



## PGD-BEM applied to the nonlinear heat equation

Gaël Bonithon, Pierre Joyot, Francisco Chinesta, Pierre Villon

### ► To cite this version:

Gaël Bonithon, Pierre Joyot, Francisco Chinesta, Pierre Villon. PGD-BEM applied to the nonlinear heat equation. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB, 2011. <hal-00592682>

**HAL Id: hal-00592682**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00592682>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La méthode PGD-BEM appliquée à l'équation de la chaleur non-linéaire

P. Joyot<sup>1</sup>, G. Bonithon<sup>1,4</sup>, F. Chinesta<sup>2</sup>, P. Villon<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ESTIA-Recherche, technopole izarbel, 64210 Bidart, pjoyot@estia.fr

<sup>2</sup> EADS Corporate Foundation International Chair, GEM CNRS-ECN,  
1 rue de la Noë BP 92101, 44321 Nantes cedex 3, Francisco.Chinesta@ec-nantes.fr

<sup>3</sup> UTC-Roberval UMR 6253, 60200 Compiègne, pierre.villon@utc.fr

<sup>4</sup> EPSILON Ingénierie, 10 rue Jean Bart, BP 97431, 31674 Labège Cedex

**Résumé** — Dans [1] nous avons proposé une nouvelle méthode non incrémentale pour résoudre l'équation de la chaleur linéaire, la PGD-BEM. Nous proposons, une adaptation de cet algorithme dans le cas où le coefficient de conductivité thermique dépend de la température. Cette approche ne demande pas de connaître le noyau de Green de l'équation de la chaleur non-linéaire, seul le noyau de l'équation de Poisson en espace est nécessaire. Nous validons notre approche sur un exemple numérique.

**Mots clés** — Séparation de variables, PGD, équation de la chaleur non-linéaire.

## 1 Introduction

La résolution de l'équation de la chaleur non-linéaire par la méthode des éléments de frontière est délicate car il n'est généralement pas possible d'en obtenir le noyau de Green. Une méthode de résolution directe a été proposée par [2], celle-ci utilise le noyau de la chaleur linéaire. Une autre approche de type homotopie est proposée dans [3].

Nous proposons, ici, une alternative totalement différente construite à l'aide de la méthode PGD (Proper Generalised Decomposition). Cette méthode consiste à rechercher la solution du problème sous forme séparée, c'est à dire comme la somme de couples de fonctions en espace et en temps. La recherche d'une solution sous cette forme est tout d'abord motivée par une analyse à posteriori. D'une manière générale, connaissant la solution d'un problème de thermique transitoire en un certain nombre de couples espace-temps il est possible de construire une représentation séparée discrète de la solution. La méthode classiquement employée pour y parvenir est la POD (Proper Orthogonal Decomposition). La méthode PGD, permet de construire cette représentation séparée sans connaître de solution à priori. A chaque itération, l'algorithme construit un nouveau couple à partir des couples déjà calculés. Cette méthode est détaillée dans [4],[5],[6].

L'avantage de coupler la méthode PGD avec la BEM tient dans le fait qu'il n'est plus nécessaire de connaître le noyau espace-temps de l'équation de la chaleur. Seul le noyau de Green de l'équation de Poisson doit être connu. La méthode résultante, nommée PGD-BEM, est détaillée dans [1]. Ici, nous montrons que cet algorithme est facilement transposable au cas de l'équation de la chaleur non-linéaire.

Dans une première partie nous présentons l'algorithme PGD-BEM non-linéaire. Puis, nous validons l'approche sur un exemple numérique.

## 2 Méthode PGD-BEM pour résoudre l'équation de la chaleur non-linéaire

Nous allons présenter dans cette partie, la méthode PGD-BEM appliquée à la résolution de l'équation de la chaleur pour laquelle le coefficient de conductivité thermique dépend de la température. Nous nous limiterons au cas des conditions aux limites homogènes. On considère donc le problème suivant

$$\begin{cases} u_{,t} - (\kappa(u) u_{,i})_{,i} = b & \text{dans } \Omega \times \tau \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times \tau \\ u(t=0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\Omega$  le domaine spatial inclu dans  $R^n$ ,  $\Gamma$  sa frontière,  $\tau$  l'intervalle de temps,  $u$  le champ de température,  $b$  le terme source et  $\kappa$  le coefficient de conductivité thermique.

Dans le cadre de la méthode PGD, la solution du problème (1) est recherchée sous la forme de la somme de couples, constitués du produit d'une fonction spatiale  $X^\alpha$  et d'une fonction temporelle  $T^\alpha$ , i.e.

$$u \approx \sum_{\alpha=1}^{\infty} X^\alpha T^\alpha \quad (2)$$

Connaissant les  $p-1$  premiers couples, nous allons décrire l'algorithme permettant de déterminer les fonctions  $X^\alpha$  et  $T^\alpha$  du nouveau couple  $p$ . Pour simplifier l'écriture, nous noterons maintenant ces fonctions  $X$  et  $T$ .

Les fonctions  $X$  et  $T$  sont définies comme solution du système non-linéaire suivant

$$\left( \int_{\tau} u_{,t}^{(p)} T \right) - \left( \int_{\tau} (\kappa(u^{(p)}) u_{,i}^{(p)})_{,i} T \right) = \left( \int_{\tau} b T \right) \quad (3)$$

$$\left( \int_{\Omega} u_{,t}^{(p)} X \right) - \left( \int_{\Omega} (\kappa(u^{(p)}) u_{,i}^{(p)})_{,i} X \right) = \left( \int_{\Omega} b X \right) \quad (4)$$

où  $u^{(p)} = \sum_{\alpha=1}^{p-1} X^\alpha T^\alpha + XT$ .

L'équation (3) est une équation aux dérivées partielles en espace et (4) est une équation différentielle ordinaire en temps. Ces équations sont couplées, leur résolution se fait en utilisant une méthode de point fixe que nous détaillerons par la suite.

La partie spatiale de la méthode PGD-BEM est résolue par la méthode des éléments aux frontières. Il est donc nécessaire de réécrire (3) de manière à faire apparaître une équation aux dérivées partielles en  $X$ , dont il sera possible de connaître le noyau de Green.

Le système se réécrit de la manière suivante

$$- \left( \int_{\tau} \kappa(u^{(p)}) T T \right) X_{,ii} = \left( \int_{\tau} B T \right) - \left( \int_{\tau} T_{,t} T \right) X - \sum_{\alpha}^{p-1} \left( \int_{\tau} T_{,t}^\alpha T \right) X^\alpha \quad (5)$$

$$\left( \int_{\Omega} X X \right) T_{,t} - \left( \int_{\Omega} \kappa(u^{(p)}) X_{,ii} X \right) T = \left( \int_{\Omega} B X \right) - \sum_{\alpha}^{p-1} \left( \int_{\Omega} X^\alpha X \right) T_{,t}^\alpha \quad (6)$$

avec  $B = b + \kappa'(u^{(p)}) u_{,i}^{(p)} u_{,i}^{(p)} + \kappa(u^{(p)}) u_{,ii}^{(p-1)}$

Les fonctions  $\kappa(u^{(p)})$  et  $B$  sont des fonctions de  $\mathbf{x}$  et de  $t$ . Afin de calculer les intégrales de (5) et (6) contenant ces fonctions, nous les décomposons sous forme séparée en utilisant la SVD. Nous notons

$$\kappa(u^{(p)}) \approx \sum_{\alpha} K_x^\alpha K_t^\alpha \quad (7)$$

et

$$B \approx \sum_{\alpha} B_x^\alpha B_t^\alpha \quad (8)$$

Le système (5), (6) devient

$$-X_{,ii} = \frac{1}{\sum_{\alpha} K_x^\alpha \left( \int_{\tau} K_t^\alpha T \right)} \left( \sum_{\alpha} B_x^\alpha \left( \int_{\tau} B_t^\alpha T \right) - \left( \int_{\tau} T_{,t} T \right) X - \sum_{\alpha}^{p-1} \left( \int_{\tau} T_{,t}^\alpha T \right) X^\alpha \right) \quad (9)$$

$$\left( \int_{\Omega} X X \right) T_{,t} - \sum_{\alpha} K_t^\alpha \left( \int_{\Omega} K_x^\alpha X_{,ii} X \right) T = \sum_{\alpha} B_t^\alpha \left( \int_{\Omega} B_x^\alpha X \right) - \sum_{\alpha}^{p-1} \left( \int_{\Omega} X^\alpha X \right) T_{,t}^\alpha \quad (10)$$

L'équation (9) a la forme d'une équation de Poisson qui sera discrétisée efficacement par la BEM.

Le système non-linéaire constitué des équations (9), (10) est résolu par une méthode de point fixe. Nous supposons que les différents champs sont connus à l'itération  $q$ , nous allons indiquer comment les calculer à l'itération  $q + 1$ .

Premièrement, nous déterminons  $X^{q+1}$  en résolvant l'équation (9), qui devient au pas  $q + 1$

$$-X_{,ii}^{q+1} = \frac{1}{\sum_{\alpha} K_x^{\alpha} \left( \int_{\tau} K_t^{\alpha} T^q T^q \right)} \left( \sum_{\alpha} B_x^{\alpha} \left( \int_{\tau} B_t^{\alpha} T^q \right) - \left( \int_{\tau} T_t^q T^q \right) X - \sum_{\alpha} \left( \int_{\tau} T_t^{\alpha} T^q \right) X^{\alpha} \right) \quad (11)$$

$B_x^{\alpha}$  et  $B_t^{\alpha}$  sont évalués à partir de l'expression suivante de  $B$

$$B = b + \kappa' \left( u^{(p-1)} + X^q T^q \right) \left( u_{,i}^{(p-1)} + X_{,i}^q T^q \right) \left( u_{,i}^{(p-1)} + X_{,i}^q T^q \right) + \kappa \left( u^{(p-1)} + X^q T^q \right) u_{,ii}^{(p-1)} \quad (12)$$

de même,  $K_x^{\alpha}$  et  $K_t^{\alpha}$  sont calculés à partir de  $\kappa \left( u^{(p-1)} + X^q T^q \right)$

Deuxièmement, nous déterminons  $T^{q+1}$  en résolvant l'équation (10), qui devient au pas  $q + 1$

$$\left( \int_{\Omega} X^{q+1} X^{q+1} \right) T_{,t}^{q+1} - \sum_{\alpha} K_t^{\alpha} \left( \int_{\Omega} K_x^{\alpha} X_{,ii}^{q+1} X^{q+1} \right) T^{q+1} = \sum_{\alpha} B_t^{\alpha} \left( \int_{\Omega} B_x^{\alpha} X^{q+1} \right) - \sum_{\alpha} \left( \int_{\Omega} X^{\alpha} X^{q+1} \right) T_{,t}^{\alpha} \quad (13)$$

$B_x^{\alpha}$  et  $B_t^{\alpha}$  sont évalués à partir de l'expression suivante de  $B$

$$B = b + \kappa' \left( u^{(p-1)} + X^{q+1} T^q \right) \left( u_{,i}^{(p-1)} + X_{,i}^{q+1} T^q \right) \left( u_{,i}^{(p-1)} + X_{,i}^{q+1} T^q \right) + \kappa \left( u^{(p-1)} + X^{q+1} T^q \right) u_{,ii}^{(p-1)} \quad (14)$$

de même,  $K_x^{\alpha}$  et  $K_t^{\alpha}$  sont calculés à partir de  $\kappa \left( u^{(p-1)} + X^{q+1} T^q \right)$

Par rapport à la PGD-BEM linéaire, présentée dans [1], il est nécessaire de calculer les formes séparées de  $B$  et de  $\kappa(u)$ . Ce surcoût en terme de temps calcul n'est pas négligeable. Une optimisation de cette partie est en cours d'étude.

### 3 Validation numérique de la méthode

Afin de valider la méthode, nous allons résoudre l'équation de la chaleur définie par le système (1) sur le domaine spatial  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  et sur le domaine temporel  $\tau = [0, 1]$ . Nous calculons le terme source  $b$  tel que la solution analytique soit  $u^{ex}(\mathbf{x}) = x(x-1)y(y-1)t$ , avec  $\kappa(u) = u^2 + 1$ . Nous discrétisons chaque côté de  $\Omega$  avec 8 noeuds qui serviront à résoudre l'équation (11) par la méthode des éléments de frontière. Le domaine temporel  $\tau$  est discrétisé par 129 noeuds.

La figure 1 représente les températures exactes et calculées par l'algorithme PGD-BEM pour les instants  $t = \{0, 7.8e - 3, 2.5e - 1, 5e - 1, 7.5e - 1, 1\}s$ . La figure 2 représente l'erreur absolue  $\frac{u^{ex} - u}{u^{ex}}$  pour les mêmes instants. La figure 3 représente les 3 premiers couples  $(X^{\alpha}, T^{\alpha})_{\alpha=1,2,3}$  calculés par l'algorithme. Les deuxième et troisième couples sont des couples parasites liés aux erreurs de discrétisation. En effet l'erreur espace-temps discrète, définie par

$$e = \frac{\|u^{ex} - u\|_{L^2_{\Omega \times \tau}}}{\|u^{ex}\|_{L^2_{\Omega \times \tau}}} \quad (15)$$

reste constante ( $e = 15e - 2$ ) quel que soit le nombre de couples pris en compte.

Le temps de calcul d'une simulation non-linéaire est environ 30% plus importante que dans le cas linéaire, ce qui reste acceptable.

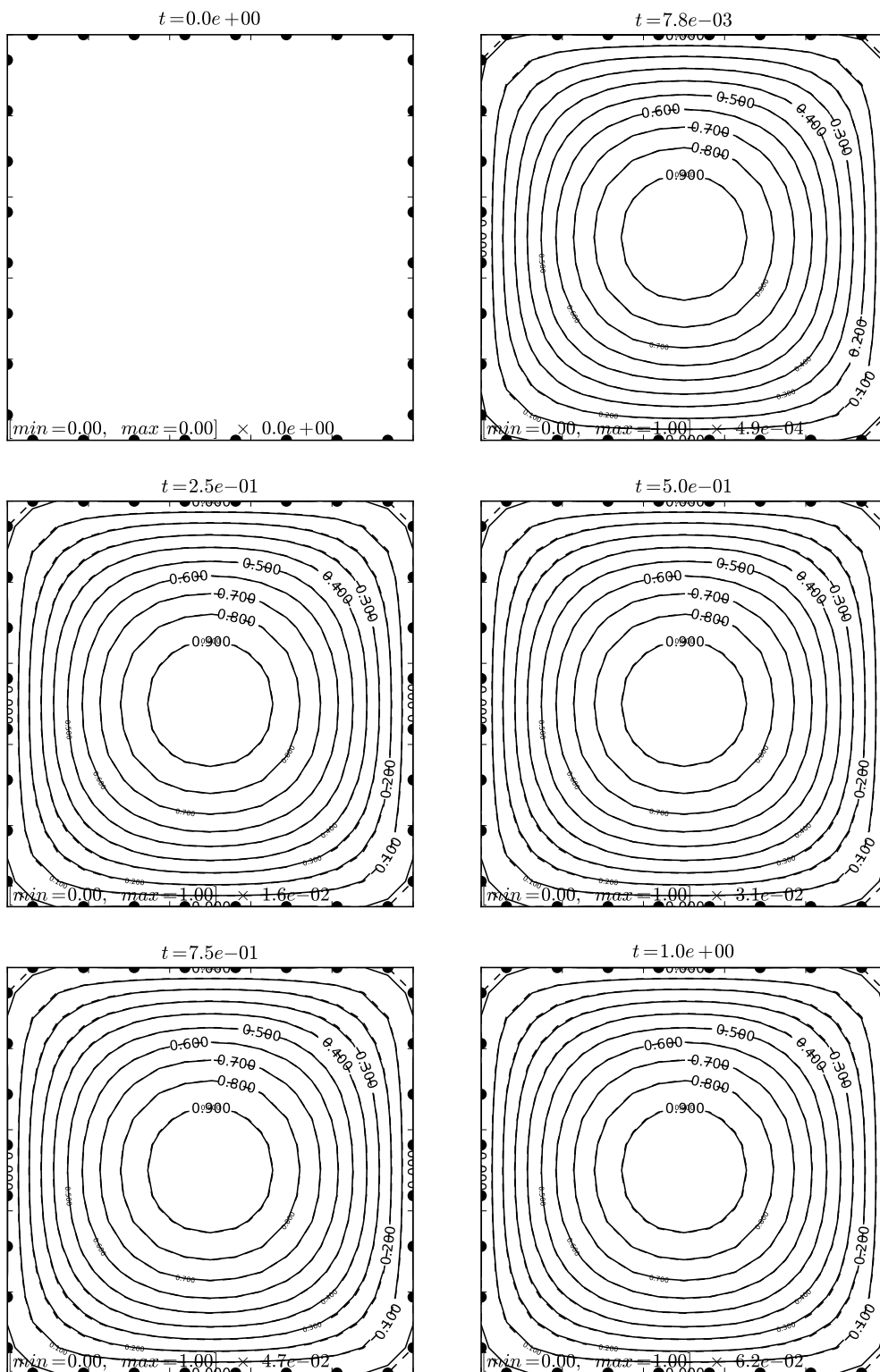


FIGURE 1 – Températures exactes et calculées

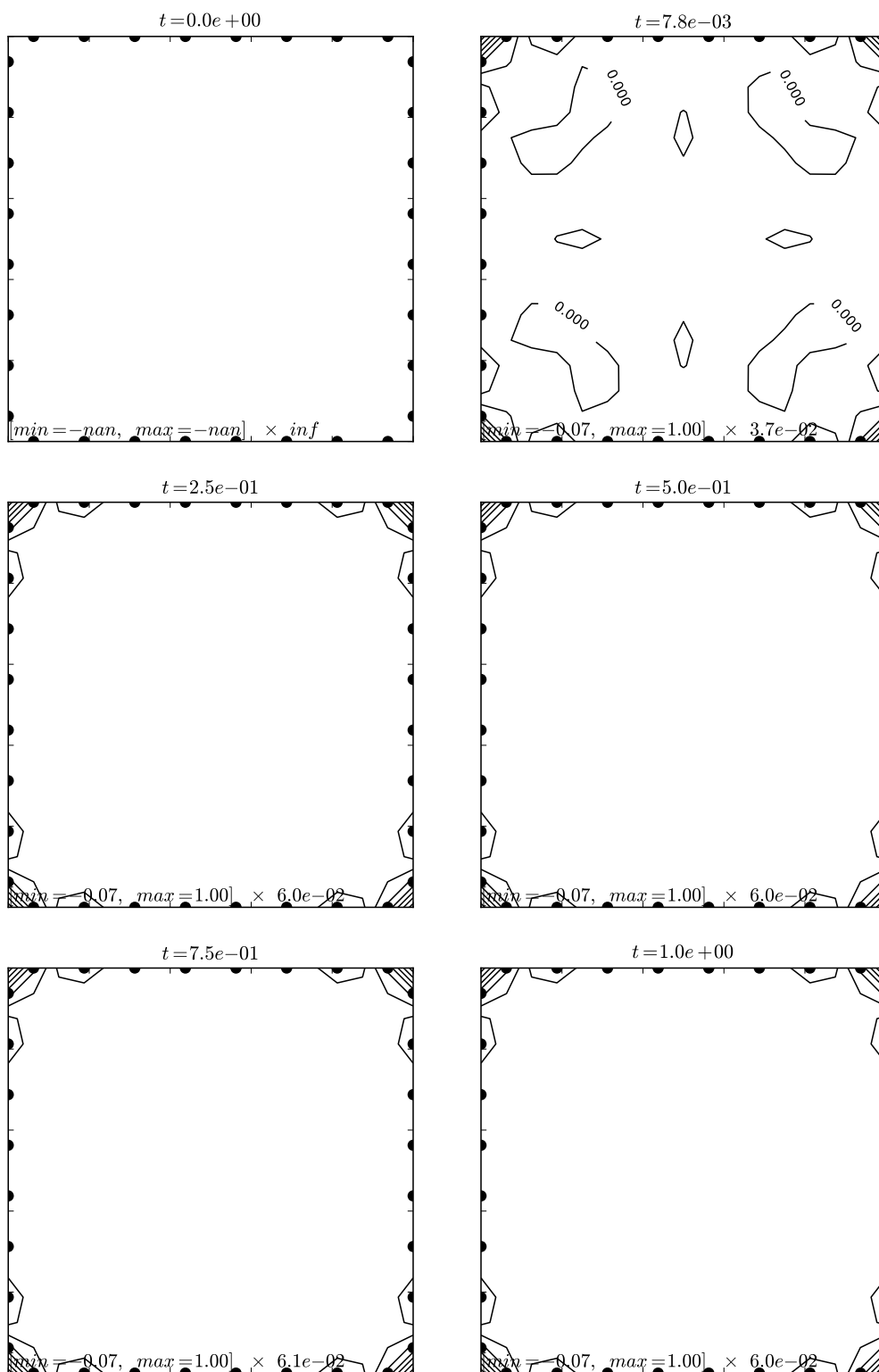


FIGURE 2 – Erreur absolue de la température

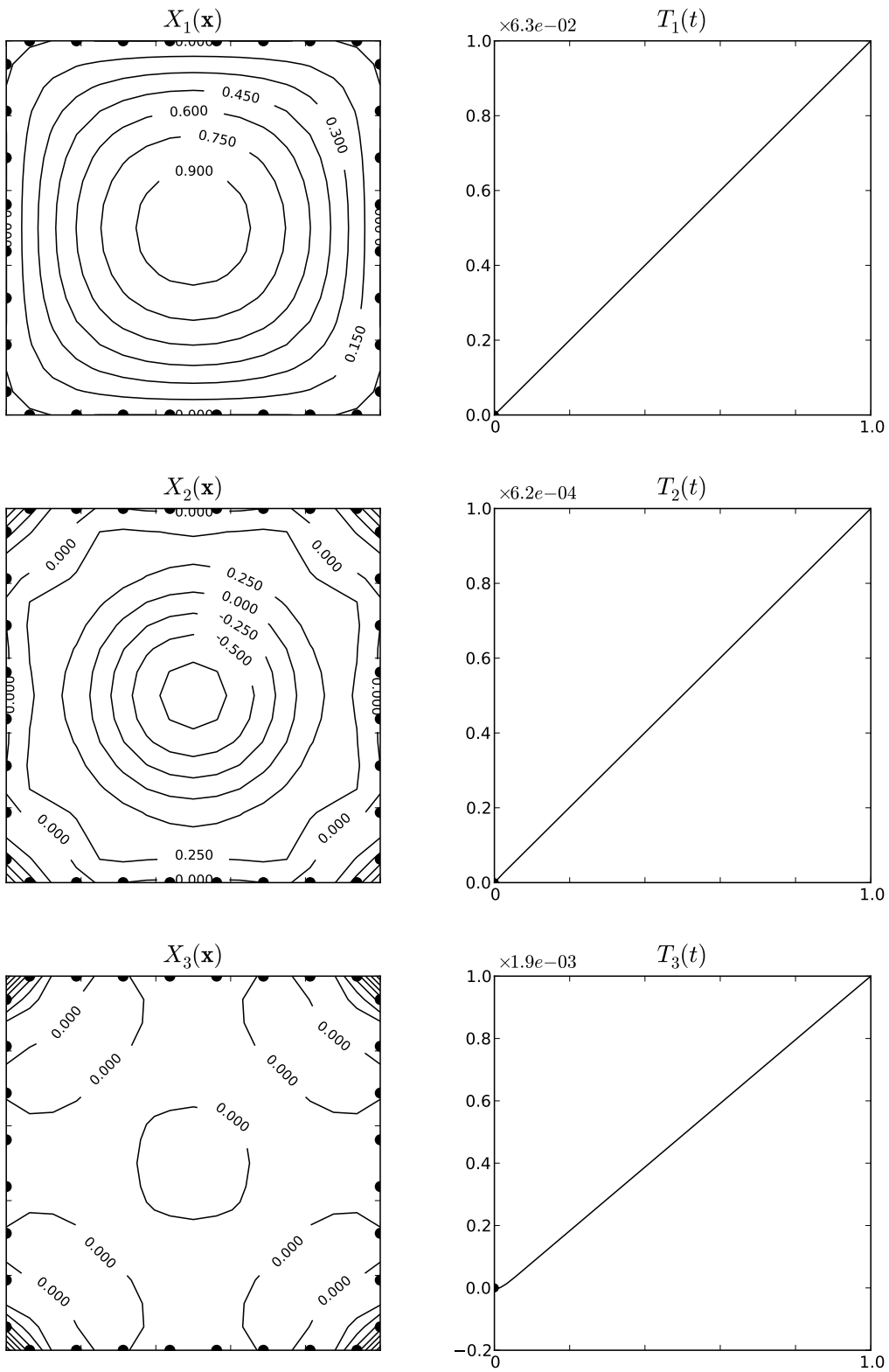


FIGURE 3 – Couples  $(X^\alpha, T^\alpha)_{\alpha=1,2,3}$

## 4 Conclusion

L'algorithme PGD-BEM a été adapté avec succès au cas de la résolution de l'équation de la chaleur non-linéaire, tout en conservant des propriétés voisines en terme de complexité.

L'avantage principal de cette approche est de permettre de résoudre avec la méthode des éléments de frontière l'équation de la chaleur non-linéaire en utilisant uniquement le noyau de Green de l'équation de Poisson.

Notre travail actuel porte d'une part sur l'optimisation de l'algorithme, mais également sur une nouvelle version intégrant les avantages de la transformée de Kirchhoff.

### 4.1 Références bibliographiques

#### Références

- [1] G. Bonithon, P. Joyot, F. Chinesta, and P. Villon. *Non-incremental boundary element discretization of parabolic models based on the use of the proper generalized decompositions*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 35 :2–17, August 2011.
- [2] T. Goto and M. Suzuki. *A boundary integral equation method for nonlinear heat conduction problems with temperature-dependent material properties*. Int. J. Heat Mass Transfer., 39(4) :823–830, 1996.
- [3] S. Liao. *An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations*. Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation, 15 :2003–2016, 2010.
- [4] P. Ladevèze, J. Ch Passieux, and D. Neron. *The latin multiscale computational method and the proper orthogonal decomposition*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 199(21-22) :1287–1296, 2010.
- [5] F. Chinesta, A. Ammar, A. Falco, and M. Laso. *On the reduction of stochastic kinetic theory models of complex fluids*. Modeling Simulation in Materials Science Engineering, 15 :639–652, 2007.
- [6] A. Nouy. *A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(23-24) :1603–1626, 2010.