Time optimal control of hybrid systems. In : *Proceedings of American Control Conference*. San Diego. pp. 2466–2470.
- Sontag, E. (1981). Nonlinear regulation : The piecewise linear approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**(2), 346–358.
- Strömberg, Jan-Erik (1994). A mode switching modelling philosophy. PhD thesis. Linköping University.
- Valentin, C., M. Magos and B.M. Maschke (2006). Hybrid port hamiltonian systems : from parameterized incidence matrices to hybrid automata. *Nonlinear Analysis* **65**(6), 1106–1122.
- Valentin, Claire, Miguel Magos and Bernhard M. Maschke (2007). A port-hamiltonian formulation of physical switching systems with varying constraints. *Automatica* **43**(7), 1125–1133.

- van der Schaft, Arjan J. and Hans Schumacher (2000). *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*. Vol. 251 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag. London.
- van der Schaft, Arjan J. (2006). Port-hamiltonian modelling of hybrid power systems. In : *Final Report on Modelling Tools, Benchmarks and Control Methods* (Manfred Morari, Ed.). Chap. 4, pp. 48–73. Network of Excellence, HyCON FP6 IST–511368. [http://www.ist-hycon.org/deliverables/HYCON-D4a31\\_v2.pdf](http://www.ist-hycon.org/deliverables/HYCON-D4a31_v2.pdf).
- Wilde, Doran K. (1994). A library for doing polyhedral operations. Technical Report 785. IRISA. Rennes.
- Xu, X. and P.J. Antsaklis (2002). Optimal control of switched autonomous systems. In : *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas. pp. 4401–4406.
- Yunt, Mehmet and Paul Barton (2006). Semismooth hybrid automata. In : *Proceedings of IEEE Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Munich. pp. 1550–1555.
- Zainea, Marius, Emmanuel Godoy, Jean Buisson, Hervé Cormerais and Hervé Guéguen (2005a). A double resonance generator simulation using a hybrid approach. In : *Proc. of 11th European Conference on Power Electronics and Applications*. Dresden.
- Zainea, Marius, Hervé Cormerais, Jean Buisson, Hervé Guéguen and Emmanuel Godoy (2005b). Analyse des commutations dans un système avec des interrupteurs de l'électronique de puissance par une approche automate hybride. In : *Annales des Journées Doctorales du GDR MACS (JDMACS)*. Lyon.
- Zainea, Marius, Jean Buisson, Hervé Cormerais, Hervé Guéguen and Emmanuel Godoy (2005c). Automatic simulink model building for physical switching systems. In : *Proc. of 17th IMACS World Congress : Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation*. Paris.
- Zainea, Marius, Emmanuel Godoy, Jean Buisson, Hervé Cormerais and Hervé Guéguen (2006). The open-loop control for the start-up of a double resonance converter using a hybrid systems approach. In : *Proc. of IEEE Conference on Control Applications*. Munich. pp. 367–372.
- Zainea, Marius, Arjan Van Der Schaft and Jean Buisson (2007a). Stabilizing control for power converters connected to transmission lines. In : *2007 American Control Conference*. pp. 3476–3481.
- Zainea, Marius, Arjan Van Der Schaft and Jean Buisson (2007b). Stabilizing switching control of power converters : the lossy line and nonlinear case. In : *2007 European Control Conference*. p. CDROM.
- Zainea, Marius, Jean Buisson, Hervé Cormerais, Hervé Guéguen and Emmanuel Godoy (2007c). A newton method for cycle determination of linear physical systems with switches. In : *Proc of the 4th IFAC Conference on Management and Control Of Production and Logistics*. Sibiu. pp. 481–486.

Zainea, Marius, Hervé Guéguen and Jean Buisson (2008). Un modèle formel pour les interrupteurs en électronique de puissance. In : *Annales de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*. Bucarest.